

УДК 539.3

К.Г. Головки, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш

**К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ
ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА
УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ТИПА ВИНКЛЕРА ПРИ
ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗКАХ**

Введение. Задачи динамического взаимодействия цилиндрических оболочек с упругими средами являются актуальными, поскольку цилиндрические оболочки находят широкое применение в современных инженерных конструкциях и сооружениях в виде тоннелей, резервуаров, трубопроводов, бурильных и обсадных колонн – труб. В математическом плане такие задачи являются достаточно сложными в плане постановки и решения (использование уравнений теории упругости, формулировка условий контакта среда – оболочка, построение численного алгоритма решения исходных задач и т. д.) Существуют более простые подходы расчета взаимодействия между конструкцией и окружающей средой [1]. Одной из таких моделей является модель упругой среды Винклера. Динамическое взаимодействие сферических и цилиндрических оболочек с двухсторонними и односторонними упругими основаниями типа Винклера в осесимметричной постановке рассмотрено в монографии [2]. Вынужденные колебания бесконечной цилиндрической оболочки, заключенной в упругую среду, при неосесимметричном нагружении с учетом основания типа Винклера и Пастернака рассмотрены в работе [3].

В данной работе рассмотрена нестационарная задача динамического деформирования подкрепленной цилиндрической оболочки, заключенной в упругую среду, которая моделируется основанием типа Винклера.

Постановка задачи. Рассматривается изотропная подкрепленная цилиндрическая оболочка с учетом дискретного расположения ребер, находящаяся в упругой среде, которая моделируется упругим основанием типа Винклера [1]. Предполагается, что оболочка подвержена внутреннему нормальному импульсному нагружению.

Динамическое поведение дискретно подкрепленной цилиндрической оболочки описывается уравнениями колебаний теории оболочек и стержней типа Тимошенко [4] с учетом слагаемых,

моделирующих упругое основание. При выводе уравнений колебаний использовался геометрически нелинейный вариант теории оболочек типа Тимошенко в квадратичном приближении. Исходные уравнения колебаний неоднородной оболочечной структуры имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + P_1 &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^J \rho F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) \Big|_{x=x_j} \\ \frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} - \sum_{j=1}^J \frac{T_{22j}}{R_j} \Big|_{x=x_j} - k_{\Pi} u_3 + P_3 &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^J \rho F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \Big|_{x=x_j} \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^J \rho F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{crj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] \Big|_{x=x_j} \\ \bar{T}_{13} &= T_{13} + T_{11} \Theta_1; \quad h_{cj} = 0.5(h + h_j). \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1) введены следующие обозначения: u_1, u_3, φ_1 – компоненты обобщенного вектора перемещений; ρ – плотность материала оболочки и ребер; h, h_j, F_j, I_{crj} – геометрические параметры оболочки и ребер; R – радиус срединной поверхности оболочки; R_j – радиус j -го кольца относительно центра тяжести его поперечного сечения; x, t – пространственная и временная координаты; k_{Π} – коэффициент постели; x_j – линии сопряжения оболочка – подкрепляющее кольцо; $P_3(x, t)$ – нагрузка.

Связь между величинами усилий-моментов и соответствующих деформаций определяется согласно формул

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad T_{22} = B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\ T_{13} &= B_{13} k^2 \varepsilon_{13}, \quad M_{11} = D_{11} \kappa_{11}, \quad T_{22j} = B_{22j} \varepsilon_{22j}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad B_{11} = B_{22}, \quad B_{13} = Gh, \\ D_{11} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad B_{22j} = EF_j; \end{aligned}$$

E, G, ν – физико – механические параметры материала оболочки и ребер.

Величины деформаций в формулах (2) выражаются через компоненты обобщенного вектора перемещений по формулам

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \Theta_1^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_3}{R}, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \Theta_1, \quad (3)$$

$$\Theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x}, \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22j} = \frac{u_{3j}}{R_j}.$$

Уравнения колебаний (1) – (3) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями. В частности, для случая жестко заземленных краев цилиндрической оболочки при $x = 0, x = L$ имеем граничные условия

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0; \quad (4)$$

и начальные условия при $t = 0$ $u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0$,

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Численный алгоритм. Исходные уравнения колебаний дискретно подкрепленной цилиндрической оболочки (1) – (3) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Исходя из этого, строится алгоритм решения задачи в гладкой области и алгоритм решения на линиях разрывов в точках $x = x_j$ [4]. Алгоритм решения в гладкой области основан на совместном применении интегро – интерполяционного метода построения разностных схем по пространственной координате и явной конечно – разностной схеме по временной координате [5].

Численные результаты. Рассматривалась подкрепленная цилиндрическая оболочка с жестко заземленными краями (граничные условия – (4)) при действии распределенной внутренней нагрузки

$$P_3(t) = A[\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где A – амплитуда нагрузки, T – длительность нагрузки.

Задача решалась при следующих физико – механических и геометрических параметрах: $L/h = 80$; $R/h = 10$; $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Коэффициент постели $c_{\Pi} = 4,6 \cdot 10^{10}$ Н/м³. Предполагается, что оболочкакреплена тремя ребрами в точках $x_j = jL/4$ ($j = \overline{1, 3}$).

Ниже приведены характерные зависимости величин u_3 (Рис.1) и σ_{22} (Рис.2) по пространственной координате x в момент времени

$t=2,25T$. Кривая с индексом 1 соответствует расчетным величинам с учетом упругого основания, с индексом 2 – без учета последнего. Как следует из полученных результатов и приведенных графиков, учет упругого основания при указанных исходных данных влечет за собой не только изменение частотных характеристик (частота колебаний оболочки с учетом основания повышается), но и амплитудных характеристик. Разница по максимальным значениям прогиба u_3 и напряжения σ_{22} достигает порядка 50-70%. Для обоих случаев расчетов четко проявляется влияние дискретных подкрепляющих элементов на параметры напряженно – деформируемого состояния исходной конструкции.

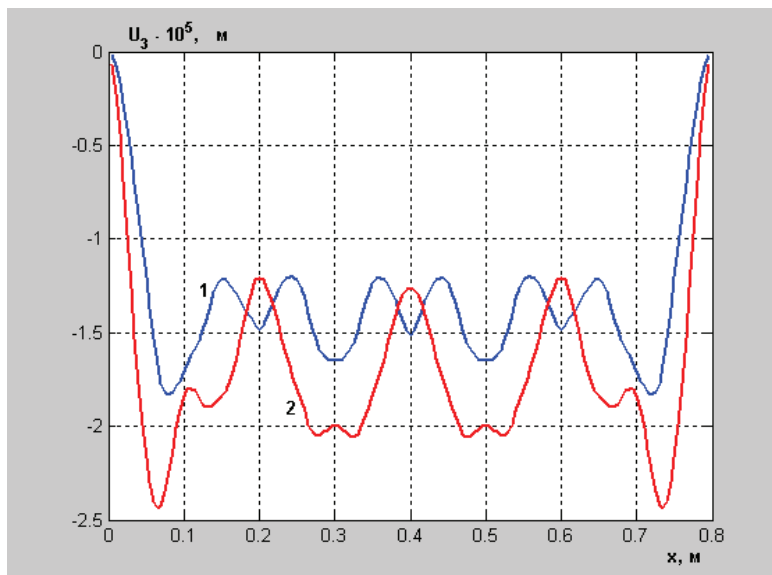


Рисунок 1

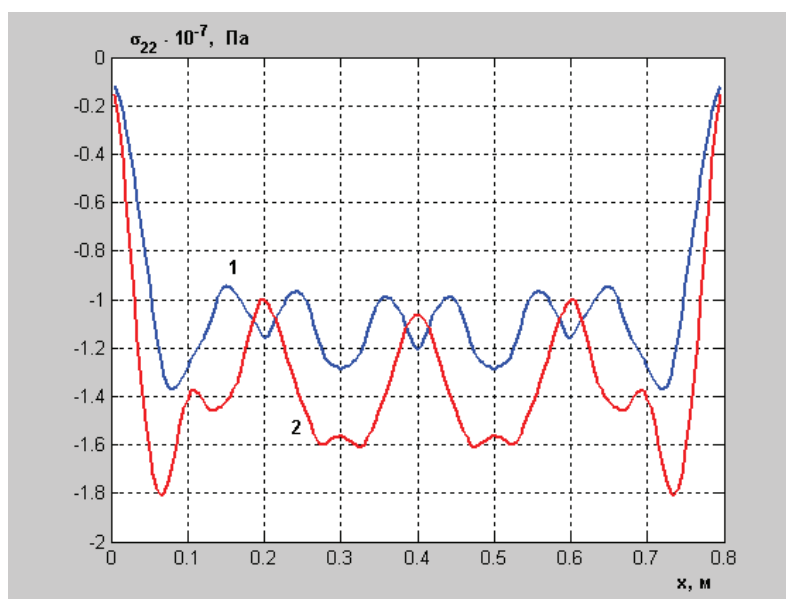


Рисунок 2

Выводы. В данной работе представлена постановка задачи о вынужденных колебаниях цилиндрической оболочки с учетом дискретного размещения ребер и учетом упругого основания типа Винклера. На основании развитого численного метода приведены числовые результаты динамического поведения исходной конструкции при внутренней импульсной нагрузке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. – Киев: Сталь, 2000. – 600с.
2. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков:ХНАДУ, 2004. – 392 с.
3. Динамика конструкций при воздействии кратковременных нагрузок /Кохманюк С.С., Дмитриев А.С., Шелудько Г.А. и др. Киев: Наукова думка, 1989. – 304 с.
4. Луговой П.З., Мейш В.Ф. Численное моделирование динамического поведения подкрепленных оболочек вращения при нестационарном воздействии // Прикладная механика. – 1992, 28. - № 11. – С. 38 – 44.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

Получено 23.02.06

УДК 620.172.251.2

Р.Г. Ахмедов

ОСОБЕННОСТИ ВЛИЯНИЯ ВОССТАНОВИТЕЛЬНОЙ ТЕРМООБРАБОТКИ НА СТРУКТУРУ И СВОЙСТВА ЛОПАТОК ПАРОВЫХ ТУРБИН

Наиболее ответственным и дорогостоящим элементом паровых турбин является лопаточный аппарат. Лопатки турбин работают в сложных эксплуатационных условиях, включающих влияние повышенных температур, знакопеременных статических и динамических нагрузок, воздействие агрессивных сред, вызывающих коррозионное и эрозионное повреждение поверхности. Все это увеличивает опасность повреждения и разрушения лопаток паровых турбин. Вместе с тем следует учесть, что выход лопаток из строя является одной из наиболее тяжелых и дорогостоящих аварий, вызывающих длительные простои турбины.

Известно [1,2], что в условиях низкотемпературной ползучести, а также при сочетании ползучести и усталости разрушение металла протекает путем развития дефектов-микротрещин и микропор, формирующихся преимущественно по границам зерен. В аналогичных условиях протекает эксплуатация лопаток паровых турбин.

Именно поэтому можно ожидать, что при длительной эксплуатации лопаток паровых турбин в них развиваются микроповреждения, которые и приводят к снижению ресурса работоспособности. В литературе вопрос о развитии микродефектов в лопатках турбин отражен явно недостаточно.

В настоящем исследовании было детально изучено накопление микродефектов в лопатках паровых турбин после их длительной эксплуатации, а также намечены пути их устранения. Рассмотрены также трансформация структуры и изменение твердости в результате длительной эксплуатации.

Исследованию были подвергнуты лопатки из стали 20Х13, 20,21 и 26 ступеней ротора среднего давления турбины №8 ТЭЦ 22 Мосэнерго, которые эксплуатировались при температуре 120-150°C и давлении 0,2-0,3 МПа длительностью 113-164 тысячи часов. Для выявления общих закономерностей развития повреждений были

выбраны турбинные лопатки длиной 250 мм с одной и двумя бандажными связями и длиной 170 мм с одной бандажной связью.

Основным методом определения степени поврежденности металла турбинных лопаток в результате длительной эксплуатации, а также после восстановительной термообработки был выбран метод прецизионного определения плотности, заключающийся в последовательном взвешивании каждого исследуемого образца на воздухе и в тетрабромэтаноле. Это обеспечивало точность определения плотности до 0,01 % (0,7кг/м³).

Сталь 20Х13 относится к мартенситному классу, поэтому после исходной термообработки (закалка с температуры 950°С-1050°С, отпуск 650°С-750°С в течении 3 часов) её структура представляет собой мартенсит отпуска. Ударная вязкость в исходном состоянии составляла 1,0-1,2 МДж/м², а твердость НВ 217-223.

После эксплуатации все лопатки имели структуру сорбита, ориентированного по мартенситу. При этом ударная вязкость понизилась до 0,7-0,8 МДж/м², а твердость возросла до НВ 235-241. Снижение энергии разрушения в 1,5 раза и некоторое повышение твердости можно предположительно связать с процессом выделения дисперсных карбидных фаз в процессе длительной эксплуатации.

Во всех исследованных лопатках было изучено развитие поврежденности как поперек, так и вдоль лопатки, т.е. получены эпюры распределения плотности по сечению каждого исследованного объекта.

В результате проведенного исследования удалось показать, что плотность материала лопатки не однородна и изменяется как вдоль, так и поперек лопатки. Однако, характер изменения плотности является общим для всех исследуемых лопаток, он не зависит от размера лопатки, типа бандажной связи срока её эксплуатации.

На рис.1 представлены кривые изменения плотности материала исследованных лопаток в поперечном направлении. Сечения выбирались вблизи замка или бандажной связи. Для всех лопаток оказалось, что плотность материала на выходной кромке минимальна. Это хорошо согласуется с ранее полученными результатами магнитного и ультразвукового контроля лопаток, с помощью которого было показано, что на выходной кромке материал

повреждается в наибольшей степени. Снижение плотности на выходной кромке материала лопаток составило 4-7 кг/м³.

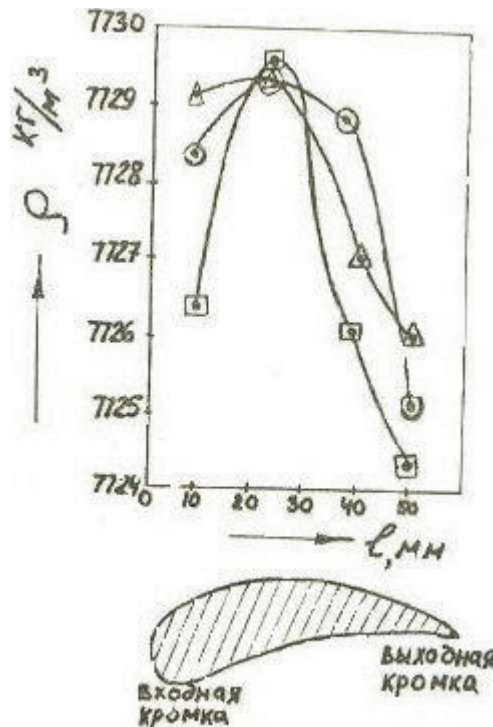


Рисунок 1 - Изменение плотности стали 20Х13 по сечению лопаток после эксплуатации ПЗ, 154 и 164 тыс. часов

Единая закономерность изменения плотности всех исследованных лопаток после их длительной эксплуатации свидетельствует об общности физических причин, вызывающих развитие поврежденности. Наиболее эффективных путей увеличений сплошности материала длительно работающего энергооборудования является восстановительная термообработка. Результатом этой обработки является многократная фазовая перекристаллизация поврежденного металла, в процессе которой интенсифицируются диффузионные процессы и ускоряется залечивание микродефектов. Этот метод получил название восстановительной циклической термообработки. Восстановительная термообработка проводилась по следующему режиму: нагрев до 1050°С, выдержка 15 минут, охлаждение на воздухе (обработка повторялась пять раз), отпуск 750°С в течение 3 часов.

В результате такой обработки плотность наиболее поврежденных частей лопаток паровых турбин возрастала на 5-7 кг/м³. При этом плотность материала не нагруженной части лопатки в результате обработки практически не изменялась. Таким образом было показано,

что в результате восстановительной обработки удастся полностью устранить микродефекты, образовавшиеся в лопатках паровых турбин при их многолетней эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куманин В.И. Структура, поврежденность и работоспособность теплостойкой стали при длительной эксплуатации. Металловедение и термическая обработка металлов; 1981, №3, с.37-40.
2. В.И. Куманин, Л.А.Ковалева, С.В.Алексеев. Долговечность металла в условиях ползучести. М., Металлургия, 1988,с.222.

Получено __.__.2006 г.

УДК 519.6

Н.Н. Беляев, С.З. Полищук, В.М. Лисняк

ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ В ЗАДАЧАХ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

В проблеме охраны окружающей среды одним из важных вопросов является прогноз последствий аварийных ситуаций [1,3-5]. Такой прогноз может быть выполнен только на базе математических моделей. В настоящее время одной из тенденций в области математического моделирования в задачах охраны окружающей среды является создание регуляторных моделей, т.е. моделей, учитывающих с одной стороны основные физические процессы, а с другой стороны приспособленные для персональных компьютеров средней мощности и ориентированные на конечных пользователей, работающих в различных организациях, связанных с решением экологических проблем и не обладающих, как правило, специальными знаниями в области гидроаэродинамики, вычислительных методов.

В работе рассматриваются две регуляторные модели, которые могут быть использованы для решения актуальных проблемных задач в области экологической безопасности: - первая модель относится к прогнозированию последствий при движении ударной волны и взаимодействию ее с различными преградами; вторая модель относится к решению задачи защиты атмосферы от загрязнения при миграции токсичных веществ. Первая модель может быть использована для расчета величины нестационарных нагрузок на различные объекты в случае аварий при перевозке взрывчатых веществ. Вторая модель связана с миграцией токсичного вещества в атмосфере и его нейтрализацией.

1. Математическая модель дифракции ударной волны

Численное моделирование процессов дифракции ударной волны на объектах (здания и т.п.) проводится в рамках двумерных уравнений Эйлера.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u I}{\partial x} + \frac{\partial \rho v I}{\partial y} = 0;$$

где u, v - компоненты вектора скорости потока, P – давление;

$$E = \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{I}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} - \text{полная внутренняя энергия газа};$$

$$I = \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} - \text{полная удельная энтальпия}.$$

ρ - плотность газа; γ - показатель адиабаты.

Расчетная область, где осуществляется интегрирование уравнений Эйлера является прямоугольной. Полагаем, что фронт ударной волны движется по невозмущенному воздуху. В начальный момент времени $t=0$, фронт располагается в заданном сечении и избыточное давление за фронтом ударной волны равно P_F . Параметры течения воздуха за фронтом ударной волны определяются соотношениями Ренкина-Гюгония.

2. Метод решения

Для численного интегрирования уравнений Эйлера используется прямоугольная разностная сетка. Параметры значения газа $\varphi = \|\rho, p, u, v\|$ определяется в центрах разностных точек. Дискретизация параметров выполняется так, чтобы поток массы, количества движения и энтальпии на верхнем временном слое рассчитывался с учетом направления переноса газа. В этом случае, разностные уравнения расщепления для рассмотренной системы уравнений будут иметь вид:

- для уравнения неразрывности

$$\left(\varepsilon + \frac{\Delta t}{2} (\Lambda_x^+ + \Lambda_y^+) \right) \rho^{n+\frac{1}{4}} = \varepsilon \rho^n, \quad \left(\varepsilon + \frac{\Delta t}{2} (\Lambda_x^- + \Lambda_y^-) \right) \rho^{n+\frac{1}{2}} = \varepsilon \rho^{n+\frac{1}{4}},$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\Delta t}{2} (\Lambda_x^+ + \Lambda_y^-) \right) \rho^{n+\frac{3}{4}} = \varepsilon \rho^{n+\frac{1}{2}}, \quad \left(\varepsilon + \frac{\Delta t}{2} (\Lambda_x^- + \Lambda_y^+) \right) \rho^{n+1} = \varepsilon \rho^{n+\frac{3}{4}},$$

- для уравнений сохранения количества движения и энергии

$$\left(\varepsilon + \frac{\Delta t}{2} (\Lambda_x^+ + \Lambda_y^+) \right) \alpha^{n+\frac{1}{4}} + \frac{\Delta t}{2} L_x^+ \beta^{n+\frac{1}{4}} + \frac{\Delta t}{2} L_y^+ \delta^{n+\frac{1}{4}} = \varepsilon \alpha^n;$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\Delta t}{2} (\Lambda_x^- + \Lambda_y^-) \right) \alpha^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} L_x^- \beta^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} L_y^- \delta^{n+\frac{1}{2}} = \varepsilon \alpha^{n+\frac{1}{4}};$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\Delta t}{2} (\Lambda_x^+ + \Lambda_y^-) \right) \alpha^{n+\frac{31}{4}} + \frac{\Delta t}{2} L_x^+ \beta^{n+\frac{31}{4}} + \frac{\Delta t}{2} L_y^- \delta^{n+\frac{31}{4}} = \varepsilon \alpha^{n+\frac{1}{2}};$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\Delta t}{2} (\Lambda_x^- + \Lambda_y^+) \right) \alpha^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} L_x^- \beta^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} L_y^+ \delta^{n+1} = \varepsilon \alpha^{n+\frac{3}{4}};$$

где ε - тождественный оператор

$\alpha^T = \|\rho u, \rho v, \rho E\|$, $\beta^T = \|P, 0, 0\|$, $\delta^T = \|0, P, 0\|$ - транспонированные векторы-столбцы.

Шаблоны для каждого дробного шага разностной схемы имеют треугольную форму на верхнем расчетном слое, поэтому решение разностных уравнений проводится способом рекуррентного счета, начиная с определенного угла расчетной области.

При написании разностных соотношений использованы следующие обозначения:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{P_{ij}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{ij}^{n+1}}{2\Delta x} = (L_x^+ + L_x^-)P^{n+1}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = (L_y^+ + L_y^-)P^{n+1}$$

Конвективные производные вида $\frac{\partial f v}{\partial y}$ заменяются такими разностными соотношениями:

$$\frac{\partial f v}{\partial y} \approx \Lambda_y^+ f^{n+1} + \Lambda_y^- f^{n+1}$$

где Λ_y^+, Λ_y^- - односторонние разности операторы:

$$\frac{\partial f u}{\partial x} \approx \frac{\tilde{u}^+ f_{ij}^{n+1} - \tilde{u}^+ f_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\tilde{u}^- f_{i+1,j}^{n+1} - \tilde{u}^- f_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} = \Lambda_x^+ f^{n+1} + \Lambda_x^- f^{n+1}$$

$$u^+ = \frac{u + |u|}{2}, \quad u^- = \frac{u - |u|}{2} \text{ и т.д.}$$

Форма объектов, с которыми происходит взаимодействие ударной волны (вагон, элементы рельефа местности, здания) задаются в дискретной модели с помощью маркеров. Тем самым, реализуется возможность моделирования дифракционных процессов в областях сложной геометрической формы.

3. Практическая реализация

На базе рассмотренной дискретной модели создан комплекс программ «WAVE-1». В качестве алгоритмического языка использован FORTRAN. Комплекс программ построен на модульном

принципе. Такая организация комплекса программ обеспечивает гибкость реализации задач на ПЭВМ в различной физической постановке.

В качестве примера использования данного комплекса программ ниже представлены результаты моделирования процесса дифракции ударной волны, образовавшейся после аварийного взрыва. На рисунках 1,2 показано распределение изобар при взаимодействии ударной волны с одноэтажным зданием (здание вокзала). Ударная волна вошла через оконный проем внутрь здания и движется в направлении противоположного оконного проема.

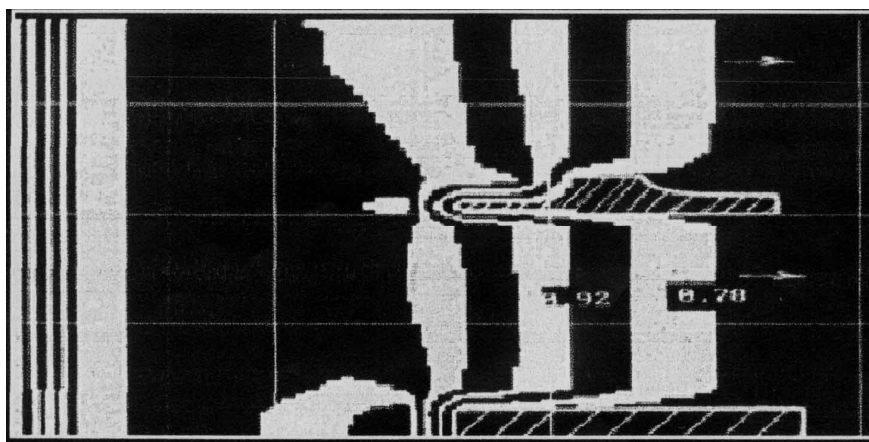


Рисунок 1 - Распределение изобар, $t=0,01$ (взаимодействие ударной волны со зданием)

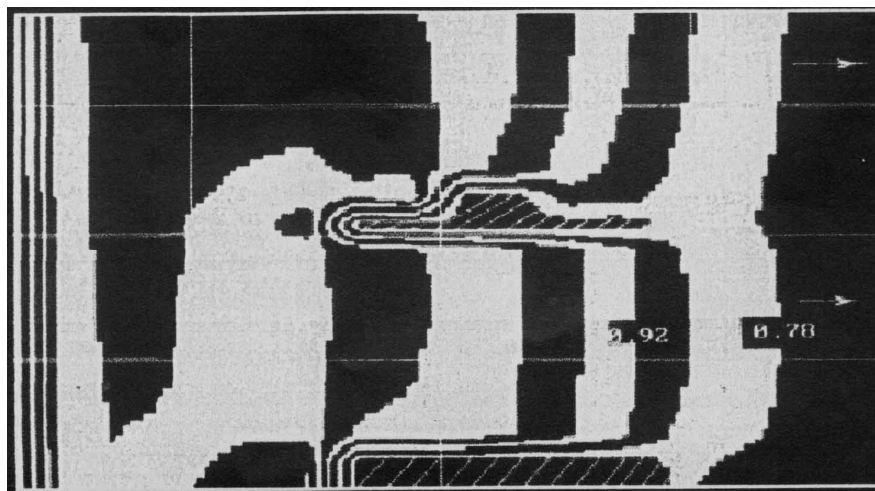


Рисунок 2 - Распределение изобар, $t=0,012$ (взаимодействие ударной волны со зданием)

Расчет в рамках предложенной компьютерной модели позволяет оперативно определить величину нестационарных нагрузок на здание, оборудование, размещенное внутри него и тем самым прогнозировать возможный экологический ущерб.

4. Математическая модель миграции аммиака и нейтрализатора в воздухе

Одним из методов нейтрализации облака токсичного газа, мигрирующего в атмосфере, может быть подача в это облака нейтрализатора с вертолета. Для моделирования этого процесса была разработана компьютерная модель. Для описания процесса миграции облака – токсичного газа (или нейтрализатора) используется трехмерное уравнение переноса примеси:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u\varphi}{\partial x} + \frac{\partial v\varphi}{\partial y} + \frac{\partial w\varphi}{\partial z} + \sigma\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \sum q_i(t) \delta(r - r_i)$$

где φ – концентрация аммиака (нейтрализатора) в единице объёма воздуха; u, v, w – компоненты вектора скорости ветра; $\mu = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ – коэффициенты турбулентной диффузии; t – время; σ – коэффициент, учитывающий испарение нейтрализатора; $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ – координаты источника выброса нейтрализатора; q_i – мощность выброса нейтрализатора в атмосферу; $\delta(r - r_i), \delta(r - r_j)$ – дельта функция Дирака.

Данное уравнение дополняется следующими граничными условиями: на поверхности земли $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ (n – вектор внешней нормали к поверхности); на боковых гранях расчётной области ставятся условия: $\varphi = 0$ при $(\vec{V} \cdot \vec{n}) \geq 0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$; при $(\vec{V} \cdot \vec{n}) \leq 0$;

Начальное условие имеет вид $\varphi = 0$ (для нейтрализатора), для аммиака задаётся его концентрация в первичном облаке. В модели можно учесть процесс осаждения капель нейтрализатора под действием силы гравитации со скоростью w_s , путём добавления слагаемого – $w_s \varphi$ в рассматриваемое уравнение, в слагаемое, учитывающее конвективный перенос со скоростью ветра w .

Приведенные уравнения модели дополняются уравнением кинетики, описывающим взаимодействием «токсичное вещество + нейтрализатор».

5. Метод решения

Численное интегрирование уравнения переноса токсичного газа или нейтрализатора осуществляется с использованием неявной

попеременно – треугольной разностной схемы расщепления [2]. На каждом дробном шаге расчёт неизвестного значения концентрации загрязняющего вещества выполняется по схеме бегущего счёта. Разностная схема является абсолютно устойчивой.

6. Результаты моделирования

Рассматриваются следующий сценарий ликвидации облака токсичного газа (аммиака). В атмосфере мигрирует первичное облако аммиака. Для его нейтрализации применяется подача нейтрализующего раствора с вертолётa. При этом принято решение подавать раствор последовательно с двух вертолётa: сначала осуществляется полёт одного вертолета, а за тем, по его же маршруту, двигается другой вертолёт. В качестве нейтрализатора используется раствор ортофосфорной кислоты. Маршрут каждого вертолета проходит по линии симметрии облака. Вертолет осуществляет в течении 30 сек выброс нейтрализатора с интенсивностью $q=50$ кг/с. Через 45 сек. после начала полета первого вертолета, вдоль его трассы начинает двигаться второй вертолет, который с той же интенсивностью осуществляет подачу нейтрализатора в облако. Средняя концентрация NH_3 в облаке – $5 \cdot 10^{-5}$ кг/м³; коэффициент турбулентной диффузии – 2.5 м²/с; скорость вертолета – 5 м/с; скорость ветра – 3 м/с, азимут – 55°. Нейтрализатор выбрасывается в течении 20 сек. Высота облака – 74 м., длина облака – 128 м, ширина – 144 м.

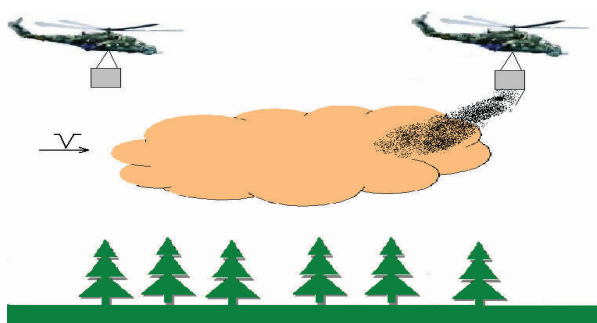


Рисунок 3 - Схема ликвидации облака аммиака

Скорость оседания капель нейтрализатора – 0,03 м/с. Выброс нейтрализатора осуществляется на высоте 74 м над землей.

Перейдем к рассмотрению результатов моделирования. В табл. 1 показано какое количество аммиака нейтрализовано в тот или иной

момент времени для выбранного сценария стратегии ликвидации облака NH_3 .

Отметим, что суммарное количество аммиака в облаке, перед началом нейтрализации составляет примерно 83 кг.

Данные в табл. 1 позволяют сделать вывод о степени эффективности выбранной стратегии при выбранном маршруте, интенсивности и режиме подачи нейтрализатора, а также дает возможность определить, какое количество токсичного газа будет далее мигрировать в атмосфере если процесс нейтрализации будет на этом этапе завершен. Это позволяет прогнозировать уровень дальнейшего загрязнения атмосферы, подстилающей поверхности, оценивать возможный ущерб и последствия проведенной операции по нейтрализации.

Таблица 1

Количество аммиака нейтрализованного при полете двух вертолетов

t,сек.	Количество нейтрализованного аммиака, кг
45	40
60	48
75	54
90	57

На приводимых ниже рисунках показана динамика изменения формы токсичного облака при его обработке нейтрализующим раствором. Хорошо видно, что для приводимых моментов времени часть облака, прилегающая к подстилающей поверхности еще «не успела» попасть под действие нейтрализатора. Данные рисунки иллюстрируют возможность разработанного пакета программ «наблюдать» как происходит процесс нейтрализации и выявлять подзоны, их размеры, интенсивность, где процесс нейтрализации еще не произошел.

Выводы

В работе рассмотрена разработка регуляторных компьютерных моделей прогноза последствий аварийных ситуаций. Предложена двухмерная численная модель для решения задач дифракции при движении ударной волны. Предложена трехмерная численная модель миграции примесей в атмосфере и на ее основе создан метод расчета нейтрализации мигрирующего в атмосфере облака токсичного газа.

Нейтрализация осуществляется за счет подачи нейтрализующего раствора от летающего аппарата (вертолета). Разработанный метод расчета позволяет учитывать профиль ветра, геометрическую форму облака, различные сценарии движения вертолета, выброса нейтрализатора.

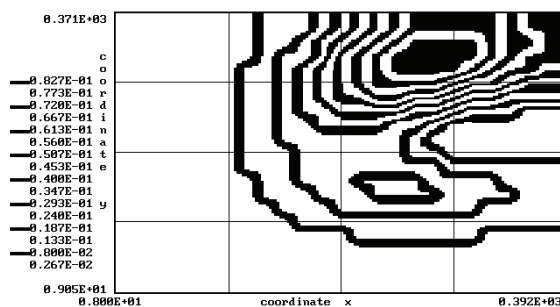


Рисунок 4 - Распределение NH_3 на уровне $z=16$ м от земли (два вертолета, $t=90$ сек.)

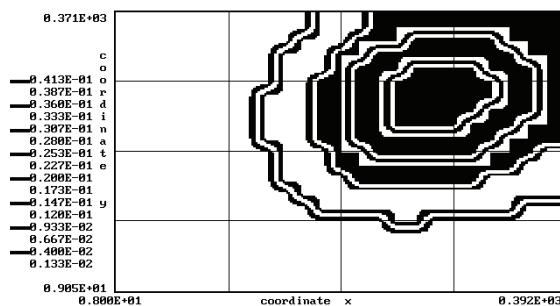


Рисунок 5 - Распределение NH_3 на уровне $z=2.4$ м от земли (два вертолета, $t=90$ сек.)

ЛИТЕРАТУРА

1. Аварии и катастрофы. Предупреждение и ликвидация последствий: Учебное пособие в 5 т. / Под ред. В. А. Котляревского и А. В. Забегаева.-М.: Из-во АСВ, 2001.-164 с.
2. Беляев Н. Н., Кореньюк Е. Д., Хрущ В. К. Прогнозирование качества воздушной среды методом вычислительного эксперимента. Днепропетровск, Наука и образование, 2000. – 208 с.
3. Иванов Ю.А. Хранение и транспортировка жидкого аммиака / Ю. А. Иванов, И.И. Стижневский.-М.: Химия, 1991.- 80 с.
4. Мацак В. Г. Гигиеническое значение скорости испарения и давления пара токсических веществ, применяемых в производстве / В. Г. Мацак, Л. К. Хоцянов. – М.: Медгиз, 1959.-231 с.
5. Плахотник В. Н. Природоохранная деятельность на железнодорожном транспорте Украины: проблемы и решения / В. Н. Плахотник, Л. А. Ярышкина, В. И. Сираков и др.- К.: Транспорт Украины, 2001.-244 с.

Получено __.__.2006 г.

УДК 517.5

Е.В. Дерещ

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Введение

Пусть H_1^ω - множество 2π -периодических измеримых функций $f(t)$ таких, что $\omega(f, t)_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|h| \leq t} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \omega(t)$, где $\omega(t)$ - заданный модуль непрерывности, $W^r H_1^\omega$ ($r=1,2,\dots$)- множество 2π -периодических функций $f(t)$, у которых $(r-1)$ -я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)}(t) \in H_1^\omega$.

Обозначим через $A_n(f, t)$ оператор вида $A_n(f, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) u_n(t - \tau) d\tau$,

где $u_n(t) = 1/2 + \sum_{k=1}^n p_k \cos kt$, $u_n(t) \geq 0$ для всех t .

Для нечетных r и выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$ точное значение величины $\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \|f - A_n(f)\|_\infty$ вычислено в [1]. В настоящей работе получено решение этой задачи при $r=2$ и выпуклом модуле непрерывности.

Основные результаты

Теорема. Для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ и линейного положительного полиномиального оператора $A_n(f, t)$

$$\sup_{f \in W^2 H_1^\omega} \|f - A_n(f)\|_\infty = \int_0^\xi \omega'(2t) g(t) dt, \quad \text{где } g(t) - \text{четная } 2\pi\text{-периодическая}$$

функция, $g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-\pi}^t \int_y^{\pi} u_n(\tau) d\tau dy + \lambda$, если $t \in [-\pi, 0)$, величина λ

определяется равенством $\int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = 0$, $\xi \in (0, \pi)$ - нуль функции $g(t)$.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть $0 < h < \pi$, $-h < t_1 < \dots < t_k < \pi - h$. Тогда для любой четной 2π -периодической функции $f \in L_1$ справедливо неравенство

$$\int_0^h f(t)dt - \int_{\pi-h}^{\pi} f(t)dt \leq \frac{1}{4} \omega(f, 2h)_1 \quad (1)$$

$$\int_0^h f(t)dt - \int_{\pi-h}^{\pi} f(t)dt \leq \frac{1}{4} \omega(f, 2h)_1 + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \int_{t_i}^{t_i+2h} f(t)dt - (1 - (-1)^k) \int_{\pi-h}^{\pi} f(t)dt \quad (2)$$

Лемма 1 является следствием леммы 1 в [1].

