

В.У. Ігнаткін, В.С. Дудніков, Т.Р. Лучишин, С.В. Алексеєнко,
О.П. Юшкевич, Т.П. Карпова, Т.С. Хохлова, Ю.С. Хомош, В.А. Тіхонов
**АЛЬТЕРНАТИВА МЕТОДАМ СЕРЕДНІХ ТА НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ,
ЯКІ ВИКОРИСТОВУЮТЬСЯ ПРИ ОБРОБЦІ РЕЗУЛЬТАТІВ
НАУКОВО-ТЕХНІЧНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ**

Анотація. Збільшення складності і розмірів систем різної природи вимагає постійного удосконалення моделювання і перевірки отриманих результатів шляхом експерименту. Чітко провести кожний експеримент, об'єктивно оцінити відомості про досліджуваний процес і поширити матеріал, отриманий в одному дослідженні, на серію інших досліджень можна тільки при правильній їхній постановці й обробці. На основі експериментальних даних підбирають алгебраїчні вирази, які називають емпіричними формулами, що використовують якщо аналітичний вираз деякої функції складній, або не існує на даному етапі опису об'єкту, системи або явища. При підборі емпіричних формул широко використовують поліноми вигляду: $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_nx^n$, якими можна апроксимувати будь-які результати вимірів, якщо вони виражаються безперервними функціями. Особливо цінним є те, що навіть при невідомому точному виразі рішення (поліному) можна визначити значення коефіцієнтів A_n за допомогою методів середніх й найменших квадратів. Але у методі найменших квадратів спостерігається зсув оцінок при збільшенні шумів у знайдених даних так як сказується вплив шумів попередніх етапів обробки інформації. Тому для процедур обробки інформації у реальному масштабі часу пропонується операція псевдозвороту, яка виконується за допомогою рекурентних формул. Ця процедура є процедурою послідовного оновлення (зі зсувом) по стовбцям матриці заданих розмірів та і псевдозвороту на кожному кроці зміни інформації. Цей підхід є прямим та використовує переваги, властиві методу облямівки.

При псевдозвороті мається можливість контролювати правильність обчислень на кожному кроці, використовуючи умови Пенроуза. Необхідність псевдозвороту може виникнути при оптимізації, прогнозуванні тих чи інших параметрів та характеристик систем різного призначення, в різноманітних задачах лінійної алгебри, статистики, представленні структури одержаних рішень, зрозуміти зміст некоректності рішення, що виникає, в сенсі Адомара Тихонова і побачити шляхи регуляризації таких рішень.

Ключові слова: метод середніх і найменших квадратів; емпіричні формули; псевдозворот; експериментальні дані; апроксимуючі поліноми.

Постановка задачі. Узагальнити та обґрунтувати недоліки визначення коефіцієнтів апроксимуючих поліномів для будь-яких вимірів і безперервних функцій, зокрема для методів середніх і найменших квадратів, а також сформулювати альтернативу цим методам для реального масштабу часу, при цьому не повинна накопичуватися похибка від експерименту до експерименту.

Викладення основного матеріалу. При підборі емпіричних формул широко використовуються поліноми

$$y=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\dots+A_nx^n, \quad (1)$$

де $A_0, A_1, \dots, A_n$ — сталі коефіцієнти. Поліномами можна апроксимувати будь-які результати вимірів, якщо вони виражаються безперервними функціями. Особливо цінним є те, що навіть при невідомому точному виразі функції (1) можна визначити значення коефіцієнтів A . Для визначення коефіцієнтів застосовують методи середніх і найменших квадратів [1-5].

Метод середніх квадратів заснований на наступному положенні. По експериментальних точках можна побудувати декілька плавних кривих. Найкращою буде та крива, у якої різниці відхилення виявляються найменшими, тобто $\sum \varepsilon^2 \approx 0$. Порядок розрахунку коефіцієнтів полінома зводиться до наступного. Визначається число членів ряду (1), що звичайно приймають не більш 3...4. У прийняте вираження послідовно підставляють координати x і y декількох (m) експериментальних точок і одержують систему з m рівнянь. Кожне рівняння дорівнює відповідному відхиленню:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1x_1 + A_2x_1^2 + \dots + A_nx_1^n - y_1 &= \varepsilon_1; \\ A_0 + A_1x_2 + A_2x_2^2 + \dots + A_nx_2^n - y_2 &= \varepsilon_2; \\ A_0 + A_1x_m + A_2x_m^2 + \dots + A_nx_m^n - y_m &= \varepsilon_m. \end{aligned} \quad (2)$$

Число точок, тобто число рівнянь, повинне бути не менше числа коефіцієнтів A , що дозволить їх обчислити шляхом рішення системи (2).

