

О.К. Бразалук, Ю.В. Бразалук, О.І. Губін

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ТЕРМОСТАБІЛІЗАЦІЇ НА ОСНОВІ ФАЗОВИХ ПЕРЕХОДІВ

Анотація. Розглядаються системи термостабілізації, основані на використанні прихованої теплоти фазового переходу, для чого в теплозахисний шар внесені включення іншої фази зі спеціально підбраною температурою фазового переходу. Для розрахунку поля температур використовувався метод граничних елементів, а включення іншої фази моделювалися точковими джерелами тепла. Ефективність запропонованого підходу підтверджена результатами чисельних розрахунків.

Ключові слова: термостабілізація, фазовий перехід, метод граничних елементів, точкове джерело тепла, математична модель.

Вступ

Розвиток сучасної техніки та технологій ставить перед теоретичними науками численні нові задачі, але, водночас, ці процеси розвитку змушують з іншого погляду подивитися на вже існуючі і добре відомі проблеми. Прикладом такої принципової зміни погляду на вже давно існуючу проблематику може бути модифікований нині підхід до проектування та використання систем термостабілізації. Традиційно система термостабілізації, тобто система захисту від екстремальних термічних впливів, була спрямована на попередження або надмірного нагріву, або надмірного охолодження виробів. Маючи на меті подолання одного лише різновиду теплового впливу, фактично створювалися системи теплового захисту в розумінні, розвиненому в чудовій серії робіт Ю. В. Полежаєва [1 - 3], і в цьому напрямку були досягнуті вражаючі успіхи, особливо в області теплового захисту апаратів ракетно-космічної техніки, що спускаються (дивиться вже згадувані роботи Ю. В. Полежаєва [1 - 3]). Однак в даний час, в першу чергу, у зв'язку з успіхами біотехнологій, з'явилися принципово інші задачі, в яких потрібно забезпечити тепловий режим виробу, що захищається, в строго визначених і досить близьких між собою температурних межах. Більшість традиційних систем теплового захисту, охолодження та обігріву виявилися погано пристосовані для розв'язання подібних задач.

Серед принципів теплового захисту, що використовуються в сучасній практиці, найефективнішими вважаються технології активного теплового захисту, які ґрунтуються на прихованій теплоті фазових переходів. Цілком природною видається ідея використовувати такий принцип у нових системах термостабілізації у вузькому діапазоні температур. Для цього в теплозахисний шар слід внести включення іншої фази з температурою фазового переходу, близькою до однієї з граничних температур необхідного діапазону.

Загальна постановка задачі та її актуальність

Розглянемо деяку систему, що займає заданий об'єм і потребує підтримки температури в заданому діапазоні, наприклад, сховище біологічних матеріалів. При короточасних небажаних теплових впливах системі може бути нанесена певна шкода, тому дана технологічна система повинна бути доукомплектована системою теплового захисту, а для довготривалих негативних термічних впливів необхідно застосовувати стандартні засоби охолодження/обігріву. Система теплового захисту, укомплектована засобами локального поглинання теплових потоків, працює як система термостабілізації. Обмежена кількість об'єктів іншої фази має бути внесена в теплозахисний шар, при цьому об'єкти іншої фази мають бути досить малі. Задача вибору місць розташування розглянутих включень та їх теплофізичних параметрів є досить нетривіальною і призводить до істотних математичних труднощів. Доцільним буде передування розгляду зазначеної повної задачі розвитку методів розрахунку полів температури в системах термостабілізації на основі фазових переходів, що і є предметом досліджень цієї роботи.

Витоки дослідження авторів

Класична теорія систем теплового захисту вже давно розроблена на досить високому науковому рівні [1 - 3]. Однак описані вище системи термостабілізації все ще знаходяться на стадії розробки і не стали предметом скільки-небудь помітних публікацій. З іншого боку, як згадувалося раніше, геометричні розміри включень іншої фази істотно менше розмірів об'єкта в цілому, що породжує багатомасштабну задачу з усіма труднощами, притаманними розв'язанню таких задач.