Доказательство теоремы. Интегрируя по частям, нетрудно получить известное равенство $\sup_{f \in W^2 H_1^0} \|f - A_n(f)\|_{\infty} = \sup_{f \in W^2 H_1^0} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt \right|$.

Определим 2π -периодическую четную функцию $f(u_n, \omega, t)$ равенством

$$f(u_n, \omega, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \omega'(2t), & \text{если } t \in (0, \xi], \\ 0, & \text{если } t \in (\xi, \pi] \end{cases}$$

Поскольку $f(u_n, \omega, t) \in H_1^0$, доказательство теоремы сводится к доказательству неравенства

$$\int_0^{2\pi} g(t)f(t)dt \leq \int_0^{2\pi} g(t)f(u_n, \omega, t)dt \quad (3)$$

для любой функции $f(t) \in H_1^0$, при этом, не ограничивая общности, можно считать, что $f(t)$ - четная 2π -периодическая функция, равная в среднем 0 и абсолютно непрерывная на $[0, \pi]$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что существуют точки

$c_1, c_2, c_3 \in (0, \pi)$ такие, что $f(c_1) < f(c_2)$ и $\int_0^{c_3} f(\tau)d\tau > 0$, так как в противном

случае (3) очевидно. Интегрируя по частям и учитывая свойства функции $g(t)$, получаем оценку

$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \leq 2 \int_0^{\xi} g'(t) \left(\int_0^t f(y)dy - \int_{\pi-t}^{\pi} f(y)dy \right) dt + 2 \int_Q g'(\pi-t) \left(S(t) - \int_0^t f(y)dy \right) dt \quad (4)$$

$$\text{где } S(t) = \frac{2(\pi-t)}{\pi} \sup_{0 \leq x \leq \pi/2 \leq z \leq \pi} \left((z - \pi/2) \int_0^t f(y)dy + (\pi/2 - x) \int_0^z f(y)dy \right) / (z - x),$$

$$W = \left\{ t \in [0, \pi] : \int_0^t f(y) dy < S(t) \right\}, \quad Q = W \cap (\pi - \xi, \pi]. \quad \text{Если } Q = \emptyset, \text{ то (3)}$$

следует из (4) и (1). Предположим, что множество Q не пусто и существуют точки $\varsigma' \in [\pi/2, \pi - \xi]$, $\varsigma'' \in [\pi - \xi, \pi)$ такие, что $\varsigma' \notin W$, $\varsigma'' \notin W$ и $(\varsigma', \varsigma'') \subset W$, тогда (4) можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt \leq 2 \int_0^\xi |g'(t)| \left(\int_0^t f(y)dy - \int_{\pi-t}^\pi f(y)dy \right) dt + 2 \sum_{i \in T} \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'(\pi-t)| \delta(t) dt + 2 \int_{\pi-\xi}^{\varsigma''} |g'(\pi-t)| \delta(t) dt \quad (5)$$

где $\delta(t) = S(t) - \int_0^t f(y)dy$, T - конечное или счетное множество,

$Q = \bigcup_{i \in T} (\tau_i', \tau_i'')$, $(\tau_i', \tau_i'') \cap (\tau_j', \tau_j'') = \emptyset$, если $i \neq j$. При каждом $t \in [0, \xi]$ оценим

сверху первое слагаемое в (5) с помощью леммы 1, включая в совокупность промежутков интегрирования $[\tau_i', \tau_i' + 2t]$ и $[\tau_i'' - 2t, \tau_i'']$, если $\tau_i'' - \tau_i' \geq 2t$; $[\tau_j', \tau_j' + 2t]$, если $\tau_j' < \pi - t \leq (\tau_j' + \tau_j'')/2$; $[2\pi - 2t - \tau_j'', 2\pi - \tau_j'']$, если $(\tau_j' + \tau_j'')/2 < \pi - t < \tau_j''$; $[\varsigma', \varsigma' + 2t]$ и $[\varsigma'' - 2t, \varsigma'']$, если $\varsigma'' - \varsigma' \geq 2t$; $[\varsigma', \varsigma' + 2t]$, если $\varsigma' < \pi - t \leq (\varsigma' + \varsigma'')/2$; $[2\pi - 2t - \varsigma'', 2\pi - \varsigma'']$, если $(\varsigma' + \varsigma'')/2 < \pi - t < \varsigma''$; наконец, если при некотором t не было выбрано ни одного промежутка, то для таких t применим оценку (1). Выбирая в полученных интегралах в качестве новой переменной аргумент функции $\delta(t)$ и принимая во внимание монотонность функции $g'(t)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt &\leq \int_0^\xi g(t)\omega'(2t)dt + 2 \sum_{i \in T} \left(\int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'(\pi-t)| \delta(t) dt - \frac{1}{2} \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'((t-\tau_i')/2)| \delta(t) dt \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'((\tau_i''-t)/2)| \delta(t) dt - 2 \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'(\pi-t)| \delta(t) dt + \frac{1}{2} \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'(\pi-\tau_i''/2-t/2)| \delta(t) dt + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\tau_i'}^{\tau_i''} |g'(\pi-\tau_i'/2-t/2)| \delta(t) dt \right) + 2 \int_{\pi-\xi}^{\varsigma''} |g'(\pi-t)| \delta(t) dt + \\ &\quad + 2 \int_{\pi-\varsigma''}^\xi |g'(t)| (\delta(\mu(t)) - 2\delta(\pi-t)) dt - 2 \int_0^{\min\{\xi, (\varsigma''-\varsigma')/2\}} |g'(t)| (\delta(\varsigma'+2t) + \delta(\varsigma''-2t)) dt \leq \\ &\leq \int_0^\xi g(t)\omega'(2t)dt \end{aligned}$$

$$\text{где } \mu(t) = \begin{cases} 2\pi - 2t - \zeta'', & \text{если } \pi - t \in ((\zeta' + \zeta'')/2, \zeta''] \\ 2\pi - 2t - \zeta', & \text{если } \pi - t \in [\zeta', (\zeta' + \zeta'')/2] \end{cases}$$

Остаётся рассмотреть случай, когда $Q \neq \emptyset$, но при этом не существует точек ζ' , ζ'' с указанными свойствами. Нетрудно показать, что при этом имеет место один из двух случаев:

Существуют такие точки α и β , что $0 \leq \alpha < \pi/2$, $\pi - \xi < \beta < \pi$,

$$\int_0^t f(y) dy < \int_0^\alpha f(y) dy + \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(y) dy \text{ для всех } t \in (\alpha, \beta) \text{ и } \int_0^t f(y) dy < S(t) \text{ для}$$

всех $t \in [\pi/2, \pi - \xi]$

$$\text{Существует точка } d \in (0, \pi - \xi), \text{ такая, что } S(d) = \int_0^d f(y) dy \text{ и}$$

$$S(t) > \int_0^t f(y) dy \text{ для всех } t \in (d, \pi)$$

В случае (I), как и ранее, оценим величину $\int_0^t f(y) dy - \int_{\pi-t}^\pi f(y) dy$ сверху с помощью леммы 1, при этом промежутки интегрирования выбираются аналогично описанному выше, с той разницей, что вместо ζ' , ζ'' выбираются точки α и β соответственно, вместо множества $\bigcup_{i \in T} (\tau'_i, \tau''_i)$ следует взять множество $\bigcup_{i \in L} (\gamma'_i, \gamma''_i) = Q \cap [\beta, \pi]$ с аналогичными свойствами, кроме того, при каждом t промежутки, пересекающие точку π и отличные от $[\pi - t, \pi + t]$, включаются в знакопеременяющуюся сумму интегралов только тогда, когда

$$\int_0^{\pi-t} f(y) dy \leq S(\pi - t). \text{ В результате при } t \leq \pi - \beta \text{ получаем оценку}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t f(t) dt - \int_{\pi-t}^\pi f(t) dt &\leq \frac{1}{4} \omega(2t) - \sum_{i \in L} (\delta(\gamma'_i + 2t) + \delta(\gamma''_i - 2t)) - \\ &- \left(\int_0^\alpha f(y) dy + \frac{\beta}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta f(y) dy - \int_0^{\alpha+2t} f(y) dy - \int_0^{\beta-2t} f(y) dy \right) \cdot \left[\frac{\beta - \alpha}{2} - t \right]_+, \end{aligned} \quad (6)$$

при $\max\{(\alpha + \beta)/2, \pi - \xi\} \leq \pi - t < \beta$ получаем неравенство

$$\int_0^t f(t)dt - \int_{\pi-t}^{\pi} f(t)dt \leq \frac{1}{4}\omega(2t) + (\delta(2\pi - 2t - \beta) - 2\delta(\pi - t) + \delta(\beta))[\delta(\pi - t)]_+ -$$

$$- \left(\int_0^{\alpha} f(y)dy + \frac{\beta}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(y)dy - \int_0^{\alpha+2t} f(y)dy - \int_0^{\beta-2t} f(y)dy \right) \cdot \left[\frac{\beta - \alpha}{2} - t \right]_+$$
(7)

а при $\pi - \xi \leq \pi - t < (\alpha + \beta)/2$ приходим к неравенству

$$\int_0^t f(t)dt - \int_{\pi-t}^{\pi} f(t)dt \leq \frac{1}{4}\omega(2t) + (\delta(2\pi - 2t - \alpha) - 2\delta(\pi - t) + \delta(\alpha))[\delta(\pi - t)]_+ \quad (8)$$

Из (4), (6)-(8) и монотонности $g'(t)$ после преобразований получаем (3).

В условиях (II) для доказательства теоремы достаточно при каждом $t \in (0, \xi]$ применить лемму 1, полагая $h = t$, $k = 1$, $t_1 = d$.

Теорема полностью доказана.

Выводы

В настоящей работе найдена погрешность приближения класса $W^r H_1^\omega$ линейными положительными полиномиальными операторами при $r = 2$ и любом выпуклом модуле непрерывности $\omega(t)$. При любом r решение такой задачи сводится к вычислению $\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, где функция $g(t)$ определяется ядром оператора. При этом при чётных r отсутствие симметрии функции $g(t)$ значительно усложняет задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доронин В. Г., Лигун А. А. О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности // Докл. АН СССР.-1980.-251, №1.-с. 16-19.

Получено __.__.2006 г.

УДК 621.9.06

В.В.Дорофеев, А.Н. Коробочка

РОЗРОБКА АЛГОРИТМІВ ПІДПРОГРАМНОГО СУПРОВОДЖЕННЯ AUTOCAD

Вступ. В технічних розробках гвинтова лінія та поверхні, пов’язані з нею, посідають важливе місце . Досить згадати різьбову поверхню, або різь. Утворення різі , її геометричні та механічні параметри вивчені та описані досконально. Але зображення різі в технічних малюнках, проектах різної складності носять спрощений характер. На рис. 1 наведено приклад з’єднання за допомогою болта та шпильки. При уважному вивченні рисунка неважко побачити, що різь на цьому рисунку являє собою сукупність торових поверхонь, твірними яких були трикутники.

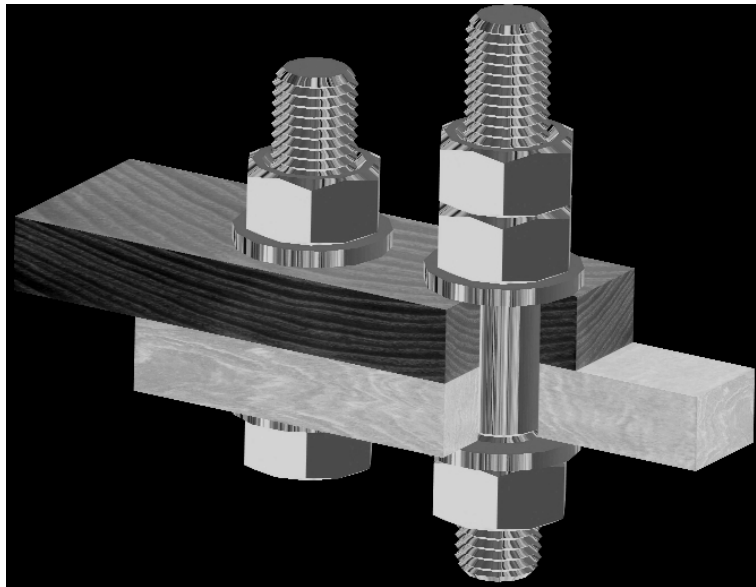


Рисунок 1

Постановка задачі досліджень. В AutoCAD , як і у більшості сучасних графічних програмах, гвинтова лінія є відсутньою , як підпрограма. Розглянемо декілька алгоритмів формування гвинтової поверхні , які могли б стати базовими для формування гвинтових поверхонь з будь-якими параметрами.

Результати досліджень. В AutoCAD можливо застосувати циліндричні координати (рис. 2). Параметр будь – якої точки задається у вигляді $5 < 30 , 6$, де 5 параметр X , знак < означає

роботу у циліндричних координатах; 30 – кут 30° від осі X , а 6 – параметр Z .

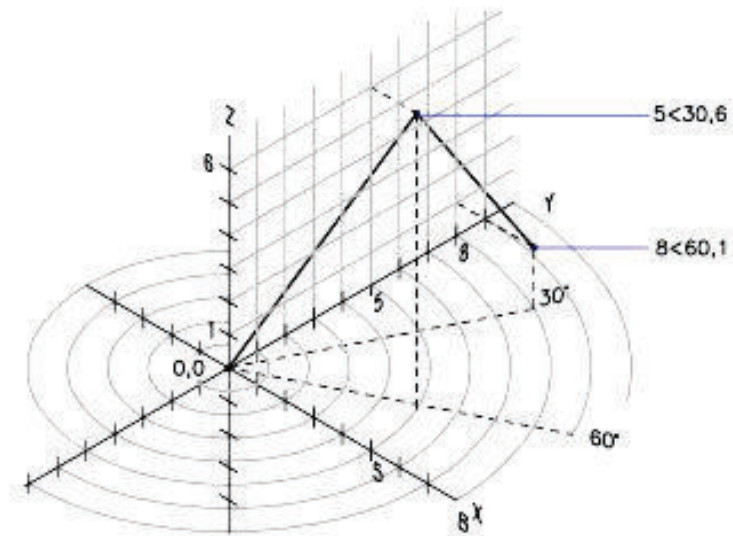


Рисунок 2

Наступна точка має вже параметри $8 < 60, 1$, де 8 – параметр X , 60 – кут в площині XOY , 1 – параметр Z .

Такий підхід дає змогу побудувати масив точок, які можливо після його з'єднати у масив поліліній. На рисунку 3 наведено результат розрахунків та розташування точок на поверхні кругового циліндра. Як приклад розглядається один повний виток майбутньої поверхні.

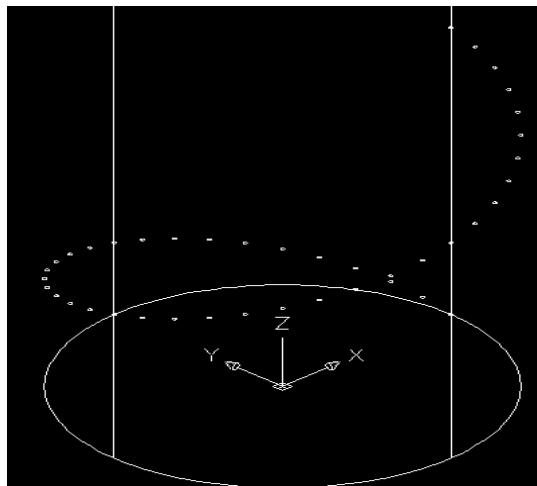


Рисунок 3

Після отримання масиву точок їх з'єднують за допомогою просторової полілінії (з'єднання сплайном не дає бажаного

результату , тому що формоутворення поверхні уздовж сплайну в AutoCAD не передбачено , окрім особливих випадків.

Фрагмент полілінії , накладеної на бокову поверхню кругового циліндру , наведено на рисунку 4.

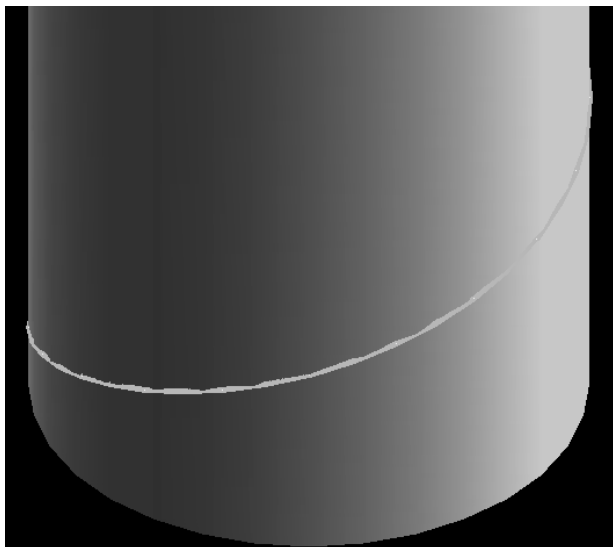


Рисунок 4

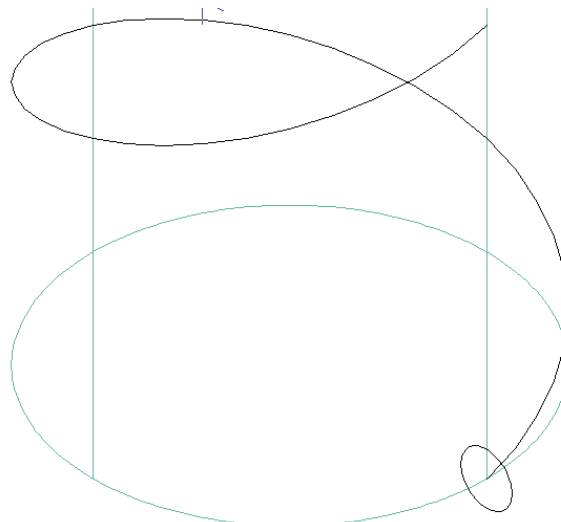


Рисунок 5

Після отримання направляючої (просторової полілінії) переходимо до формування поверхні. Для цього визначаємо твірну. Для спрощення розуміння алгоритму як твірну обираємо коло, розташоване в площині, ортогональній траєкторії лінії в її початку (рис. 5). В результаті просування твірної уздовж направляючої отримуємо фрагмент гвинтової поверхні (рис. 6).

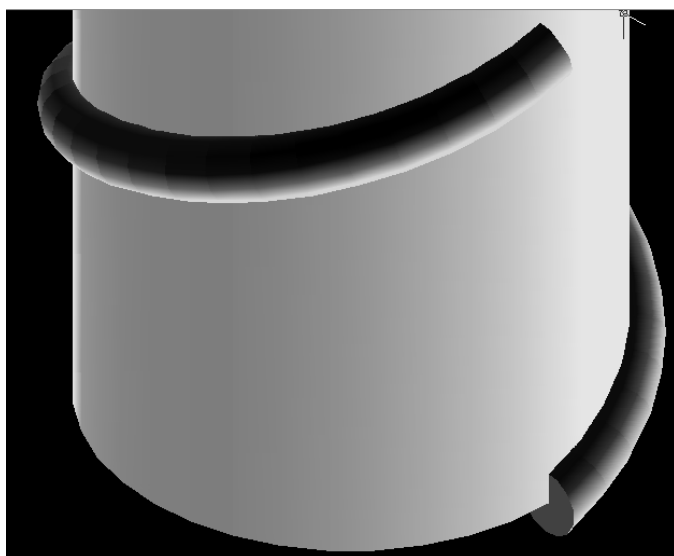


Рисунок 6

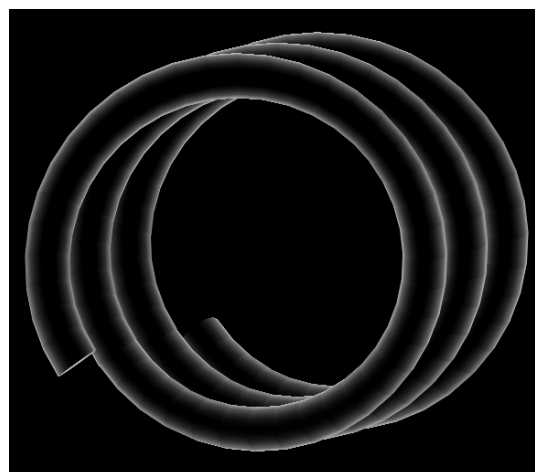
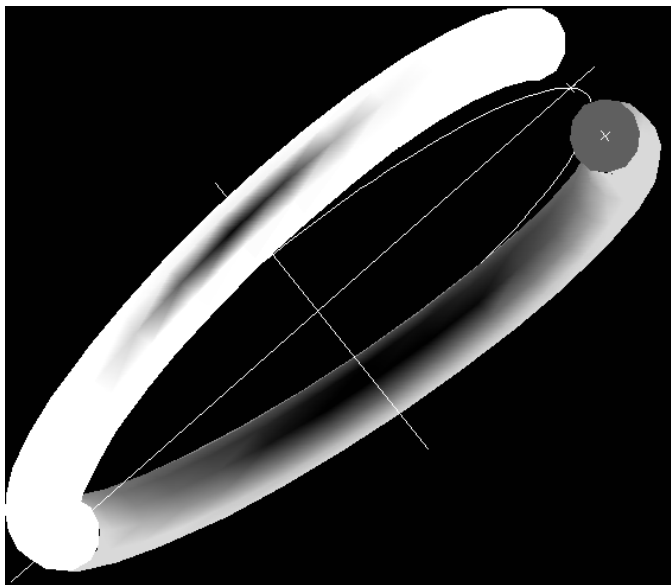


Рисунок 7

В результаті отримано гвинтову поверхню ; після відповідних геометричних операцій (копіювання, масштабування, об'єднання тощо) поверхня набуває звичного для конструктора вигляду , як наведено на рисунку 7.

Слід зауважити, що розуміння, розробка та втілення такого підходу вимагає від конструктора знання специфічних розділів математики (диференціальна та прикладна геометрія). Цей підхід є класичним , з математичної точки зору бездоганим, але наведені вище зауваження привели до появи іншого, спрощеного алгоритму. Алгоритм, який буде розглянуто далі ,також виник із потреб комп'ютерної графіки і також присвячений утворенню гвинтових поверхонь. Уявімо , що утворено торову поверхню з направляючим колом k та твірним колом m (рис.8).

Наступним етапом такого алгоритму є процедура «розрізання» та «розведення» торової поверхні. Розведення «півторів» відбувається відносно нерухомої спільної точки.



направляюча k

твірне коло m

Рисунок 8

Цілком зрозуміло, що при досить великому розведенні частин спотворення буде звичним . Втім простота алгоритму повністю компенсує його теоретичні похибки . Якщо врахувати , що розміри гвинтових поверхонь в різьбових з'єднаннях відносно решти деталей невеликі , то такий алгоритм на практиці є цілком прийнятний.

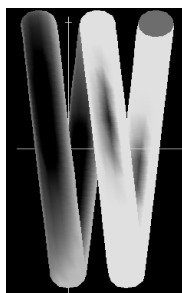


Рисунок 9

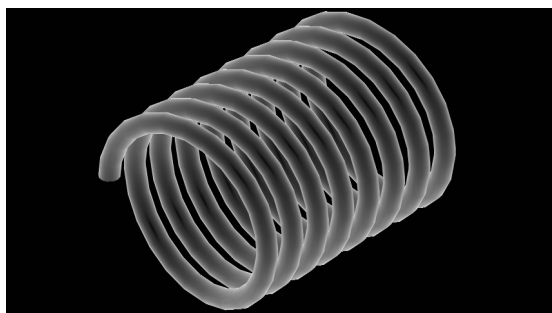


Рисунок 10

Наступним етапом, як і в попередньому алгоритму, є також копіювання та об'єднання (рис. 9).

Остаточно утворена гвинтова поверхня має вигляд , як наведено на рисунку 10.

Висновки. Порівняння рисунків 7 та 10 приводить до висновку, що утворені гвинтові поверхні на кресленнях за наведеними алгоритмами не відрізняються одна від однієї. Між тим, алгоритми їх утворення абсолютно різні як за підходом , так і за складністю.

Як результат наведеного алгоритму на рис.11 показано різьбу з метричним профілем. Наведена різь кардинально відрізняється від різі на рисунку 1. Тут видно нахил різьби (який легко змінювати). Такий алгоритм є конче необхідним для дизайнерської доводки презентаційних креслень , рекламних креслень тощо.

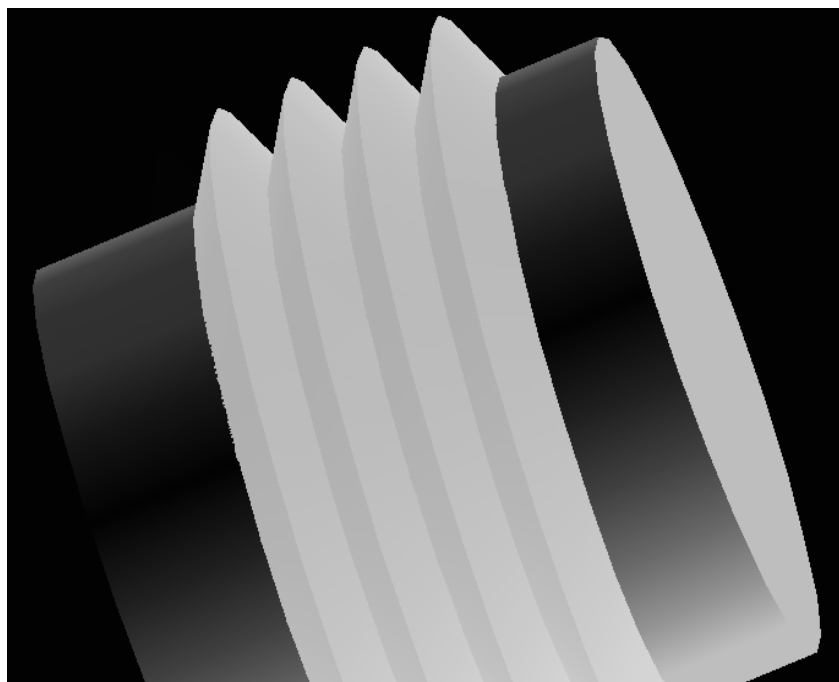


Рисунок 11

Получено __.__.2006 г.

УДК 622.026

П.З.Луговой, З.Барановский

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РАЗРЫВНЫХ ВОЛН С
КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА
АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ПОРОД**

Введение. При решении задач устойчивости горных выработок под действием сейсмических, взрывных и волн от горных ударов существенное внимание стало уделяться изучению движения разрывных волн, моделируемых поверхностями фронтов, переносящих импульс давления [1,2]. Для описания этих явлений удобно применять нулевое приближение лучевого метода [3,4]. При его использовании нет необходимости следить за динамическим процессом во всей области рассматриваемого поля, а достаточно ограничиться анализом динамики пород только на участке поверхности фронта, представляющем интерес.

При перестройке и распространении волнового фронта его гладкость может нарушаться, а в местах сформировавшихся геометрических особенностей возникают всплески функций деформаций и напряжений [5–9]. Проанализировать особенности на фронтах разрывных волн в анизотропных породах оказывается намного сложнее задачи их определения в изотропных породах, поскольку в первом случае приходится решать систему существенно нелинейных уравнений. В данной работе их исследование осуществляется с помощью методики, основанной на совместном применении метода Ньютона и процедуры продолжения по параметру [10, 12]. На основе предложенного подхода исследовано взаимодействие плоских фронтов разрывных волн, распространяющихся в трансверсально-изотропных упругих средах с естественными или созданными при ведении горных работ криволинейными поверхностями их раздела. Установлено, что в зависимости от упругих характеристик пород, разделенных криволинейными поверхностями, они могут как усиливать, так и ослаблять действие разрывных волн. В данной работе вопросы фокусировки и рассеивания разрывных волн напряжений изучаются применительно к слоистым упругим средам с параболоидными поверхностями раздела.

Постановка задачи. Уравнения теории линейной упругости анизотропных сред включают следующие соотношения:

1. Уравнения движения элемента упругой среды

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где σ_{ik} – компоненты тензора упругих напряжений, x_k – декартовы координаты, f_i – компоненты вектора плотности массовых сил, u_i – компоненты вектора упругих перемещений, ρ – плотность вещества упругой среды, t – время.

2. Соотношения Коши для вычисления деформаций ε_{ik} сплошной среды

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

3. Соотношения Гука

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ij,kl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

где $c_{ij,kl}$ – компоненты тензора упругих постоянных среды.

В рассматриваемом случае исследования будут проводиться в трансверсально-изотропных средах, характеризуемых пятью неустраняемыми параметрами упругости λ, μ, l, m, p , где λ и μ – параметры Ламе, l, m, p – параметры анизотропии [3].

При решении задач о распространении разрывных волн в упругих средах будем использовать лучевой метод [3, 4]. Его применение связано с постановкой и решением двух задач. Первая из них – кинематическая. Она заключается в геометрическом построении лучей и системы подвижных фронтов, а также в выявлении каустик и геометрических особенностей, в окрестности которых интенсивность поля неограниченно (в рамках теории упругости) возрастает [5, 13]. Вторая задача является чисто динамической. Она связана с определением полей напряжений в некоторой окрестности поверхности волнового фронта и решается с помощью системы уравнений переноса.

Рассмотрим решения уравнений (1) – (3) движения упругой анизотропной среды в форме плоской монохроматической волны с

волновым числом k и фазовой скоростью v . Ее фронтами являются поверхности постоянных фаз

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt = \text{const}, \quad (4)$$

локально совпадающие с площадками, перпендикулярными орту $\mathbf{n}$ и движущиеся со скоростью $\mathbf{v} = v \mathbf{n}$.

Вопрос об определении вектора поляризации $\mathbf{A}$ волны и ее фазовой скорости v для выбранного направления $\mathbf{n}$ решается на основе однородной системы алгебраических уравнений [3]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p A_q - v^2 A_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Из условия существования нетривиальных решений этой системы следует уравнение третьей степени относительно v^2

$$\left| \sum_{k,p=1}^3 \lambda_{ik,pq} n_k n_p - v^2 \delta_{iq} \right| = 0, \quad (6)$$

с помощью которого для каждого $\mathbf{n}$ можно найти

$$[v(\mathbf{n})^{(1)}]^2 > [v(\mathbf{n})^{(2)}]^2 \geq [v(\mathbf{n})^{(3)}]^2 > 0. \quad (7)$$

Здесь $v^{(1)}$ – скорость распространения фронта квазипродольной qP-волны; $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ – соответствуют скорости для двух квазипоперечных qS-волн.

Энергия волнового поля в анизотропных средах распространяется с групповой (лучевой) скоростью, которая в общем случае отличается от фазовой скорости величиной и направлением. Разделив усредненный по времени поток энергии на ее плотность, можно получить выражения для составляющих вектора лучевой скорости

$$\mathbf{o}^{(r)} = \sum_{k=1}^3 \xi_k^{(r)} \mathbf{i}_k. \quad \text{Лучевая и фазовая скорости связаны соотношением}$$

$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{o}^{(r)}) = v^{(r)}$ из которого следует, что лучевая скорость не может быть меньше фазовой, а их равенство может наблюдаться только в случае, когда они совпадают по направлению.

Если рассматривать разрывную волну, то из (4) следует, что поверхность ее фронта можно представить соотношением $\tau(x_1, x_2, x_3) - t = 0$, в котором функция τ должна удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$\sum_{i,k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)} = 1, \quad (8)$$

обобщающему уравнение пути, пройденного фронтом разрывной волны, в анизотропной среде. Входящие в (8) величины p_k ($k = 1, 2, 3$) представляют собой компоненты вектора рефракции $p_k \equiv \partial \tau / \partial x_k = n_k / v^{(r)}(\mathbf{n})$ ($k = 1, 2, 3$).

Для построения волнового фронта необходимо найти решения уравнения (8), которое с помощью метода характеристик приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_k / d\tau &= \xi_k = \sum_{i,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}, \\ dp_k / d\tau &= \sum_{i,k,p,q=1}^3 \frac{\partial \lambda_{ik,pq}}{\partial x_m} p_k p_p A_q^{(r)} A_i^{(r)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Первая группа этих уравнений описывает распространение волны вдоль луча с лучевой скоростью $\mathbf{o} = \mathbf{o}^{(r)}(\mathbf{n}, x_k)$. При заданных начальных условиях система дифференциальных уравнений (9) имеет единственное решение

$$x_k = x_k(\alpha, \beta, \tau), \quad p_k = p_k(\alpha, \beta, \tau), \quad (k = 1, 2, 3), \quad (10)$$

непрерывное вместе со всеми его частными производными относительно лучевых координат α, β, τ .

Однозначность соответствия лучевой (α, β, τ) и декартовой (x_1, x_2, x_3) систем определяется якобианом перехода от x_1, x_2, x_3 к α, β, τ [5]

$$J(\alpha, \beta, \tau) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\alpha, \beta, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \beta} & \frac{\partial x_2}{\partial \beta} & \frac{\partial x_3}{\partial \beta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \tau} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau} & \frac{\partial x_3}{\partial \tau} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

При этом отношение $L = J(\tau) / J(\tau_0)$ называется расходимостью лучей. Здесь τ_0 – значение координаты τ на некоторой исходной (начальной) поверхности фронта.

Поверхности, на которых якобиан $J(\tau)$ обращается в нуль, являются каустическими. На них уравнение семейства лучей $x = x(\alpha, \beta, \tau)$ не может быть однозначно разрешено относительно α, β ,

τ , что соответствует бесконечному сближению лучей и возникновению особенностей поля. Поэтому точки, в которых якобиан (11) вырождается, являются бифуркационными.

Построенная с помощью (10) система лучей и фронтов позволяет приступить к определению интенсивности волны в окрестности фронта. Воспользуемся разложением решения системы (1) – (5) вдоль луча в ряд в окрестности фронта волны. Для компонент вектора перемещений u_q , ($q = 1, 2, 3$) он начинается с линейных слагаемых

$$u_q = \sum_{m=0}^{\infty} U_q(x_1, x_2, x_3) \frac{[t - \tau(x_1, x_2, x_3)]^{m+1}}{(m+1)!} H[t - \tau(x_1, x_2, x_3)] \quad (q = 1, 2, 3). \quad (12)$$

Здесь $H[t - \tau(x_1, x_2, x_3)]$ – функция Хэвисайда.

При постановке задачи об исследовании поведения волны в малой окрестности фронта в (12) удерживается только один член $m = 0$ и после подстановки (12) в уравнения движения (1) – (3) для вычисления компонент амплитудного вектора U_q^0 получается однородная система уравнений [3]

$$\sum_{k,p,q=1}^3 \lambda_{ik,pq} p_k p_p U_q^0 - U_i^0 = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (13)$$

$$U_i^0 = \varphi(x_1, x_2, x_3) A_i^{(r)}(n, x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (14)$$

где φ – неизвестная функция координат точек фронта. Для нахождения φ используется уравнение [3]

$$2\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \varphi \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\tau} = 0, \quad (15)$$

решение которого имеет вид

$$\varphi = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \frac{c_0(\alpha, \beta)}{\sqrt{|J(\alpha, \beta, \tau)|}} \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{c_0(\alpha, \beta)}{\sqrt{|J(\alpha, \beta, \tau)|}} \quad \text{при} \quad \rho = \rho_0, \quad (17)$$

где $c_0(\alpha, \beta)$ – функция, зависящая от исходных данных.

Таким образом, в нулевом приближении лучевого метода для составляющих поля смещений в окрестности фронта волны на основании формул (12), (16), получаются выражения

$$u_q^{(r)} = \frac{c_0(\alpha, \beta) \cdot A_q^{(r)}(\alpha, \beta, \tau)}{\sqrt{|J(\alpha, \beta, \tau)|}} [t - \tau(x_1, x_2, x_3)] H[t - \tau(x_1, x_2, x_3)] \quad (q = 1, 2, 3). \quad (17)$$

Поскольку в однородной породе $A_q^{(r)}(\alpha, \beta, \tau) = A_q^{(r)}(\alpha, \beta, 0)$, то на основании (12), (14), (17) можно записать

$$\dot{u}_q^{(r)}(\alpha, \beta, \tau) = \dot{u}_q^{(r)}(\alpha, \beta, 0) \sqrt{\frac{J(\alpha, \beta, 0)}{J(\alpha, \beta, \tau)}} \quad (q=1,2,3). \quad (18)$$

Это равенство применяется для вычисления величин разрывов соответствующих функций на фронте волны.

Взаимодействие разрывной волны с поверхностью раздела анизотропных упругих пород. При решении задач теории упругости для неоднородных тел, находящихся в контакте по поверхности их раздела G необходимо к уравнениям теории упругости (1) – (3), записываемым отдельно в областях, занимаемых каждым из тел, добавить краевые уравнения на границе раздела. Эти уравнения вытекают из условия непрерывности вектора напряжений на каждой элементарной площадке граничной поверхности при переходе через эту площадку и из условия совместности перемещений обоих тел на площадке. Так, например, для плоской поверхности раздела G ($x_2 = 0$), отделяющей упругое полупространство I ($x_2 < 0$) от полупространства II ($x_2 > 0$), эти условия записываются в виде

$$(\mathbf{u}_{(1)} - \mathbf{u}_{(2)})|_G = 0, \quad (19)$$

$$(\mathbf{y}_{2(1)} + \mathbf{y}_{2(2)})|_G = 0, \quad (20)$$

где $\mathbf{u}_{(1)}, \mathbf{u}_{(2)}$ – векторы перемещений, $\mathbf{y}_{2(1)}, \mathbf{y}_{2(2)}$ – векторы плотности сил, действующих на элементарную площадку $x_2 = \text{const}$ в средах I и II , соответственно.