Розбивають систему початкових рівнянь (2) послідовно зверху вниз на групи, число яких повинно бути дорівнює кількості коефіцієнтів A . У кожній групі складають рівняння й одержують нову систему рівнянь, рівну кількості груп (звичайно 2...3). Вирішуючи систему, обчислюють коефіцієнти A .

Метод середніх квадратів має високу точність, якщо число крапок досить велике (не менш 3...4). Однак ступінь точності можна підвищити, якщо початкові умови згрупувати по 2...3 варіанта й обчислити для кожного варіанта емпіричну формулу. Перевага варто віддати тій формулі, у якій $\sum \varepsilon^2 = \min$. Нехай, наприклад, виконано сім вимірів:

4	5	6	7	8	9	10
10,2	6,7	4,8	3,6	2,7	2,1	1,7

Для підбора емпіричної формули можна вибрати поліном

$$y=A_0+A_1 x+A_2x^2$$

Шляхом підстановки в це рівняння значень вимірів систему початкових рівнянь можна розділити на три групи 1...2, 3, 4, 5, .. 7 у виді:

$$1. A_0+4A_1+16A_2-10,2= \varepsilon_1$$

$$2. A_0+5A_1+25A_2-6,7= \varepsilon_2;$$

$$3. A_0+6A_1+36A_2-4,8= \varepsilon_3;$$

$$4. A_0+7A_1+49A_2-3,6= \varepsilon_4;$$

$$5. A_0+8A_1+64A_2-2,7= \varepsilon_5;$$

$$6. A_0+9A_1+81A_2-2,1= \varepsilon_6;$$

$$7. A_0+10A_1+100A_2-1,7= \varepsilon_7;$$

Додавання рівнянь у кожній підгрупі дає

$$\text{I-я група } 2A_0+9A_1+4A_2= 16,9;$$

$$\text{II-я група } 2A_0+13A_1+85A_2=8,4;$$

$$\text{III-я група } 3A_0+27A_1+245A_2=6,5.$$

Визначення з цих виражень коефіцієнтів A_0 , A_1 і A_2 приводить до емпіричної формули $ax= 26,168 - 5,2168x + 0,2811 x^2$.

Метод середніх квадратів може бути застосований для різних кривих після їхнього вирівнювання. Нехай, наприклад, мається вісім вимірів:

3	6	9	12	15	18	21	24
57,6	41,9	31,0	22,7	16,6	12,2	8,9	6,5

Аналіз кривої в системі прямокутних координат дає можливість застосувати формулу:

$$y=ae^{-bx}.$$

Зробимо вирівнювання шляхом заміни перемінних $Y=\lg y$,

$X=x/2,303$. Тоді $Y=A+BX$, де $A=\lg a$, $Y = b$.

Тому що необхідно визначити два параметри, те усі виміри поділяються на двох груп по чотирьох вимірах. Це приводить до рівнянь:

$$1,7601 = A + \frac{3}{2,303} B ; 1,2201 = A + \frac{15}{2,303} B ;$$

$$1,6222 = A + \frac{6}{2,303} B ; 1,0864 = A + \frac{18}{2,303} B ;$$

$$1,4914 = A + \frac{9}{2,303} B ; 0,9494 = A + \frac{21}{2,303} B ;$$

$$1,3560 = A + \frac{12}{2,303} B ; 0,8129 = A + \frac{24}{2,303} B ;$$

$$6,2300 = 4A + \frac{30}{2,303} B ; 4,0688 = 4A + \frac{78}{2,303} B .$$

Після підсумовування по групах можна одержати систему двох рівнянь із двома невідомими А і В, рішення яких дає: $A = 1,8952$; $a = 78,56$; $Y = -0,1037$; $b = -0,1037$. Остаточна $B = 78,56 e^{-0,1037x}$

