«Системні технології» 2 (145) 2023 «System technologies»
DOI 10.34185/1562-9945-2-145-2023-08
УДК 681.32(075.8)

М.І. Твердоступ

ОСОБЛИВІСТЬ РІШЕННЯ ЗАДАЧ МІНІМІЗАЦІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Анотація. Пошук мінімальної форми булевої функції є обов'язковим для побудови логічної схеми цифрового автомату, який проектується. На прикладах мінімізації булевої функції, заданої аналітичним виразом та координатним способом у вигляді діаграми Вейча, підтверджено, що рішенням задачі мінімізації є знаходження не одного випадкового зображення, а множини всіх можливих зображень для забезпечення в подальшому можливості вибору оптимального рішення при побудові цифрового автомату.
Ключові слова: алгоритм Квайна, булева функція, діаграма Вейча, диз'юнкція, конституента одиниці, кон'юнкція, логічна схема, мінімізація, проста імпліканта.

Постановка проблеми. Вивчення студентами дисципліни «Комп'ютерна логіка» передбачає опанування методами мінімізації булевих функцій для побудови найбільш оптимальних логічних схем цифрових автоматів.

Відомо, що довільна булева функція може мати безліч еквівалентних форм[1, 2], тільки досконала диз'юнктивна (або кон'юнктивна) нормальна форма має одне зображення. Результатом мінімізації, взагалі, може бути не одне, а декілька рівнозначних зображень булевої функції з найменшою кількістю змінних і логічних операцій з ними. Проте, можливу множину зображень мінімальної форми булевої функції не завжди враховують при вирішенні задач мінімізації. Досить часто результатом мінімізації приводять тільки одне зображення, вважаючи при цьому, що задача вирішена остаточно. Таке рішенням є далеко неповним, воно в подальшому не дає можливості для вибору оптимальної логічної схеми створюваного цифрового автомату[3] .

Мета дослідження. Метою роботи є обґрунтування необхідності пошуку всіх можливих зображень мінімальної форми булевої функції для забезпечення можливості вибору оптимального рішення.

Основна частина. Поставлене завдання вирішимо шляхом аналізу мінімізації деякої довільної булевої функції *f*, яка має, наприклад, вигляд

$$f = \bar{y}(x\bar{z} + z)\ xy , \qquad (1)$$

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

Канонічна форма початкової функції (1) може бути представлена як диз'юнктивна нормальна форма у вигляді

$$f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{y}z \;\; xy \, . \qquad (2)$$

Проведемо мінімізацію булевої функції (1) аналітичним способом за відомим алгоритмом Квайна[2]. Цей алгоритм вимагає обов'язкової наявності досконалої диз'юнктивної нормальної форми булевої функції, яку треба мінімізувати. Для цього елементарні кон'юнкції зображення (2) перетворимо в конституенти одиниці шляхом доповнення відсутніми аргументами x та z (для другої та третьої кон'юнкцій відповідно), опираючись на такі перетворення

$$\bar{y}z = \bar{y}z(x + \bar{x}) = x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}z, \qquad (3)$$

$$xy = xy(z + \bar{z}) = xyz + xy\bar{z}. \qquad (4)$$

З урахуванням (2), (3) та (4) запишемо зображення початкової функції (1) у вигляді досконалої диз'юнктивної нормальної форми

$$f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz \, . \qquad (5)$$

До (5) застосуємо операцію неповного диз'юнктивного склеювання відповідних конституент, а саме: першої з другою, другої з третьою, третьої з п'ятою, четвертої з п'ятою. Склеювання дає можливість знайти прості імпліканти $\bar{x}\bar{y}$, $\bar{y}z$, xz і xy, які використаємо для створення скороченої диз'юнктивної нормальної форми заданої булевої функції (1)

$$f = \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z + xz + xy \, . \qquad (6)$$

Будуємо імплікантну таблицю Квайна із конституент одиниці і простих імплікант.