Достоинства подхода, основанного на лучевой концепции, заключаются в том, что в этом случае рабочей основой методологии являются не сами дифференциальные уравнения движения среды, а некоторые общие и достаточно простые свойства их решений, которые формулируются в виде физических принципов и законов и, по сути, являются интегралами этих уравнений. Поэтому, как отмечено выше, при применении методов лучевой оптики к исследованию распространения ударных волн в упругих средах задача динамической теории упругости распадается на две – кинематическую и динамическую.

Соответственно двум этим задачам рассматриваются также вопросы о взаимодействии ударных волн с поверхностями раздела упругих сред. Вначале выполняется геометрическое построение лучей и фронтов падающей волны и систем формирующихся лучей и фронтов отраженных и преломленных волн, отходящих от

поверхности раздела. Эта процедура реализуется путем решения соответствующих уравнений Снелля [10]. После этого с помощью соотношений (19), (20) производится вычисление напряжений на этих фронтах.

При анализе формирования криволинейных фронтов систем отраженных и преломленных волн, инициированных криволинейным фронтом падающей волны, используется локально плоский подход, в соответствии с которым все поверхности фронтов в малой окрестности точки взаимодействия волн с поверхностью раздела (в том числе и сама разделяющая поверхность) считаются локально плоскими. Он позволяет принять два положения о возбуждении и преломлении плоских волн [3].

Обсуждение результатов. Предложенная теория была использована для исследования явлений отражения и преломления разрывных qP -волн при их взаимодействии с параболоидными поверхностями раздела transversально изотропных упругих пород со следующими параметрами $\lambda_1 = 5,0 \times 10^{10}$ Па, $\mu_1 = 4,0 \times 10^{10}$ Па, $l_1 = 0,1\lambda_1$, $m_1 = 0,2\mu_1$, $p_1 = 0,4(\lambda_1 + 2\mu_1)$, $\rho_1 = 2,7 \times 10^3$ кг/м³, $\lambda_2 = 3,4 \times 10^9$ Па, $\mu_2 = 1,4 \times 10^{10}$ Па, $l_2 = 0,1\lambda_2$, $m_2 = 0,2\mu_2$, $p_2 = 0,4(\lambda_2 + 2\mu_2)$, $\rho_2 = 2,8 \times 10^3$ кг/м³. При таких соотношениях параметров ось Ox_2 является осью симметрии физических свойств, благодаря чему вдоль нее возможно распространение чисто продольной P -волны и чисто поперечной S -волны. Рассмотрены случаи, когда плоская разрывная P -волна, распространяющаяся в среде I вдоль оси Ox_2 , взаимодействовала с параболоидными поверхностями G , образующие сечения которых описываются уравнением

$$x_2 = a \cdot x_1^2 + b.$$

Здесь $a = \pm 5 \cdot 10^{-4}$ м⁻¹, b меняется в зависимости от условий задачи; знак „-” соответствует вогнутой поверхности, знак „+” – выпуклой поверхности.

Если вогнутая параболоидная поверхность G является поверхностью сопряжения сред I и II , то явление фокусировки свойственно как отраженным, так и преломленным волнам (рис.1). В данном случае при распространении падающей плоской P -волны в среде I преломленная qP -волна 2 фокусируется, а qS -волна 3 рассеивается (рис.1,а). Если порядок размещения сред изменить на

обратный, то преломленная qP -волна 2 рассеивается, а qS -волна 3 фокусируется (рис.1,б).

Явления преобразования разрывных волн существенно усложняются, если они взаимодействуют с двумя поверхностями раздела, поскольку в этом случае имеют место многократные акты отражения-преломления. Характер преобразования qP -волны двояковыпуклой параболоидной линзой в зависимости от порядка следования сред I и II представлен на рис.2,а,б. В первом случае линза помещена в среду I и ее материал обладает свойствами среды II , во втором случае порядок чередования сред обратный. Чтобы не загромождать рисунки, здесь показаны лучи и фронты только проникших qP -волн. Как видно, при одних и тех же геометрических параметрах двояковыпуклая линза может быть как собирающей (рис.2,а), так и рассеивающей (рис.2,б).

Одной из разновидностей тектонических аномалий может быть искривление слоя горной породы. В связи с этим важно проанализировать как влияет это искривление на характер преобразования фронта волны при прохождении через него. На рис.3 показаны схемы дифракции разрывных волн на выпуклых (а) и вогнутых (б) параболоидных искривлениях слоя среды II . Результаты расчетов свидетельствуют, что в общих случаях преломленная qP -волна фокусируется, однако фокусные расстояния при этом оказываются довольно большими.

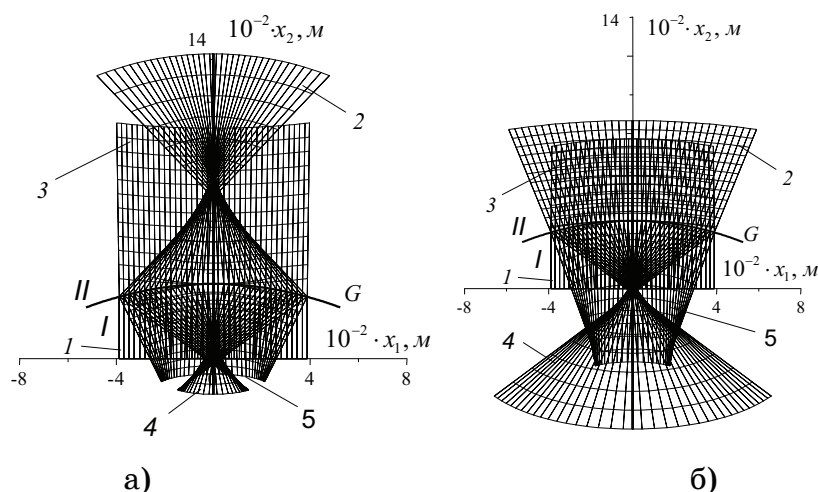


Рисунок 1

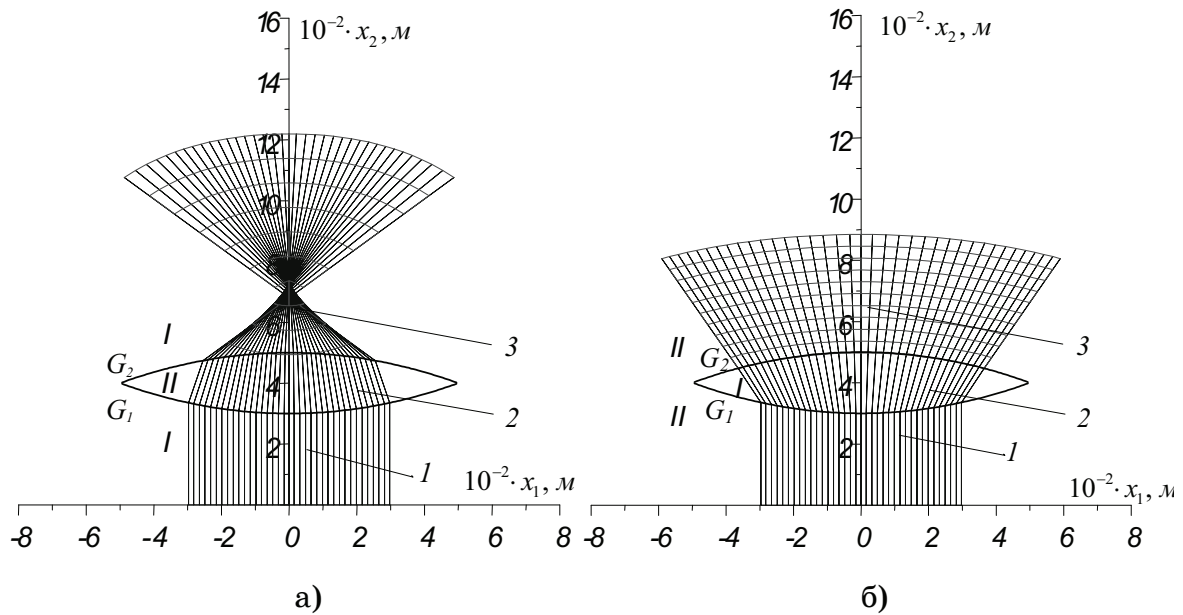


Рисунок 2

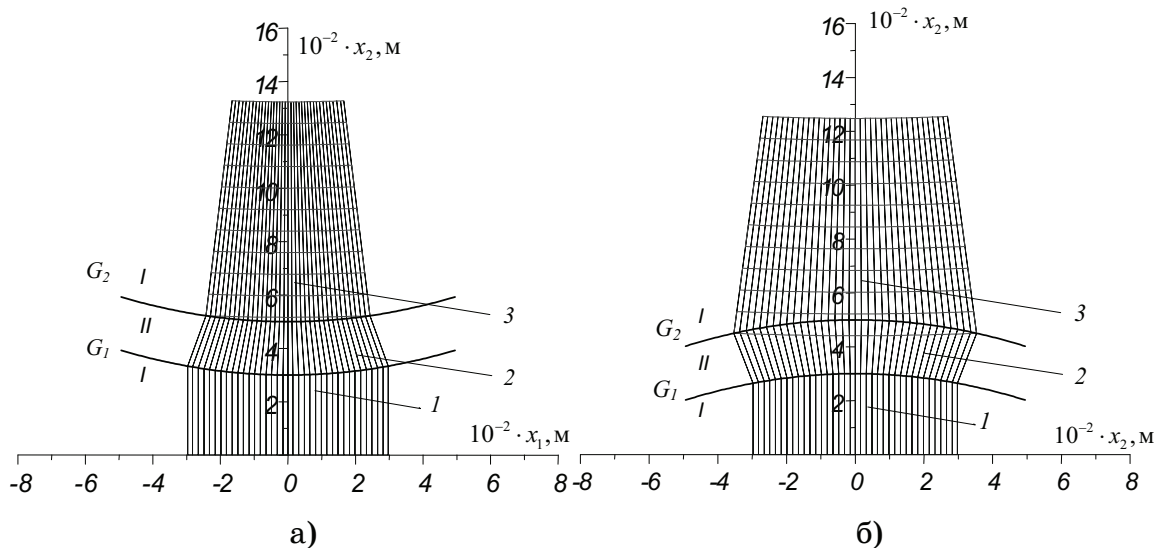


Рисунок 3

Выводы. С помощью разработанной методики построены фронты отраженных от поверхности раздела и проникших через нее разрывных волн напряжений в анизотропных упругих породах, решены задачи о фокусировке и рассеивании таких волн свободными криволинейными поверхностями, поверхностями раздела, упругими линзами и искривленными слоями. Показано, что при одних и тех же геометрических свойствах поверхностей раздела и формах упругих линз их способности фокусировать или рассеивать разрывную волну и тем самым усиливать или ослаблять ее интенсивность, определяется механическими (акустическими) свойствами упругих сред, а также

очередностью их прохождения, что необходимо учитывать при выборе мест для строительных работ на подработанных территориях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. – М.: Мир, 1972. – 183с.
2. Новацкий В.К. Волновые задачи теории пластичности. – М.: Мир, 1978. – 307с.
3. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Ленинград: Наука, 1980. 280 с.
4. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К.: Наукова думка, 1988. - 220 с.
5. Арнольд В.И. Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
6. Гуляев В.И., Иванченко Г.М. Дифракция плоской разрывной волны в слоистой анизотропной упругой среде //Механика композитных материалов. 2003. – №1 –С. 39–52.
7. Гуляев В.И., Иванченко Г.М. Фокусировка и рассеивание плоских ударных волн на поверхности раздела анизотропных упругих сред. //Прикл. механика и техн. физика.– 2002.– Т.43, №5.– С. 21–27.
8. Gulyayev V.I., Lugovoy P.Z., Ivanchenko G.M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media //International Journal of Solids and Structures – 2003. – 40. – P. 237-247.
9. Gulyayev V.I., Lugovoi P.Z., Ivanchenko G.M. Focusing and scattering the nonstationary wave by the free surface of an anisotropic elastic medium // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N7. – P.86-93.
10. Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Яковенко Е.В. Дифракция ударной волны на криволинейной поверхности раздела трансверсально-изотропных упругих сред // Прикл. математика и механика. –2000.– 64, №3.–С. 394–402.
11. Lugovoy P.Z., Gouliaev V.I. Propagation of shock wave fronts in anisotropic layered media. CP505, Shock Compression of Condensed Matter – 1999/ Edited by M.D.Furnish, L.C.Chhabildas and R.S.Nixon //Proceeding of the Conference of the American Physical Society, Snowbird, Utah, USA. – P. 1287-1290.
12. Худек М., Гуляев В.И., Луговой П.З., Иванченко Г.М. Лучевые методы в задачах распространения ударных волн в слоистых горных породах // Materialy Naukowe XI Miedzynarodowe Sympozjum GEOTECHNIKA – GEOTECHNICS 2004, Gliwice – Ustron, 19 – 22 pazdziernika 2004. С.29 – 40.
13. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.

Получено __.__.2006 г.

УДК 621.01.216

А.М. Павленко, Р.А. Климов

ДИНАМИКА ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В ЭМУЛЬСИЯХ

Введение. Проводимые исследования [1-7] ставят своей целью определение оптимальных режимов для процессов эмульгирования, диспергирования и гомогенизации смесей двух и более взаимно не растворимых жидкостей. Для этих процессов играют большую роль паровые пузырьки и паровые полости. Были предложены модели, которые описывают рост парового пузырька из микророзыдаша в объеме жидкости [2], на поверхностях неограниченного размера при кипении в условиях свободной конвекции [3] и на микроповерхностях [4], представлена модель роста парового пузырька, находящегося в ансамбле таких же пузырьков с учетом коллективного их действия на него [5]. В некоторых источниках проведен сравнительный анализ расчетных и опытных данных. В [6] представлены модели нагрева капли эмульсии типа вода-масло и роста паровой фазы в процессе закипания воды. В данной работе проводится сравнительный анализ различных методик расчета, а также сопоставление результатов [6] с экспериментальными и расчетными данными [2-5].

Постановка задачи. Рассматривая работы по динамике роста парового пузырька на поверхностях неограниченного размера при кипении в условиях свободной конвекции [3] и при кипении жидкостей на микроповерхностях [4], видно, что рост парового пузырька протекает в несколько этапов, при этом фактически можно зафиксировать киносъемкой только асимптотическую стадию роста и в работе [4] только она и рассматривается. Приведенные формулы для определения радиуса пузырька в любой момент времени имеют ограниченное применение, т.к. не учитывают сил поверхностного натяжения, инерционных сил и др. Сравнивая результаты расчета по модели [3] видно общую согласованность с экспериментальными данными, но, как и выделяют сами авторы этой модели, существует такая область опытных данных, которая не описывается данной моделью. Из представленных графиков сравнения экспериментальных данных и расчетов по модели [4] можно сделать вывод о том, что расчет согласуется с опытом лишь при определенных значениях коэффициентов C_i , что является основным

ограничивающим фактором применения этой модели, т.к. для каждого конкретного исследования роста парового пузырька необходимо знать определенное значение этих коэффициентов. В целом работы [3,4] показывают доминирующую роль нагрева стенки в начале роста пузырька, но в эмульсиях при отделении какой-либо из фаз пузырьки находятся также и в непрерывной среде. Модель динамики одиночного парового пузырька [2] позволяет производить расчеты роста и схлопывания парового пузырька, находящегося в объеме неподвижной жидкости, а также в потоке с учетом модели деформации, при этом наблюдается удовлетворительное согласование опытных и расчетных данных. При исследовании поведения ансамбля паровых пузырьков [5], применяя ячеечную модель, можно оценить в каждый момент времени среднее давление в межпузырьковом пространстве системы и ее паросодержание, что позволяет получить результаты по эволюции отдельного пузырька в такой системе. Но эта модель не позволяет детализировать гидродинамические и тепломассообменные явления, возникающие на микроуровне в межпузырьковом пространстве. Также остается открытым вопрос о том, что пузырьки пара, находящиеся в объеме жидкости и возле стенок сосуда, в котором эта жидкость находится, могут иметь различные размеры, находиться в разных термических и гидродинамических условиях, а также могут сливаться один с другим, тем самым, влияя на усложнение описания процесса схлопывания или роста пузырьков.

Основными недостатками практически всех рассмотренных исследований и методик есть то, что они не описывают динамику роста пузырька при его появлении, только в [7] приведено некоторое описание этого процесса от начального радиуса пузырька $R \approx 0$, а во всех других исследованиях и расчетах рассматривается уже существующий пузырек, который имеет начальный радиус $R > 0$ мкм и начальные термодинамические параметры. Некоторые работы предполагают использование высоких скоростей схлопывания парового пузырька для процессов дробления жидких включений эмульсий, но моделей использующих совместный процесс роста (схлопывания) пузырька и дробления включений не существует.

Метод исследования. В литературных источниках практически отсутствуют работы, в которых при решении указанной задачи учтены процессы снижения поверхностного натяжения при наличии

ПАВ. Особенностью физических свойств эмульсий типа вода-масло-пар (воздух) является наличие адсорбционных слоев ПАВ, вследствие чего поверхностное натяжение на границе раздела фаз вода-масло значительно уменьшается и по уравнению

$$W_k = \frac{16\pi \cdot \sigma^3}{3(p_n - p_{жс})^2} \quad (1)$$

работа образования критического парового (W_k) пузырька снижается пропорционально величине поверхностного натяжения σ^3 .

Количественная оценка условий вскипания эмульсий, основанная на том положении, что граничные слои на поверхности частиц включений при перегреве жидкости инициируют её вскипание, проведена в [1]. В процессе экспериментальных исследований замечено, что вода в эмульсиях вскипает при небольших перегревах, что не характерно для чистых жидкостей, вскипание которых происходит при перегреве на несколько десятков градусов. Это объясняется тем, что в граничном слое масляных частиц поверхностное натяжение ниже, чем в объеме и для образования паровой фазы достаточно достижения более низких температур. Таким образом, процесс образования новой фазы инициируется внутренним тепловым воздействием на поверхности масляных частиц. Из экспериментов [1] видно, что среднее время вскипания водомасляных эмульсий снижается с повышением концентрации ПАВ и выражается слабая зависимость среднего времени вскипания от диаметра капли. В [6] представлены математические модели нагрева капли эмульсии и роста паровой фазы. Модель расчета роста паровой фазы имеет вид, приведенный на рисунке 1. Математическая постановка включает уравнения теплопроводности для воды и масла в сферических координатах:

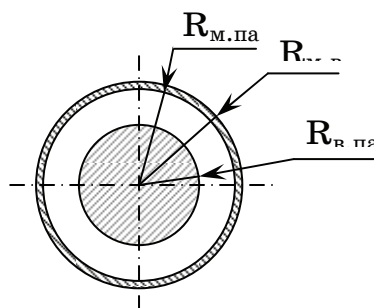


Рисунок 1 – К модели роста парового объема при кипении воды в процессе нагрева воздухом ($R_{м.воз.}$ – радиус границы раздела масло-воздух; $R_{м.пар.}$ – радиус границы раздела масло-пар; $R_{в.пар.}$ – радиус границы раздела вода-пар)

$$\frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = a_B \cdot \left(\frac{\partial^2 t(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad \tau > 0, \quad 0 < r < R_{в.пар.}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial t(r, \tau)}{\partial \tau} = a_M \cdot \left(\frac{\partial^2 t(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial t(r, \tau)}{\partial r} \right), \quad \tau > 0, \quad R_{м.пар.} < r < R_{м.воз.}. \quad (3)$$

Начальные условия:

$$t(r, 0) = t_0, \quad 0 < r < R_{м.воз.}. \quad (4)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} -\lambda_M \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R_{м.воз.}} &= \alpha(R_{м.воз.}, \tau) \cdot (t_{воз.} - t_{м.воз.}), \quad \alpha = Nu \cdot \frac{\lambda_n}{d}, \quad -\lambda_B \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \\ t_{в.п.}(\tau) &= t_{кип.в.} = 100^\circ\text{C}, \quad t_{м.пар.}(\tau) = t_{кип.в.} = 100^\circ\text{C}. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения изменения массы пара и радиусов границ раздела:

$$\Delta M = \frac{\Delta \tau}{L} \cdot \left[\frac{4\pi \cdot \lambda_M \cdot (t_{м.воз.} - t_{м.пар.})}{\frac{1}{R_{м.пар.}} - \frac{1}{R_{м.воз.}}} - 8\pi \cdot R_{в.пар.} \cdot \lambda_B \cdot (t_{в.пар.} - t_{ц}) \right]; \quad (6)$$

$$R_{в.пар.}^* = \left(R_{в.пар.}^3 - \frac{3\Delta M}{4\pi \cdot \rho_B} \right)^{1/3}; \quad R_{м.пар.}^* = \left(R_{в.пар.}^{*3} + \frac{3\Delta M}{4\pi \cdot \rho_n} \right)^{1/3}; \quad R_{м.воз.}^* = \left(R_{м.пар.}^{*3} + \frac{3V_M}{4\pi} \right)^{1/3} \quad (7)$$

Критерий окончания расчета (толщина разрыва пленки масла):

$$\delta = R_{м.пов.}^* - R_{м.пар.}^*; \quad \delta \leq 0.5 \text{ мкм}. \quad (8)$$

Скорости движения границ раздела:

$$v_{в.пар.} = dR_{в.пар.}/d\tau; \quad v_{м.пар.} = dR_{м.пар.}/d\tau; \quad v_{м.воз.} = dR_{м.воз.}/d\tau. \quad (9)$$

Результаты расчетов по уравнениям (2–9) и их обсуждение приведены в [6]. Некоторые из них показаны на рисунке 2. Сравним эти результаты с результатами расчетов по моделям [2–5].

В [5] приведены графики изменения радиуса паровых пузырьков и скорости их роста для монодисперсного ансамбля пузырьков и для изолированного пузырька после мгновенного сброса внешнего давления от 59 до 20 кПа в рамках ячеечной модели. Для сравнения выберем изолированный пузырек и его параметры (рисунок 3).

Из рисунков 2 и 3 видно, что форма кривых изменения радиуса и скорости движения границы раздела имеют практически идентичный характер. Главным сходством рисунков 2б и 3б является наличие явно выраженного экстремума в графике изменения скорости, а если сравнивать кривую изменения скорости для $t_{воз.}=300^\circ\text{C}$ [6], то можно сделать вывод о том, что они практически одинаковы.

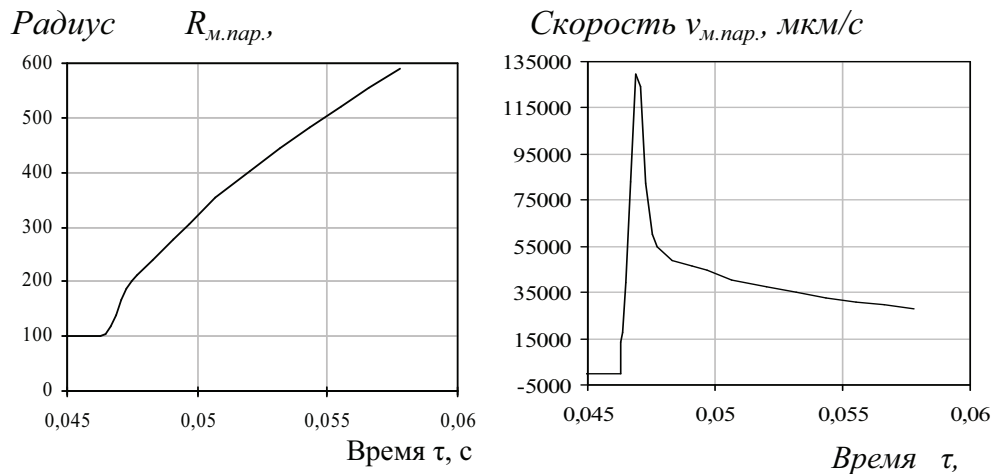
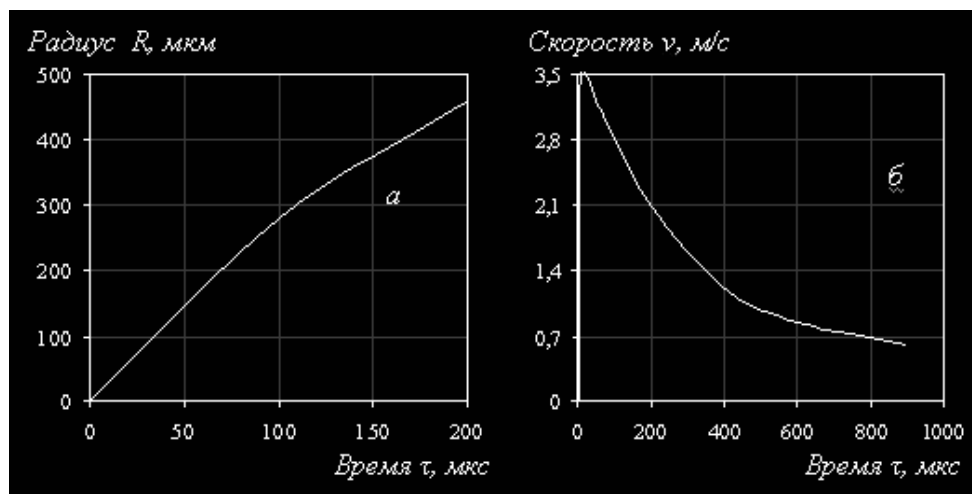
Рисунок 2 – Результаты расчетов по модели [6] для $t_{\text{воз.}}=500\text{ }^{\circ}\text{C}$ 

Рисунок 3 – Результаты расчетов по модели [5]

Время необходимое для увеличения радиуса на 500 мкм по результатам [5] занимает гораздо меньший промежуток, в результате чего и значения скорости роста пузырьков на рисунке 3б значительно выше, чем на рисунке 2б. Сравнивая результаты экспериментальных данных изменения радиуса парового пузырька [2-5] с рисунком 2а, видно, что характер изменения кривых $R(\tau)$ практически одинаковый во всех случаях, но конечные значения радиусов по экспериментам всегда больше, чем рассчитанные по [6], на одинаковом промежутке времени. Этот факт можно объяснить тем, что по модели [6] все количество теплоты воспринимает пленка масла и только потом от пленки она передается воде с паром, т.е. пленка играет роль термического сопротивления, как в процессе нагрева, так и в процессе кипения. При этом прямой участок на рисунках 2а и 2б указывает на процесс нагрева капли эмульсии до момента закипания воды. Модель представленная в [6] позволяет рассчитывать температурное поле по

сечению капли воды и пленки масла, как в процессе нагрева, так и в процессе роста паровой фазы, что не было предусмотрено во всех рассмотренных выше моделях и экспериментальных данных.

Выводы. В работе приведен сравнительный анализ различных подходов и методик расчета роста парового пузырька, показана отличительная особенность вскипания воды в эмульсиях типа вода-масло. Методы [2,5,7] позволяют только описать рост пузырька и разрыв пленки, в то время, как метод [6] предусматривает нахождение температурных полей по сечению капли эмульсии и временной промежутков до начала закипания воды, совместно с описанием роста паровой фазы до разрыва масляной пленки. Разрыв пленки масла учитывается минимальной ее толщиной при которой она разрушается. Формирование паровой фазы представлено количественно и экспериментально в [1]. Таким образом, модель [6] позволяет описать нагрев капли эмульсии до момента закипания воды, формирование паровой фазы, а также ее рост, совместно, что не могут сделать другие методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долинский А.А., Павленко А.М., Басок Б.И. Теплофизические процессы в эмульсиях. - Киев, Наукова думка, 2005. – 265с.
2. Долинский А.А., Иваницкий Г.К. Теоретическое обоснование принципа ДИВЭ. 1. Модель динамики одиночного парового пузырька. / Пром. теплотехника. – 1995. – Т.17. – №5. – С.3 – 29.
3. Басок Б.И., Зав’ялов В.Л., Кулінченко В.Р. Динаміка росту парової фази при кипінні рідин в умовах вільної конвекції. / Пром. теплотехника. – 2003. – Т. 25. – №6. – С.34 – 41.
4. Кравец В.Ю., Щербаков В.К. Скорость роста паровых пузырей при кипении жидкостей на микроповерхностях. / Пром. теплотехника. – 2000. – Т.22. – №2. – С.5 – 7.
5. Долинский А.А., Иваницкий Г.К. Теоретическое обоснование принципа ДИВЭ. 2. Исследование поведения ансамбля паровых пузырьков. / Пром. теплотехника. – 1996. – Т.18. – №1. – С.3 – 20.
6. Павленко А.М., Клімов Р.О., Басок Б.І. Розвиток методів гідротермічної гомогенізації./ Пром. теплотехника. – 2005. – Т. 27. – №4. – С.64 – 71.
7. Долинский А.А., Басок Б.И. Дискретно – импульсная трансформация энергии в адиабатно вскипающем потоке. / Пром. теплотехника. – 2001. – Т.23. – №4-5. – С.5 – 20.

Получено __.__.2006 г.

В.Г. Савченко, М.Е. Бабешко

**УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ
И РАДИАЦИОННОМ ОБЛУЧЕНИИ**

Введение. Известно, что под действием радиационного облучения в твердых телах происходят физические процессы, вызывающие существенное изменение механических свойств материалов. Для описания процессов термоупругопластического деформирования изотропных материалов с учетом изменения их механических характеристик при радиационном облучении известны определяющие уравнения, позволяющие исследовать процессы, характеризующиеся траекториями деформирования в виде прямых [1] и линий малой кривизны [2]. Изложим методику численного исследования упругопластического напряженно-деформированного состояния (НДС) слоистых оболочек вращения при осесимметричном нагружении с учетом его истории и влияния радиационного облучения.

Постановка задачи. Рассматривается слоистая оболочка вращения, изготовленная из изотропных материалов, первоначально находящаяся в ненапряженном и необлученном состоянии при начальной температуре $T = T_0$, а затем подвергнутая действию осесимметричных силовых нагрузок, неравномерного нагрева и радиационного облучения. Предполагается, что слои оболочки деформируются без проскальзывания и отрыва; оболочка не теряет устойчивости. В процессе нагружения и облучения в материалах оболочки наряду с упругими деформациями могут возникать зоны пластических деформаций, в которых может происходить разгрузка; уровни нагрузок и время их действия таковы, что деформации ползучести не возникают. Оболочка отнесена к криволинейной ортогональной системе координат s, θ, ζ , где s - меридиональная координата непрерывной координатной поверхности, $s_a \leq s \leq s_b$, s_a, s_b - координаты, соответствующие торцам оболочки; $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ - окружная координата, а $\zeta (\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_k)$ - координата, отсчитываемая по

нормали к координатной поверхности, ζ_0 - соответствует внутренней поверхности первого (внутреннего) слоя оболочки, а ζ_k - наружной поверхности последнего (внешнего) слоя; k - количество слоев, толщины которых $h_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}, i = 1, 2, \dots, k$. Задача решается в геометрически линейной квазистатической постановке в пределах малых деформаций с использованием гипотез Кирхгофа-Лява для пакета слоев. Для описания деформирования элементов оболочки используются соотношения теории терморadiационной пластичности при простом нагружении с учетом истории, линеаризированные методом переменных параметров упругости.

Метод решения. Для решения задачи процесс нагружения разбивается на ряд малых этапов таким образом, чтобы моменты времени, разграничивающие этапы, хорошо согласовались с моментами перехода от активного нагружения к разгрузке. Используя соотношения пластичности, уравнения равновесия и геометрические соотношения, задачу определения упругопластического НДС оболочки сводим к решению краевой задачи для системы уравнений

$$\frac{d\vec{Y}}{ds} = P(s)\vec{Y} + \vec{f}(s), \quad B_1\vec{Y}(s_a) = \vec{b}_1, \quad B_2\vec{Y}(s_b) = \vec{b}_2, \quad (1)$$

которую необходимо решить в каждом приближении на каждом этапе нагружения. В (1) $\vec{Y}$ - вектор-столбец разрешающих функций, $P(s)$ - матрица системы, $\vec{f}(s)$ - вектор-столбец дополнительных слагаемых, B_1, B_2 - заданные матрицы, $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ - заданные векторы-столбцы граничных условий. Компоненты матрицы $P(s)$ и вектора $\vec{f}(s)$ вычисляются в каждом приближении по результатам решения задачи в предыдущем приближении. Выражения для компонент матрицы $P(s)$ и вектора $\vec{f}(s)$ приведены в статьях [1,3].

Численные результаты. В качестве примера исследуем упругопластическое НДС сплошной круглой двухслойной пластины радиуса $R=50$ см с постоянной толщиной слоев $h_1=h_2=1,25$ см, за координатную поверхность которой выбрана срединная поверхность. Пластина, жестко защемленная по контуру, подвергается действию нормальной к срединной поверхности распределенной нагрузки $q_\zeta = 0,7$ МПа и радиационного облучения за счет падающего на поверхность $\zeta=-h/2$ потока нейтронов, при $T=T_0=0^\circ\text{C}$. Первый слой

пластины ($-h/2 \leq \zeta \leq 0$) изготовлен из графита, а второй – из стали 347. Распределение дозы радиации по толщине пластины задано законом $N = Ate^{-\mu(\zeta+h/2)}$, где $A=20 \cdot 10^{18}$ нейтрон/см²·с, $0 \leq t \leq 1$ с, $\mu=1,2$ см⁻¹ в первом и $\mu=0,55$ см⁻¹ во втором слое. Процесс нагружения был разбит на 5 этапов. На рис.1 приведены распределения вдоль координаты s меридиональных σ_{ss} , а на рис. 2 - окружных $\sigma_{\theta\theta}$ напряжений.

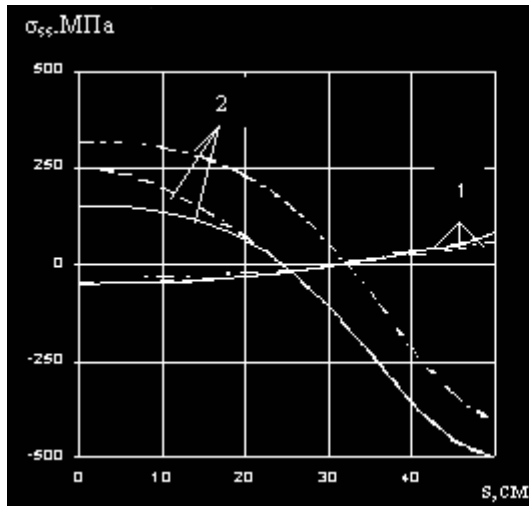


Рисунок 1

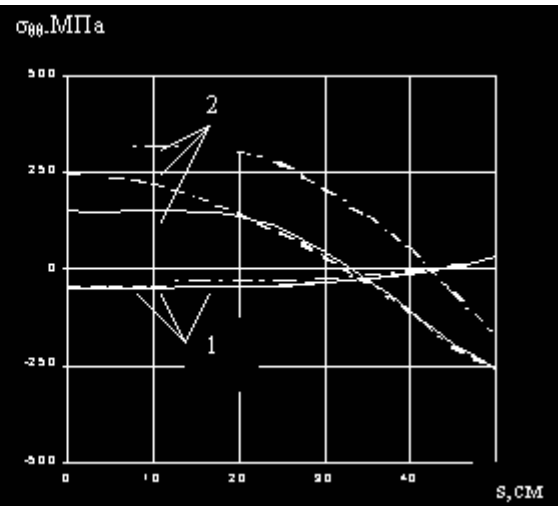


Рисунок 2

Кривые 1 и 2 соответствуют значениям напряжений при $\zeta = -h/2$ и $\zeta = h/2$. Результатам расчета с учетом радиационного облучения и истории нагружения соответствуют сплошные линии. Штрихпунктирные линии соответствуют расчету без учета радиационного облучения, а штриховые – расчету без учета истории нагружения. Из этих рисунков видно, что радиационное облучение существенно повлияло на распределение напряжений. В расчете без учета истории нагружения максимальные значения напряжений в окрестности центра пластины оказались почти на 50% выше, чем в расчете с учетом истории нагружения.

Выводы. Таким образом, выполненное исследование показывает существенное значение учета влияния радиационного облучения и истории нагружения в данной задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. 1. Savchenko V.G., Babeshko M.E. The Elastoplastic Axisymmetric Stress - Strain State of Flexible Laminated Shells Exposed to

- Radiation // Int. Appl. Mech. – 2000. – Vol.36, No 9. - P.1218-1224.
2. Savchenko V.G., Shevchenko Yu.N. Spatial Thermoviscoplastic Problems// Int. Appl. Mech. – 2000. – Vol.36, No 11. - P.1399-1433.
 3. Бабешко М.Е., Савченко В.Г. Исследование упругопластического осесимметричного напряженно-деформированного состояния слоистых оболочек при радиационном облучении с учетом истории нагружения//Прикл механика. – 2001. – 37, No 11. – С.75 – 80.

Получено 27.02.2006

УДК 621.9.06

В.Н. Шкиль, А.Н. Коробочка, В.В.Дорофеев
**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА «АУТОСАД» ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ
ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ГОЛОВОК КАСАНИЯ НА
МЕТАЛЛОРЕЖУЩИХ СТАНКАХ С ЧПУ**

Введение. При проектировании новых современных металлорежущих станков, станков-автоматов, автоматизированных линий и контролирующих приборов применяют аналитические, графические и графо-аналитические методы. Развитие современного машиностроения связано с широким использованием специальных математических знаний. Графические и графо-аналитические методы значительно упрощают и ускоряют решение многих задач.