Щоб подолати труднощі, пов'язані з багатомасштабним характером задачі, теплові ефекти включень іншої фази моделювалися точковими джерелами тепла, а для розрахунку поля температур застосовувався метод граничних елементів [4 - 7], який легко враховує наявність точкових джерел тепла [8].

Мета роботи

На підставі вищевикладеного досить просто вказати мету роботи як побудову математичної моделі та подальшу розробку методів розрахунку систем термостатування, заснованих на ефекті прихованої теплоти фазових переходів локалізованих включень іншої фази.

Математична модель системи термостабілізації

Розглянемо поле температур у теплозахисному покритті. Вважаємо, що система термостабілізації працює належним чином, а заданий діапазон температур такий, що теплофізичні властивості матеріалу теплозахисного покриття є сталими. Тоді

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \sum_{i=1}^M q_i(\tau) \delta(x, x_i, y, y_i, z, z_i), \quad (1)$$

де τ – час, a – коефіцієнт температуропровідності, x, y, z – просторові декартові координати, δ – функція Дірака, q_i – функції інтенсивності джерел, які докладно розглянемо нижче.

Рівняння (1) має бути доповнене початковими та граничними умовами. Не зменшуючи загальності, можна покласти

$$T(\tau = 0) = T_0, \quad T_{low} < T_0 < T_{up}, \quad (2)$$

де $T_0 = const$; T_{low}, T_{up} – нижня та верхня межі заданого діапазону температур.

Граничні умови на зовнішній поверхні теплозахисного шару можуть бути задані будь-якого з основних традиційних типів - першого, другого або третього роду (заради стислості, наводити їх тут не будемо). На внутрішній поверхні теплозахисного шару повинні бути поставлені умови сполучення з полем температури тіла, що захищається. Для того, щоб поставити такі умови, слід розглянути можливу теплофізичну природу тіла, що захищається. Як правило, об'єкт, що захищається, являє собою складну структуру з дискретною природою, наприклад, електронні пристрої, що використовуються у високотемпературному середовищі, рідше внутрішня структура досить однорідна, наприклад, біологічні матеріали. У будь-якому випадку, розв'язання задачі термостабілізації спільно з задачею тепломасообміну всередині області, що захищається, пов'язане з практично непереборними обчислювальними труднощами. Тому при чисельному аналізі роботи системи термостабілізації доцільно використовувати дві граничні моделі тіла, яке захищається: тверде тіло з деякою ефективною теплопровідністю і інтегральну теплоємність зі сталою за об'ємом темпе-

ратурою, що характерно, наприклад, для перемішуваних рідких або газоподібних середовищ. Для цих двох випадків граничні умови на внутрішній поверхні теплозахисного шару ставляться очевидним чином: умови четвертого роду (умови ідеального теплового контакту) у першому випадку та умова першого роду – у другому. Саме на внутрішній поверхні теплозахисної системи слід ставити цільові умови термостабілізації (до постановки крайової задачі для рівняння (1) ці умови відношення не мають, але вони є критерієм аналізу результатів розв'язання зазначеної крайової задачі, в кінцевому підсумку цільові умови служать для раціонального вибору параметрів системи термостабілізації). Цільові умови можуть бути поставлені різним чином: за сумарним тепловим потоком, за максимальною температурою на даній границі, за середньою температурою тіла – залежно від об'єкта, що захищається.