Таблиця 1

Імплікантна таблиця до мінімізації функції f

№	Прості імпліканти	Конституенти одиниці функції f				
		xyz	$x\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$xy\bar{z}$
1	xz	X	X			
2	xy	X				X
3	$\bar{y}z$		X	X		
4	$\bar{x}\bar{y}$			X	X	

Із таблиці 1 видно, що прості імпліканти за номерами два і чотири є ядром, бо тільки вони покривають четверту і п'яту конституенти, отже, імпліканти за номерами два і чотири будуть обов'язково входити до складу мінімальної функції. Ці імпліканти також покривають першу і третю конституенти. Для покриття конституенти за номером два можна обрати першу імпліканту. Видно, що набір імплікант за номерами 1, 2 і 4 покриває всі конституенти одиниці функції *f*, представленою у вигляді зображення досконалої диз'юнктивної нормальної форми (5). Цей набір імплікант об'єднуємо операцією диз'юнкції і, в результаті, отримуємо зображення мінімальної (також і тупикової) диз'юнктивної нормальної форми булевої функції f, заданої у вигляді зображенням (1)

$$f = xy + \bar{x}\bar{y} + xz \,. \tag{7}$$

Саме на цьому місці, досить часто, вважають, що задача вже вирішена, бо дійсно знайдена мінімальна форма (7) заданої булевої функції (1). Проте, із подальшого розгляду імплікантної таблиці випливає, що для покриття конституенти за номером два можна замість імпліканти за номером два обрати також просту імпліканту за номером три, що відповідно дає зображення іще однієї мінімальної форми булевої функції *f*

$$f = xy + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z \,. \tag{8}$$

Отже, повним рішенням задачі мінімізації, в цьому випадку, є зображення (7) і (8), саме вони складають множину рівноправних зображень булевої функції, яка в подальшому може бути використана для забезпечення можливості вибору при конструюванні цифрового автомату.

Проведемо мінімізацію булевої функції (1), представленої не аналітичним способом, а іншим, наприклад, координатним у вигляді діаграми Вейча [2], наведеної на рис. 1. В таблиці конституенти одиниці функції *f* розташовані в клітинах з координатами, які відповідають саме тим наборам аргументів і їх значень, кон'юнкція яких дорівнює одиниці. Виконаємо операцію склеювання сусідніх наборів, які відрізняються значеннями тільки одного аргумента конституент. Один із можливих варіантів склеювання конституент показано на рис.1 тонкими лініями овалів, а саме: конституенти першої і другої клітин верхнього рядка склеюємо за змінною z, що формує просту імпліканту xy; конституенту в другій клітині верхнього рядка склеюємо з конституентою другої клітини нижнього рядка за змінною y, це дає імпліканту xz; в нижньому рядку склеюємо конституенти в третій і четвертій клітинах за змінною z і отримуємо імпліканту $\bar{x}\bar{y}$. Імпліканти xy, $\bar{x}\bar{y}$ і xz об'єднуємо операцією диз'юнкції і отримуємо зображення мінімальної форми початкової функції у вигляді

$$f = xy + \bar{x}\bar{y} + xz \,. \tag{9}$$

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

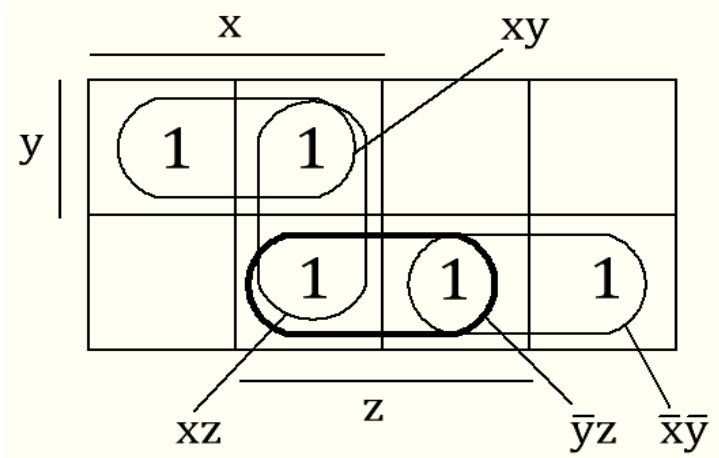

Рисунок 1 – Мінімізація булевої функції *f* заданої у вигляді діаграми Вейча

Другий варіант (наведено потовщеною лінією) склеювання конституент другої і третьої клітин нижнього рядка за змінною x дає можливість отримати просту імпліканту $\bar{y}z$ замість xz і сформувати іще одне зображення мінімальної форми початкової функції *f* у вигляді

$$f = xy + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z. \quad (10)$$

Отримуємо набір рівноправних зображень (9) і (10), який є повним рішенням задачі мінімізації з використанням координатного методу. Набір (9), (10) повністю співпадає з набором зображень (7), (8), раніше отриманих аналітичним способом, що свідчить про правильність рішення задачі мінімізації, метою якої є знаходження множини зображень булевої функції для забезпечення можливості вибору.