В машиностроении, приборостроении графические методы расчетов применяют для быстрого, удобного и наглядного решения теоретических и прикладных задач. Графическое проектирование во многом эквивалентно аналитическим операциям. Но в графических построениях практически всегда неизбежны погрешности, которые носят как систематический так и случайный характер. Например, неточность градуировки шкал, несовершенство органов зрения и т.п.

Применение современной вычислительной техники значительно упрощает аналитические расчеты и графические построения. Использование высокоточных профессиональных графических редакторов позволяет выполнить графические построения с высокой точностью. В настоящее время одним из таких графических редакторов является система AutoCAD, которая позволяет выполнять расчёты с точностью до 10^{-8} м. При этом следует помнить, что точность построений в системе не связана с оптическим разрешением монитора или качеством используемого плоттера.

Постановка задачи исследований. Целью данной работы является разработка графического метода расчета в среде AutoCAD погрешностей головок касания, которые зависят от допусков на номинальные размеры опорных деталей измерительных устройств.

Результаты исследований. В настоящее время широкое распространение для измерения геометрических параметров деталей, которые обрабатываются на металлорежущих станках с ЧПУ, нашли измерительные головки касания. Основными элементами

измерительной головки [1] является опорное кольцо 1 и фланец 2 измерительного стакана, между которыми в соосных цилиндрических отверстиях под углом 120° расположены три шарика 3, через которые пропущены струны 4 (рис.1).

Величина погрешности измерительного устройства в значительной степени зависит от точности изготовления шариков и соосных с ними цилиндрических отверстий опорного кольца и фланца стакана.

На рис.2 представлена расчетная схема для графического определения с помощью пакета AutoCAD величин погрешностей измерительной головки касания, зависящей от отклонений номинальных размеров шариков и соосных с ними цилиндрических отверстий.

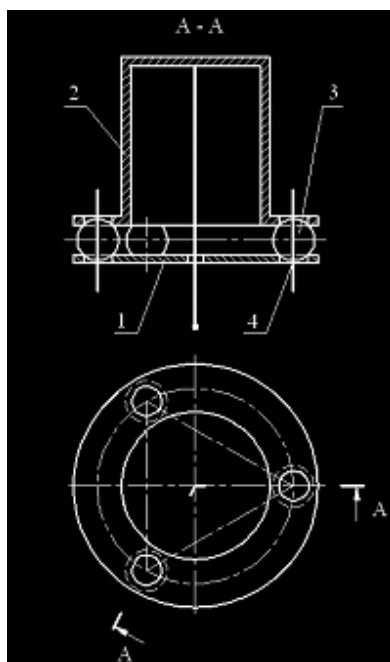


Рисунок 1 - Измерительная головка касания

Величина погрешности измерительной головки составляет [2]:

$$\Delta S = \ell_n \operatorname{tg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}\ell} \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_1 Z_2 - Z_1 Z_3 - Z_2 Z_3} \right), \quad (1)$$

где ℓ_n – длина измерительного наконечника;

ℓ – расстояние между центрами цилиндрических отверстий;

Z_1, Z_2, Z_3 – координаты Z точек A, B, C.

Для определения максимальной величины погрешности головки касания рассмотрим функцию.

$$U = \Delta S^2 \frac{4\ell_H}{3\ell^2} (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_1 Z_2 - Z_1 Z_3 - Z_2 Z_3) \quad (2)$$

Определим частные производные функции U по Z_n ($n = 1, 2, 3$) и приравняем их к нулю ($\frac{\partial U}{\partial Z_n} = 0$):

$$\begin{cases} 2Z_1 - Z_2 - Z_3; \\ -Z_1 + 2Z_2 - Z_3; \\ -Z_1 - Z_2 + 2Z_3. \end{cases} \quad (3)$$

Определитель системы уравнений (3) также равен нулю. При этом каждое уравнение является следствием двух других. Рассмотрев первые два уравнения системы и решив их относительно Z_1 и Z_2 , получим $Z_1 = Z_2$.

Таким образом, при $Z_1 = Z_2$ (то есть при $D_1 = D_2 = D_{ш}$ и $d_1 = d_2 = d_0$) величина погрешности измерительного устройства принимает максимальное значение. Приведенный анализ показывает, что начальным условием для графического определения максимальной погрешности головки касания является равенство диаметров двух шариков и двух соосных с ними цилиндрических отверстий опорного кольца, фланца стакана и равенство нулю отклонений номинальных размеров двух шариков и соосных с ними двух цилиндрических отверстий.

Последовательность графического построения в пакете AutoCAD [3] и определение максимальной величины погрешности измерительной головки касания, зависящей от номинальных размеров шариков и соосных с ними цилиндрических отверстий опорного кольца и фланца стакана, должна быть следующей:

1. При известных диаметрах шариков, соосных с ними цилиндрических отверстий и радиусе окружности, на которой расположены центры цилиндрических отверстий, строим в плане (рис. 2б) расположение центров шариков. Учитывая то, что для определения максимальной величины погрешности головки касания необходимым условием является равенство диаметров двух шариков (D_1 и D_2) и двух соосных с ними цилиндрических отверстий (d_1 и d_2) и равенство нулю их предельных отклонений, расположим центры двух цилиндрических отверстий на одной вертикальной прямой (ось i), точки (см. рис.2). Отрезок O_1O_2 примем за ось вращения опорной плоскости Ω фланца стакана при $D_1 = D_2 \neq D_3$ и $d_1 = d_2 \neq d_3$. Пересечение осей x и y является точкой крепления измерительного наконечника (точка O). При $D_1 = D_2 = D_3$ и $d_1 = d_2 = d_3$ опорная плоскость Ω фланца

стакана будет касательной к трем сферам, радиусы которых соответственно равны $r_1 = r_2 = r_3$. Точки А, В, С задают положение плоскости Ω относительно плоскости xOy (рис.2а). При $D_1 = D_2$ и $d_1 = d_2$ плоскость Ω будет перпендикулярной к плоскости чертежа.

2. Используя объектную привязку “Intersection” командой “Circle” из точки $O_1(O_2)$ как из центра вращения плоскости Ω проводим окружность радиусом $R = O_1O$.

При $D_1 = D_2 = D_{ш}$, $D_3 + \Delta T_d$ и $d_1 = d_2 = d_0$, $d_3 + \Delta T_d$ (ΔT_d и ΔT_D – это отклонения номинальных размеров третьего шарика и соосных с ними цилиндрических отверстий) опорная плоскость – фланца стакана повернется на угол 2γ . При этом измерительный наконечник переместится из точки N в точку N'. Расстояние $NN' = \Delta S_D (\Delta S_d)$ является погрешностью измерительной головки касания, зависящей от отклонений номинальных размеров шариков и соосных с ними цилиндрических отверстий опорного кольца и фланца стакана.

3. Командой “Line”, применяя объектную привязку “Tangent”, проводим касательную к окружности $r_1(r_2)$ и r_3' .

4. Опцией “3 Point” переносим в плоскости чертежа начало системы координат в точку O' – точку пересечения касательной с окружностью радиуса R. Положительное направление оси x указываем по направлению касательной, положительное направление оси y будет перпендикулярным к касательной.

5. Из точки O' как из начала системы координат в отрицательном направлении оси y строим отрезок $N'O'$, равный длине измерительного наконечника головки касания.

6. Командой “Liner Dimension” указываем на чертеже размер отрезка NN' .

В таблице 1 приведены величины максимальной погрешности измерительной головки касания, рассчитанной графическим методом в пакете AutoCAD и на основании математической зависимости [4]:

$$\Delta S_R = \frac{8\ell_H R_{ш}}{\sqrt{3}\ell\sqrt{4R_{ш}^2 - d_{ш}^2}} \cdot \Delta T_R, \quad (4)$$

где ℓ_H – длина измерительного наконечника;

$R_{ш}$ – номинальный радиус шарика;

ℓ – расстояние между центрами соосных цилиндрических отверстий;

ΔT_R - отклонение номинального размера радиуса шарика.

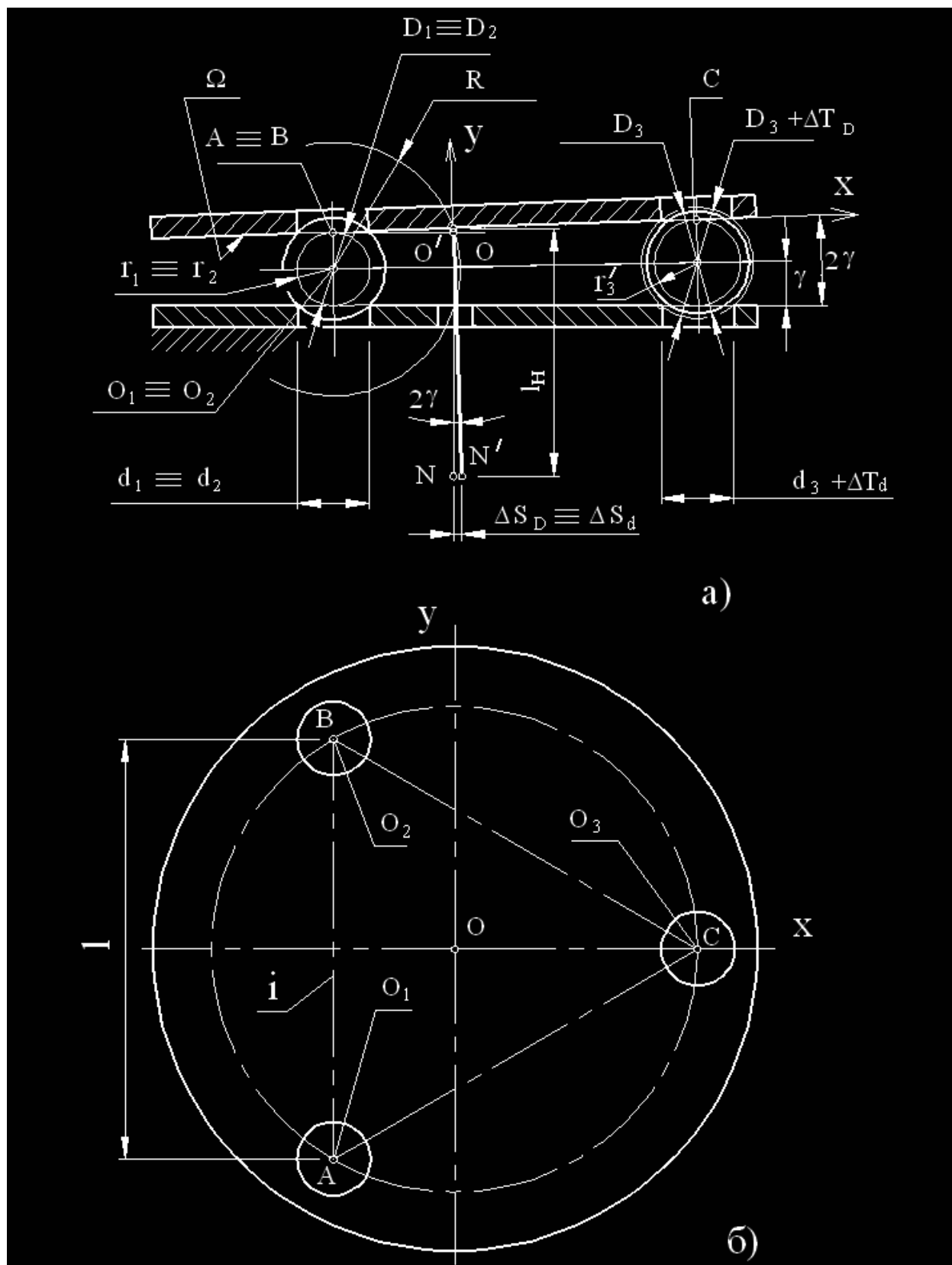


Рисунок 2 - Расчетная схема для определения максимальных величин погрешностей ΔS_D и ΔS_d измерительной головки касания

Анализ результатов расчетов, выполненных на основании использования математической зависимости (4) и графического метода с помощью пакета AutoCAD, показывает, что максимальная величина погрешности вычислений находится в пределах от 0,02% до 0,03%.

В таблице 2 приведены величины максимальной погрешности головки касания, зависящей от отклонений номинальных размеров соосных цилиндрических отверстий, вычисленные графическим методом в пакете AutoCAD.

Таблица 1

Величина максимальной погрешности ΔS_D головки касания при отклонении номинальных размеров шарика ($d_0=3 \cdot 10^{-3}$ м, $D_{ш}=5 \cdot 10^{-3}$ м, $\ell_H=70 \cdot 10^{-3}$ м, $\ell=26 \cdot 10^{-3}$ м)

Степень точности шарика	Отклонение размера диаметра шарика, 10^{-6} м	Величина погрешности, ΔS_D		
		аналитический, 10^{-6} м	в пакете AutoCAD, 10^{-6} м	величина погрешности Δ , %
3	0,08	0,31	0,3206	0,033
5	0,13	0,50	0,4907	0,019
10	0,25	0,97	0,9437	0,027
16	0,4	1,56	1,5099	0,032
20	0,5	1,94	1,8874	0,027

Таблица 2

Величина максимальной погрешности ΔS_d головки касания при отклонении номинальных размеров цилиндрических отверстий ($d_0=3 \cdot 10^{-3}$ м, $D_{ш}=5 \cdot 10^{-3}$ м, $\ell_H=70 \cdot 10^{-3}$ м, $\ell=26 \cdot 10^{-3}$ м)

Квалитет	Отклонение размера отверстия, 10^{-6} м	Величина погрешности ΔS_d , 10^{-6} м
5	4	4,8588
6	6	7,5068
7	10	12,1677
8	14	17,0542

На рис.3 представлены графики зависимости максимальных величин погрешностей измерительной головки касания ΔS_D и ΔS_d , зависящих от отклонений номинальных размеров шариков и соосных с ними цилиндрических отверстий опорного кольца и фланца стакана.

Выводы. Таким образом, разработанный в пакете AutoCAD графический метод определения погрешностей измерительной

головки касания, зависящей от отклонении номинальных размеров шариков и соосных с ними цилиндрических отверстий опорного кольца и фланца стакана значительно упрощает решение задачи и наглядно отображает результаты решения. При этом погрешность вычислений не превышает 0,03%.

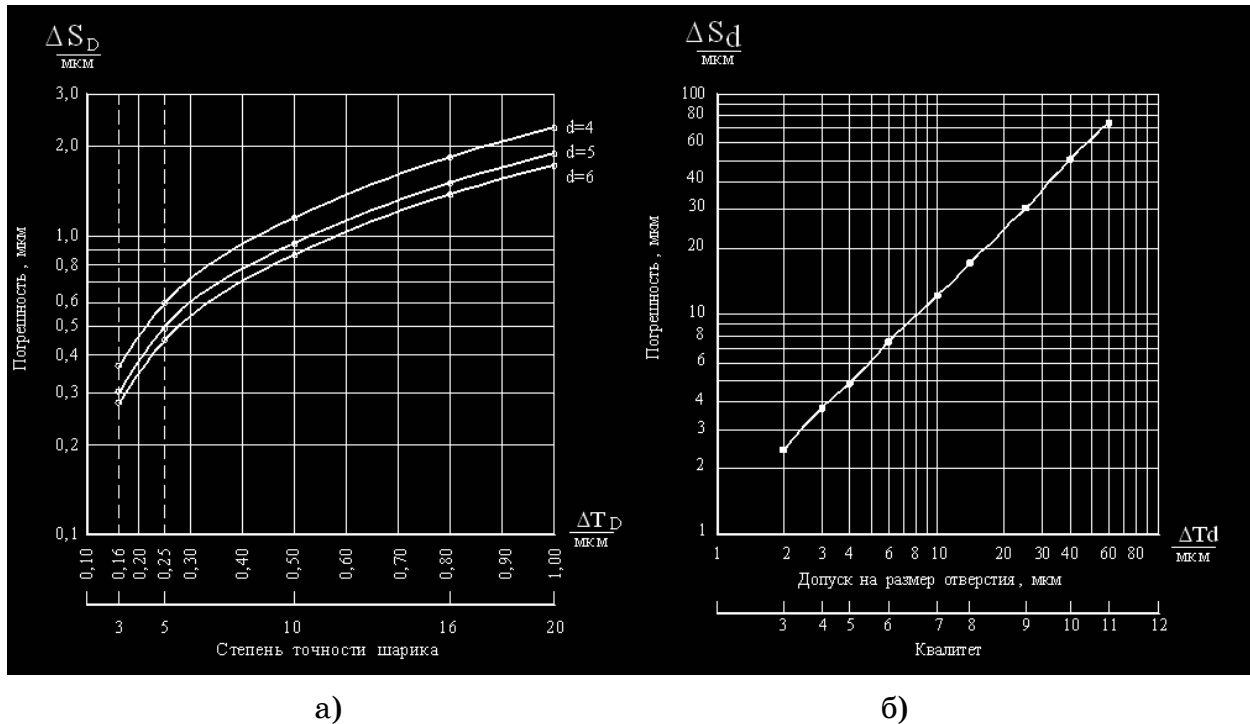


Рисунок 3 - Зависимости погрешностей ΔS_D (а) и ΔS_d (б) измерительной головки касания

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкиль В.Н. Измерительная головка касания // Придніпровський науковий вісник: Машинобудування та технічні науки.-1997.-№44(55).- С. 25-27.
2. Шкиль В.Н., Коробочка А.Н., Стеблянюк П.А. Суммарная погрешность головки касания при измерении деталей // Системні технології: Дослідження динаміки і оптимізація параметрів технологічних процесів.- Дніпропетровськ: ДВНП “Системні технології”.-1998.-№2.- С.144-149.
3. Элен Финкельштейн. AutoCAD 2004. Библия пользователя: Пер. с англ.- М.; Издательский дом “Вильямс”, 2004-1100с.
4. Шкиль В.Н., Коробочка А.Н., Стеблянюк П.А. Определение погрешности измерения головками касания на станках с ЧПУ // Системные технологии: Автоматизация вспомогательных процессов в машиностроении.-Днепропетровск: Гос.НПП мин. Образования “Системні технології”.-1997.-№1.С.85-87.

Получено __.__.2006 г.

УДК 539.3:681.3

И.Г. Суворова, О.В. Кравченко

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ПОТОКА
ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ****1 Введение**

Основные краевые задачи для стационарных уравнений Навье-Стокса связаны с исследованием течений в замкнутых полостях, каналах, со свободными поверхностями, в струях и следах за телами, с обтеканием тел. При этом интегрирование уравнений Навье-Стокса проводится в областях конечных или бесконечных, на границе которых ставятся условия из соображений физического характера - условия прилипания или скольжения по поверхности тел, вдува или отсоса на проницаемых поверхностях, условия внешнего потока вдали от обтекаемого тела, условия на свободной границе и другие. Для нестационарных задач помимо граничных условий должны задаваться начальные условия [1-3].

Для нахождения решений таких задач на помощь исследователям пришли приближенные методы. Для решения некоторых классов задач динамики вязких жидкостей и газов разработаны алгоритмы, основанные на использовании разностных методов. Например, для задачи расчета ламинарных течений вязких несжимаемых жидкостей, стационарных задач о ламинарных двумерных течениях в сужающемся и расширяющемся каналах, в прямоугольной выемке с движущейся крышкой, нестационарной задачи обтекания в канале плоской пластины, расположенной перпендикулярно к направлению потока с использованием метода установления, применением явных и неявных схем, схем типа "крест", Дюфорта-Франкеля и итерационных методов [4,5].

Вариационно-сеточные методы, и в частности метод конечных элементов, также нашли свое применение для решения уравнений динамики вязкой жидкости. Так исследовались задачи обтекания эллиптического и кругового цилиндра (в том числе вращающегося), пластины конечной толщины под углом атаки, капли, плоской ступени и т.д.

Метод R-функций – применялся для расчета ламинарного течения в каналах сложного поперечного сечения. Рассматривалось движение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольной выемке под воздействием крышки, в каналах с наличием препятствий, установившегося движения ньютоновской вязкопластической жидкости по цилиндрической трубе сложного сечения и др.[6-8].

2 Постановка задачи

Одним из наиболее распространенных видов пространственных течений является движение, симметричное относительно некоторой оси, называемое осесимметричным. Сюда относятся движения в соплах круглого сечения, в конфузорах и диффузорах, осевое обтекание тел вращения, дирижабельных и других форм. В пространственных движениях нельзя ввести функцию тока в общем случае, как это было сделано при изучении плоских движений. Функция тока существует только в отдельных частных случаях, одним из которых является осесимметричное движение.

Когда движение симметрично относительно оси X , вихревые линии должны быть окружностями, центры которых лежат на этой оси и плоскости которых перпендикулярны ей. Такие движения удобно рассматривать с помощью функции тока Стокса, существование которой не зависит от того, является ли движение безвихревым или нет.

Уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности для осесимметричного течения в цилиндрических координатах (r, θ, z) могут быть представлены в форме [1,2]:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right), \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2.3)$$

Дифференцируя первое из уравнений по r , а второе – по z и вычитая из первого второе, исключаются члены с давлением и, используя третье уравнение, а также соотношение для проекции вихря в осесимметричном случае

$$\zeta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad (2.4)$$

приходят к

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + v_z \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{v_r \zeta}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} \right). \quad (2.5)$$

Эта форма представления уравнений Навье-Стокса обычно называется уравнением переноса завихренности. Используя характерный радиальный размер R и характерную скорость U_0 , уравнение (2.5) запишется в безразмерном виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + v_z \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{v_r \zeta}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} \right), \quad (2.6)$$

где $\text{Re} = \frac{U_0 R}{\nu}$ — число Рейнольдса.

Введя функцию тока

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.7)$$

и для упрощения выкладок предположив, что движение установившееся, получится уравнение, выражающее завихренность через производные функции тока

$$\zeta = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (2.8)$$

После подстановки выражения для завихренности (2.8) в уравнение (2.6) переноса завихренности, получается единственное уравнение для определения функции тока. Оно называется бигармоническим уравнением и может быть записано в форме

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right\} - \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

При применении формулировки $\zeta - \psi$ сходимость приближенного решения достигается быстрее, чем для примитивной формулировки, включающей рассмотрение давления.

После построения решения для функции тока давление может быть определено из уравнения Пуассона [5], правая часть которого выражается через производные функции тока

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \right) \right] \quad (2.10)$$

Рассмотрим граничные условия для функции тока на примере осесимметричного течения в канале сложного профиля (рис.2.1).

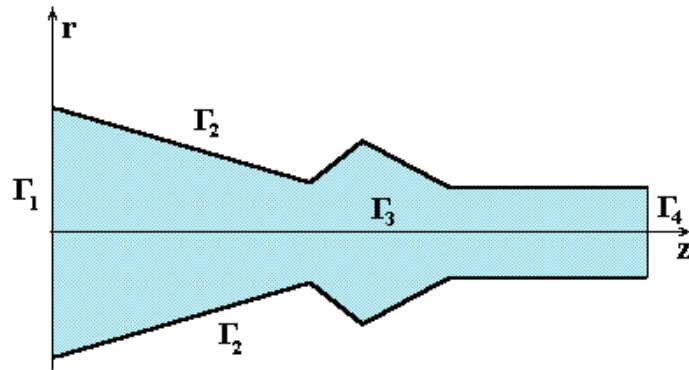


Рисунок 2.1 – Пример осесимметричного канала

Граничные условия формулируются как условие прилипания частиц жидкости к твердой стенке. Это означает отсутствие как нормальной к твердой поверхности относительной скорости между частицами жидкости и близлежащими точками поверхности ($v_n = 0$), так и касательных составляющих относительной скорости ($v_\tau = 0$), т.е. отсутствие скорости скольжения жидкости по поверхности. На входе в канал известно $v_z = v_1(r); v_r = 0$, а на выходе имеем в общем

случае $\int_0^c v_1(r) r dr = \int_0^b v_2(r) r dr$, что следует из равенства расхода

жидкости через входное и выходное сечение канала.

На входе Γ_1

$$\psi|_{\Gamma_1} = \frac{Ar^4}{4} + \frac{Br^2}{2}, \quad (2.11)$$

где A, B — постоянные, значения которых зависят от желаемого типа профиля втекающего потока (параболический или однородный) и от радиуса трубы [4].

Выражение (2.11) получено из интегрирования уравнения связывающего v_z с функцией тока ψ .

Твердая граница

$$\psi|_{\Gamma_2} = const. \quad (2.12)$$

На твердой границе и радиальная, и осевая составляющие скорости равны нулю вследствие принятия условия отсутствия скольжения, характерного для вязкой жидкости.

$$v_r|_{\Gamma_2} = v_z|_{\Gamma_2} = 0.$$

Осевая линия Γ_3 . Из этого следует предположение нулевой завихренности и нулевой радиальной скорости на осевой линии. Значение функции тока на осевой линии произвольно; поэтому можно предположить, что

$$\psi|_{\Gamma_3} = 0. \quad (2.13)$$

Граница вниз по потоку. ψ находится по линейной экстраполяции в осевом направлении либо из равенства расхода жидкости. В случае численной реализации методом R-функций можно это условие не задавать, а принять его как естественное.

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ на всей границе области.} \quad (2.14)$$

Граничные условия для давления

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{1}{Re} \frac{\zeta}{r}. \quad (2.16)$$

В качестве начальных условий выбираются $U0=W$ либо решения, полученные при меньшем числе Рейнольдса [9].

3 Метод решения

Искомые функции тока и вихря зависят от числа Рейнольдса (Re), характеризующего отношение сил инерции к силам вязкости и определяющего интенсивность вынужденной конвекции. При решении уравнения (2.9) возникают трудности, связанные с наличием малого параметра при старшей производной ($1/Re$) и нелинейностью исходного оператора задачи. Наличие малого параметра при старшей производной приводит к большим кривизнам (резкому перепаду градиентов) решения, что соответствует появлению у стенок областей при больших Re пограничного слоя, толщина которого пропорциональна $1/\sqrt{Re}$. Нелинейность оператора, типичная для систем гидродинамического типа, обусловлена в случае несжимаемой жидкости инерционными составляющими в уравнениях количества

движения. Все это приводит при $Re \gg 1$ к образованию весьма сложных течений и в ряде случаев явление вычислительной неустойчивости трудно отличить от возможного сложного поведения решения. В большинстве случаев для каждого типа течения в некотором диапазоне чисел Re существует единственное устойчивое стационарное решение уравнения Навье-Стокса, для получения которого можно использовать либо стационарные уравнения, либо нестационарные при $t \rightarrow \infty$ (метод установления). При увеличении числа Re стационарное решение перестает быть единственным и начинает зависеть от начальных данных.

Метод R-функций (RFM) позволяет решать такой класс задач.

Решение уравнения (2.9) представим в виде

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_0,$$

$$\text{где } \Psi_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\psi_i}{w_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{w_i^2}};$$

w_i – участки границы области, которые заданы при помощи R-функций.

ψ_0 и ψ_1 соответственно однородная и неоднородная части структуры.

ψ_0 обеспечивает продолжение граничных условий внутрь области и получено с помощью формулы "склейки" [6].

ψ_1 – неопределённая компонента, имеющая вид

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^N C_i \Phi_i,$$

где C_i – константы, которые необходимо определить;

Φ_i – специальные функции, классические полиномы или полиномы с локальными носителями.

Уравнение (2.9) в терминах ψ_1 и ψ_0 будет иметь вид

$$\frac{1}{Re} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^2 \partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) -$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} - \\
& -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} \right) + \\
& + \frac{2}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{3}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right) - \\
& - \frac{3}{r^4} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} \right) + \\
& + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial z} \right) - \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} \right) = \\
& = -\frac{1}{\text{Re}} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^2 \partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right) + \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \\
& + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z}. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

В качестве начального приближения использовалось как $\psi_{10}=0$ ($C_i=0; i=0,...,N$) так и $\psi_{10}=\omega^2$ ($C_0=1, C_i=0; i=1,...,N$). Кроме того, оказалось, что с ростом числа Re наиболее эффективным является использование в качестве начального приближения значение функции тока, полученного при другом, меньшем значении числа Re .

4 Компьютерная реализация

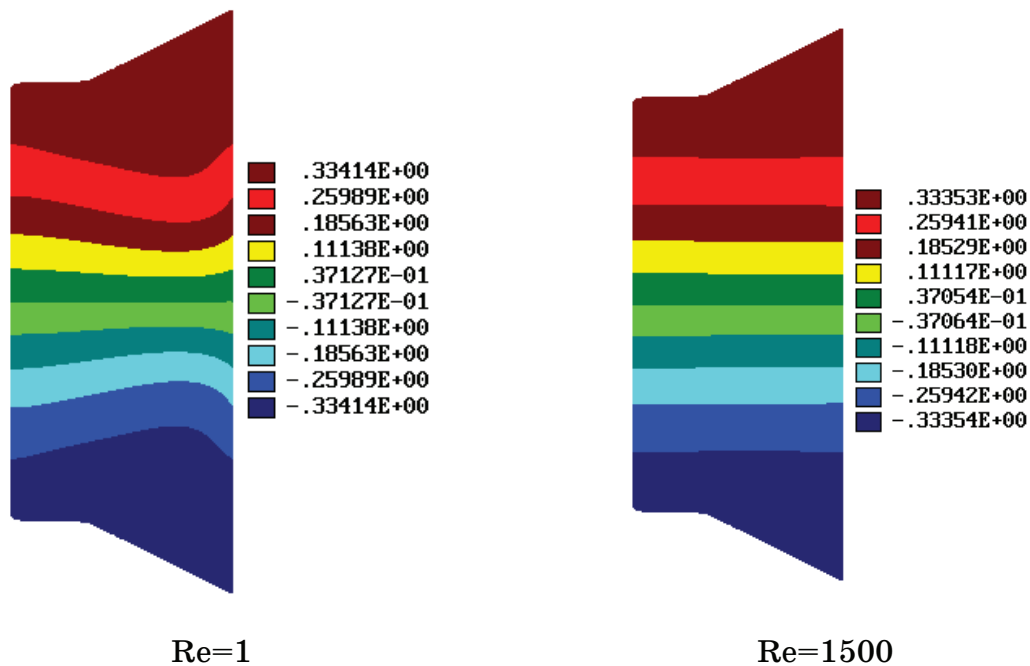
Поставленные задачи решаются методом R-функций в условиях эксплуатации системы ПОЛЕ, разработанной в отделе прикладной математики и вычислительных методов Института проблем машиностроения НАН Украины [6,9].

Ставилась также задача выявить методом R-функций кавитационные зоны течений. В текущей жидкости в точках наибольшей скорости, где давления наименьшие, возникают кавитационные полости (каверны), которые затем, попадая в области потока с низкими скоростями и высокими давлениями,

схлопываются и разрушаются. Таким образом, происходит непрерывный процесс образования и схлопывания пузырьков, в результате чего увеличиваются размеры каверны, которая наблюдателю представляется стационарной. Кавитация может возникать под действием звуковых волн. Ультразвуковая кавитация широко применяется в некоторых производственных процессах, например для ускорения химических реакций, очистки, дегазации жидкости, эмульгирования. Во всех этих случаях воздействие ультразвуковой кавитации обусловлено в основном одним или двумя эффектами, создаваемые ею. Резонирующие пузырьки действуют как смеситель, увеличивая площадь контакта между двумя жидкостями или между жидкостью и ограничивающей её поверхностью. Этим путём осуществляются процессы очистки и эмульгирования трудно смешиваемых жидкостей. Ультразвуковая кавитация находит широкое применение для возбуждения химических реакций, которые в противном случае не идут, особенно это относится к реакциям, протекающим в водной среде [10-13].

Ниже приводятся иллюстрации решений, эквипотенциали функций тока, задач течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском и осесимметричном каналах.

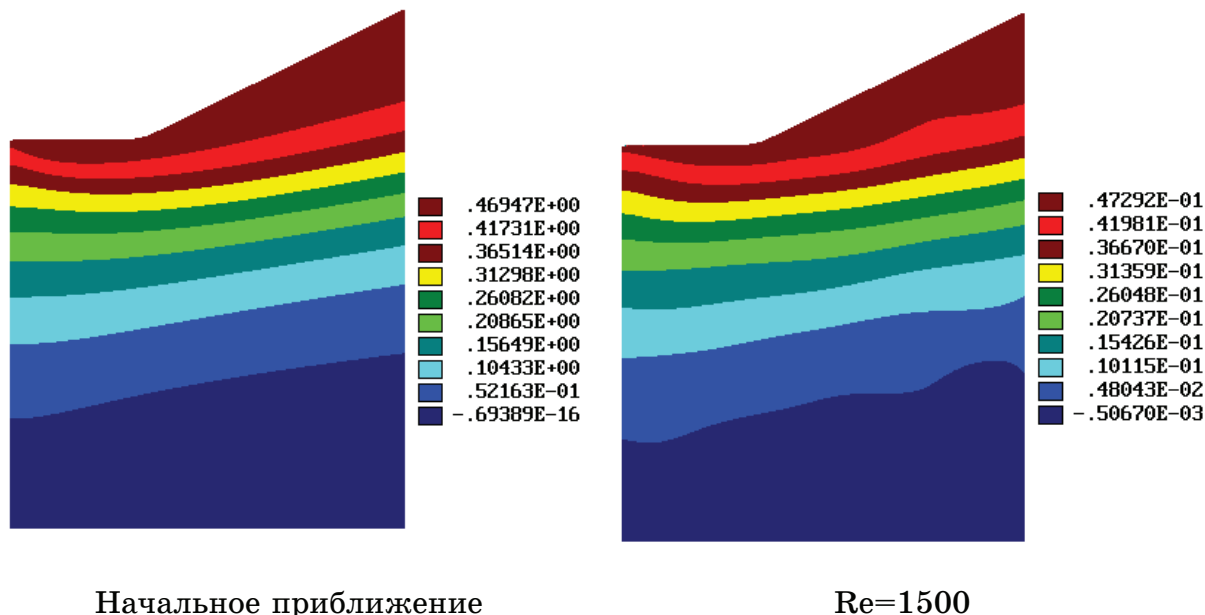
Плоский канал



Авторами получены формы каналов, которые создают кавитационные эффекты, на основе этих исследований созданы

форсунки, обеспечивающие эффективное смешение на молекулярном уровне различных жидких компонентов. Типовые формы, на которых исследовался предлагаемый способ и получены основные геометрические параметры камеры смешения, представлены на рис.4.1. Здесь r_{bx} - это критический диаметр конфузора, а r_c - критический диаметр диффузора. Численный эксперимент подтвердил тот факт, что критический диаметр конфузора r_{bx} должен быть меньше критического диаметра диффузора r_c . Даже при равенстве критических диаметров численный эксперимент показал, что камера смешения практически застойная. Канал, с изображённой геометрией рис.4.1, для случая, когда $r_{bx} < r_c$ и камера смешения тор, обеспечивает высокую активность течения основного компонента и падение давления в камере, что приводит к эжектируемому и кавитационному эффектам. Это показано на графиках, представленных на рис.4.2 и рис.4.3, где Ψ – функция тока, P – давление.

Осесимметричная задача



Проведены исследования критических частот колебаний основного и высших типов волн. Численные эксперименты показали, что уменьшение глубины погружения тора в канал приводит к появлению кратных корней, т.е. резонансным явлениям, даже на основном типе волн, уменьшение глубины погружения вызывает

кратность (резонанс) и четырёх последующих корней. Для подавления активных шумовых эффектов, глубину погружения камеры необходимо выполнять как минимум до оси симметрии. Отмечается отсутствие существенного влияния увеличения диаметра камеры при фиксированном диаметре канала на величину собственных значений, т.е. нет необходимости увеличивать диаметр входного и соответственно выходного сопла при фиксированном диаметре камеры.