Повернімося до джерельних членів у рівнянні (1). Для кожного з джерел введемо температуру фазового переходу, $T_{p.t.i}$ близьку до T_{low} або T_{up} . Тоді визначимо інтенсивність джерела як

$$q_i = (T(x_i, y_i, z_i) - T_{p.t.i})\alpha_i, \quad (3)$$

де $T(x_i, y_i, z_i)$ – температура в точці розташування джерела; α_i – коефіцієнт, який визначається емпірично або теоретично. Коефіцієнт α_i може змінюватися у часі залежно від передісторії нагріву/охолодження, крім того, цей коефіцієнт залежить від конструктивних особливостей включення Q_i . Введемо ще сумарну теплоємність включення. Очевидно, що

$$\frac{dQ_i}{d\tau} = -q_i, \quad (4)$$

а саме Q_i має деяке початкове значення Q_{i0} . Після того, як значення Q_i досягне 0, джерело/стік перестане функціонувати.

Метод розв'язання задачі

Перетворимо рівняння (1) у граничне інтегральне рівняння теорії потенціалу. Попередньо зазначимо, що рівняння (1) за структурою не можна класифікувати як будь-яке з класичних рівнянь математичної фізики. Дійсно, до джерельного члену рівняння (1) входить деяка функція, локалізована на дискретному носіїві. Тому задовольнятимемося класичними фундаментальними розв'язками рівняння теплопровідності, у плоскому випадку

$$\varphi_0(t, \tau, x, x_0, y, y_0) = \frac{1}{4\pi a(t - \tau)} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4a(t - \tau)} \right] \quad (5)$$

і у просторовому випадку

$$\varphi_0(t, \tau, x, x_0, y, y_0, z, z_0) = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi a(t-\tau)}\right)^3} \times \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a(t-\tau)}\right]. \quad (6)$$

Тоді (для визначеності використовуємо просторовий випадок) [4 - 5]

$$\begin{aligned} T(t, x_0, y_0, z_0) = & \int_{t_0}^t \iint_{\Gamma} \varphi_0(t, \tau, x, x_0, y, y_0, z, z_0) \frac{\partial T(\tau, x, y, z)}{\partial n(x, y, z)} dS(x, y, z) dT - \\ & - \int_{t_0}^t \iint_{\Gamma} T(\tau, x, y, z) \frac{\partial \varphi_0(t, \tau, x, x_0, y, y_0, z, z_0)}{\partial n(x, y, z)} dS(x, y, z) dT + \\ & + \iint_D T_0(x, y, z) \varphi_0(t, t_0, x, x_0, y, y_0, z, z_0) dx dy dz + \\ & + \sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{t_0}^t q_i(\tau) \varphi_0(t, \tau, x_i, x_0, y_i, y_0, z_i, z_0) dT. \end{aligned} \quad (7)$$

Що ж до методів чисельного розв'язання рівняння (7), то можна без обмежень застосовувати стандартну процедуру методу граничних елементів, описану в монографіях [4 - 5]. Однак наявність джерельного члену, що складається з точкових джерел, вносить зміни у загальну структуру процедури розв'язання. На перший погляд, враховуючи лінійність за температурою T_i співвідношень (3), може здатися, що наведена задача також лінійна в постановці (7). Однак це не так через обмеження в роботі джерела ($0 < Q_i < Q_{i0}$), і через залежність інтенсивності джерела від температури. Справа в тому, що температура T_i в (3) і, відповідно, в (7) – це фіктивна температура, яка обчислюється за правилом: джерело не впливає на поле в точці, де він знаходиться. Температура T_i легко знаходиться за формулою (7), якщо виключити i -е джерело.

Можливі три підходи для коректного врахування джерельних членів у (7). Перший і найбільш очевидний: зменшити крок за часом у покроковому (за часом) процесі розв'язання рівняння (7) до такого значення, щоб у (3) можна було з прийнятною точністю користуватися значенням T_i з попереднього часового шару. Другий спосіб полягає у включенні до списку невідомих температур T_i і до системи рівнянь M додаткових рівнянь для $(x_0, y_0, z_0) = (x_i, y_i, z_i)$. Такий підхід не перевизначає систему, але й “суттєво псує” властивості матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь та, ймовірно, погіршує точність розрахунку. Нарешті, третій передбачає трактування джерельного члена як нелінійного

з організацією ітераційного процесу на кожному кроці за часом. Останній підхід найбільш універсальний, але й найбільш витратний з обчислювальної точки зору.