Гарні результати при визначенні параметрів рівняння дає використання методу найменших квадратів. Як видно суть цього методу полягає в тому, що якщо усі виміри функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$ зроблені з однаковою точністю і розподілені величини помилок виміру відповідають нормальному закону, то параметри досліджуваного рівняння визначається з умови, при якому сума квадратів відхилень обмірюваних значень від розрахункових приймає найменше значення. Для існування невідомих параметрів ($a_1, a_2, \dots, a_n$) необхідно вирішити систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x_1 + a_2 u_1 + \dots + a_n z_1 ; \\ y_2 &= a_1 x_2 + a_2 u_2 + \dots + a_n z_2 ; \\ y_n &= a_1 x_m + a_2 u_m + \dots + a_n z_m , \end{aligned} \quad (3)$$

де $y_1, \dots, y_n$ - приватні значення обмірюваних величин функції b ; x, u, z — змінні величини.

Цю систему приводять до системи лінійних рівнянь шляхом множення кожного рівняння відповідно на $x_1 \dots x_m$ і наступного їхнього додавання, потім множення відповідно на $i_1 \dots i_m$ рішення якої і дає шукані коефіцієнти.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m yx &= a_1 \sum_{i=1}^m xx + a_2 \sum_{i=1}^m xu + \dots + a_n \sum_{i=1}^m xz ; \\ \sum_{i=1}^m yu &= a_1 \sum_{i=1}^m ux + a_2 \sum_{i=1}^m uu + \dots + a_n \sum_{i=1}^m uz ; \\ \sum_{i=1}^m yz &= a_1 \sum_{i=1}^m zx + a_2 \sum_{i=1}^m zu + \dots + a_n \sum_{i=1}^m zz , \end{aligned} \quad (4)$$

Нехай, наприклад, необхідно визначити коефіцієнти a_1 і a_2 у рівнянні $k_p = a_1 + a_2 u$. Тому що потрібно визначити два параметри, то система рівнянь може бути представлена у виді двох рівнянь $y = a_1 x_1 + a_2 u_2$ і $y u_2 = a_2 x_1 u_2 + a_2 u_2^2$, де $v = k_p$; $x_1 = 1$; $x_2 = u$.

Тому що рівняння лінійні, можна обмежитися чотирма серіями дослідів. Якщо вони зведені в табл. 1, то систему нормальних рівнянь можна записати у виді $5,48 = 4a_1 + 1100a_2$; $1519 = 1100a_1 + 307350a_2$, рішення яких дає $a_1 = 0,78$; $a_2 = 0,0025$. Отже, емпірична формула одержить вид $k_p = 0,78 + 0,0025u$.

Таблиця 1

Результати дослідів

$u_1=u$	$y=k_p$	u^2	yu
230	1,26	52900	289,8
255	1,32	65025	336,6
295	1,40	87025	413,0
320	1,50	102400	480,0
1100	5,48	307350	1519,4

Метод найменших квадратів забезпечує досить надійні результати. При цьому ступінь точності коефіцієнтів A у (1) повинна бути такою, щоб обчислені значення b збігалися зі значеннями у вихідних табличних значеннях. Це вимагає обчислювати значення A тем точніше, чим вище індекс A . тобто A_1 повинний бути точніше (більше число десяткових знаків), чим A_2 ; A_{23} — точніше, ніж A_2 , і т.д. Для обчислення коефіцієнтів A методом найменших квадратів необхідно користатися типовими програмами для ЕОМ.