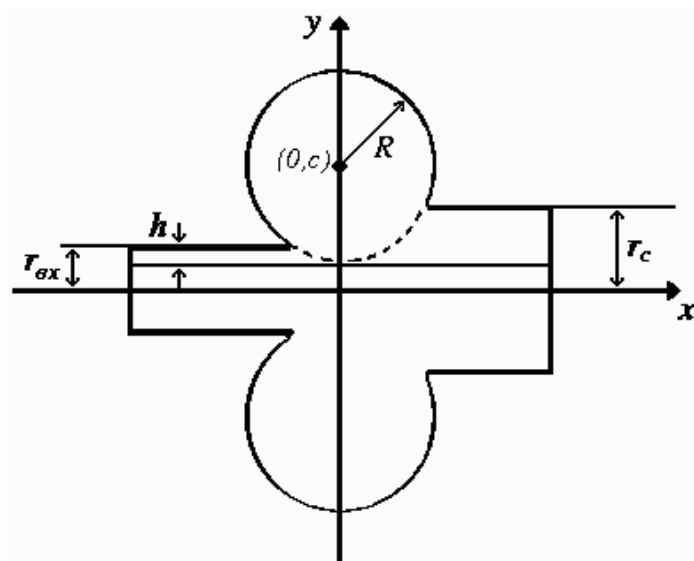


Рисунок 4.1 – Типовые формы каналов

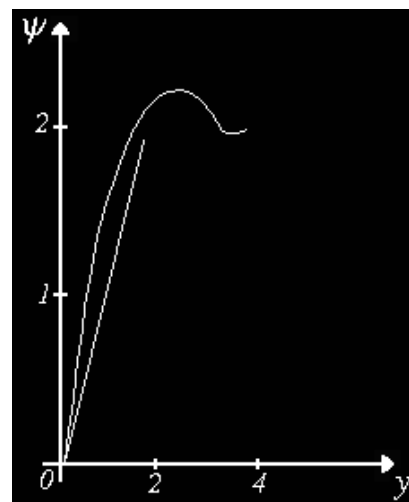
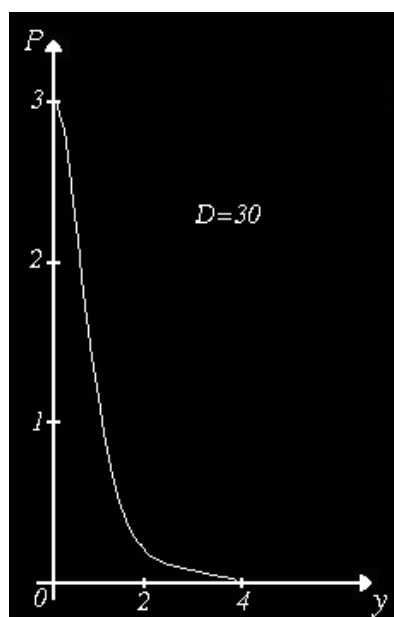
Рисунок 4.2 – График функции тока ψ в камере смешения

Рисунок 4.3 – График давления внутри камеры смешения

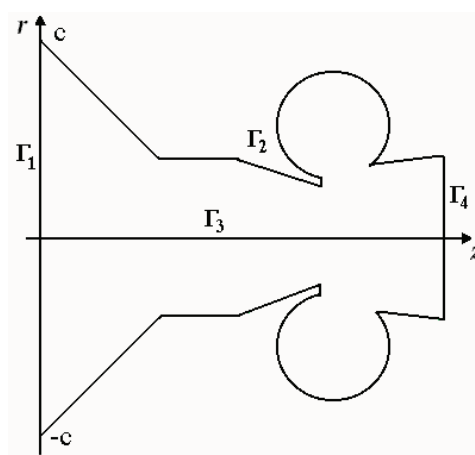


Рисунок 4.4 – Разрез реальной форсунки вдоль оси симметрии

Математическая формулировка задачи сводится к решению уравнения (2.1) со следующими краевыми условиями:

– Γ_1 – вход в канал

$$\psi|_{\Gamma_1} = -\frac{r^4}{2c^2} + \frac{r^2}{2};$$

– Γ_2 – твердая граница, которая описана R-функциями

$$\psi|_{\Gamma_2} = const;$$

– Γ_3 – ось симметрии

$$\psi|_{\Gamma_3} = 0;$$

– Γ_4 – выход из канала. Здесь условие не задаем, считаем его естественным.

На рис.4.5 представлена картина линий уровня функций тока ψ при $Re=1$

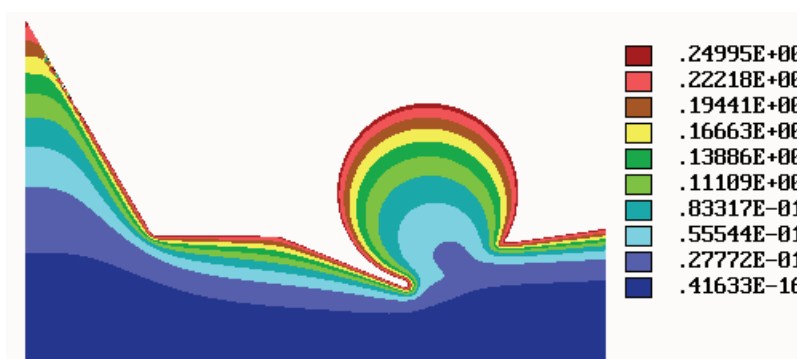


Рисунок 4.5 – Линии уровня функции тока

5 Выводы

Компьютерная модель течения вязкой несжимаемой жидкости, построенная методом R-функций (RFM), позволила в рамках системы ПОЛЕ провести численные исследования в реальных каналах со сложным профилем, получить качественные картины течений, что дает возможность судить о влиянии чисел Рейнольдса (Re) и ширины каналов на гидродинамические характеристики, показать, что в данной конструкции имеется эффект кавитации, который подтверждён реальными экспериментами.

Поскольку функция тока ψ (решение) имеет аналитический вид, то легко найти профили скоростей, распределение давлений и установить длину гидродинамической стабилизации.

Компьютерная реализация позволяет рассчитывать и конструировать универсальные камеры смешения для различных

компонентов потока (газообразных, водяных, порошковых и т.д.) для различных отраслей промышленности [15,16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 456с.
2. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. — М.: ОГИЗ, 1948. – 432с.
3. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1967. – 287с.
4. Пирсол И. Кавитация. – М.: Мир, 1975. – 95с.
5. Гогиш Л.В. Отрывные и кавитационные течения: основные свойства и расчётные модели /Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
6. Врагов А.П. Гідромеханічні процеси та обладнання хімічних та нафтопереробних виробництв: Навчальний посібник. – Суми: Видавництво Сумського державного університету, 2001. – 216 с.
7. Кнэпп Р. Кавитация /Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. – М.: Мир, 1974. – 687с.
8. Ефремов І.І. Лінеарізована теорія кавітаційного обтікання. – К.: Наук. думка, 1974. – 156с.
9. Численные методы в динамике жидкостей (материалы кармановских чтений) / Под ред. О.М. Белоцерковского и В.П.Шидловского. — М.: Мир, 1981. – 320с.
10. Oberkampf W.L. Domain Mappings for the Numerical Solution of Partial Differential Equations//Int. J. Numer Methods Eng. – 1976. – 10. – P.211-223.
11. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. –552 с.
12. Рвачев В.Л. Численная реализация задачи о течении вязкой жидкости методом R-функций в системе ПОЛЕ-3 /Рвачёв В.Л., Суворова И.Г., Шейко Т.И. // Мат. методы и физ.-мех. поля.– Львов, 1991.–№ 33. – С.95-99.
13. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы //Вестник НТУ ХПИ. – Харьков, 2004. – № 31. – С.141–148.
14. Суворова И.Г. Автоматизация расчетов методом R-функций применительно к задачам стройиндустрии: Учеб.пособие /Суворова И.Г., Шевченко А.Н. – Киев: Учеб.–метод. Каб. Высш. Образования, 1991.– 60с.
15. Патент №2083247 РФ, МКИ³ C1 6A62C31/02.Устройство для распыления жидкости /Глотов Е.А., Суворова И.Г.; Харьковский государственный технический университет строительства и архитектуры (Украина). – № 94003528/12; Заяв. 01.02.1994; Опубл. 10.07.1997, Бюл.№19 //Открытия, изобретения, промышленные образцы, товарные знаки.– 1997. – №19. – С.27.
16. Суворова И.Г. Расчёт параметров распылительного устройства для конструирования газо-водяных огнетушителей /Суворова И.Г., Глотов

Е.А., Чеповский В.О. //Науковий вісник УкрНДІПБ. – К., 2004. – №1(9).– С.94–100.

17. Суворова И.Г. Компьютерное моделирование в струйной технике /Суворова И.Г., Линчевский Е.А., Максименко-Шейко К.В., Суворов Н.Н.//Вестник ХГПУ. - Харьков, 2000. - №124. - С.8-10.

Получено __.__. 2006 г.

В.Б. Врублевский, А.Б. Невзорова, В.А. Дашковский,
С.О. Барбуль

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАБОТОСПОСОБНОСТИ НА САМОСМАЗКЕ АНТИФРИКЦИОННЫХ ПОЛИМЕРОВ И ПРЕССОВАННОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ДРЕВЕСИНЫ

Использование пластических материалов в узлах трения получило широкое распространение. К ним относятся: полиамиды, капролон, политетрафторэтилен, фторопласт, фенопластики (слоистые материалы на базе древесины или текстильных тканей, или же в виде прессованной массы с древесным или же текстильным наполнителем, в которых связующим являются фенольные смолы) и др. [1,2].

Преимуществами этих материалов перед антифрикционными металлами, применяемыми для изготовления подшипников скольжения, являются:

- более низкий коэффициент трения, который обуславливает увеличение экономического эффекта за счет уменьшения потребляемой энергии;
- большая сопротивляемость износу, которая приводит к повышению срока службы узлов трения машин в процессе эксплуатации;
- упрощение смазки (в зависимости от вида пластических материалов и характера работы подшипника применяются вода, консистентная смазка, или же обходятся вообще без смазки);
- стойкость в различных химических средах (обнаруживают большинство применяемых пластических материалов);
- амортизация внезапных перегрузок и вибраций;
- экономия металла, в особенности дефицитных металлов;
- К недостаткам этих материалов относятся:
- повышенный коэффициент объемного расширения, значение которого в 2-5 раз выше, чем у антифрикционных сплавов;
- гигроскопичность и тенденция к набуханию в процессе эксплуатации;
- пониженная теплопроводность;
- более низкая термическая стойкость, чем у металлов.

На стабильность размеров и механических свойств подшипников скольжения из пластмасс большое влияние оказывает влажность и

температура. В связи с этим для них устанавливают относительно большие зазоры в пределах $\psi = 4-6 \%$ по сравнению с $\psi < 2,5 \%$ для металлов. Кроме того, некоторые подшипники из пластических материалов требуют охлаждения циркулирующим смазочным материалом. Температура контакта таких узлов трения должна быть ниже температуры, которая влияет на механические свойства применяемых материалов.

Полиамиды различных видов и наименований: нейлон, силон, релон, капрон, капролактамы – одно из самых больших достижений в области полимеров, применяемых для изготовления подшипников скольжения.

Например, подшипники из полиамида могут работать в атмосфере, наполненной пылью, так как частицы, которые попадают между трущимися поверхностями, вдавливаются в материал и покрываются пластмассовой пленкой.

Влагосодержание у полиамидов, находящихся длительное время во влажной атмосфере, достигает $2,5...3,5 \%$ от исходной их массы; в контакте с водой влагосодержание может достигнуть $8,5 \%$. Содержание влаги отрицательно влияет на прочность, особенно при динамических нагрузках.

Подшипников из нейлона работоспособны до $100...110^{\circ}\text{C}$, стойки на истирание и к агрессивным органическим растворам. Коэффициент трения нейлона по стали достигает: при смазке маслом $f = 0,014$, при смачивании водой $f = 0,02...0,05$ и без смазки $f = 0,17...0,2$. Недостатки нейлона могут быть до минимума устранены с помощью добавок графита или же дисульфида молибдена.

Капроновые вкладыши в условиях циркуляционной смазки с охлаждением могут воспринимать такую же нагрузку как и вкладыши из текстолита и лигнофоля, при этом температура в контактной зоне не должна превышать 85°C .

На рисунке 1 показано изменение коэффициента трения f втулки из капрона при циркуляционной смазке в зависимости от величины давления на контактную поверхность. При $3,5...4 \text{ МПа}$ f имеет наименьшее значение $0,02...0,025$. Как для смазки жидким маслом, так и для консистентной смазки минимальный коэффициент трения имеет место при значении $p = 3,5...4,5 \text{ МПа}$. Вкладыши из капрона при смазке маслом ($p = 4,5 \text{ МПа}$, $v = 0,39 \text{ м/с}$) имели коэффициент трения

$f = 0,035...0,02$ в зависимости от качества обработки стального закаленного ролика (минимальное значение при шероховатости поверхности $Ra = 0,16...0,08$ мкм, а максимальная чистота при $Ra = 2,5...1,25$).

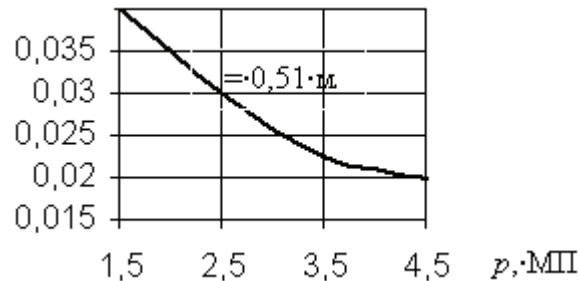


Рисунок 1 –Изменение коэффициента трения от давления на контактную поверхность втулки из капрона при циркуляционной смазке

Все шире применяется в технике политетрафторэтилен (тефлон). Подшипники из него пригодны для пониженных нагрузок и скоростей и могут в этих условиях работать даже без смазки. Он очень стоек к химическим реагентам, его коэффициент трения $f = 0,04...0,05$. Поскольку температура плавления тефлона равна 327°C , тефлоновые подшипники могут работать под нагрузкой, без риска при 150°C и даже при температуре 250°C .

Однако он обладает небольшой прочностью и долговечностью, а также тенденцией к текучести без нагрева, и поэтому рекомендуется для работы при давлениях не более $0,5$ МПа.

Хорошо известно, что графит, как наполнитель для пластических масс, как и любой материал для армирования, улучшает механические и антифрикционные свойства.

Износ полиамида с графитом зависит от содержания наполнителя. Лабораторными и эксплуатационными исследованиями установлено, что для капрона максимальное сопротивление истиранию достигается при добавке 5% графита. Увеличение или уменьшение количества графита по сравнению с оптимальным снижают эффект.

Добавка молибденового колчедана (MoS_2) – дисульфид молибдена дает хорошие результаты в любых условиях, так как присутствие влаги не влияет на его качество. Эта добавка сохраняет смазывающие свойства и пониженный коэффициент трения до -70°C . Вообще

влияние дисульфид молибдена на коэффициент трения заметнее, чем воздействие графита.

В настоящее время созданы антифрикционные самосмазывающиеся материалы на основе прессованной древесины, пропитанной модифицированной смазкой (АСМД), разработаны принципиально новые конструкции подшипников скольжения самосмазывающихся (ПСС) [3,4].

По свойствам АСМД превосходят традиционные антифрикционные материалы, не размягчаются как полимеры при температурах выше 85...100°C и не теряют размерной стабильности при предельных температурах трения 170...180°C. Смазка в процессе трения выделяется из капиллярно-сосудистой системы древесины и образует граничные смазочные слои на контактных поверхностях, обеспечивая работу ПСС в режиме самосмазки в течение всего периода эксплуатации. Испытания АСМД проводились в сравнении с одним из лучших полимерных антифрикционных самосмазывающихся материалов типа САМ 4 и другими антифрикционными полимерными материалами (рисунок 2).

Сопоставление результатов испытаний показало, что коэффициент трения у ПСС в 6-9 раз ниже, чем у полимерных материалов, а ресурс работы по данным оценки скорости изнашивания при нагрузке 1000 Н превысил ресурс работы подшипника из САМ 4 в 4,5 раза.

В ПСС в контактной зоне всегда присутствует пластигель (пластичная смазка) она не "выдавливается" из нее. Количество пластичной смазки во многих узлах трения пополняется периодически, а в ПСС она поступает из капиллярной системы древесины и выполняет свои функции в течении всего срока службы.

Комбинированные подшипники из полимеров и ПСС кажутся самым лучшим решением в настоящее время и для ближайшего будущего, поскольку они используют преимущества пластических материалов и прессованной древесины, снижая при этом до минимума или даже полностью их недостатки. Такие узлы сопряжения трущихся деталей сочетают в себе такие положительные свойства металлов и пластмасс, как прочность, долговечность и хорошую работу на трение.

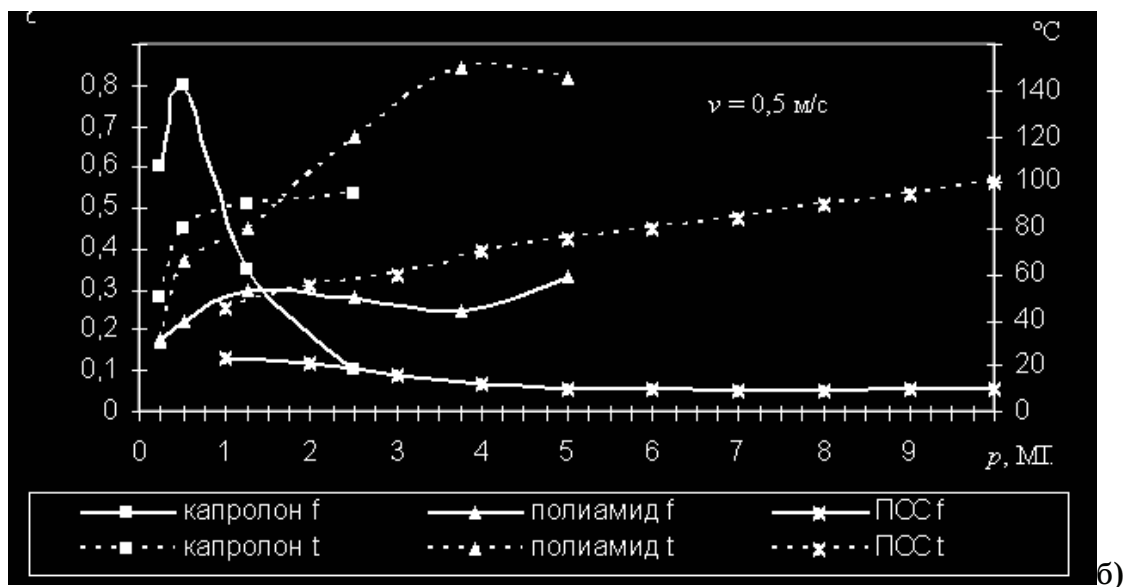
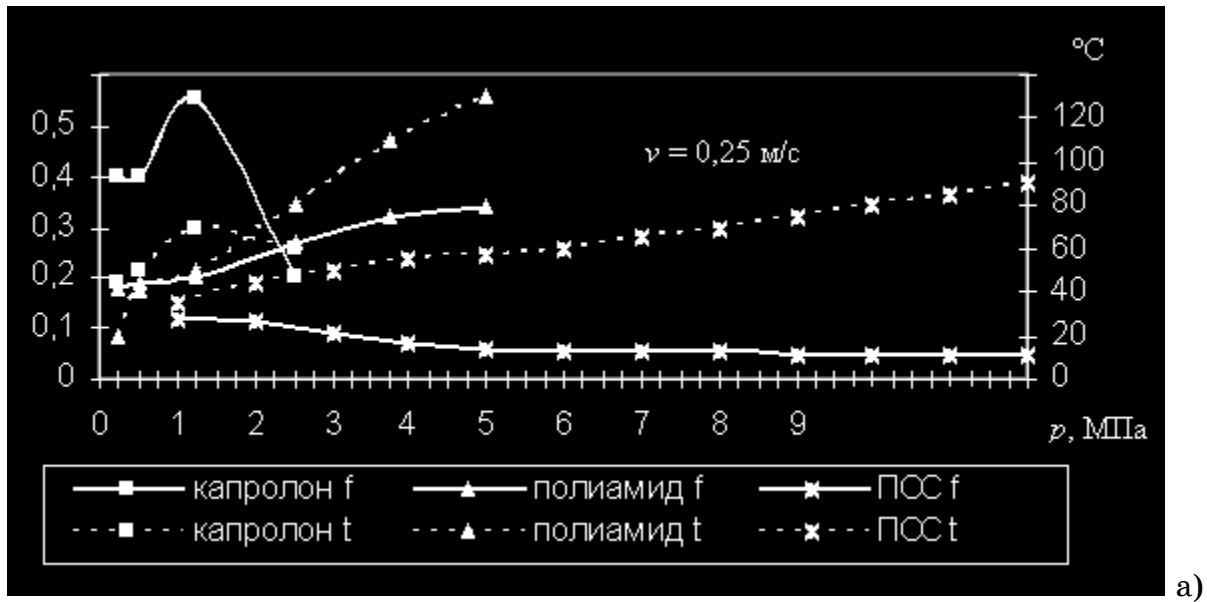


Рисунок 3 – Зависимость коэффициента трения и температуры выделяемого в контактной зоне тепла от давления различных полимерных материалов и ПСС при скоростях скольжения: а) $v = 0,25 \text{ м/с}$; б) $v = 0,5 \text{ м/с}$

При использовании самосмазывающихся узлов трения отпадает необходимость в системе маслоподачи, что уменьшает металлоемкость оборудования, упрощает конструкцию, позволяет эксплуатировать новую технику в особо сложных условиях, где невозможна дополнительная смазка.

ПСС коррозионностойки, бесшумны, не требуют дополнительного подвода смазки при работе, что упрощает уход за узлами трения во время эксплуатации. Они не заклинивают, не заедают, что предотвращает выход из строя узла трения и износ других деталей. Например, в ленточных транспортерах, на подшипниках качения при попадании абразива в зону трения происходит их заедание, и ролики не

вращаются, происходит местное истирание их лентой, что исключено в случае использования ПСС, когда ролики вращаются постоянно.

ПСС износостойки. При эксплуатации в идентичных условиях по сроку службы они превосходят подшипники качения в 2-3 раза. Они долговечнее подшипников скольжения из бронзы, антифрикционного чугуна, баббита, текстолита, капрона, фторопласта и других дефицитных материалов в 2 -5 раза. По результатам проведенных испытаний на рисунке 3 представлена диаграмма долговечности различных видов подшипников при эксплуатации в идентичных условиях.

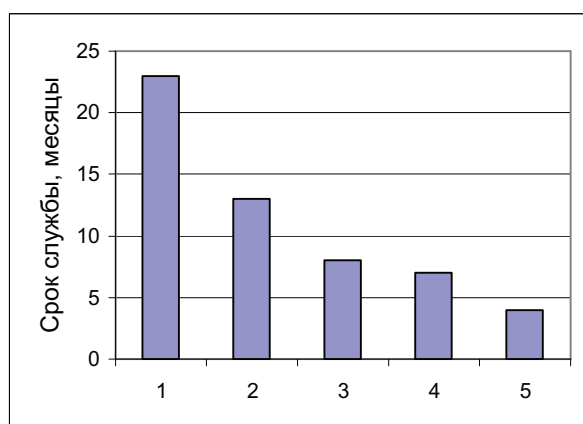


Рисунок 3 – Сравнительная долговечность подшипников, эксплуатирующихся в абразивно-агрессивных средах при одинаковых режимах работы ($p = 2,3$ МПа; $v = 0,5$ м/с; $n = 318$ об/мин): 1 – ПСС; 2 – подшипники качения; 3, 4, 5 – подшипники скольжения соответственно полимерные, бронзовые, из антифрикционного чугуна

Целесообразность применения ПСС определяется в основном тремя факторами: себестоимостью изготовления, эффективностью в эксплуатации и экономией дефицитных материалов и подшипников качения.

ПСС надежно работают в режиме самосмазки в абразивных, агрессивных, влажных средах и в воде при температурах до 120°C , давлениях p до 15 МПа, скоростях скольжения до 1,5 м/с. При этом произведение pv не должно превышать 3 МПа·м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полимеры в узлах трения машин и приборов: Справочник / Под ред. А.В. Чичинадзе. – М.: Машиностроение, 1988. – 320 с.
2. Рабинович В.А. Краткий химический справочник / В.А. Рабинович, З.Я. Хавин – Л.: Химия, 1977. – 376 с.

3. Врублевская, В.И. Износостойкие самосмазывающиеся антифрикционные материалы и узлы трения из них / В.И. Врублевская, А.Б. Невзорова, В.Б. Врублевский. – Гомель: БелГУТ, 2000. – 324 с.
4. Невзорова А.Б. Теоретические основы и технология механотрансформации древесины / А.Б. Невзорова. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 160 с.

Получено __.__. 2006 г.

Л.П. Зинчук, А.Н. Подлипенец

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРО- УПРУГИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ ИЗ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ И ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЛОЕВ

1 Вступление

В разнообразных радиотехнических устройствах в качестве электроакустических компонент перспективны к применению слоисто-периодические структуры из электроупругих материалов (пьезокомпозитов, сверхрешеток, многослойных звукопроводов и т.д.). Это и обуславливает необходимость в детальном моделировании и изучении в широком диапазоне частот закономерностей распространения акустоэлектрических волн в слоистых средах с пьезоэффектом и, в частности, отражения волн от таких слоисто-периодических структур. Физико-механические свойства подобных структур можно изменять в достаточно широких пределах и тем самым получать материалы и конструктивные элементы с оптимальными характеристиками. Об интересе к вопросам отражения волн от многослойных структур можно судить по работам [1-3].

В данной статье на основе подхода, предложенного в [4,5], исследуются частотные характеристики отражения сдвиговых акустоэлектрических волн, которые падают на границу однородного пьезоэлектрического полупространства класса *6mm* и регулярно-слоистого, образованного чередованием слоя металла и слоя пьезоэлектрика.

2 Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим однородное пьезоэлектрическое полупространство класса *6mm* $y < 0$, $-\infty < x, z < +\infty$ (ось *oz* параллельна оси симметрии шестого порядка), граничащее с регулярно-слоистым полупространством $y > 0$, образованным чередованием вдоль оси *oy* слоя идеально проводящего изотропного материала (металла) толщины h_1 и слоя пьезоэлектрика гексагонального класса *6mm* толщины h_2 ($h_1 + h_2 = h$). Пусть на границу раздела $y = 0$ со стороны

полупространства $y < 0$ падает плоская сдвиговая волна. Распространение в плоскости xu сдвиговой волны, поляризованной вдоль оси oz , в изотропном слое металла описывается системой

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \rho_1 \omega^2 w = 0, \quad \sigma_{zx} = c_{44,1} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{zy} = c_{44,1} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1)$$

а в слое пьезоэлектрика и в полупространстве $y < 0$ системой [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \rho \omega^2 w &= 0, & \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} &= 0, \\ \sigma_{zx} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \sigma_{zy} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ D_x &= -\varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial w}{\partial x}, & D_y &= -\varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

(временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее всюду опущен), где σ_{zx} , σ_{zy} – компоненты тензора напряжений, w – перемещение, D_x , D_y – компоненты вектора электрической индукции, φ – электрический потенциал, ω – частота. Свойства полупространства $y < 0$ характеризуются параметрами ρ_0 , $c_{44,0}$, $e_{15,0}$, $\varepsilon_{11,0}$, а пьезоэлектрического слоя – ρ_2 , $c_{44,2}$, $e_{15,2}$, $\varepsilon_{11,2}$.

На границах раздела свойств среды

$$y = y_{n,1} \equiv (n-1)h + h_1, \quad y = y_{n,2} \equiv nh, \quad y = y_{1,0} \equiv 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

$y_{n-1,2} = y_{n,0}$)

потребуем выполнения условий сопряжения

$$w(x, y_{n,q} - 0) = w(x, y_{n,q} + 0), \quad \sigma_{zy}(x, y_{n,q} - 0) = \sigma_{zy}(x, y_{n,q} + 0), \quad q = 1, 2. \quad (3)$$

Будем также считать, что проводящие металлические слои являются закороченными, а значит, справедливо условие

$$\varphi(x, y_{n,q}) = 0, \quad q = 1, 2. \quad (4)$$

Если $(n_{x,0}; n_{y,0})$ – направляющие косинусы плоской сдвиговой волны, падающей со стороны однородной пьезоэлектрической среды, то упругие и электрические поля в полупространстве $y < 0$, определяемые суперпозицией падающей и отраженной волн, будут описываться выражениями [7,8]

$$\begin{aligned} w(x, y) &= (A_0 \exp(ik_{s,0} n_{y,0} y) + B_0 \exp(-ik_{s,0} n_{y,0} y)) \exp(ik_{s,0} n_{x,0} x), \\ \varphi(x, y) &= (e_{15,0} \varepsilon_{11,0}^{-1} (A_0 \exp(ik_{s,0} n_{y,0} y) + B_0 \exp(-ik_{s,0} n_{y,0} y)) + \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ F_0 \exp(k_{s,0} n_{x,0} y) \exp(ik_{s,0} n_{x,0} x), \quad y < 0, \quad (6)$$

где A_0 – известная амплитуда падающей волны, B_0, F_0 – неизвестные амплитуды, а $k_{s,0} = \omega v_{s,0}^{-1} = \omega \sqrt{\rho_0 / \bar{c}_{44,0}}$, $\bar{c}_{44,0} = c_{44,0} + e_{15,0}^2 \varepsilon_{11,0}^{-1}$, $n_{x,0} = \sin \alpha$, $n_{y,0} = \cos \alpha$ ($0 < \alpha < \pi/2$).

Учитывая условие (4), при $y = 0$ получаем выражение для $F_0 = -e_{15,0} \varepsilon_{11,0}^{-1} (A_0 + B_0)$.

Представления для $\sigma_{zy}(x, y)$, $w(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ в регулярно-слоистом полупространстве с учетом (4) согласно [6] имеют вид

$$\text{col}[\sigma_{zy}(x, y), w(x, y)] = L_m(y - y_{n,1}) \vec{A}_{2n-1} \exp(ikx), \quad y_{n,0} < y < y_{n,1}; \quad (7)$$

$$\text{col}[\sigma_{zy}(x, y), w(x, y)] = L_p(y - y_{n,2}) \vec{A}_{2n} \exp(ikx), \quad y_{n,1} < y < y_{n,2};$$

$$\varphi(x, y) = \{B_{2n}^{(1)} \text{sh} k(y - y_{n,2}) + B_{2n}^{(2)} \text{ch} k(y - y_{n,2}) + e_{15,2} \varepsilon_{11,2}^{-1} \times \\ \times (A_{2n}^{(1)} \sin \Omega_2(y - y_{n,2}) + A_{2n}^{(2)} \cos \Omega_2(y - y_{n,2}))\} \exp(ikx), \quad y_{n,1} < y < y_{n,2}; \quad (8)$$

$$B_{2n}^{(1)} = e_{15,2} \varepsilon_{11,2}^{-1} (-A_{2n}^{(1)} \sin(\Omega_2 h_2) + A_{2n}^{(2)} (\cos(\Omega_2 h_2) - \text{ch}(kh_2))) / \text{sh}(kh_2),$$

$$B_{2n}^{(2)} = -e_{15,2} \varepsilon_{11,2}^{-1} A_{2n}^{(2)}, \quad \vec{A}_{2(n-1)+q} = \text{col}[A_{2(n-1)+q}^{(1)}, A_{2(n-1)+q}^{(2)}], \quad (q = 1, 2),$$

$$\Omega_2^2 = \omega^2 v_{s,2}^{-2} - k^2, \quad v_{s,2}^2 = \bar{c}_{44,2} / \rho_2, \quad \bar{c}_{44,2} = c_{44,2} + e_{15,2}^2 \varepsilon_{11,2}^{-1}.$$

Явный вид элементов матриц-функций $L_m(y - y_{n,1})$, $L_p(y - y_{n,2})$ можно найти в [6]. Для выполнения условий сопряжения (3) следует в (7)–(8) положить $k = k_{s,0} n_{x,0} = k_{s,1} n_{x,1} = k_{s,2} n_{x,2}$ (закон Снеллиуса),

где $k_{s,1} = \omega v_{s,1}^{-1} = \omega \sqrt{\rho_1 c_{44,1}^{-1}}$, $k_{s,2} = \omega v_{s,2}^{-1} = \omega \sqrt{\rho_2 \bar{c}_{44,2}^{-1}}$.

Подстановка (5) и (7) в условия (3) приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} ia_0(A_0 - B_0) - a_1(A_0 + B_0) \\ A_0 + B_0 \end{bmatrix} = L_m(-h_1) \vec{A}_1, \\ L_m(0) \vec{A}_{2n-1} = L_p(-h_2) \vec{A}_{2n}, \\ L_p(0) \vec{A}_{2n} = L_m(-h_1) \vec{A}_{2n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9) \\ a_0 = \bar{c}_{44,0} k_{s,0} n_{y,0}, \quad a_1 = e_{15,0}^2 \varepsilon_{11,0}^{-1} k_{s,0} n_{x,0}.$$

Решение системы (9) имеет вид [4, 6]

$$\vec{A}_{2n-1} = K_1 \chi_1 L_m^{-1}(0) L_p(-h_2) L_p^{-1}(0) \vec{X}_1, \quad \vec{A}_{2n} = K_1 \chi_1 L_p^{-1}(0) \vec{X}_1,$$

где χ_1 и $\vec{X}_1$ - характеристическое число, и соответствующий собственный вектор передаточной матрицы $L = L_m(-h_1)L_m^{-1}(0)L_p(-h_2)L_p^{-1}(0)$, причем χ_1 находится по формулам [4,5]

$$\chi_1 = \begin{cases} b_s - \sqrt{b_s^2 - 1}, & b_s > 1 \\ \exp\left\{i\left((-1)^{l-1} \arccos b_s + 2\pi\left[\frac{l}{2}\right]\right)\right\}, & |b_s| < 1 \\ b_s + \sqrt{b_s^2 - 1}, & b_s < -1 \end{cases}$$

в которых $b_s = \frac{1}{2} \text{Spur } L$, l - порядковый номер появления неравенства $|b_s| < 1$ с ростом частоты от нуля, $[l/2]$ - целая часть числа $l/2$.

При таком выборе решения все уравнения системы (9), за исключением первого, удовлетворяются. Оставшиеся неизвестные B_0 и K_1 , определяются из первого уравнения системы (9):

$$B_0 = A_0 \frac{ia_0 X_1^{(2)} - a_1 X_1^{(2)} - X_1^{(1)}}{ia_0 X_1^{(2)} + a_1 X_1^{(2)} + X_1^{(1)}}, \quad K_1 = A_0 \frac{2ia_0}{ia_0 X_1^{(2)} + a_1 X_1^{(2)} + X_1^{(1)}}.$$

3 Результаты численных исследований

На рис.1 представлены результаты численного анализа зависимости коэффициента отражения $V = |B_0/A_0|$ от безразмерной частоты $\omega^* = \omega h (\rho_2 c_{44,2}^{-1})^{1/2}$ при различных углах падения α : $\alpha = \pi/20$ (сплошная линия), $\alpha = \pi/6$ (штриховая линия), $\alpha = \pi/4$ (штрих-пунктирная линия). Рассматривается регулярно-слоистое полупространство, образованное чередованием слоя алюминия и слоя пьезокерамики PZT-4, которые характеризуются следующими параметрами: $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c_{44,1} = 2,57\lambda_0$, $h_1/h = 0,1$; $\rho_2 = 7,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c_{44,2} = 2,56\lambda_0$, $e_{15,2} = 12,7 \text{ Кл/м}^2$, $\varepsilon_{11,2} = 730\varepsilon_0$, $h_2/h = 0,9$ ($\lambda_0 = 10^{10} \text{ Па}$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ - диэлектрическая проницаемость вакуума). Свойства однородного пьезоэлектрического полупространства совпадают со свойствами слоя толщины h_2 . Следует отметить, что частотный спектр изменения коэффициента отражения имеет определенную, характерную для слоисто-периодических

систем, структуру [4,5]. В ней можно выделить диапазоны частот, соответствующие полному внутреннему отражению ($V=1$), между которыми идут так называемые «погружения» – уменьшения величины коэффициента отражения до определенного значения. Например, при $\alpha = \pi/4$ существует диапазон частот, где значение V близко к нулю. На рис. 2 показана зависимость коэффициента отражения V от частоты ω^* при $\alpha = \pi/20$ с учетом пьезоэффекта (сплошная линия) и без его учета (штриховая линия), т.е. при $e_{15,0} = e_{15,2} \equiv 0$. Как видно из рисунка, пьезоэффект приводит к некоторому изменению коэффициента отражения, увеличивая диапазоны частот, соответствующих полному внутреннему отражению.