Аналіз отриманих результатів та висновки

Запропонований вище підхід є математичною моделлю і відповідною їй розрахунковою схемою системи термостабілізації, заснованої на прихованій теплоті фазового переходу. На жаль, отримані результати чисельних розрахунків не вдалося підтвердити ні порівнянням з аналітичними результатами, ні порівнянням з експериментальними дослідженнями, ні з роботами інших авторів, оскільки останні просто не було знайдено. Зі зростанням кількості включень матеріал теплозахисного шару починає бути схожим на гетерогенне середовище, що вселяє надію на можливості порівняння з асимптотичними результатами.

Перспективи подальших досліджень цілком очевидні та пов'язані з оптимізацією систем термостабілізації, заснованих на прихованій теплоті фазових переходів. Виконані розрахунки підтверджують висновок про високу ефективність такого підходу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Полежаев Ю. В. Тепловая защита / Ю. В. Полежаев, Ф. Б. Юревич. – М.: «Энергия», 1976. – 392 с.
2. Панкратов Б. М. Взаимодействие материалов с газовыми потоками / Б. М. Панкратов, Ю. В. Полежаев, А. К. Рудько. – М.: Машиностроение, 1975. – 224 с.
3. Полежаев Ю. В. Тепловое разрушение материалов / Ю.В. Полежаев, Г. А. Фролов. – К.: Изд-во ИПМ НАНУ, 2005. – 288 с.
4. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
5. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
6. Бразалук Ю. В. Математическое и численное моделирование систем теплоизоляции тел сложной геометрической формы / Ю. В. Бразалук, А. И. Губин, А. В. Давыдова, Д. В. Евдокимов, Ю. А. Малая, М. А. Стояновский // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпро, 2019. – Випуск 2 (121). – С. 64-76.
7. Бразалук Ю. В. Об одной задаче теории теплоизоляции / Ю.В. Бразалук, А. И. Губин, Д. В. Евдокимов, О. А. Коваленко // Системные технологии. Региональ-

ный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3 (104). – Днепропетровск, 2016. – С. 45-56.

8. Беляев Н. М. Применение метода граничных элементов в задачах теплопроводности / Н. М. Беляев, Д. В. Евдокимов // Численно-аналитическое исследование процессов тепломассообмена. – Днепропетровск: ДГУ, 1989. – С. 12-18.

REFERENCES

1. Polezhaev Ju. V. Teplovaja zashhita / Ju. V. Polezhaev, F. B. Jurevich. – М.: «Jener-gija», 1976. – 392 s.
2. Pankratov B. M. Vzaimodejstvie materialov s gazovymi potokami / B. M. Pankra-tov, Ju. V. Polezhaev, A. K. Rud'ko. – М.: Mashinostroenie, 1975. – 224 s.
3. Polezhaev Ju. V. Teplovoe razrushenie materialov / Ju. V. Polezhaev, G. A. Frolov. – К.: Izd-vo IPM NANU, 2005. – 288 s.
4. Brebbija K. Metody granichnyh jelementov / K. Brebbija, Zh. Telles, L. Vroubel. – М.: Mir, 1987. – 524 s.
5. Benerdzhi P. Metod granichnyh jelementov v prikladnyh naukah / P. Benerdzhi, R. Batterfild. – М.: Mir, 1984. – 494 s.
6. Brazaluk Ju. V. Matematicheskoe i chislennoe modelirovanie sistem teploizoljacji tel slozhnoj geometricheskoj formy / Ju. V. Brazaluk, A. I. Gubin, A. V. Davydova, D. V. Evdokimov, Ju. A. Malaja, M. A. Stojanovskij // Sistemni tehnologii: regional'nij mizhvuzivs'kij zbirnik naukovih prac'. – Dnipro, 2019. – Vipusk 2 (121). – S. 64-76.
7. Brazaluk Ju. V. Ob odnoj zadache teorii teploizoljacji / Ju. V. Brazaluk, A. I. Gubin, D. V. Evdokimov, O. A. Kovalenko // Sistemnye tehnologii. Regional'nyj mezhvu-zovskij sbornik nauchnyh rabot. – Vypusk 3 (104). – Dnepropetrovsk, 2016. – S. 45-56.
8. Beljaev N. M. Primenenie metoda granichnyh jelementov v zadachah teplopro-vodnosti / N. M. Beljaev, D. V. Evdokimov // Chislenno-analiticheskoe issledovanie processov teplomassoobmena. – Dnepropetrovsk: DGU, 1989. – S. 12-18.