Недоліком методу найменших квадратів є зміщення оцінок зі збільшенням шуму наступних вихідних даних, які надходять, що впливає на наступні етапи обробки інформації. Тому для процедур обробки інформації в реальному масштабі часу запропоновано операцію псевдозвороту. Алгоритм псевдозвороту реалізується з допомогою нижче поданих рекурентних формул, тобто, процедура послідовної обробки інформації фактично представляється як процедура послідовного оновлення (зі зсувом) по стовпчиках матриці заданих розмірів та її псевдозвороту на кожному кроці зміни інформації. Пропонований алгоритм (метод) є прямим і використовує переваги, властиві методу оздоблення. При псевдозвороті даним методом є можливість контролювати правильність обчислень на кожному кроці, використовуючи умови Пенроуза [7-11]. Цей метод особливо ефективний у процедурах обробки інформації у реальному масштабі часу і суттєво зменшується запізнення порівняно з методом найменших квадратів.

Алгоритм псевдозвороту матриць у завданнях обробки інформації при моделюванні та управлінні об'єктами різної природи. Необхідність псевдозвороту виникає у найрізноманітніших прикладних завданнях, наприклад, при вирішенні як самої проблеми автоматизації системи метрологічного обслуговування засобів вимірювань (ЗВ) промислового підприємства, так і в ході подальшого її функціонування. Така необхідність, наприклад, може виникнути під час оптимізації чи прогнозування тих чи інших параметрів чи характеристик системи метрологічного обслуговування ЗВ промислового підприємства. Незважаючи на те, що проблема псевдозвороту матриць була сформульована ще в 20-х р. минулого століття, інтерес до неї виник порівняно нещодавно [6]. І не випадково: виявилось, що застосування псевдозворотних матриць у найрізноманітніших задачах лінійної алгебри і статистики, що виникають в самих різних додатках, в тому числі при автоматизації метрологічних служб, можна отримати узагальнення класичних рішень, візуалізувати структуру отриманих рішень, зрозуміти сенс часто виникає некоректності рішення в сенсі Адамара-Тихонова, і побачити шляхи регуляризації таких рішень. література, в якій описується значна кількість методів псевдоінверсії реальної матриці довільних розмірів. Особливий інтерес викликають прикладні завдання, призначені для використання комп'ютерів, являють собою прямі псевдоінверсійні методи, такі як метод Гревілья. Ця програма описує метод прямого псевдорозвороту, заснований, на відміну від інших відомих методів, на використанні допоміжної матриці, для якої відомий її псевдозворот. Метод псевдорозвороту полягає в послідовному витісненні допоміжної матриці на скінченну кількість кроків, рівне числу стовпців або рядків (для визначеності в подальшому - стовпців).

При викладенні рекурентного алгоритму псевдорозвороту прийняти наступні позначення: 1) великою літерою позначено прізвище матриці, наприклад, матриці X, Z, а також вектори-рядки невідомих параметрів, відповідні елементи котрих формуються за визначеними законами; 2) малими літерами позначені відповідні стовпці або рядки матриць.

Рекурентний алгоритм має наступний вигляд:

$$A_i^+ = \varphi \begin{cases} S_i^+ - (\lambda - S_i^+ a_i) \lambda' S_i^+ I (1 - a_i' S_i^+ a_i), \text{ якщо } (\lambda - S_i^+ a_i \neq 0) \\ S_i^+ - S_i^+ S_i^+ S_i^+ a_i \lambda' S_i^+ I a_i' S_i^+ S_i^+ S_i^+ S_i^+ a_i - \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (5)$$

$$A_i^+ = \varphi \begin{cases} S_i^+ - (\lambda - S_i^+ a_i) \lambda' S_i^+ I (1 - a_i' S_i^+ a_i), \text{ якщо } (\lambda - S_i^+ a_i \neq 0) \\ S_i^+ - S_i^+ S_i^+ S_i^+ a_i \lambda' S_i^+ I a_i' S_i^+ S_i^+ S_i^+ S_i^+ a_i - \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (6)$$

$$b_{i+1} = \begin{cases} (I - A_i A_i^+) x_i I x_i' (I - A_i A_i^+) x_i, \text{ якщо } o(I - A_i A_i^+) x \neq 0 \\ A_i^+ A_i^+ x_i I (1 + x_i' A_i^+ A_i^+ x_i) - \text{в інших випадках;} \end{cases} \quad (7)$$