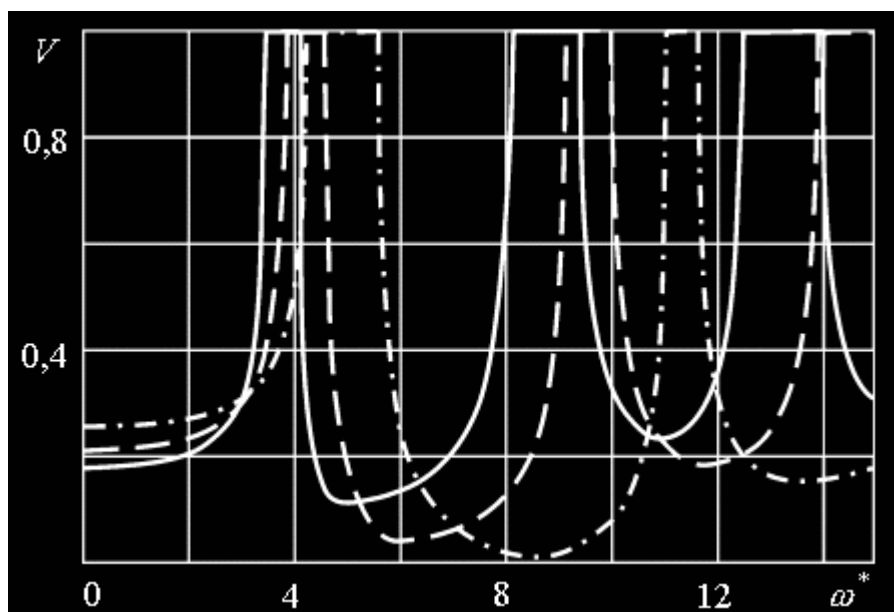


Рисунок 1

В заключение отметим, что численное моделирование проводилось для слоистых композиций с тремя возможными соотношениями характерных скоростей: 1) $v_{s,1} < v_{GB} < v_{s,2}$ (серебро – пьезокерамика); 2) $v_{GB} < v_{s,2} < v_{s,1}$ (алюминий – пьезокерамика); 3) $v_{GB} < v_{s,1} < v_{s,2}$ (цинк – пьезокерамика), где

$v_{GB} = v_2 \sqrt{1 - e_{15,2}^4 (e_{11,2} \bar{c}_{44,2})^{-2}}$ – скорость волны Гуляева-Блюштейна на границе металлизированной свободной поверхности пьезоэлектрического полупространства. Зависимость коэффициента

отражения от частоты для каждого из перечисленных случаев имеет свои особенности, требующих детального изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shuvalov A. L. and Gorkunova A. S. Specific features of the acoustic diffraction from a periodic system of planar sliding-contact interfaces // Journal of Sound and Vibration. –2001. – V. 243, N 4. – P. 679-697.
2. Shuvalov A. L. and Lothe J. The Stroh formalism and the reciprocity properties of reflection-transmission problems in crystal piezo-acoustics // Wave Motion. –1997. – V. 25, N 4. – P. 331-345.
3. Aynaou H., Velasco V. R., Nougauoui A., Boudouti E. H. El., Djafari-Rouhani B. and Bria D. Application of the phase time and transmission coefficients to the study of transverse elastic waves in quasiperiodic systems with planar defects //Surface Science . – 2003, – V. 538. – P. 101-112.
4. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – Киев: Наук. думка, 1981. – 200 с.
5. Подлипенец А.Н. Отражение волн сдвига от ортотропного регулярно-слоистого композитного материала // Тр. X науч. конф. мол. ученых / АН УССР. Ин-т механики. – Киев, 1984. – 4.2. – С. 262-264. – Деп в ВИНТИ 30.07.84, № 5535 – 4Деп.
6. Зинчук Л.П., Подлипенец А.Н. Поверхностные сдвиговые волны в слоистых композициях “металл–пьезокерамика” // Прикл. механика. – 1989. –25, № 11.– С.54–61.
7. Балакирев М. К., Гишинский И. А. Волны в пьезокристаллах. - Новосибирск: Наука, 1982. – 240 с.
8. Auld B.A. Acoustic fields and waves in solids. Vol. II. – New York: Wiley, 1973. – 414 p.

Получено __.__.2006 г.

УДК 681.3.06:669.18

Н.В. Назаренко, Е.А. Чичкарев, Е.А. Казачков, О.Б. Исаев

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ЧЕРНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ НА БАЗЕ ОТКРЫТЫХ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ

Во многих современных работах, касающихся исследования процессов формирования непрерывнолитых заготовок, а также процессов, протекающих в промежуточном ковше МНЛЗ, широко применяются методы математического моделирования как для решения исследовательских задач или проведения проектных расчетов, так и для решения задач управления производством.

Большинство работ, касающихся моделирования технологических процессов, завершается разработкой приложений, реализующих ту или иную математическую модель, в виде пакета программ, разработанного с использованием языка программирования общего назначения (C++, Object Pascal и т.п.) и среды быстрой разработки приложений (Delphi, C-Builder).

В таблице 1 сопоставлены результаты тестирования кода, сгенерированного различными компиляторами языка C++: g++ в среде Linux и FreeBSD и C++-Builder 6 в среде Windows. Проводился расчет кинетики формирования непрерывнолитой заготовки, основанный на решении двумерной нелинейной нестационарной задачи теплопроводности с выводом промежуточных результатов (консольное приложение, вывод примерно 5000 строк результатов в рабочее окно) или тот же самый расчет, но с выводом только начальных и конечных результатов.

Рассматриваемая математическая модель затвердевания позволила исследовать как стационарные (путем счета на установление), так и нестационарные режимы разлива стали в слабовые заготовки, и включала уравнение теплопроводности с учетом вытягивания заготовки [1-4]:

$$\rho \cdot c_s \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + v \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где $T(x, z, \tau)$ – температура металла; $c_s = c_s(x, z, T)$ – эффективная теплоемкость металла; $\rho = \rho(x, z, T)$ $\lambda = \lambda(x, z, T)$ – его плотность и

теплопроводность; v – линейная скорость разливки; ось Oz направлена вдоль оси заготовки, ось Ox – перпендикулярно широкой грани сляба.

Температурная зависимость коэффициента теплопроводности учитывалась в соответствии с изменением агрегатного состояния металла:

$$\lambda(x, y, z, \tau) = \begin{cases} \lambda_{тв}(T), T < T_S; \\ \lambda_{дфз} = \lambda_{тв} + (\lambda_{эфф} - \lambda_{тв})(T - T_S)/(T_L - T_S), T_S < T < T_L; \\ \lambda_{эфф}(T), T > T_L \end{cases} \quad (2)$$

где $\lambda_{тв}$, $\lambda_{дфз}$, $\lambda_{эфф}$ – коэффициенты теплопроводности металла в твердой и жидкой фазе, в расчетах принималось $\lambda_{эфф} = 5 \dots 7 \lambda_{тв}$.

Температурная зависимость эффективной теплоемкости учитывалась в соответствии с соотношением:

$$c(x, z, \tau) = \begin{cases} c_{тв}(T), T < T_S; \\ (c_{тв} + c_{жс})/2 + L \cdot (T - T_S)/(T_L - T_S), T_S < T < T_L; \\ c_{жс} + L/(T_L - T_S), T > T_L; \end{cases} \quad (3)$$

где $c_{тв}$, $c_{эфф}$ – теплоемкость металла в твердой (использовались данные [5]) и жидкой фазе соответственно, L – теплота плавления (кристаллизации).

Граничные условия записывались, исходя из условий теплообмена заготовки с внешней средой. На торцах заготовки принимались условия

$$\partial T / \partial z|_{z=L} = 0; \quad -\lambda \partial T / \partial z|_{z=0} = \alpha(T) \cdot (T - T_{о.с.}) + v \cdot c_э \cdot \rho \cdot (T_{вх} - T), \quad (4)$$

$$\partial T / \partial x|_{x=0} = 0; \quad -\lambda \partial T / \partial x|_{x=R} = \alpha_{охл}(T, q_{охл}) \cdot (T - T_{охл}). \quad (5)$$

где $T_{о.с.}$ – температура окружающей среды; $\alpha(T)$ – коэффициент теплоотдачи, который рассчитывался для условий теплообмена с учетом наличия шлака на зеркале металла; $T_{вх}$ – температура поступающего в кристаллизатор металла.

На боковых гранях заготовки в границах кристаллизатора коэффициенты теплоотдачи задавались постоянными для двух зон по высоте; в зоне вторичного охлаждения коэффициент теплоотдачи к охлаждающему агенту рассчитывался по данным [2], адаптированным к конкретной МНЛЗ.

Для решения уравнения теплопроводности использовался метод конечных разностей (чисто неявная локально-одномерная схема) с

аппроксимацией величины $\partial T / \partial z$ разностью против потока. Задача теплопроводности является нелинейной, поэтому на каждом шаге по времени значения температур уточнялись итерационным путем. Положения линий, отвечающим температурам ликвидуса и солидуса, определялись путем линейной интерполяции по сеточным значениям температур.

Таким образом, задача моделирования затвердевания непрерывнолитой заготовки является достаточно сложной в вычислительном отношении и позволяет адекватно исследовать основные особенности решения расчетных задач в любой вычислительной среде.

Результат тестирования показал некоторое преимущество компилятора gcc в среде unix-подобных ОС вследствие более развитых средств оптимизации кода по скорости выполнения, хотя без оптимизации C++-Builder демонстрирует лучшие результаты, что и отмечалось ранее в Интернет-публикациях. Обращает на себя внимание разница в скорости выполнения при выводе промежуточных результатов, зависящая от организации операций ввода/вывода в ОС. Вне конкуренции оказалась FreeBSD (использовалась версия 5.2.1, аналогичные результаты получены и на версиях 5.3 и 6.0) с монолитным ядром, а для Linux с модульным ядром и Windows результаты оказались практически одинаковы. Тестирование проводилось на одном и том же компьютере (Athlon XP 1800).

В дальнейшем рассматриваемая модель была дополнена расчетом развития химической макронеоднородности. Процесс ее формирования описывался несколько видоизмененным уравнением конвективной диффузии [6] (для каждого химического элемента в составе стали):

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \rho \nabla(uC) = \nabla(D_{эфф,жс} \nabla(1-\xi)C_{жс} + D_{эфф,тв} \nabla \xi C_{тв}) = \nabla D_{эфф}(\nabla C), \quad (6)$$

$$\text{где } D_{эфф} = \begin{cases} D_{тв}(T), T < T_S \\ D_{жс} k_r / ((1-\xi) \cdot k_r + \xi), T_S < T < T_L; & k_r - \text{коэффициент} \\ (5...7) \cdot D_{жс}(T), T > T_L \end{cases}$$

распределения (значения k_r выбирались по литературным данным, см. [7]); ξ - доля твердой фазы в ДФЗ. Граничные условия для уравнения (6) выбирались следующими:

$$D_{эфф} \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=0} = \nu C_{вх} ; \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0 ; \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=R} = 0 \quad (7)$$

Для решения уравнения диффузии химических элементов также использовался метод конечных разностей.

Проверка адекватности модели осуществлялась путем сопоставления результатов расчета с данными [2,3], технологическими результатами в промышленных условиях [8], а также результатами оценки развития химической неоднородности на продольных и поперечных темплатах реальных слэбов, отлитых в условиях МК «Азовсталь». Достоинством разработанной модели и программного обеспечения является достаточно быстрая сходимость (по сравнению, например, с данными [4]). Результаты моделирования использованы для оптимизации режимов вторичного охлаждения, обеспечивающих снижение отсортировки слэбов по поверхностным дефектам.

Тестирование модели затвердевания непрерывнолитого слэба с оценкой химической неоднородности проводилось на двух компьютерах (процессоры Athlon 2200 и Sempron 3000) и показало результаты, аналогичные представленным в таблице 1.

Таблица 1

Сопоставление времени расчета переходного процесса формирования непрерывнолитой заготовки

Вид теста	Время выполнения, с		
	C++-Builder 6 (WindowsXP)	gcc-3.3.2 (Linux)	gcc-3.2.1 (FreeBSD)
С выводом промежут. рез-тов в текстовом режиме	<i>209 (эмуляция dos)</i>	<i>202</i>	<i>54</i>
То же, в графич. режиме (КДЕ)		104 (ядро 2.6)	98
Без вывода	<i>44</i>	47	45
С оптимизацией	42...43 (-O2 - ffast-math)	17...20 (-O3 - ffast-math)	20...22 (-O3 - ffast-math)

Для решения задач, связанных с разработкой комплексных математических моделей, существенными преимуществами по сравнению с компилируемыми языками обладают интегрированные математические пакеты, объединяющие встроенные функции для решения разнородных задач, в т.ч. построения графических

иллюстраций. Во многих отношениях стандартом подобных пакетов является система MatLab.

На настоящий момент для решения задач моделирования разработано большое количество свободного программного обеспечения, либо совместимого с MatLab по языку программирования (Octave, SciLab), либо обеспечивающего аналогичный набор возможностей (язык программирования Python с вычислительными пакетами расширениями [9]).

Сопоставление вычислительных возможностей было выполнено и для интегрированных математических систем: MatLab 6.1 (ОС Windows), Octave (на 90 % совместимый с MatLab аналог для ОС Unix и Windows), SciPy 0.3.2 (библиотека численных алгоритмов и графических утилит для программирования на языке Python [9,10]). Результаты выполнения ряда тестов приведены в таблицах 2 и 3. Тестирование проводилось на одном и том же компьютере (Athlon 2200, 256 МБ памяти, МП Asus A7V8X-X).

Таблица 2

Сопоставление времени выполнения различных тестов

Тест	MatLab 6.1	Octave 2.1.53 (MDK 10.0)	Octave 2.1.57 (Debian Sid)	SciPy 0.3 (MDK 10.0, Numeric 23.5)
1	2	3	4	5
Цикл	0.4375*	1.477	1.736	0.1533
Сортировка 3 млн. действит. чисел	1.211	2.444	2.351	
FFT примерно 1 млн. эл-тов	0.7345	1.541	0.924	
Интегрирование функции	0.047	0.1417	0.1118	
Детерминант 500x500	0.0935	0.2504	0.2003	0.2250
Обращ-ие случ. м-цы 500x500	0.273	1.428	0.2956	0.2008
Собств. числа и векторы случайной м-цы 600x600	4.242	18.02	5.888	13.4648
Произведение м-ц 500x500	0.156	2.116	0.1828	0.1848
Расчет 1 млн. чисел Фибоначчи	1.1325	0.8639	0.81	
Разложение случ. м-цы по сингулярным числам	1.383	2	1.349	1.8624
Гамма-функция элементов случайной матрицы 500x500	0.1095	0.1332	0.1255	
Функция ошибок для элементов случайной матрицы 500x500Ф	0.0855	0.04067	0.03406	
Линейная регрессия по матрице 500x500	0.117	0.2268	0.126	

* - время приведено в секундах

Таблица 3

Сопоставление результатов решения системы ОДУ и суммирования
числового ряда

Тест	MatLab 6.1	Octave 2.1.53 (MDK 10.0)	Octave 2.1.57 (Debian Sid)	SciPy 0.3 (MDK 10.0, Numeric 23.5)
Решение системы ОДУ	0.1720	1.477	0.05699	0.1533
Суммирование числового ряда	1.3280	4.4873	4.2235	1.2779

В основном быстродействие математических пакетов отличаются незначительно, и связаны с технологией реализации тех или иных численных методов или использованных алгоритмов. Высокая эффективность настольных вычислительных систем достигается лишь при условии тщательной настройки системы и использования набора стандартных библиотек (ATLAS, BLAS и LAPACK) собранных из исходного кода, и перекомпиляции необходимых программ. Кроме того, в различных дистрибутивах на первый взгляд мало отличающиеся компоненты могут заметно различаться по возможностям. Эту особенность наглядно демонстрируют столбцы 3 и 4 таблицы 2. По набору всевозможного программного обеспечения для решения задач вычислительного характера непревзойденным является дистрибутив Debian Linux.

Пример использования полностью открытой системы Python+SciPy – реализация математической модели циркуляционного течения в промежуточном ковше (ПК) машины непрерывного литья заготовок и практические расчеты с ее использованием (использованы встроенные функции пакета для решения ОДУ).

Один ручей трехсекционного ПК представлялся комбинированной моделью, включающей ячейку идеального смешения, характеризующую приемную секцию ПК; ячейку идеального смешения, характеризующую область свободных струй в разливочной секции ПК; разливочную секцию, описываемую моделью с обратным перемешиванием:

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + w \cdot \frac{\partial c}{\partial x} = D_E \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (8)$$

где w – осредненная по поперечному сечению ПК скорость движения жидкости; D_E – эффективный коэффициент турбулентной диффузии (определялся по данным [11]); c – концентрация

индикатора. ПК без перегородок представляется аналогичной моделью, включающей ячейку идеального смешения, характеризующую область струи, поступающей из стальной ковша, и ячейку вытеснения с обратным перемешиванием (рис. 1; пример обработки результатов моделирования с использованием (8) – рис. 2).

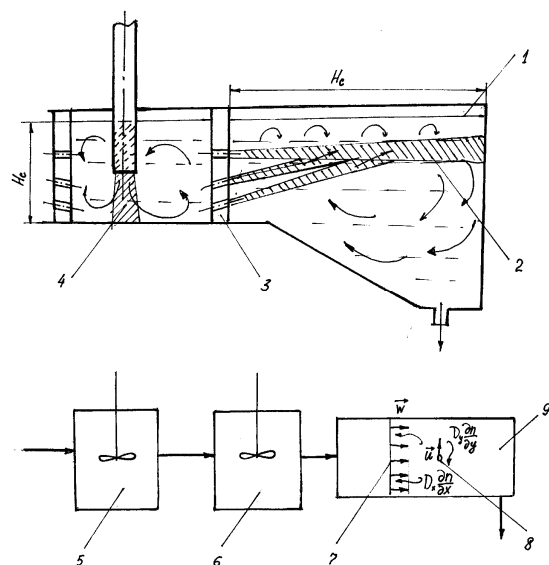


Рисунок 1 – Схема структуры потоков в математической модели структуры потоков в промежуточном ковше: 1 – зеркало металла в ПК (граница раздела с покровным шлаком); 2 – область свободных струй в разливочной секции; 3 – перфорированная перегородка; 4 – область свободной струи в приемной секции; 5 – ячейка идеального смешения, характеризующая приемную секцию; 6 – ячейка идеального смешения, характеризующая область свободных струй в разливочной секции; 7 – фронт осредненного течения; 8 – всплывающее неметаллическое включение; 9 – ячейка вытеснения с обратным перемешиванием, характеризующая разливочную секцию

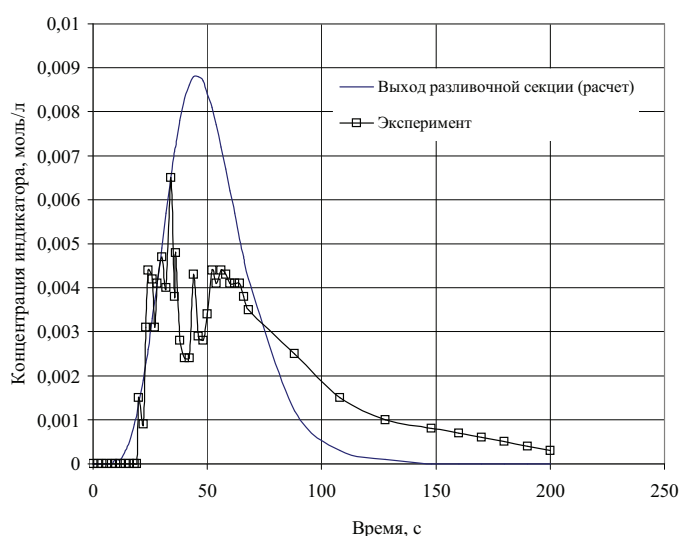


Рисунок 2 – Сопоставление экспериментальной кривой отклика и результатов численного решения уравнения (8) ($Pe=4$)

Результаты моделирования были использованы для оценки количества алюминия, вводимого в промежуточный ковш с целью компенсации его окисления и стабилизации концентрации в выходном потоке.

Изменение во времени содержания алюминия в металле приемной секции в рамках модели идеального смешения было представлено одним обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dc_1}{d\tau} = \frac{c_{вх} + c_{дон}}{\theta} - \frac{c_1}{\theta}, \quad (9)$$

где $c_{вх}$ – концентрация алюминия в металле на входе ПК; c_1 – концентрация алюминия на выходе приемной секции; θ – среднее время пребывания металла в приемной секции; $\theta = G/R$; G – емкость приемной секции; R – массовая скорость разливки; $c_{дон}$ – дополнительная концентрация алюминия во входном потоке за счет ввода катанки, % масс., которая рассчитывалась по формуле $c_{дон} = w \cdot g \cdot \eta / R$; w – скорость ввода катанки, м/с; g – ее линейная масса, кг/м; R – массовая скорость разливки, кг/с; η – степень усвоения алюминия, % (для расчета на математической модели ПК принималась равной 70 %).

Для разливочной секции использована однопараметрическая модель с обратным перемешиванием (8) (c – концентрация алюминия, % масс). Установлено, что чем выше максимальное снижение концентрации алюминия на выходе ПК, тем выше и суммарные потери алюминия (результаты расчета для разливки одной плавки приведены на рис. 3).

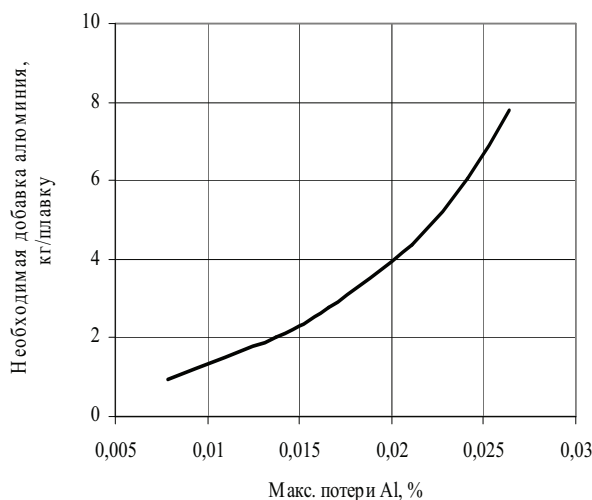


Рисунок 3 – Зависимость необходимой добавки алюминия от максимального снижения его концентрации в начале разливки плавки

Потери алюминия, которые необходимо скомпенсировать за счет дополнительного ввода алюминия в приемочную секцию ПК в начале разливки плавки, оценивались по уравнению:

$$\Pi = \frac{R}{100} \cdot \int_0^{\tau_{\text{раз}}} (\bar{c} - c(\tau)) d\tau, \quad (10)$$

где $\bar{c}$ - средняя концентрация алюминия на выходе разливочной секции; $c(\tau)$ - текущая концентрация, зависящая от времени; $\tau_{\text{раз}}$ - время разливки плавки.

Опробование режимов обработки стали в проковше монолитной алюминиевой катанкой осуществлялось в промышленных условиях конверторного цеха МК “Азовсталь”. За счет использования рационального режима ввода алюминия в ПК в два раза снижена частота переназначения плавов качественных низколегированных марок стали в партии стали пониженного качества.

Достоинством интегрированных систем компьютерной математики при проведении научных расчетов является высокая скорость и надежность разработки приложений. Среда MatLab и ее аналоги (или язык Python с необходимыми модулями расширения) обеспечивают быструю разработку прототипов и возможность использования большого числа различных функций, а также легкость приспособления к конкретным потребностям.

Кроме того, все упомянутые математические пакеты обеспечивают широкие возможности разработки модулей расширения. В частности, для использования разработанной модели затвердевания непрерывнолитой заготовки в учебном процессе ПГТУ авторами разработаны модули расширения для решения задач одно- и двумерной задачи Стефана в вычислительной среде MatLab или Python+SciPy. Представленные в статье разработки использованы в практикуме по курсу «Математическое моделирование и системный анализ» (реализации как MatLab, так и на Octave и SciPy).

Наиболее широкое применение результаты приведенных тестов и открытое ПО в реальном учебном процессе нашли в дипломном проектировании как для студентов, обучающихся по специальности «Информатика», так и для студентов-технологов.

Выводы

1. Перспективным направлением развития методики математического моделирования гидродинамических, тепловых и физико-химических процессов для технических приложений является использование специализированных скриптовых языков программирования, включающих функции, реализующие основные численные методы и возможности создания графических иллюстраций.
2. Проведено сравнительное исследование ряда открытых и коммерческих средств разработки вычислительных программ. Установлено, что в UNIX-подобных ОС скорость выполнения оптимизированного кода, построенного при помощи компилятора gcc, при решении вычислительных задач может быть выше, чем в среде Windows при использовании развитых коммерческих компиляторов.
3. Проведено сравнительное исследование ряда открытых и коммерческих систем компьютерной математики как с использованием бенчмарк-тестов, так и на реальных задачах. Установлено, что высокая эффективность настольных вычислительных систем с открытым кодом достигается лишь при условии тщательной настройки системы и использования набора стандартных библиотек.
4. Разработан комплекс математических моделей процессов и агрегатов непрерывной разливки стали, который использован для оптимизации условий ввода алюминия для дополнительного легирования и режима вторичного охлаждения на МНЛЗ.
5. Для практического использования результатов математического моделирования при решении производственных задач или в учебном процессе целесообразно объединение разрозненных моделей в специализированные пакеты расширения для программных сред общего назначения – MatLab, Python и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Огурцов А.П., Недопекин Ф.В., Белоусов В.В. Математическое моделирование процессов переноса в слитках и отливках с учетом внешних воздействий. – ДГТУ, 1997. – 199 с.
2. Тепловые процессы при непрерывном литье стали // Самойлович Ю.А., Крулевцкий С.А., Горяинов В.А. и др. - М.: Металлургия, 1982. - 152 с.

3. Емельянов В.А. Тепловая работа машин непрерывного литья заготовок. – М.: Металлургия, 1988. – 143 с.
4. Сарычев В.Д., Голоненко Н.А., Ливерц Е.И. Математическая модель охлаждения непрерывного слитка. // Моделирование, программное обеспечение и наукоемкие технологии. Труды Всероссийской научно-практической конференции. – СибГИУ. – Новокузнецк, 2001. – С.310-317.
5. Применение ЭВМ для численного решения температурного поля при сварке встык тонких пластин. / Ларионов В.П., Павлов А.Р., Тихонов А.Г. и др. // Автоматическая сварка. – 1979. - № 11. – С.19-22.
6. A.K. Singh, B. Basu. Numerical Study of Effect of Cooling Rate on Double-Diffusive Convection and Macrosegregation in Iron-Carbon System. // ISIJ Int., Vol. 41. – 2001. – N 12. – P.1481-1487.
7. Forming of Positive Macrosegregation during Steel Ingot Solidification / Z. Radovic, M. Lalovic, M. Tripkovic e.a. // ISIJ Int., Vol. 39. – 1999. – N 4. – P.329-334.
8. Математическое моделирование затвердевания непрерывнолитых заготовок при нестационарных режимах разливки // Чичкарев Е.А., Исаев О.Б., Носоченко О.В. и др. – Металл и литье Украины. – 2003. - № 7-8. – С.33-35.
9. Лесса А. Python. Руководство разработчика. – СПб.: ООО «ДиаСофт», 2001. – 688 с.
10. SciPy: Open Source Scientific Tools for Python // Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson and others//<http://www.scipy.org>
11. Стабилизация общего содержания алюминия в непрерывнолитых слябах за счет ввода алюминиевой катанки в промковш // Аникаева А.А., Казачков Е.А., Чичкарев Е.А. и др.- Материалы VI Междунар. Науч.-техн. Конф. «Тепло- и массообменные процессы в металлургических системах». Мариуполь, ПГТУ, 2000 – С.267-271.

Получено __.__.2006 г.

УДК 629.025:539.4

В.О. Бейгул, І.І. Лєєпа, Г.Л. Лепетова

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗБУРЕНОГО РУХУ СИСТЕМИ
"БУКСИРОВЩИК–АВТОСАМОСКИД"**

Постановка проблеми. При буксируванні кар'єрних автосамоскидів по нерівностях технологічних доріг виникають значні динамічні ефекти, у тому числі збільшення навантажень на силові елементи підйомно-зчеплювальних пристроїв, резонансні режими при коливаннях машин. У плані науково-обґрунтованого призначення металомісткості підйомно-зчеплювальних пристроїв вирішальну роль відіграють динамічні навантаження, які характеризуються певними коефіцієнтами динамічності. Динаміку навантаження будемо розглядати на шляху дослідження та вивчення збуреного руху системи "буксировщик–автосамоскид" в умовах експлуатації на технологічних дорогах гірничо-збагачувальних комбінатів.

Аналіз досліджень та публікацій. Система "буксировщик–автосамоскид" являє собою дволанковий автопоїзд, який під час руху по нерівностях технологічних доріг учиняє складні коливання. Питанням динаміки дволанкових транспортних систем присвячено ряд робіт [1], [2], де висвітлюються вимушені коливання, визначаються критерії стійкості руху. Робота [3] присвячена саме динаміці системи "буксировщик–автосамоскид", розкриває методологічний напрямок у дослідженні процесу буксирування.

Нерозв'язана частина загальної проблеми. Загальновідомі роботи, присвячені динаміці дволанкових транспортних систем, не враховують конструктивної специфіки системи "буксировщик–автосамоскид", тому їх результати не можуть бути у повній мірі використані для вивчення процесу буксирування в умовах технологічних доріг. Робота [3] потребує подальшого розвитку математичної моделі збуреного руху системи "буксировщик–автосамоскид" на шляху розширення умов зчеплення машин при буксируванні.

Мета роботи полягає у розробці математичної моделі збуреного руху системи "буксировщик–автосамоскид" з урахуванням

особливостей підйомно-зчеплювальних пристроїв в умовах технологічних доріг гірничо-збагачувальних комбінатів.

Виклад основного матеріалу. Схема буксирування автосамоскида захватом спереду при зведеній жорсткості підвіски обох машин системи "буксировщик-автосамоскид" зображена на рис. 1, де використанні наступні позначення та характерні розміри: L_1 – відстань від переднього моста буксировщика до центру маси; L_2 – відстань від центру маси буксировщика до заднього моста; L_3 – відстань від заднього моста буксировщика до опорного вузла підйомно-зчеплювального пристрою; L_4 – відстань від опорного вузла підйомно-зчеплювального пристрою до центру маси автосамоскида; L_5 – відстань від центру маси автосамоскида до заднього моста.

Диференціальні рівняння коливань отримуємо по схемі рівняння Лагранжа другого роду [4]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1, 2, \dots, S), \quad (1)$$

де T – кінетична енергія системи, Дж;

Π – потенціальна енергія системи, Дж;

q_j – j -а узагальнена координата.

У згоді з розрахунковою схемою у якості узагальнених координат приймаємо вертикальне переміщення y центру маси буксировщика, кут повороту ϕ_1 буксировщика у поздовжній вертикальній площині, кут повороту ϕ_2 автосамоскида у поздовжній вертикальній площині.

Кінетична та потенціальна енергії приймають наступний вигляд:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [\dot{y} - (L_2 + L_3) \dot{\phi}_1 - L_4 \dot{\phi}_2]^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}_2^2, \quad (2)$$

де m_1 – маса буксировщика, кг;

m_2 – маса автосамоскида, кг;

J_1 – момент інерції буксировщика відносно поперечної осі, яка проходить через його центр маси, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$;

J_2 – момент інерції автосамоскида відносно поперечної осі, яка проходить через опорний вузол підйомно-зчеплювального пристрою, $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

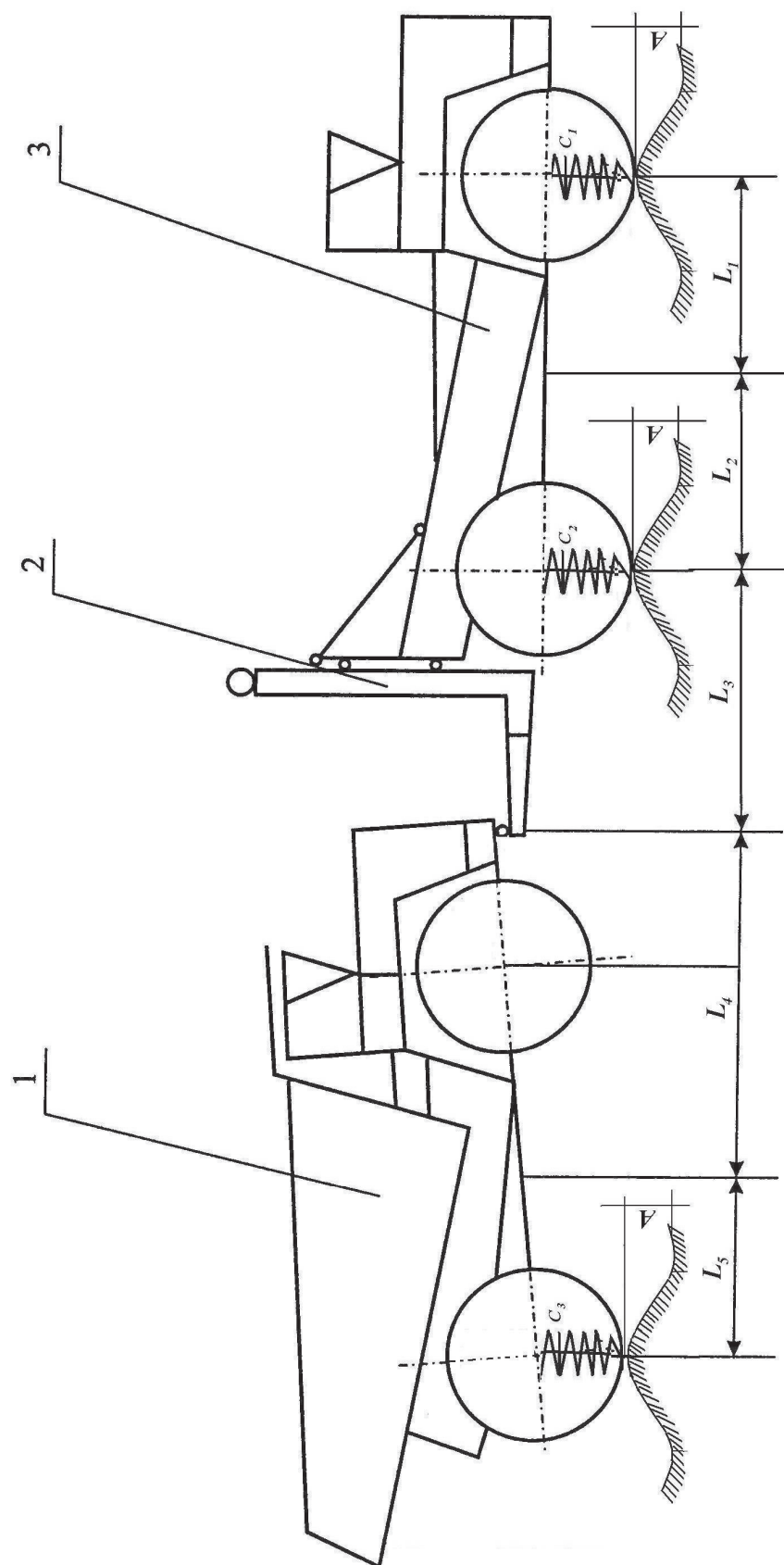


Рисунок 1 – Схема буксирування захватом спереду: 1 – автосамоскид; 2 – підйомно-зчеплювальний пристрій; 3 – буксировщик

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2} C_1 (y + L_1 \varphi_1 - h_1)^2 + \frac{1}{2} C_2 (y - L_2 \varphi_1 - h_2) + \\
& + \frac{1}{2} C_3 [y - (L_2 + L_3) \varphi_1 - (L_4 + L_5) \varphi_2 - h_3]^2,
\end{aligned} \tag{3}$$

де C_1 – коефіцієнт зведеної жорсткості передньої підвіски буксировщика, Н/м;

C_2 – коефіцієнт зведеної жорсткості задньої підвіски буксировщика, Н/м;

C_3 – коефіцієнт зведеної жорсткості задньої підвіски автосамоскида, Н/м;

h_i ($i = 1, 2, 3$) – висота нерівності покриття під відповідною підвіскою [5], м.

Виконуючи дії у відповідності з операторами рівняння Лагранжа другого роду, отримуємо систему диференціальних рівнянь математичної моделі збуреного руху системи "буксировщик–автосамоскид":

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& (m_1 + m_2) \ddot{y} + (C_1 + C_2 + C_3) y - m_2 (L_2 + L_3) \ddot{\varphi}_1 + \\
& + [C_1 L_1 - C_2 L_2 - C_3 (L_2 + L_3)] \varphi_1 - m_2 L_4 \ddot{\varphi}_2 - C_3 (L_4 + L_5) \varphi_2 = \\
& \quad = C_1 h_1 + C_2 h_2 + C_3 h_3, \\
& -m_2 (L_2 + L_3) \ddot{y} + [C_1 L_1 - C_2 L_2 - C_3 (L_2 + L_3)] y + \\
& + [J_1 + m_2 (L_2 + L_3)^2] \ddot{\varphi}_1 + [C_1 L_1^2 + C_2 L_2^2 + C_3 (L_2 + L_3)^2] \varphi_1 + \\
& \quad + m_2 L_4 (L_2 + L_3) \ddot{\varphi}_2 + C_3 (L_2 + L_3) (L_4 + L_5) \varphi_2 = \\
& \quad = C_1 L_1 h_1 - C_2 L_2 h_2 - C_3 (L_2 + L_3) h_3, \\
& -m_2 L_4 \ddot{y} - C_3 (L_4 + L_5) y + m_2 L_4 (L_2 + L_3) \ddot{\varphi}_1 + \\
& + C_3 (L_2 + L_3) (L_4 + L_5) \varphi_1 + (J_2 + m_2 L_4^2) \ddot{\varphi}_2 + C_3 (L_4 + L_5)^2 \varphi_2 = \\
& \quad = -C_3 (L_4 + L_5) h_3.
\end{aligned} \right\} \tag{4}
\end{aligned}$$

Висновки. Таким чином, розроблена математична модель збуреного руху системи "буксировщик–автосамоскид" з урахуванням особливостей підйомно-зчеплювального пристрою в умовах технологічних доріг гірничо-збагачувальних комбінатів, реалізація якої має дати науково обґрунтовані підстави для розробки та створення раціональних за металомісткістю конструкцій буксировщиків кар'єрних автосамоскидів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Веселов Г.П., Густомясов А.Н., Колмаков В.И. Аналитическое исследование колебаний системы тягач-прицеп // Известия вузов. Машиностроение. – 1988. – №5. – С. 92–97.
2. Лобас Л.Г., Ващенко Ю.Л. Динамическое поведение двухзвенного автопоезда вблизи границы области устойчивости // Прикладная механика. – 1991. – Т.27. – №12. – С. 85–91.
3. Бейгул В.О. Исследование динамики нагружения системы “буксировщик–карьерный автосамосвал”. Сб. трудов НГА Украины. – 2002. – Т.2. – №13. – С. 8–12.
4. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1966. – 255 с.
5. Афанасьев В.Л., Хачатуров А.А. Статистические характеристики микропрофиля автомобильных дорог и колебания автомобиля // Автомобильная промышленность. – 1966. – №2. – С. 23–27.