В навчальному процесі при опануванні студентами методів мінімізації неврахування наявності множини зображень може привести до спотворення оцінки якості відповіді . Особливо це актуально на вступних іспитах в магістратуру, де, досить часто, перевірка екзаменаційних робіт проводиться порівнянням відповіді абітурієнта з відповіддю із заздалегідь приготовленого переліку, який, на жаль, містить тільки одне зображення булевої функції, що також приводить до спотворення оцінки роботи.

Висновок. Підтверджено, що коректним рішенням задачі мінімізації булевої функції є обов’язкове зображення не однієї можливої функції, а множини зображень всіх можливих мінімальних форм булевої функції.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кочубей О. О., Сопільник О. В. Прикладна теорія цифрових автоматів. Логічні основи. Д.: РВВ ДНУ; Вид-во ДНУ, 2009. – 264 с.
2. Прикладная теория цифровых автоматов / Самофалов К. Г. и др. К. : Вища шк. Головное изд-во, 1987. 375 с.
3. Твердоступ М. Про коректність рішення задач мінімізації булевих функцій при вивченні дисципліни «Комп'ютерна логіка». Перспективні напрямки сучасної електроніки, інформаційних і комп'ютерних систем (MEICS-2022). Тези доп. на VII Всеукр. наук.-практ. конф.: 23-25 листопада 2022 р., м. Дніпро/ Дніпро: ДНУ, 2022. С. 85 – 86.

REFERENCES

1. Kochubey O. O., Sopilnyk O. V. Applied theory of digital automata. Logical foundations. D.: RVV DNU; DNU Publishing House, 2009. - 264 p.
2. Applied theory of digital automata / Samofalov K. G. et al. K.: Vishcha school. Head publishing house, 1987. - 375 p.
3. Tverdostup M. On the correctness of solving problems of minimization of Boolean functions when studying the discipline "Computer logic". Promising directions of modern electronics, information and computer systems (MEICS-2022). Theses add. on VII All-Ukrainian science and practice conference: November 23-25, 2022, Dnipro/ Dnipro: DNU, 2022. P. 85 - 86.

Received 01.03.2023.
Accepted 03.03.2023.

A peculiarity of solving problems of minimization of Boolean functions

Minimization of Boolean functions is mandatory for the construction of logic circuits of digital automata. The result of minimization, in general, can be not one, but several equivalent images of the Boolean function with the smallest number of variables and logical operations with them. However, a possible set of images of the minimal form of a Boolean function is not always are taken i nto account when solving minimization problems. Quite often, the result of minimization results in only one image, while considering that the problem is finally solved. Of course, such a solution is far from complete, it does not provide an opportunity to choose the optimal logic scheme of the digital automaton to be created. The purpose of the work is to justify the need to find all possible representations of the minimal form of the Boolean function. The task was solved by analyzing the minimization of an arbitrary Boolean function. The minimization was carried out analytically according to the Quine algorithm and coordinate using the Veitch diagram. In both cases, matching sets of images of the minimal form of the

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

Boolean function are obtained, regardless of the chosen method of minimization. This testifies to the correctness of the solution to the minimization problem, the purpose of which is to find a set of images of the Boolean function to ensure the possibility of choosing the optimal solution when constructing a logic circuit of a digital automaton. It has been confirmed that the correct solution to the minimization problem is a mandatory image of not one possible function, but a set of images of all possible minimal forms of the Boolean function.

Використанням методів мінімізації за алгоритмами Квайна та діаграм Вейча підтверджена обов'язкова необхідність знаходження множини зображень мінімальної форми булевої функції для забезпечення можливості вибору оптимальної логічної схеми проектованого цифрового автомату.

Твердоступ Микола Іванович – доцент, к.т.н., доцент кафедри електронних обчислювальних машин Дніпровського національного університету ім.Олеся Гончара.

Tverdostup Mykola Ivanovych – Associate Professor of Computer Systems Engineering Department of the Oles Honchar Dnipro National University.