Received 18.02.2022.

Accepted 21.02.2022.

**Mathematical modeling of thermal stabilization systems
based on phase transitions**

At present, first of all, due to success of biotechnologies, tasks have arisen in which it is required to ensure the thermal regime of the protected product within strictly defined and fairly close temperature limits. Most traditional thermal protection, cooling and heating systems have proven to be ill-suited to such tasks. Among the principles of thermal protection used in modern practice, active thermal protection technologies based on the latent heat of phase transitions are considered to be the most effective. It seems to be quite natural to use the same principle in new thermal stabilization systems in a narrow temperature range. To do this, sufficiently small inclusions of a different phase with a phase transition temperature close to one of the limiting temperatures of the required range should be introduced into the heat-shielding layer. As the geometric dimensions of the inclusions of a different phase are significantly smaller than the dimensions of the object as a whole, a multiscale problem is generated with all the difficulties inherent in solving such problems. To overcome the difficulties associated with the multiscale nature of the problem, the thermal effects of inclusions of a different phase were modeled by point heat sources. The thermophysical properties of the heat-shielding coating material were assumed to be constant due to the narrowness of the considered temperature range. Boundary conditions for the heat equation at the outer boundary of the heat-shielding layer were set of the first, second, or third kind. On the inner surface of the heat-shielding layer, conditions were set for conjugation with the temperature field of the protected body. In this case, two limiting models of the protected body were considered: a solid body with some effective thermal conductivity and an integral heat capacity with a temperature constant over the volume. In the first case, the conditions of the fourth kind were set, and in the second, the condition of the first kind. To calculate the temperature field in the system under consideration, the boundary element method was used, which easily takes into account the presence of point heat sources. Thus, a mathematical model and the corresponding calculation scheme of the thermal stabilization system based on the latent heat of the phase transition were constructed in the work. The obtained results of numerical calculations could not be confirmed either by comparison with analytical results, or with experimental studies, or with the works of other authors, since the latter were not found. With an increase in the number of inclusions, the material of the heat-shielding layer begins to resemble a heterogeneous medium, which inspires hope for the possibility of comparison with asymptotic results. Prospects for further research are related to the optimization of thermal stabilization systems based on the latent heat of phase transitions. The illustrative calculations carried out confirm the conclusion about the high efficiency of this approach.

Бразалук Олександр Костянтинович - аспірант кафедри аерогідромеханіки та енергомасопереносу, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.

Бразалук Юлія Володимирівна - доцент кафедри аерогідромеханіки та енергомасопереносу, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.

Губін Олександр Ігорович - доцент кафедри аерогідромеханіки та енергомасопереносу, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара.

Brazaluk Alexander Konstantinovich - post-graduate student of aerohydrodynamics and energy and mass transfer chair, Oles Honchar Dnipro National University.

Brazaluk Iuliia Volodymyrivna - associated professor of aerohydrodynamics and energy and mass transfer chair, Oles Honchar Dnipro National University.

Gubin Oleksandr Igorovych - associated professor of aerohydrodynamics and energy and mass transfer chair, Oles Honchar Dnipro National University.