Получено __.__.2006

УДК 539.3

В.С. Коноваленков, А.И. Лях

ДЕФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ СТЕРЖНЕЙ С УПРУГОЙ СВЯЗЬЮ

Стержневые элементы находят широкое применение как при создании разнообразных несущих конструкций, так и различного рода технических устройств. Для современных оптимальных конструкций актуальна проблема наиболее полного использования прочностных свойств стержней. При этом традиционно используются жесткие или упругие опоры (например, стержневые наборы-перекрытия в корпусе корабля, в которых при выпучивании одних стержней другие играют роль упругих опор [1]).

В [2] рассмотрено деформирование упругого элемента регулятора давления, выполненного в виде обрезиненного каркаса, состоящего из начально изогнутых стержней. Резина обеспечивает герметичность элемента и повышение его упругих свойств (т.е. резина выполняет роль упругого основания).

В [3] жесткость сжатого в осевом направлении начально несовершенного стержня повышалась за счет приложения нагрузки с эксцентриситетом, вызывающим рост прогибов в направлении, противоположном направлению начального прогиба.

В [4] рассмотрено деформирование начально изогнутого стержня с упругой промежуточной опорой, один конец которой неподвижен. Исследовано влияние жесткости упругой опоры на повышение критической нагрузки стержня.

В [5] рассмотрено деформирование начально изогнутых стержней, находящихся на расстоянии друг от друга и соединенных упругой связью. В случае, если стержни изгибаются в противоположные стороны, связь может быть односторонней, т.е. в качестве ее могут быть использованы менее материалоемкие гибкие элементы, работающие только на растяжение. Показано, что посредством таких гибких элементов может осуществляться взаимная “поддержка” стержней, сжимаемых в осевом направлении.

В данной работе рассмотрено деформирование двух начально изогнутых стержней, соединенных посередине упругой связью; концы

стержней шарнирно соединены между собой (рис.1) [6]. Расстояние между шарнирами равно l .

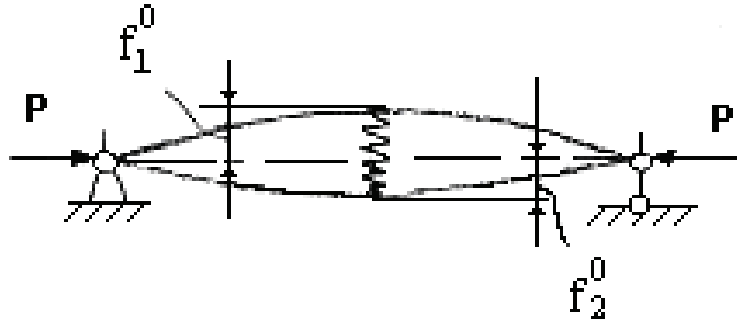


Рисунок 1

Стержни имеют начальные прогибы в виде полуволн синусоиды

$$V_i^0(x) = f_i^0 \cdot \sin \frac{\pi x}{l_i}, \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

где f_i^0 , l_i — амплитуда начального прогиба и длина i -го стержня;

x — продольная координата;

i — номер стержня.

Для такой системы стержней, в отличие от рассмотренных в [5], заранее неизвестны величины нагрузок P_1 и P_2 , приходящиеся на стержни 1 и 2. Эти величины должны определяться в результате расчета из условия совместности деформирования стержней при действии общей нагрузки $P (P = P_1 + P_2)$.

Длины стержней до искривления можно найти, используя выражение для длины элемента изогнутой линии стержня dS_i [1]

$$dS_i = dx \left[1 + \left(\frac{d(V_i^0 + V_i)}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

где V_i — добавочный прогиб i -го стержня при нагружении.

Применяя формулу бинома Ньютона и ограничиваясь двумя членами ряда, получим

$$dS_i = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d(V_i^0 + V_i)}{dx} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Полная длина i -го стержня l_i (до искривления) определяется из (3) при $V_i = 0$

$$l_i = l + \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left(\frac{dV_i^0}{dx} \right)^2 dx. \quad (4)$$

Используя (1), из (4) получаем квадратное уравнение относительно l_i

$$4l_i^2 - 4ll_i - \pi^2 \cdot f_i^{02} = 0, \quad (5)$$

из которого находим

$$l_i = \frac{l}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\pi f_i^0}{l} \right)^2} \right). \quad (6)$$

Смещение точки приложения силы P в направлении действия этой силы для i -го стержня определится в виде

$$\Delta_i = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left[\left(\frac{d(V_i^0 + V_i)}{dx} \right)^2 - \left(\frac{d(V_i^0)}{dx} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \frac{dV_i^0}{dx} \cdot \left(2 \frac{dV_i^0}{dx} + \frac{dV_i}{dx} \right) dx. \quad (7)$$

Тогда условия совместности деформирования стержней можно записать в виде

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_2; \\ P = P_1 + P_2. \end{cases} \quad (8)$$

Система уравнений, описывающая деформирование стержней, имеет вид [5]

$$E_i J_i \cdot \frac{d^2 V_i}{dx^2} + P_i \cdot V_i = -P_i V_i^0 - \frac{c(f_1 + f_2)}{2} x, \quad (9)$$

где E_i — модуль Юнга материала i -го стержня;

J_i — момент инерции поперечного сечения i -го стержня;

f_i — величина добавочного прогиба посередине i -го стержня;

c — жесткость упругой связи.

Решение системы (8) имеет вид

$$V_i = -A_i \cdot \cos k_i x + B_i \cdot \sin k_i x - \frac{c(f_1 + f_2)}{2P_i} x + \frac{f_i^0 \cdot P_i}{P_{кр i} - P_i} \cdot \sin \frac{\pi x}{l_i}, \quad (10)$$

$$\text{где } k_i = \sqrt{\frac{P_i}{E_i J_i}};$$

$$P_{кр i} = \frac{\pi^2 E_i J_i}{l_i^2} \text{ — критическая Эйлера нагрузка } i\text{-го стержня.}$$

Величины A_i и B_i определяются из условий закрепления стержней и условий симметричности упругой линии

$$V_i \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{dV_i}{dx} \Big|_{x=\frac{l}{2}} = 0$$

и равны

$$A_i = 0, B_i = \frac{c(f_1 + f_2)}{2P_i \cdot k_i \cdot \cos \frac{k_i l_i}{2}} \quad (11)$$

Величины f_1 и f_2 находятся из условий

$$V_i \Big|_{x=\frac{l}{2}} = f_i$$

и определяются формулами

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(f_2^* a_1 - f_1^* (a_2 - 1))}{\Delta}; \\ f_2 &= \frac{(f_1^* a_2 - f_2^* (a_1 - 1))}{\Delta}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{где } a_i = \frac{c}{2P_i} \left(\frac{l_i}{2} - \frac{c}{2k_i} \operatorname{tg} \frac{k_i l_i}{2} \right);$$

$$\Delta = 1 - a_1 - a_2;$$

$$f_i^* = \frac{f_i^0 P_i}{P_{кр i} - P_i} \quad \text{— величина добавочного прогиба посередине } i\text{-го}$$

стержня при $c = 0$.

Подставляя (1), (7), (11) в (8) и исключая величину P_2 ($P_2 = P - P_1$), получаем уравнение для определения величины P_1

$$\Delta_1 - \Delta_2 = 0, \quad (13)$$

На рис. 2-5 приведены результаты расчетов, характеризующие особенности деформирования рассмотренных стержневых систем. На рис. 2 нанесены значения отношения величин нагрузок, приходящихся на стержни 2 и 1 $\left(\frac{P_2}{P_1} \right)$; на рис. 3 нанесены значения

отношения величин полных прогибов посередине стержней 2 и 1 $\left(\frac{\overline{f_2}}{\overline{f_1}} \right)$,

где $\overline{f_i} = f_i^0 + f_i$) в зависимости от нагрузки P при $c = 0$.

Линии 1 на рис.2 и рис.3 относятся к случаю: $\frac{P_{кр 2}}{P_{кр 1}} = 1$; $f_1^0 = 8 \text{ мм}$;

$f_2^0 = 5 \text{ мм}$; линии 2: $\frac{P_{кр 2}}{P_{кр 1}} = 1,25$; $f_1^0 = 8 \text{ мм}$; $f_2^0 = 5 \text{ мм}$; $\left(\frac{f_2^0}{f_1^0} = 0,6 \right)$; линии

3: $\frac{P_{кр2}}{P_{кр1}} = 1,25$; $f_1^0 = f_2^0 = 5 \text{ мм}$; $\left(\frac{f_2^0}{f_1^0} = 1\right)$. Геометрические параметры стержней: $l = 100 \text{ мм}$; ширина 5 мм, толщина 2 мм; модуль упругости материала $E = 20000 \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2}$.

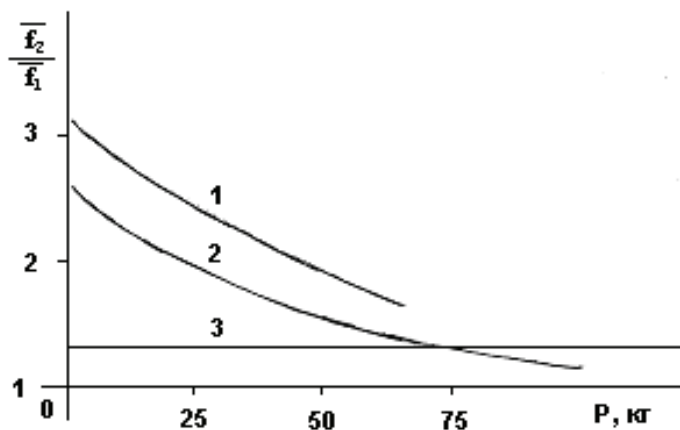


Рисунок 2

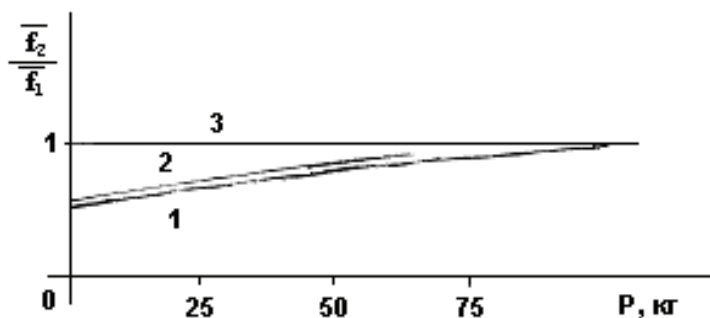


Рисунок 3

На рис. 4 нанесены значения величин прогибов посередине стержней, на рис. 5 — значения величин сближения концов стержней Δ_1 в зависимости от силы P (линии 1,2,3 соответствуют случаям $c = 0; 0,6$ и $5 \frac{\text{кгс}}{\text{мм}}$; $f_1^0 = f_2^0 = 5 \text{ мм}$).

Отметим, что случай $f_1^0 = f_2^0$ соответствует случаю стержня с упругой связью, один конец которой неподвижен [4], но с удвоенной жесткостью $2c$. В [4] показано, что критическая нагрузка такого стержня может быть повышена (в зависимости от жесткости упругой связи).

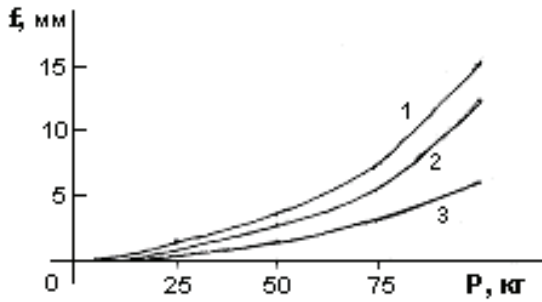


Рисунок 4

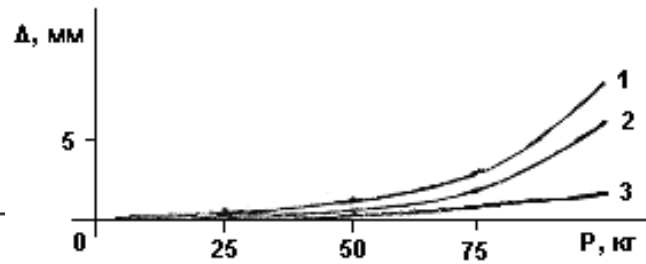


Рисунок 5

Таким образом, рассмотренная система стержней сочетает высокий уровень устойчивости с регулируемой жесткостью в осевом направлении, что дает возможность использовать эту систему в качестве упругих элементов для технических устройств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984с.
2. Деменков А.Ф., Шевченко С.А. Расчет деформированного состояния эластично-упругого элемента регулятора давления // Проектирование сложных технических систем. Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 114-117.
3. Деменков А.Ф. Исследование работоспособности сжато-изогнутых стержней // Несущая способность и долговечность конструкций. Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 45-51.
4. Коноваленков В.С., Лях А.И. Исследование устойчивости стержне с упругой промежуточной связью // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. –Выпуск 3(14). – Днепропетровск, 2001. – С. 12-17.
5. Коноваленков В.С., Лях А.И. Деформирование стержней с упругой промежуточной связью // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. –Выпуск 4(21). – Днепропетровск, 2002. – С. 55-59.
6. Коноваленков В.С., Лях А.И. Деформирование начально изогнутых стержней с упругой промежуточной связью: Треття Всеукраїнська наукова конференція “Математичні проблеми технічної механіки.” Матеріали конференції. –Дніпродзержинськ, 2003. – С. 19.

Получено 11.05.2006 г.

УДК 539.3

Г.И. Щурук

ОСОБЕННОСТИ ВЛИЯНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА НА ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС В СИСТЕМЕ ОБОЛОЧКА-ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

Введение. Широкое применение в практике оболочечных конструкций, содержащих жидкость, вызывает потребность в знании закономерностей волновых процессов, происходящих в них. Влияние вязкой сжимаемой жидкости на осесимметричный волновой процесс в оболочке подробно изучено в основном в рамках модели изотропной оболочки. Однако при исследовании оболочек из современных композитных материалов, обладающих пониженной сдвиговой жесткостью, уже нельзя пренебрегать деформациями поперечного сдвига и инерцией вращения элемента оболочки. Их учет является также весьма желательным при рассмотрении задач взаимодействия оболочек с вязкой сжимаемой жидкостью. Модель, более полно отражающая поведение реальных оболочечных конструкций и учитывающая деформацию сдвига и инерцию вращения, связана с именем С.П.Тимошенко. В данной работе рассматривается задача распространения осесимметричных волн в бесконечной ортотропной цилиндрической оболочке типа С.П.Тимошенко, взаимодействующей с вязкой сжимаемой жидкостью.

Метод решения. Рассмотрим процесс распространения осесимметричных волн в системе ортотропная оболочка (радиуса R и толщиной $2h$) – вязкая сжимаемая жидкость. При этом используем линейные теории оболочек, которые учитывают деформацию поперечного сдвига и силу инерции вращения [1], а также линеаризированные уравнения Навье-Стокса для покоящейся вязкой сжимаемой жидкости [2]. В рамках этих моделей система уравнений, описывающая совместные колебания гидроупругой системы, в цилиндрической системе координат (z, r, θ) будет иметь вид:

$$L\bar{u} = \bar{q}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - v^* \Delta \bar{u} + \frac{1}{\rho_0^*} \text{grad} p - \frac{v^*}{3} \text{grad div} \bar{u} = 0;$$

$$\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad a_0 = \text{const};$$

$$\dot{u}_r = v_r; \quad \dot{u}_z = v_z; \quad q_r = -p_{rr}; \quad q_z = -p_{rz}; \quad (3)$$

$$p_{rr} = -p + \lambda^* \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) + 2\mu^* \frac{\partial v_r}{\partial r};$$

$$p_{rz} = \mu^* \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \quad (4)$$

Здесь в уравнениях (1): L-матрица дифференциальных операторов теории оболочек типа С.П.Тимошенко [1]; $\vec{u} = \vec{u}(u_z, u_r)$ - вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки; $\vec{q}$ - вектор усилия внешней нагрузки, приведенный к срединной поверхности оболочки. В уравнениях (2-4): $\vec{v}$ - вектор скорости частиц жидкости; ρ^* и p - возмущения плотности и давления в жидкости; ρ_0^* и a_0 - плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; ν^* , μ^* - кинематический и динамический коэффициенты вязкости; p_{rr}, p_{rz} - составляющие тензора напряжений в жидкости. Уравнения (3) – соответственно кинематические и динамические граничные условия, которые, в силу тонкостенности оболочки, будем удовлетворять на срединной поверхности ($r=R$). Соотношения (1)-(4) представляют замкнутую систему соотношений гидроупругости для ортотропной цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость.

Для решения уравнений малых колебаний вязкой сжимаемой жидкости, соприкасающейся с упругой оболочкой, используем представления общего решения уравнений (2) через потенциалы [3]. Подставляя выражения для искомых функций в виде бегущих волн в уравнения исходной системы, используя условия на колеблющейся стенке (3), после ряда преобразований получим систему трех линейных однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд. Из условия существования нетривиального решения такой системы получаем дисперсионное уравнение

$$\det \|A_{mn}\| = 0, \quad (m, n=1, 2, 3), \quad (5)$$

где $A_{mn} = A_{mn}(c, \Omega, \gamma, \rho_o^*, a_o^*, v^*, E_i, G_{ik}, v_{ij}, \rho_{об}, \frac{2h}{R}, J_n(\eta_j R), \eta_j)$,
 (i,j=1,2; k=2,3),

c-фазовая скорость; Ω -частота; γ -коэффициент затухания волн;
 E_i, G_{ik} -модули упругости при растяжении и сдвиге; v_{ij} -коэффициенты
 Пуассона; $J_n(\eta_j R)$ -функции Бесселя n-го порядка первого рода
 комплексного аргумента $\eta_j R$ [2].

Полученное дисперсионное уравнение (5), выражающее связь между фазовой скоростью c и частотой Ω , является трансцендентным и описывает распространение осесимметричных волн в системе оболочка-жидкость.

Анализ результатов. В данной работе ограничимся исследованием влияния коэффициента Пуассона на частотно-фазовые характеристики системы.

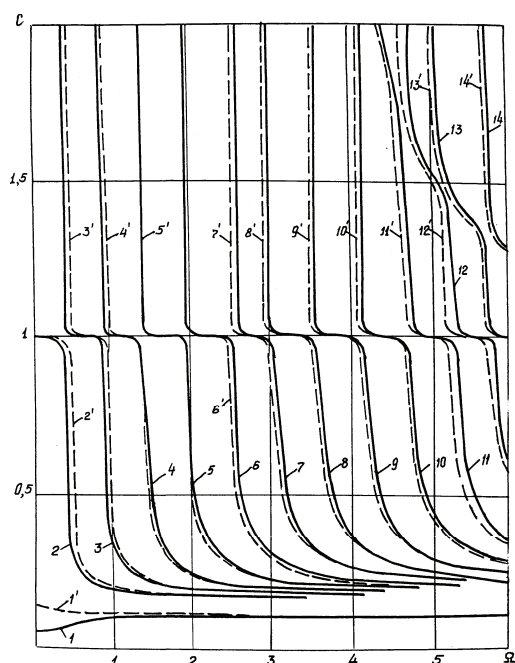


Рисунок 1

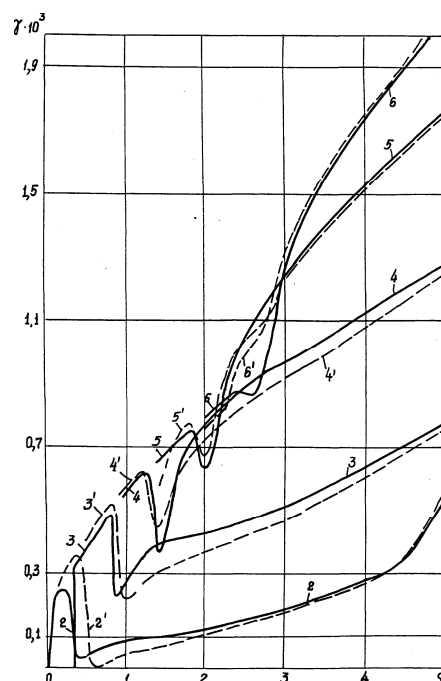


Рисунок 2

На рис.1,2 представлены графики зависимости фазовой скорости c и коэффициента затухания γ от частоты Ω (сплошные линии соответствуют значениям $\nu_{12} = 0,28; \nu_{21} = 0,0178$; штриховые - $\nu_{12} = 0,28; \nu_{21} = 0,1$). Как видно из рис.1 изменение коэффициента Пуассона по разному влияет на величины критических частот дисперсионных кривых. Так, на низких частотах наблюдается

увеличение значений критических частот с ростом величины ν_{21} . Далее в диапазоне частот $1 < \Omega < 2,4$ изменение коэффициента Пуассона не оказывает влияние на дисперсионные кривые. На высших частотах $\Omega > 2,4$ увеличение ν_{21} ведет к уменьшению значений критических частот. Кроме этого, увеличение ν_{21} приводит к увеличению значений фазовых скоростей первой моды колебаний для низких частот в узком диапазоне ($0 < \Omega < 0,8$). Фазовые скорости остальных мод изменяются в зависимости от изменений ν_{21} лишь в окрестностях критических частот. Увеличение ν_{21} мало влияет на зависимость коэффициента затухания $\gamma = f(\Omega)$ для системы оболочка-вязкая жидкость (рис.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шве́ц Р.К., Марчук Р.А. Колебания ортотропной цилиндрической оболочки типа Тимошенко, соприкасающейся со слоем жидкости // Мат. методы и физ.-мех. поля. – Киев: Наук. думка. – 1975. – Вып. I. – С. 135-140.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.2. Закономерности распространения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 536с.
3. Гузь А.Н. О представлении решений линеаризованных уравнений Навье-Стокса // Докл. АН СССР. – 1980. – 253, №4. – С. 825-827.

Получено __.__.2006

УДК 539.3

В.Н. Чехов, В. П. Корж

ПОВЕРХНОСТНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ ПРИ ВСЕСТОРОННЕМ СЖАТИИ

Введение. В работе в трехмерной постановке с использованием модели кусочно-однородных сред исследуется поверхностная неустойчивость слоистых несжимаемых полугораниченных тел, которые помещены без трения между абсолютно жесткими стенками и образованы регулярным повторением порождающего пакета из двух слоев. Расстояние между стенками не изменяется и к поверхности материала приложено равномерное давление в виде «мертвой» нагрузки. Таким образом, в направлении простираения слоев предполагается отсутствие деформаций. За счет неизменяемости расстояния между стенками под действием поверхностной нагрузки появляются сжимающие нагрузки в плоскости слоев, которые могут вызвать потерю устойчивости. К такой постановке задачи можно прийти при рассмотрении устойчивости цилиндрических или слоистых сферических оболочек большого радиуса в условиях поверхностного обжатия. Такое явление исследовалось в работе [4] При изучении устойчивости единичного слоя под действием мертвых поверхностных нагрузок. Явление поверхностной неустойчивости в слоистых композитах регулярной структуры изучалось на основе трехмерной линеаризованной теории устойчивости при малых докритических деформациях в рамках модели кусочно-однородных сред в работах [4,6,7]. Здесь рассматривалась поверхностная неустойчивость среды, когда она нагружено равномерно распределенными сжимающими, нагрузками, действующими в плоскости слоев и по нормали к ним. В отличие от этого в данной работе предполагается, что докритические деформации являются конечными.

1. Постановка задачи и метод решения. Отнесем рассматриваемое слоистое полупространство к лагранжевой системе координат θ^i , до деформирования совпадающей с декартовыми координатами. Уравнения устойчивости, условия сопряжения

элементов слоистой среды и граничные условия на поверхности среды и на «бесконечности» для гиперупругих изотропных сред в рамках трехмерной теории устойчивости [3] при принятых в [1, 3] критериях устойчивости принимают вид

$$\nabla_i (\kappa^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha)_{(k)} - (\rho \ddot{u}^j)_{(k)} = 0, \quad (\theta^i \in V_k) \quad (1)$$

$$[N_i^{(2)} \kappa^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha]_{(k-1)} + [N_i^{(1)} \kappa^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha]_{(k)} = 0, \quad (\theta^i \in S_k) \quad (2)$$

$$u_{(k-1)}^j = u_{(k)}^j, \quad (N_i^{(k,2)} = -N_i^{(k,1)}), \quad (\theta^i \in S_k) \quad (3)$$

$$(N_i \kappa^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha)_{(k)} = P_{(k)}^j, \quad u_{(k)}^j = 0 \quad (\theta^i \in F_k) \quad (4)$$

$$(N_i \kappa^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha)_{(1)} = P_{(0)}^j, \quad (\theta^i \in S_0) \quad (5)$$

$$u_{(T+1)}^j \rightarrow 0 \quad (\theta^i \rightarrow -\infty) \quad (6)$$

$$(q^{ij} \nabla_i u_j)_{(k)} = 0; \quad q^{ij} = q_{0*}^{im} (g_m^j + \nabla_m u_0^j). \quad (7)$$

Здесь p – множитель Лагранжа, а κ - тензор четвертого ранга. Для исследования задачи используется статический подход Эйлера. Считаем, что координаты θ^i совпадают с декартовыми координатами ($\theta^i = x_i$). Ось Ox_3 направлена по нормали к поверхности слоистой среды. Докритическое состояние является плоским в плоскости $x_1 O x_3$ и характеризуется следующими соотношениями:

$$u_i^{0(k)} = (\lambda_i^{(k)} - 1) x_i^{(k)}; \quad 2\varepsilon_{ij}^{o(k)} = \delta_{ij} (\lambda_i^{(k)2} - 1); \quad \varepsilon_{11}^{0(k)} = 0; \quad ij = 1,3; \quad k = 1,2,\dots\infty \quad (8)$$

Здесь - $\lambda_n = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{nn}} = 1$, -коэффициент укорочения при сжатии вдоль Ox_n .

Индексом "0" отмечены компоненты докритического состояния. Из условия несжимаемости в докритическом состоянии [3] $\lambda_1 \lambda_3 = 1$ получаем:

$$\lambda_1 = \lambda_3^{-1} = 1; \quad S_{11}^{0(k)} = S_{33}^{0(k)} = -p_3 \quad (9)$$

Таким образом, пришли к задаче о всестороннем равномерном сжатии. Согласно постановке задачи в пределах каждого k -го слоя уравнения устойчивости (1) и условия несжимаемости (7) можно переписать [8]

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (S_{ij} + S_{ir}^0 \frac{\partial}{\partial x_r} u_j) = 0; \quad G_{ir}^0 \frac{\partial}{\partial x_i} u_r = 0 \quad (10)$$

При однородном докритическом состоянии эти выражения принимают вид.

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x_3^2} + \eta_j^2 \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x_1^2}\right) = 0 \quad (11)$$

Коэффициенты η_j имеют весьма громоздкий вид и в случае $p_3 = \text{Const}$ являются постоянными. При всестороннем сжатии имеем условие $\eta_1^{(\kappa)} = \eta_3^{(\kappa)} = 1$. Поэтому для потенциалов Ψ_j можно представить в виде:

$$\Psi_j(x_1, x_3) = [sA_t^{(j)} \exp(\frac{\pi}{l} \tilde{x}_3) + sB_t^{(j)} (-\frac{\pi}{l} \tilde{x}_3)] \sin(\frac{\pi}{l} x_1); \quad (12)$$

$$\tilde{x}_3 = x_3 - x^{(n,q)}; \quad x^{(n,q)} = (n-1)h + \sum_{i=1}^q h_i; \quad x^{(n,m)} = x^{(n+1,0)}; \quad x^{(n,q-1)} \langle x_3 \rangle x^{(n,q)};$$

Здесь $s=1$ при $j=1$; $s=\tilde{x}_3$ при $j=3$; $t=m(n-1)$; $n=1, 2, \dots, \infty$; $q=1, 2, \dots, m$;

h_k - толщина k -го слоя, l - общая для всех слоев длина полу волны формы потери устойчивости; $A_t^{(j)}, B_t^{(j)}$ - постоянные интегрирования. Используя метод решения задач устойчивости для слоистых сред регулярной структуры [8], при удовлетворении условиям межслоевого контакта получаем бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} F_1 \vec{T}_{(q-1)m+1} &= F_2 S_2 \vec{T}_{(q-1)m+2} \\ F_2 \vec{T}_{(q-1)m+2} &= F_3 S_3 \vec{T}_{(q-1)m+3} \\ &\dots\dots\dots \\ F_m \vec{T}_{qm} &= F_1 S_1 \vec{T}_{qm+1} \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь обозначено $\vec{T} = \|A^{(1)}, A^{(3)}, B^{(1)}, B^{(3)}\|'$ - вектор столбец постоянных интегрирования; F_k, S_k - квадратные матрицы четвертого порядка, явный вид которых приведен в работе [8]; штрихом «'» отмечена процедура транспонирования. Решение уравнения (2.4) разыскиваем в виде

$$\vec{T}_{nm} = \kappa^n F_m^{-1} \vec{X}. \quad (14)$$

Для определения собственного вектора $\vec{X}$ и скалярной величины κ имеем следующее матричное равенство

$$[(\prod_{j=1}^m F_j S_j F_j^{-1}) - \frac{1}{\kappa} E] \vec{X} = 0, \quad (15)$$

где E - единичная матрица четвертого порядка. Таким образом, κ является характеристическим числом передаточной матрицы

$$H = \prod_{j=1}^m (F_j S_j F_j^{-1}) = [h_{ic}], \quad \text{где } i, c = 1, 2, 3, 4, \quad \text{а } \vec{X} - \text{соответствующим}$$

собственным вектором. Используя решение (14) и граничные условия на поверхности слоистого полупространства задачу удовлетворения краевым условиям, как и в [8]; сводим к решению системы двух однородных алгебраических уравнений относительно новых постоянных $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$.

Из условия существования нетривиальных решений этой системы получаем характеристическое уравнение

$$\det[DF_1^{-1} \vec{X}_1, DF_1^{-1} \vec{X}_2] = 0 \quad (16)$$

минимальные корни, которого и определяют критические значения параметров нагружения и волнообразования, обуславливающих явление потери устойчивости в структуре слоистого материала.

2. Анализ результатов. Решения уравнения (16) и анализ их выполнялись численно с помощью пакета типовых программ на ПЭВМ. На рисунке и в таблице приведены результаты решения задачи. Для описания физико-механических свойств слоев выбирался потенциал Трелоара $\Phi^{(k)}$ в виде:

$$\Phi^{(k)} = C_{10}^{(k)} (I_1^{(k)} - 3); \quad I_1^{(k)} = 3 + 2A_1^{(k)}; \quad A_1^{(k)} = \varepsilon_{11}^{0(k)} + \varepsilon_{33}^{0(k)}; \quad 2\varepsilon_{ii}^{0(k)} = \lambda_i^{(k)2} - 1 \quad (17)$$

Здесь фиксировались параметры задачи $n = C_{10}^{(2)} / C_{10}^{(1)}; \quad \rho = h_1 / (h_1 + h_2);$

$t = p_3 / C_{10}^{(1)}; \quad \omega = \frac{\pi}{l} (h_1 + h_2)$. Поскольку в работе исследуется потеря устойчивости в структуре материала, то для их определения находилась зависимость $p_3 = p_3(\omega)$, точки экстремуму которой и являются искомыми величинами. На рисунке кривые 1, 2, 3 получены для $\rho = 0,1$; и $n = 0,001; 0,01; 0,1$ соответственно. Штриховой линией здесь показан график решения задачи, когда сжимающие нагрузки p_1 действуют лишь вдоль слоев. $t = p_1 / C_{10}^{(1)}; p_3 = 0; \varepsilon_{11}^0 \neq 0; n = 0,01$). В таблице приведены значения минимальных корней t и ω уравнения (16) для $n = 0,5$ и различных ρ . Величины в скобках определяют критические значения параметров задачи.

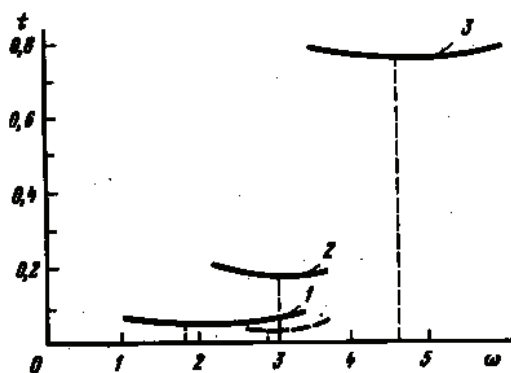


Рисунок 1

Таблица 1

ρ	$(p_3/C_{10}^{(1)})/\omega$					
0,3	$\frac{2,597}{2,7}$	$\frac{2,59}{2,8}$	$\frac{2,586}{2,9}$	$\frac{(2,584)}{(3ч3,1)}$	$\frac{2,586}{3,2}$	$\frac{2,59}{3,3}$
0,5	$\frac{2,99}{1,7}$	$\frac{2,945}{2,1}$	$\frac{2,939}{2,2}$	$\frac{(2,937)}{(2,3)}$	$\frac{2,939}{2,4}$	$\frac{2,944}{2,5}$
0,9	$\frac{3,777}{1,2}$	$\frac{3,773}{1,3}$	$\frac{3,771}{1,4}$	$\frac{(3,770)}{(1,5ч1,6)}$	$\frac{3,772}{1,7}$	$\frac{3,775}{1,8}$

Краткий анализ полученных решений показывает следующее. Явление поверхностной неустойчивости под действием лишь сил поверхностного обжатия при отсутствии деформаций в плоскости слоев может реализоваться при "мертвых" значениях нагрузки и отсутствует при следящем [5] ее характере. Указанный вывод согласуется с результатами, полученными для конструктивно-однородных тел. Существенное различие упругих постоянных слоев приводит к значительному уменьшению критических нагрузок. Так, например, при $n = 0,001$ $t_{кр} = 0,049$, а при $n = 1$ (случай однородной полуплоскости) $t_{кр} = 4$. Заметим, что указанные выводы имеют место лишь при заданных здесь параметрах слоистой среды. При других характеристиках слоев необходимо проводить дополнительные исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях.— Киев : Наук. думка; 1973.— 270 с.
2. Гузь А. Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии.— Киев : Наук. думка, 1979.— 142с.
3. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел.— Киев : Вищ. шк., 1986.— 504с.

4. Гузь А. Н., Корж В. П., Чехов В. Н. Неустойчивость слоистых тел при сжатии с учетом действия поверхностных распределенных нагрузок//Прикл. механика.—1989.—25, № 5.—С. 13—22.
5. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Линеаризированная теория складкообразования в толще земной коры//Там же.— 1975.— 11, № 1.— С. 3—17.
6. Чехов В.Н. Поверхностная неустойчивость слоистой среды, сопряженной с однородным полупространством // Там же.— 1984.— 20, № 11.— С. 35—42.
7. Чехов В. Н. Влияние поверхностной нагрузки на устойчивость слоистых тел// Там же.—1988.—24, № 9.—С. 10—17.
8. Гузь А. Н., Чехов В. Н. Поверхностная неустойчивость слоистых материалов при малых и конечных докритических деформациях//Механика композитных материалов.— 1984—№ 5.— С. 838—843.

Получено __.__.2006 г.

УДК 539.3

Г.М.Бакланова

СТІЙКІСТЬ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ МАСИВІВ З ГОРИЗОНТАЛЬНОЮ ПОРОЖНИНОЮ В РАМКАХ ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ТЕОРІЇ

Вступ. Для проведення довкола підземних споруд комплексу конструктивно-технологічних робіт, забезпечуючих їх безаварійну експлуатацію, необхідно розробити точну математичну теорію стійкості гірничих виробок.

В монографії [1] розроблено загальний метод вирішення задач стійкості гірничих виробок та підземних полостей на основі тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл.

При збільшенні глибин проходження виробок та тривалій дії навантаження все в більшій степені проявляються пластичні властивості гірничих порід.

Метод розв'язку. В даній роботі розвивається тривимірна лінеаризована теорія стійкості [2] для дослідження стійкості стану рівноваги гірничого масиву довкола горизонтальної виробки з циліндричною шаровою порожниною радіуса R . Гірничий масив моделювався пружно-пластичним нестискаємим тілом.

Граничні умови на контурі виробки обумовлені видом закріплення. В данному випадку розглядається незакріплена виробка.

Про стійкість тривимірних пружно-пластичних тіл при неоднорідних докритичних деформаціях будемо судити, виходячи з поведінки малих збурень в рамках лінеаризованої тривимірної задачі теорії малих пружно-пластичних деформацій $\sigma_i = A\varepsilon_i^k$ [3].

При цьому будемо слідувати узагальненій концепції продовжуючого навантаження, що дозволяє не враховувати появу додаткової розгрузки в процесі втрати стійкості.

При дослідженні докритичного стану та стійкості гірничого масива біля виробки приймалось ряд припущень, загально-прийнятих в механіці гірничих порід.

Числові результати. Лінеаризовану задачу з врахуванням прийнятих припущень запишемо у вигляді:

$$\nabla_i \left(\chi^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha + g^{ij} p \right) + F^j = 0 \quad (1)$$

$$N_i \left(\chi^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha + g^{ij} p \right) \Big|_{s_1} = 0 \quad (2)$$

$$u^j \Big|_{s_2} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla_n u^n = 0 \quad (4)$$

У разі неоднорідного докритичного стану, який є характерним для таких задач, отримання точного рішення пов'язано зі значними математичними труднощами. Тому для рішення використано варіаційний принцип. Обираючи повну систему координатних функцій, задовольняючих умовам

$$u_\alpha \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad p \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (5)$$

та використовуючи варіаційне рівняння, отримаємо характеристичне рівняння для визначення критичних навантажень при довільному числі координатних функцій.