$$B_{i+1} = A_i^+ - A_i^+ x_i b_{i+1}' \quad i=0,1,2,\dots, m-1,$$

де A_i - матриця розмірів $[n \times (m-1)]$, отримано шляхом відкидання першого стовпця a_i в допоміжній матриці S_i ; $|^+$ — операція псевдозвороту; $|'$ — операція транспонування, ϕ — оператор відкидання верхнього нульового рядку; $\lambda'' - m''$ — розмірний вектор, перший елемент якого дорівнює одиниці, а інші елементи дорівнюють нулю; I — одинична матриця; b_{i+1}' - нижній рядок матриці S_{i+1}^+ розміру $(1 \times n)$; x_i - це стовпець "i" заданої матриці, яка підлягає псевдозвороту, x_i ; B_{i+1} - матриця розміру $[(m-1) \times n]$, яка складає спільно з рядком b_{i+1}' матрицю S_{i+1}^+ .

Використання рекурентних співвідношень дозволяє за m кроків замінити допоміжну матрицю S_0 розміру $(n \times m)$ на задану матрицю X однакового розміру і визначити її псевдозвортню. Процес починається з відкидання першого стовпця a_0 допоміжної матриці S_0 і доповнення її праворуч першим стовпцем x_1 матриці X , яка підлягає псевдозвороту. Застосування рекурентних формул (5-7) до матриці, яка засвоєна таким чином, дозволяє легко обчислити її псевдозвортню і для наступного кроку використовувати її вже як допоміжну з відомою псевдозвортною. Послідовне витіснення і використання рекурентних формул (5-7) дозволяє за m кроків повністю замінити початкову допоміжну матрицю S_0 на задану X і отримати її псевдозвортню..

Необхідність априорі мати допоміжну матрицю відповідного розміру з відомою псевдозвортною для реалізації описуваного методу псевдозвороту не є "обтяжливою". Зокрема, при необхідності псевдозвороту квадратної матриці X (виродженої, погано обумовленої, невивродженої або добре обумовленої невивродженої) в якості допоміжної матриці S_0 , можна використати одиничну матрицю, для якої псевдозвортна буде одиничною. При необхідності псевдозвороту прямокутної матриці X , в загальному випадку розміру $(n \times m)$, наступна методика може бути використана для формування допоміжної матриці S_0 розміром $(n \times m)$ і визначення псевдозвортної матриці. Потрібно взяти одиничну матрицю розміру $(n \times m)$ (для визначеності вважаємо, що $n > m$) і від неї відкинути праворуч або зліва $(n-m)$ стовпців. В результаті буде отримано прямокутну матрицю розміру $(n \times m)$, для якої, як легко переконатися, транспонована до неї матриця буде її псевдооборотною,

оскільки задовольнятиме всім умовам Пенроуза. Отже, отримувану таким прийомом матрицю можна використовувати як допоміжну в описаній в цьому додатку методі псевдозвороту.

Метод псевдозвороту за допомогою допоміжної матриці може бути використаний у випадках, коли математична модель досліджуваної системи або процесу, що потікає в ній, може бути приведена до лінійної моделі та представлена у вигляді наступного лінійного рівняння:

$$GX=Z, \quad (8)$$

де: G – вектор рядок невідомих параметрів розміру $(1 \times n)$; X і Z матриці розмірів $(n \times m)$ і $(1 \times m)$, відповідні елементи яких формуються за певними законами, що визначаються типом і сутністю конкретної задачі. Наприклад, під час проведення оптимізації параметрів системи метрологічного обслуговування складних засобів вимірювальної техніки (ЗВТ) промислового підприємства виникає необхідність розв'язання рівняння типу (8)

Однак слід мати на увазі, що описаний метод псевдозвороту за допомогою допоміжної матриці найбільш ефективний в порівнянні з іншими методами псевдозвороту в процедурах обробки інформації в реальному масштабі часу або в масштабі часу, близькому до реального, особливо коли потік даних утворює тимчасові послідовності. У цьому випадку обробка інформації послідовним способом у темпі її надходження забезпечує відомі переваги: по-перше, дозволяє не запам'ятовувати весь обсяг інформації і отримувати цікаві оцінки досліджуваних процесів у міру надходження даних, а по-друге, значно підвищує оперативність синтезованих алгоритмів, що використовуються в автоматизованих системах управління метрологічним обслуговуванням ЗВТ промислового підприємства, та суттєво знижує потрібний машинний час та пам'ять ЕОМ.

Для завдань цього класу математична модель (8) стає залежною від часу, тобто, стає, кажучи мовою теорії управління, нестационарною і набуває вигляду:

$$G_i X_i = Z_i \quad (9)$$

де X_i , Z_i – поточні значення параметрів матриці розміром $(n \times m)$ і $(1 \times m)$ відповідно, формуються з потоків інформації, що надходять, за певними законами; G_i – поточна вектор-рядок оцінюваних параметрів; i – поточний індекс часу, що підкреслює зміну інформації у матрицях X_i та Z_i .

Якщо в матриці X_i зміну інформації здійснювати по стовпцях (зліва направо) шляхом відкидання першого стовпця a_i (застаріла інформація) і додаванням до частини A_l , що залишилася, справа нового стовпця x (знову надійшла інформація), то така постановка дозволяє природним чином для вирішення рівняння (5) застосувати метод псевдозвороту за допомогою допоміжної матриці, який використовує формули (5) ... (7). При цьому слід зазначити, що принцип зміни інформації в матриці Z_i на відміну від матриці X_i може бути довільним.

Наприклад, його можна реалізувати шляхом поелементної заміни (зліва направо) шляхом відкидання першого елемента Z_i (застаріла інформація) і додавання до частини матриці Z_i , що залишилася, праворуч нового елемента Z_{m+i-1} (ново надійшла інформація).

Отже, поточна оцінка вектора рядка $\hat{G}_i$ параметрів моделі (9) визначається наступним рекурентним співвідношенням:

$$\hat{G}_i = Z_i X_i^+, \quad (10)$$

де операція псевдозвороту виконується за рекурентними формулами (5)... (7), тобто процедура послідовної обробки інформації фактично представлена як процедура послідовного оновлення (зі зміщенням) над колонками матриці заданих розмірів і її псевдорозвороту на кожному кроці зміни інформації.

Описаний метод є прямим і використовує переваги, властиві методу оздоблення. При псевдоконвертації за допомогою цього методу можна контролювати правильність розрахунків на кожному кроці за допомогою умов Пенроуза. Як зазначалося, цей метод особливо ефективний в процедурах обробки інформації в режимі реального часу. Це значно скорочує відставання в порівнянні з відомим і найбільш часто використовуваним послідовним методом найменших квадратів. Алгоритм забезпечує відсутність зміщення оцінок зі збільшенням шуму в даних, що надходять, так як вплив шуму попередніх етапів обробки не впливає і є можливість ефективно придушити випадкові шумові компоненти в оброблюваних послідовностях шляхом забезпечення надмірності ($m \gg n$).

Висновки:

1. Розглянуті та обгрунтовані недоліки визначення коефіцієнтів апроксимуючих поліномів для будь-яких вимірів і безперервних функцій, зокрема недоліки для методів середніх і найменших квадратів.

2. Для процедур обробки інформації у реальному масштабі часу запропоновано операцію псевдозвороту, яка виконується за допомогою рекурентних

формул і дозволяє послідовно оновлювати (зі зсувом) по стовбцям матриці заданих розмірів та її псевдозвороту на кожному кроці змін інформації.

3. Запропонована процедура може використовуватися при оптимізації та прогнозуванні параметрів і характеристик систем різного призначення, а також при вирішенні задач лінійної алгебри та статистики.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шершень Д.А. Метод наименьших модулей. Магістерська дисертація.- Херсон: ХДУ, 2020. – 86 с.
2. Метод наименьших квадратов. Математическая статистика та обробка геологічних даних. С. 269-326 [Електронний ресурс]. Режим доступу: www.geo.univ.giev.ua. – Заголовок з екрану.
3. Математическая статистика: навчальний посібник для студентів вузів/ В.К. Гаркавий, В.В. Ярова. – К.: Професіонал, 2004. -379 с.
4. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навчальний посібник/ В.В. Булдігін, І.В. Алексеева, В.О. Гайдей та інші; за ред. проф. В.В. Булдігіна. – К.: ТВ і МС, 2011. – 224 с.
5. Чарін В.С. Лінійна алгебра. – К.: Техніка, 2018. – 416 с.
6. Безущак О.О. Навчальний посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичних факультетів/О.О. Безущак, О.Г. Ганюшкін, Є.А. Кочубінська. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2019. – 224 с
7. Ладієва Л.Р. Оптимізація технологічних процесів. Навчальний посібник. – К.: НМЦ ВО, 2013.- 206 с.
8. Цупак А.А. Псевдообратные матрицы. – Пенза, изд-во Пензенского государственного университета, 2008. – 29 с.
9. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.:Наука, 1977. – 224 с.
10. Роджер Пенроуз. Путь к реальности или Законы управляющие Вселенной. Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика» (РХД), 2007. – 912 с. (перевод с англ.).
11. Стивен Хокинг, Роджер Пенроуз. Природа пространства и времени. – Издательство АСТ, 2018. – 171 с.
12. ILAC-G17:2002. Introducing the Concept of Uncertainty of Measurement in Testing in Association with the Application of the Standard ISO/IEC 17025 (Вступ до концепції невизначеності вимірювань при випробуваннях з урахуванням застосування стандарту ISO/IEC 17025).

13. EA-04/02:1999. Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration (Відображення невизначеності вимірювань при калібруванні).
14. EA-04/16:2003. EA guidelines on the expression of uncertainty in quantitative testing (ЄА настанови щодо відображення невизначеності при кількісних випробуваннях).
15. EURACHEM/CITAC Guide QUAM-P1:2000. Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement (Розрахунок невизначеності при аналітичних вимірюваннях).
16. RACHEM/CITAC Guide, Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement, Second Edition. Laboratory of the Government Chemist, London (2000). ISBN 0-948926-15-5.
17. EURACHEM/CITAC Guide, Measurement uncertainty arising from sampling: A guide to methods and approaches. EURACHEM, (2007). Available from <http://www.eurachem.org>.

REFERENCES

1. Shershen D.A. The method of least modules. Master's thesis. - Kherson: KhSU, 2020. - 86 p.
2. The method of least squares. Mathematical statistics and geological data processing. P. 269-326 [Electronic resource]. Access mode: www.geo.univ.riev.ua. – Title from the screen.
3. Mathematical statistics: a study guide for university students/ V.K. Harkavy, V.V. Yarova. - K.: Professional, 2004. -379 p.
4. Linear algebra and analytic geometry: textbook/ V.V. Buldygin, I.V. Alekseeva, V.O. Gaidei and others; under the editorship Prof. V.V. Buldighina. - K.: TV and MS, 2011. - 224 p.
5. Charin V.S. Linear algebra. - K.: Technika, 2018. - 416 p.
6. Bezuschak O.O. Study guide on linear algebra for students of mechanical and mathematical faculties/O.O. Bezushchak, O.H. Hanyushkin, E.A. Kochubinska. - K.: VOC "Kyiv University", 2019. - 224 p.
7. Ladiyeva L.R. Optimization of technological processes. Tutorial. - K.: NMC VO, 2013. - 206 p.
8. Tsupak A.A. Pseudo-inverse matrices. - Penza, publishing house of Penza State University, 2008. - 29 p.
9. Albert A. Regression, pseudoinversion and recurrent estimation. - M.: Nauka, 1977. - 224 p.

10. Roger Penrose. The way to reality or Laws governing the Universe. Publishing house "Regular and Chaotic Dynamics" (RHD), 2007. - 912 p. (translation from English).
11. Stephen Hawking, Roger Penrose. The nature of space and time. – AST Publishing House, 2018. – 171 p.
12. ILAC-G17:2002. Introducing the Concept of Uncertainty of Measurement in Testing in Association with the Application of the Standard ISO/IEC 17025.
13. EA-04/02:1999. Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration.
14. EA-04/16:2003. EA guidelines on the expression of uncertainty in quantitative testing.
15. EURACHEM/CITAC Guide QUAM-P1:2000. Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement (Calculation of uncertainty in analytical measurements).
16. RACHEM/CITAC Guide, Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement, Second Edition. Laboratory of the Government Chemist, London (2000). ISBN 0-948926-15-5.
17. EURACHEM/CITAC Guide, Measurement uncertainty arising from sampling: A guide to methods and approaches. EURACHEM, (2007). Available from <http://www.eurachem.org>.

Received 02.05.2023.

Accepted 04.05.2023.

***Alternative to mean and least squares methods used in processing
the results of scientific and technical experiments***

Increasing the complexity and size of systems of various nature requires constant improvement of modeling and verification of the obtained results by experiment. It is possible to clearly conduct each experiment, objectively evaluate the summaries of the researched process, and spread the material obtained in one study to a series of other studies only if they are correctly set up and processed. On the basis of experimental data, algebraic expressions are selected, which are called empirical formulas, which are used if the analytical expression of some function is complex or does not exist at this stage of the description of the object, system or phenomenon. When selecting empirical formulas, polynomials of the form: $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_nx^n$ are widely used, which can be used to approximate any measurement results if they are expressed as continuous functions. It is especially valuable that even if the exact expression of the solution (polynomial) is unknown, it is possible to determine the value of the coefficients A_n using the methods of mean and least squares. But in the method of least squares, there is a shift in estimates when the noise in the data is increased, as it is affected by the noise of the previous stages

of information processing. Therefore, for real-time information processing procedures, a pseudo-reverse operation is proposed, which is performed using recurrent formulas. This procedure is a procedure of successive updating (with a shift) along the columns of the matrix of given sizes and pseudo-reversal at each step of information change. This approach is straightforward and takes advantage of the bounding method. With pseudo-inversion, it is possible to control the correctness of calculations at each step, using Penrose conditions. The need for pseudo-inversion may arise during optimization, forecasting of certain parameters and characteristics of systems of various purposes, in various problems of linear algebra, statistics, presentation of the structure of the obtained solutions, to understand the content of the incorrectness of the resulting solution, in the sense of Adomars-Tikhonov, and to see the ways of regularization of such solutions .

Keywords: method of mean and least squares; empirical formulas; pseudo reversal; experimental data; approximating polynomials.

Ігнаткін Валерій Устинович - доктор технічних наук, професор, професор кафедри автоматизації та комп'ютерно- інтегрованих технологій Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу.

Дудніков Володимир Степанович - кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри механотроніки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Лучишин Тарас Романович - кандидат медичних наук, спеціаліст вищої категорії, заступник директора «Української готельної групи».

Алексєєнко Сергій Вікторович - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри механотроніки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Юшкевич Олег Павлович - кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри механотроніки Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Карпова Тетяна Петрівна - старший викладач кафедри матеріалознавства і термічної обробки металів УДУНТ.

Хохлова Тетяна Станіславівна - кандидат технічних наук, доцент кафедри матеріалознавства і термічної обробки металів УДУНТ.

Хомош Юрій Степанович - кандидат економічних наук, доцент, директор Дрогобицького фахового коледжу нафти та газу.

Тіхонов Василь Андрійович - директор Дніпровського фахового коледжу радіоелектроніки.

Ignatkin Valery Ustinovich - doctor of technical sciences, professor, professor of the department of automation and computer-integrated technologies of the Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas.

Dudnikov Volodymyr Stepanovich - candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mechatronics of Oles Honchar Dnipro National University.

Luchyshyn Taras Romanovich - candidate of medical sciences, specialist of the highest category, deputy director of the "Ukrainian Hotel Group".

Alekseenko Serhii Viktorovich - Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Mechatronics, Dnipro National University named after Oles Honchar.

Yushkevich Oleh Pavlovich - candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the Department of Mechatronics of Dnipro National University named after Oles Honchar.

Karpova Tetyana Petrivna - senior lecturer of the Department of Materials Science and Heat Treatment of Metals, USUNT.

Khokhlova Tetyana Stanislavivna - candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Materials Science and Heat Treatment of Metals at the Ukrainian National University of Science and Technology.

Khomosh Yuriy Stepanovich - candidate of economic sciences, associate professor, director of the Drohobysk Oil and Gas Professional College.

Tikhonov Vasyl Andriyovich - director of the Dnipro Vocational College of Radio Electronics.