Для конкретних гірничих порід визначені значення критичних навантажень q . Суттєвий вплив моделі середовища на величини критичних навантажень можуть бути оцінені, виходячи з даних таблиці 1 та таблиці 2.

Таблиця 1

Матеріал	$\varepsilon_{кр}$	q, H
алевроліт	0,191	3690
аргиліт	0,190	2080
піщаник	0,175	590

В таблиці 2 наведені залежності критичних значень величин інтенсивності деформацій $(\varepsilon_u^0)_{кр}$ на контурі виробки, а також величини $(\frac{q}{A})_{кр}$ від відповідних значень параметра K .

Таблиця 2

K	1,0	0,9	0,8	0,5
$(\varepsilon_u^0)_{кр}$	0,284	0,276	0,267	0,232
$(\frac{q}{A})_{кр}$	0,164	0,311	0,316	0,556

Результати обчислень критичних навантажень, отримані для пружно-пластичних моделей, суттєво відрізняються по мінімальним критичним навантаженням від результатів, отриманих при пружному деформуванні.

Застосування пружно-пластичної моделі середі при дослідженні стійкості підземних споруд свідчить про суттєвий вплив пластичних властивостей матеріала та про необхідність врахування цих властивостей.

При дослідженні стійкості виробок в пружно-пластичному масиві значення критичних навантажень краще обчислювати в рамках деформаційної теорії, так як це значно спрощує математичну сторону розв’язку задачі.

Отримані в рамках деформаційної теорії результати для пружно-пластичних моделей гірничих порід свідчать про суттєвий вплив пластичних властивостей матеріала та дозволяють суттєво уточнити значення критичних навантажень, отриманих при пружному деформуванні ($K=1$).

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь О.М. Основи теорії стійкості гірничих виробок.-Київ: Наук.думка,1977.
2. Гузь А.Н. О построении трехмерной теории устойчивости деформируемых тел //Прикл.механика.-2001.-37,№1.-С.3-44.
3. Бакланова Г.М. Деякі результати досліджень стійкості пружно-пластичних масивів з горизонтальною виробкою.// Серія:фіз.-мат. науки.-2002.-5.

Получено __.__.2006 г.

УДК 539.3

М.Ш. Дышель

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКИХ РАСТЯГИВАЕМЫХ ПЛАСТИН С ТРЕЩИНАМИ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Введение. Явление локальной потери устойчивости тонких пластин с центральными трещинами при их растяжении и ее влияние на характеристики разрушения пластин в случае, когда материал пластин находится в упругой стадии деформирования вплоть до начала процесса разрушения, исследовано достаточно полно [1]. В данном сообщении представлены результаты экспериментального исследования локальной потери устойчивости растянутых пластин с трещинами, находящихся в стадии упруго-пластического и пластического деформирования. Выявлено влияние пластических свойств материала на критические нагрузки, соответствующие потере устойчивости.

Методика исследований. Испытывались пластины, изготовленные из алюминиевых сплавов Д16Т и АМцМ с центральной трещиной длиной $2l_0$. Растяжение пластин осуществлялось на испытательной машине ЦД-10/90 усилием T . Измерение нормального прогиба w в окрестности трещины осуществлялось пневматическим измерителем перемещений в системе координат самой пластины [1]. Измерение поверхностных деформаций ε_1 и ε_2 осуществлялось с помощью тензорезисторов типа КФ-5 с базой 3 мм, наклеенных на обе стороны пластины в окрестности трещины строго друг против друга. По измеренным деформациям определялись деформации срединной поверхности ε_0 и изгибные деформации $\varepsilon_{\text{и}}$ с помощью выражений

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \quad \varepsilon_{\text{и}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}. \quad (1)$$

Критические напряжения $p_{\text{кр}}$, соответствующие потере устойчивости, определялись из диаграмм деформирования, отражающих зависимость прогиба w или изгибной деформации $\varepsilon_{\text{и}}$ от напряжения $p = T/2bh$, где $2b$ – ширина пластины, h – ее толщина, по методике [1].

Критические напряжения $p_{кр}$. Анализ результатов. Выражение для расчетного определения $p_{кр}$, полученное теоретически [1], имеет вид

$$p_{кр} = KE\left(\frac{h}{l_0}\right)^2 \quad (2)$$

Здесь E - модуль упругости, K - коэффициент пропорциональности. Цель эксперимента состояла в том, чтобы, зная геометрические параметры пластины и механические свойства материала и экспериментально определив величину $p_{кр}$, из выражения (2), найти величину K .

На рис.1 и 2 представлены зависимости безразмерных параметров критических напряжений $p_{кр}/E$ от безразмерного параметра длины трещины l_0/b (на рис.1 – для пластин из Д16Т толщиной $h = 0,97$ мм, на рис. 2 – для пластин из АМцМ с $h = 1,9$ мм. Ширина пластин $2b = 250$ мм, длина – 600 мм). Сплошные кривые 1 построены по результатам экспериментальных исследований. Пунктирные кривые построены с использованием выражения (2). При этом величина K подбиралась так, чтобы расчетные кривые хорошо согласовывались с экспериментальными кривыми. Как видно из рис.1, для пластин из Д16Т расчетная кривая 2 проходит вблизи экспериментальной кривой 1 на всем интервале отношений l_0/b , при этом значение $K = 1,15$. Это свидетельствует о том, что состояние материала пластин на этом интервале было идентичным, т.е. пластины находились в стадии упругого деформирования.

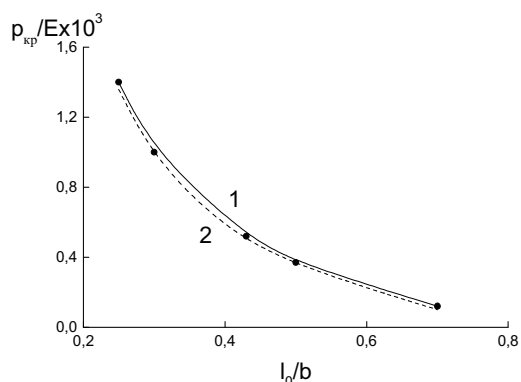


Рисунок 1

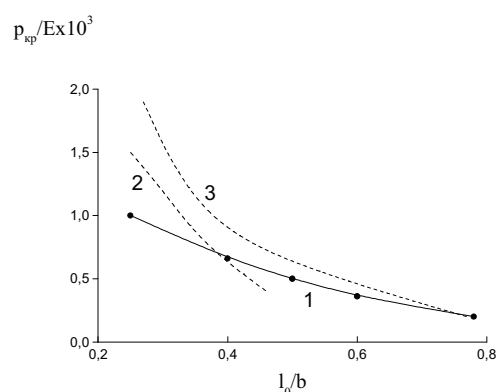


Рисунок 2

В то же время для пластин из материала АМцМ (рис.2) нельзя было подобрать одну расчетную кривую, которая проходила бы удовлетворительно вблизи экспериментальной кривой 1 во всем диапазоне отношения l_0/b . Согласование между расчетной и экспериментальной кривыми начинается с такого значения

отношения l_0/b , при котором деформирование пластины будет происходить в упругой области (при малых значениях величины $p_{кр}$, т.е. при больших значениях длины трещины $2l_0$). Исходя из невозможности подобрать для материала АМцМ одной расчетной кривой, согласование расчетной и экспериментальной кривых проводилось на отдельных участках. Для расчетных кривых 2 и 3 значения коэффициентов K равны соответственно 0,3 и 0,6.

На рис. 3 представлены зависимости коэффициента K от безразмерного параметра критических напряжений $p_{кр}/\sigma_{0.2}$ ($\sigma_{0.2}$ - условный предел текучести). Кривая 1 относится к материалу Д16Т, кривая 2 – к материалу АМцМ. Как видно, для материала Д16Т величины K практически не зависят от величины $p_{кр}$ или длины трещины $2l_0$. Иная картина наблюдается для пластин из материала АМцМ. Здесь зависимость K от $p_{кр}/\sigma_{0.2}$ обнаруживается при любых значениях, даже достаточно больших, длины трещины $2l_0$. Поскольку для испытанных материалов (алюминиевых сплавов) величины модуля упругости и коэффициента Пуассона практически равны, следует предположить, что единственным фактором, влияющим на изменение величины коэффициента K , является изменение состояния материала, т.е. развитие в нем пластичности.

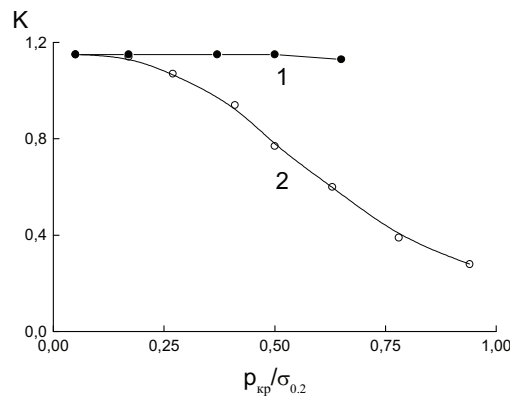


Рисунок 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами.-Киев: Наук.думка, 1992.-456 с.- (Неклассические проблемы механики разрушения: в 4-х т., 5-и кн./ Под общ. ред. А.Н.Гузя; т.4, кн.1).

Получено __.__.2006 г.

УДК 539.3

К.І.Шнеренко, В.Ф.Годзула, А.С.Богатирчук

ВИЗНАЧЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ НАВКОЛО ОТВОРУ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПАНЕЛІ ІЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ

1. Постановка задачі. Розглянемо напружений стан непологої циліндричної панелі із композитного матеріалу, виготовленої перетином поверхні циліндричної оболонки двома одноосними круговими циліндричними поверхнями радіусів r_{10} і r_{20} . Внутрішній контур панелі жорстко защемлений, а зовнішній - навантажений розтягуючими зусиллями T .

Віднесемо серединну поверхню панелі до системи криволінійних ортогональних координат (α, β) . В подальшому виходимо з варіаційного рівняння Лагранжа [1].

$$\iint_{\Omega} \{ \delta V_0 - (p_1 \delta u_1 + p_2 \delta u_2 + p_n \delta w + m_1 \delta \gamma_1 + m_2 \delta \gamma_2) \} A_1 A_2 d\alpha d\beta - \int_{\Gamma_1} (T_{tt}^0 \delta u_t + T_{ts}^0 \delta u_s + T_{th}^0 \delta w + G_{tt}^0 \delta \gamma_t + G_{ts}^0 \delta \gamma_s) d\Gamma = 0, \quad (1)$$

$$\delta V = T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + S_{12} \delta \delta_{12} + G_1 \delta k_1 + G_2 \delta k_2 + 2H_{12} \delta k_{12} + Q_1 \delta \varepsilon_{13} + Q_2 \delta \varepsilon_{23},$$

де V_0 - питома енергія деформації; $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ - узагальнені переміщення серединної поверхні оболонки, через які виражається поле переміщень

$$U_1 = u_1(\alpha, \beta) + z\gamma_1(\alpha, \beta), \\ U_2 = u_2(\alpha, \beta) + z\gamma_2(\alpha, \beta), \quad (-h/2 \leq z \leq h/2), \quad W = w(\alpha, \beta). \quad (2)$$

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій і узагальненими переміщеннями мають вигляд[1]

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + k_\alpha w, \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A, u \\ 2, \beta, B, v \end{pmatrix}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) - 2k_{\alpha\beta} w, \\ \varepsilon_{13} = \gamma_1 + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \delta \left(-k_\alpha u + k_{\alpha\beta} v \right), \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A, u \\ 2, \beta, B, v \end{pmatrix}, \quad (3) \\ \chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} + \frac{\gamma_2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \quad \begin{pmatrix} 1, \alpha, A \\ 2, \beta, B \end{pmatrix}, \quad 2\chi_{12} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\gamma_1}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\gamma_2}{B} \right).$$

Співвідношення пружності для композитної оболонки будуть:

$$T_1 = B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{13}\varepsilon_{12}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad S_{12} = B_{13}\varepsilon_1 + B_{23}\varepsilon_2 + B_{33}\varepsilon_{12},$$

$$G_1 = D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{13}2\chi_{12}, \quad (1 \leftrightarrow 2), \quad (4)$$

$$H_{12} = D_{13}\chi_1 + D_{23}\chi_2 + D_{33}2\chi_{12}, \quad Q_1 = K_1\varepsilon_{13}, \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

Тут B_{ij}, D_{ij}, K_i - узагальнені жорсткості матеріалу оболонки.

Граничні умови на жорстко защемленому контурі при $\rho = r_{10}$ будуть [1]:

$$u = v = w = \gamma_\rho = \gamma_\theta = 0. \quad (5)$$

На зовнішньому контурі панелі при $\rho = r_{20}$

$$T_\rho = T|\sin\theta|, S_{\rho\theta} = Q_\rho = G_\rho = H_{\rho\theta} = 0. \quad (6)$$

Граничні умови (6) змінюються по гармонійному закону та відповідають розтягуючому зусиллю T , що діє вздовж координати ρ .

Підставивши (3) в (4), а останнє – в (1) з урахуванням (5,6), отримаємо варіаційне рівняння відносно змінних $u, v, w, \gamma_1, \gamma_2$:

$$I(u, v, w, \gamma_1, \gamma_2) = 0.$$

2. Метод розв'язку задачі. Для розв'язку задачі застосуємо метод скінчених елементів. Розбиваємо область на квадратичні ізопараметричні елементи, що мають по вісім вузлів. На кожному з цих елементів вводимо локальну систему координат (x_1, x_2) таку, що $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$. При цьому перетворення від локальних координат до глобальних здійснюється за допомогою функцій форми

$$\varphi_i = \frac{1}{4}(1+x_{10})(1+x_{20})(x_{10}+x_{20}-1) \quad (i=1,3,5,7);$$

$$\varphi_i = \frac{1}{2}(1-x_1^2)(1+x_{20}) \quad (i=2,6); \quad \varphi_i = \frac{1}{2}(1+x_{10})(1-x_2^2) \quad (i=4,8) \quad (7)$$

співвідношеннями

$$\alpha = \sum_{i=1}^8 \alpha^i \varphi_i, \quad \beta = \sum_{i=1}^8 \beta^i \varphi_i, \quad (8)$$

де $x_{10} = x_1 x_{1i}, x_{20} = x_2 x_{2i}, (x_{1i}, x_{2i}), (\alpha^i, \beta^i)$ - координати i -го вузла відповідно в локальній і глобальній системах координат.

Переміщення на кожному з елементів інтерполюється поліномами

$$u_1 = \sum_{i=1}^8 u_1^i \varphi_i, \dots, \gamma_2 = \sum_{i=1}^8 \gamma_2^i \varphi_i. \quad (9)$$

Тут $u_1^i, \dots, \gamma_2^i$ - шукані переміщення в i -му вузлі.

3. Числові результати. В таблиці наведені результати обчислень на контурі отвору $\rho = r_{10}$ коефіцієнтів концентрації напружень

$$k_{\rho}^T = \frac{T_{\rho}}{E_1 h} 10^3, \quad k_{\theta}^T = \frac{T_{\theta}}{E_1 h} 10^3, \quad k_{\rho}^G = \frac{G_{\rho}}{E_1 h^2} 10^3, \quad k_{\theta}^G = \frac{G_{\theta}}{E_1 h^2} 10^3$$

для ортотропної панелі з параметрами:

$$R/h = 41,25; r_0/h = 3,3; E_2/E_1 = 1,25; G_{12}/E_1 = 0,23; \nu_1 = 0,2.$$

Таблиця

$\theta / \frac{\pi}{14}$	0	1	2	3	4	5	6	7
K_{ρ}^T	$\frac{-0,03}{-0,01}$	$\frac{-0,04}{-0,01}$	$\frac{-0,11}{-0,02}$	$\frac{0,16}{0,23}$	$\frac{1,04}{0,83}$	$\frac{1,50}{1,14}$	$\frac{1,08}{0,79}$	$\frac{1,16}{0,66}$
K_{ρ}^G	$\frac{0,01}{0,05}$	$\frac{0,01}{0,07}$	$\frac{0,03}{0,11}$	$\frac{0,04}{0,17}$	$\frac{0,03}{0,25}$	$\frac{0,05}{0,37}$	$\frac{0,09}{0,50}$	$\frac{0,12}{0,55}$
K_{θ}^T	$\frac{0,05}{-0,23}$	$\frac{0,27}{-0,07}$	$\frac{0,65}{-0,01}$	$\frac{1,28}{0,09}$	$\frac{3,48}{1,58}$	$\frac{8,16}{5,39}$	$\frac{12,17}{9,87}$	$\frac{20,77}{18,92}$
K_{θ}^G	$\frac{0,55}{0,50}$	$\frac{0,56}{0,52}$	$\frac{0,56}{0,52}$	$\frac{0,46}{0,44}$	$\frac{0,18}{0,26}$	$\frac{-0,11}{0,07}$	$\frac{-0,14}{-0,02}$	$\frac{-0,04}{-0,04}$

В чисельниках приведені значення розрахунків для панелі з параметрами між шарових зсувів $\frac{G_{13}}{E_1} = \frac{G_{23}}{E_1} = 0,01$, а в знаменниках – відповідно для $\frac{G_{13}}{E_1} = \frac{G_{23}}{E_1} = 0,1$, що відповідає більшій жорсткості поперечного зсуву.

ЛІТЕРАТУРА

1. Методи розрахунку оболонок. В 5 т. Т.1. Гузь О.М., Чернишенко І.С., Чехов Вал.М., Чехов Вік.М., Шнеренко К.І. Теорія тонких оболонок, послаблених отворами. - Київ: Наук.думка, 1980.-636 с.

Получено __.__.2006 г.

УДК 519.633.2

А.Б. Кулик

ВЕКТОРНІ ЛІНІЇ В ПОРОЖНИНІ ПРЯМОКУТНОЇ ФОРМИ

Актуальність теми. Однією з актуальних задач сучасної гідромеханіки є задача про хвильовий рух твердого деформованого тіла з порожниною, частково заповненою рідиною. Такі задачі виникають у зв'язку з вивченням нестійкої потенціальної течії нев'язкої нестискуваної рідини, яка має вільну поверхню в постійному гравітаційному полі [1-4]. Коливання вільної поверхні рідини можуть бути дуже небезпечними при реалізації стійких режимів руху. Тому на практиці широке розповсюдження отримали різного роду конструктивні пристрої, зокрема у вигляді жорстких та пружних ребер-перегородок, які зменшують вплив шкідливих коливальних явищ вільної поверхні рідини.

Метою даної роботи є знаходження ліній, які характеризуються тим, що для довільного моменту часу t дотична до цих ліній в будь-якій точці співпадає за напрямом зі швидкістю.

Векторні лінії в порожнині без перегородок. Розглянемо спочатку випадок, коли ребра відсутні.

Нехай $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$, Γ - границя.

$\Gamma_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi, y = 2\pi\}$, $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$.

Потенціал $\Phi(x, y)$ є розв'язком наступної крайової задачі

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 & \text{в } \Omega, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0 \\ \Phi\Big|_{\Gamma_0} = u \end{cases} \quad (1)$$

В цьому випадку можна знайти ряд частинних розв'язків системи (1)

$$\Phi_n(x, y) = c_n \cosh \frac{n}{2} y \cos \frac{n}{2} x,$$

де

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{\cos \frac{n}{2} \xi}{\cosh n\pi} d\xi.$$

Покажемо, що лінії струму для задачі (1) мають вигляд:

$$\sin \frac{n}{2} x \sinh \frac{n}{2} y = C, \quad (2)$$

де C – довільна константа.

Для цього визначимо проєкції швидкості за формулами

$$v_x = \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = -\frac{n}{2} c_n \cosh \frac{n}{2} y \sin \frac{n}{2} x$$

$$v_y = \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = \frac{n}{2} c_n \sinh \frac{n}{2} y \cos \frac{n}{2} x$$

Запишемо диференціальне рівняння лінії струму

$$\frac{dx}{-\frac{n}{2} c_n \cosh \frac{n}{2} y \sin \frac{n}{2} x} = \frac{dy}{\frac{n}{2} c_n \sinh \frac{n}{2} y \cos \frac{n}{2} x}.$$

Змінні розділяються

$$\frac{\cos \frac{n}{2} x}{\sin \frac{n}{2} y} dx + \frac{\cosh \frac{n}{2} y}{\sinh \frac{n}{2} y} dy = 0,$$

і рівняння легко інтегрується

$$\frac{2}{n} \ln \left| \sin \frac{n}{2} x \right| + \frac{2}{n} \ln \left| \sinh \frac{n}{2} y \right| = C'.$$

Таким чином, перетворюючи останнє рівняння, отримаємо (2).

Зокрема, для першого частинного розв’язку криві (2) мають вигляд:

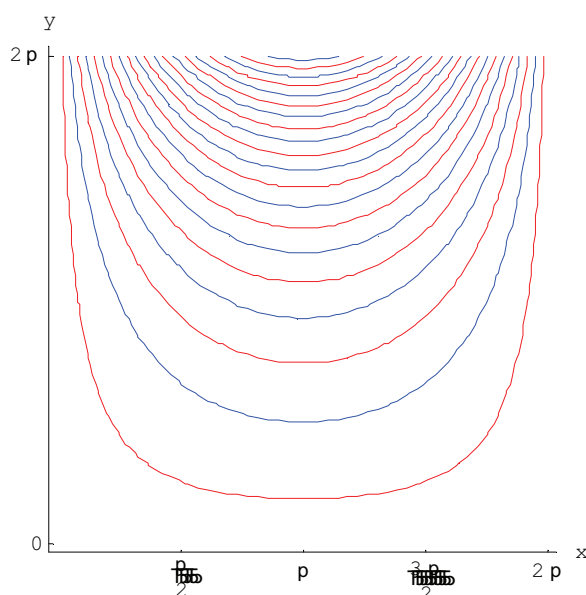


Рисунок 1

Векторні лінії в порожнині з ребрами. Розглянемо прямокутник з поздовжніми ребрами довжини a , встановленими на висоті $y = 2\pi$ з обох сторін висотою 4π . Задачу (1) потрібно розглядати в наступній області $\Omega^{(a)} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 4\pi\}$ з границею Γ та з двома ребрами довжини a , встановлених на висоті $y = 2\pi$.

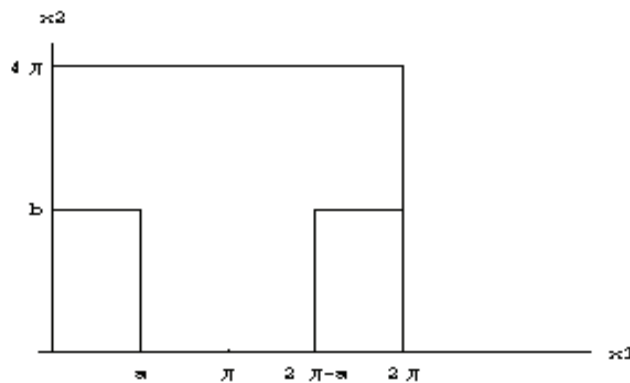


Рисунок 2

Визначимо $\Gamma_0 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi, y = 4\pi\}$,

$\Omega_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi, 2\pi \leq y \leq 4\pi\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$

і нехай $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ наступні відрізки $\gamma_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, y = 2\pi\}$,

$\gamma_2 = \{(x, y) : 2\pi - a \leq x \leq 2\pi, y = 2\pi\}$, $\gamma = \{(x, y) : a \leq x \leq 2\pi - a, y = 2\pi\}$.

Ми визначимо невідому функцію $\varphi(x)$ як нормальну похідну потенціалу на γ . Тоді на $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma$ нормальна похідна від Φ є визначеною і

$$\varphi(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_{y=2\pi} = \begin{cases} 0, & x \in \gamma_1 \cup \gamma_2, \\ \varphi(x), & x \in \gamma. \end{cases}$$

Зауважимо, що потенціал Φ є розв'язком наступної граничної задачі

$$\begin{cases} \Delta \Phi = 0, & x \in \Omega^{(a)} \setminus \gamma_1 \cup \gamma_2, \\ \Phi(x) = u(x), & x \in \Gamma_0, \quad \frac{\partial \Phi(x)}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma \setminus \Gamma_0 \cup \gamma. \end{cases} \quad (3)$$

Частинні розв'язки потенціалу $\Phi(x, y)$ в областях Ω_1 і Ω_2 будуть мати вигляд:

$$\Phi_n = \left[a_n \cosh n \left(\pi - \frac{y}{2} \right) + b_n \sinh n \left(2\pi - \frac{y}{2} \right) \right] \cos \frac{n}{2} x \quad \text{в } \Omega_1 \quad (4)$$

$$\Phi_n = c_n \cosh \frac{n}{2} y \cos \frac{n}{2} x \quad \text{в } \Omega_2, \quad (5)$$

де

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{\cos \frac{n}{2} \xi}{\cosh n\pi} d\xi, \quad (6)$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\xi) \frac{T_n\left(\cos \frac{a}{2} \cos \xi\right)}{n \cosh n\pi} d\xi, \quad (7)$$

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\xi) \frac{T_n\left(\cos \frac{a}{2} \cos \xi\right)}{n \sinh n\pi} d\xi,$$

$$\psi(\tau) = 2\tilde{\varphi}(2 \arccos(\cos \frac{a}{2} \cos \tau)), \quad \varphi(\xi) = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \frac{\xi}{2}}{\cos^2 \frac{a}{2} - \cos^2 \frac{\xi}{2}}} \tilde{\varphi}(\xi).$$

Алгоритм знаходження зв'язку між ψ і u описаний в [5].

Неважко переконатися, що лінії струму для функції $\Phi(x, y)$ в області Ω_2 співпадають з (2). Знайдемо вигляд векторних ліній в області Ω_1 . Для цього знайдемо частинні похідні для функції $\Phi(x, y)$ в рівнянні (4).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \left[a_n \cosh n \left(\pi - \frac{y}{2} \right) + b_n \sinh n \left(2\pi - \frac{y}{2} \right) \right] \left(-\sin \frac{n}{2} x \right) \frac{n}{2}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \left[-\frac{n}{2} a_n \sinh n \left(\pi - \frac{y}{2} \right) - \frac{n}{2} b_n \cosh n \left(2\pi - \frac{y}{2} \right) \right] \cos \frac{n}{2} x. \end{aligned}$$

Запишемо диференціальне рівняння для ліній струму

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dy} = \frac{\left[a_n \cosh n \left(\pi - \frac{y}{2} \right) + b_n \sinh n \left(2\pi - \frac{y}{2} \right) \right] \left(-\sin \frac{n}{2} x \right) \frac{n}{2}}{\left[-\frac{n}{2} a_n \sinh n \left(\pi - \frac{y}{2} \right) - \frac{n}{2} b_n \cosh n \left(2\pi - \frac{y}{2} \right) \right] \cos \frac{n}{2} x} = \\ &= \frac{dx}{dy} \end{aligned}$$

Відокремлюючи змінні, одержимо:

$$\frac{\cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{n}{2} x} dx = \frac{a_n \cosh n \left(\pi - \frac{y}{2} \right) + b_n \sinh n \left(2\pi - \frac{y}{2} \right)}{a_n \sinh n \left(\pi - \frac{y}{2} \right) + b_n \cosh n \left(2\pi - \frac{y}{2} \right)} dy$$

Інтегруючи останнє рівняння, матимемо:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n} \ln \left| \sin \frac{nx}{2} \right| + \\ & + \frac{2}{n} \ln \left| (a_n \sinh n\pi + b_n \cosh 2n\pi) \cosh \frac{ny}{2} - (a_n \cosh n\pi + b_n \sinh 2n\pi) \sinh \frac{ny}{2} \right| = \\ & = \frac{2}{n} \ln C. \end{aligned}$$

Ця рівність легко перетворюється в наступну:

$$\sin \frac{nx}{2} \left[(a_n \sinh n\pi + b_n \cosh 2n\pi) \cosh \frac{ny}{2} - (a_n \cosh n\pi + b_n \sinh 2n\pi) \sinh \frac{ny}{2} \right] = C$$

або

$$\sin \frac{nx}{2} \left[a_n \sinh n \left(\pi - \frac{y}{2} \right) + b_n \cosh n \left(2\pi - \frac{y}{2} \right) \right] = C$$

Таким чином,

Теорема: Векторні лінії для задачі (3) мають вигляд

$$\sin \frac{nx}{2} \left[a_n \sinh n \left(\pi - \frac{y}{2} \right) + b_n \cosh n \left(2\pi - \frac{y}{2} \right) \right] = C_1 \text{ в області } \Omega_1,$$

$$\sin \frac{nx}{2} \sinh \frac{ny}{2} = C_2 \text{ в області } \Omega_2,$$

де a_n, b_n визначаються відповідно з (6), (7), C_1, C_2 - довільні сталі.

Ці лінії не змінюються з часом, і вони є траєкторіями частинок рідини.

На Рис 3. проілюстровано сімейство кривих для задачі (3) для першого частинного розв'язку.

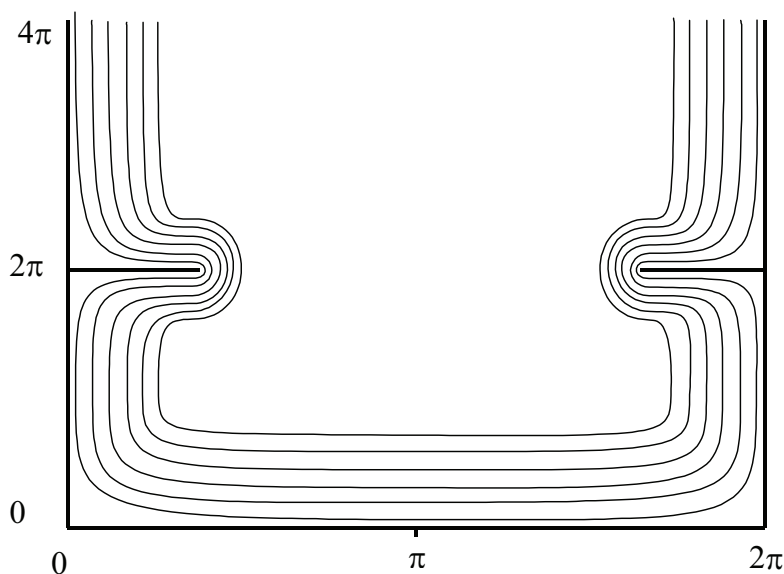


Рисунок 3

ЛІТЕРАТУРА

1. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость –К.: Наукова думка, 1990. –296с.
2. Кочин Н.Е., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика –М.: Мир, 1961. – 534с.
3. И.Б. Богоряд, Г.З. Дружинина О демпфировании колебаний вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде с кольцевым ребром. –Прикладная механика, Т.21, №2, 1985 с.126-128
4. Д.А. Галицын, В.А. Троценко Определение частот и присоединенных масс жидкости в подвижной полости в форме прямоугольного параллелепипеда с перегородками. –Механика твердого тела. №2, 2001 с.175-191.
5. Gavrilyuk I.P., Kulyk A.B., Makarov V.L. Integral equations of the linear sloshing in an infinite chute and their discretization// Computational methods in applied mathematics –2001. #1. pp. 39-61.

Получено __.__.2006 г.

УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Є.М. Борисов, Ю.П. Глухов

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ КОМПЛЕКСНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ У ЗАДАЧІ ПРО ПОШИРЕННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ РЕЛЕЯ ДЛЯ ПІВПЛОЩИНИ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Під поверхневими гармонічними хвилями у пружних тілах з початковими напруженнями будемо розуміти гармонічні хвилі, які поширюються вздовж вільної поверхні і їхні амплітудні величини згасають при віддаленні від вільної поверхні (ця умова тотожна умовам лінійної класичної теорії пружності). Крім цього у випадку відсутності початкових напружень, розглядувані поверхневі хвилі мають переходити у поверхневі хвилі класичної лінійної теорії пружності.

Зауважимо, що значно раніше такі задачі були розв’язані іншими методами, наприклад, в роботі [1]. Дослідження даної задачі виконаємо у загальній формі для стисливих і нестисливих тіл при довільній структурі пружного потенціалу окремо для нерівних і рівних коренів основного (характеристичного) рівняння.

Нерівні корені. У цьому випадку на границі півплощини дістанемо граничні умови [2, 3]

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{22} &\equiv 2\operatorname{Re}\left[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)\right] = 0; \\ \bar{Q}_{21} &\equiv -2\operatorname{Re}\left[\mu_1\gamma_{21}^{(1)}\Phi_1'(z_1) + \mu_2\gamma_{21}^{(2)}\Phi_2'(z_2)\right] = 0\end{aligned}\quad (1)$$

Система однорідних рівнянь (1) відносно невідомих комплексних потенціалів Φ_1' і Φ_2' має нетривіальний розв’язок, коли визначник другого порядку дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1\gamma_{21}^{(1)} & \mu_2\gamma_{21}^{(2)} \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Отже, з умови існування ненульових розв’язків системи (1), тобто з (2), дістанемо рівняння для визначення швидкості хвиль Релея у вигляді

$$\mu_2\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1\gamma_{21}^{(1)} = 0, \quad (3)$$

де величини μ_j , $\gamma_{21}^{(j)}$ знаходяться із [3-6]. Рівняння (3) в теорії хвиль називають дисперсійним [1]. Зауважимо, що рівняння (3) збігається з рівнянням, що відповідає поверхневій нестійкості півплощини з початковими напруженнями [4].

Рівні корені. З [3, 4] на границі півплощини при $y_2=0$ дістанемо такі граничні умови:

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{22} &\equiv \operatorname{Re} \left\{ \left[\psi(z_1) + \bar{z}_1 \Phi'(z_1) \right] + \gamma_{22}^{(1)} \Phi(z_1) \right\} = 0; \\ \bar{Q}_{21} &\equiv \operatorname{Re} \left\{ \mu_1 \gamma_{21}^{(1)} \left[\psi(z_1) + \bar{z}_1 \Phi'(z_1) \right] + \gamma_{21}^{(2)} \Phi(z_1) \right\} = 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Система однорідних рівнянь (4) щодо невідомих комплексних потенціалів $\psi(z_1)$, $\Phi(z_1)$ має нетривіальний розв’язок, коли для визначника другого порядку виконується умова

$$\begin{vmatrix} 1 & \gamma_{22}^{(1)} \\ \mu_1 \gamma_{21}^{(1)} & \gamma_{21}^{(2)} \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Отже, з умови існування ненульових розв’язків системи (4), тобто з (5), дістаємо рівняння для визначення швидкості хвиль Релея у формі

$$\gamma_{21}^{(2)} - \mu_1 \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} = 0, \quad (6)$$

де μ_1 , $\gamma_{(ij)}^{(k)}$ визначаються із [4]. Дисперсійне рівняння (6) збігається з рівнянням [4] і відповідає поверхневій нестійкості півплощини з початковими напруженнями при рівних коренях.

Розглянемо приклад для потенціалу Трелоара (тіло неогуківського типу) [4]. Комплексні параметри μ_j не збігаються і визначаються з таких виразів [4]:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= i, \quad \mu_2 = i \lambda_1 \lambda_2^{-1} \sqrt{1 - \varepsilon_2^2 \lambda_1^{-2}} \equiv i \lambda_1 \lambda_2^{-1} \sqrt{1 - v^2 C_{S_{y_2}}^{-2}}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{v}{C_S^0}, \quad C_S^{02} = \frac{2C_{10}}{\rho}, \quad C_{S_{y_2}} = \lambda_1 C_S^0,\end{aligned}\quad (7)$$

де C_S^0 - швидкість хвилі зсуву (поперечної хвилі) у незавантаженому тілі (без початкових напружень), одержана з урахуванням таких виразів:

$$2C_{10} = \mu; \quad \mu = \frac{E}{3}; \quad v = 0,5, \quad (8)$$

μ - коефіцієнт Ламе; v - коефіцієнт Пуассона, E - модуль пружності; $C_{S_{y_2}}$ - швидкість хвилі зсуву, яка поляризована в площині $y_1 O y_2$ і поширюється вздовж осі $O y_1$ в тілі з початковими напруженнями [1]; C_{10} - стала, що входить у вигляді множника у

вираз для пружного потенціалу. Врахувавши (7) і (8) з рівняння (3), після ряду перетворень дістанемо [4]:

$$\mu_1 \gamma_{21}^{(1)} - \mu_2 \gamma_{21}^{(2)} = -\frac{i(x^3 + x^2 + 3x - 1)(x - 1)}{2x(1 + x^2)} = 0; \quad (9)$$

$$x = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_2^2}{\lambda_1^2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{C_{sy2}^2}},$$

де v - швидкість поверхневих хвиль Релея. Інші позначення співпадають з (7) і (8). У даній праці обмежимося розглядом дозвукових рухів, тобто вважаємо, що $v < C_{sy2}$. Тоді, врахувавши останнє обмеження, з рівняння (9) дістаємо тільки одне рівняння, кореням якого можна дати фізичну інтерпретацію:

$$x^3 + x^2 + 3x - 1 = 0. \quad (10)$$

Рівняння (10) збігається з відповідним рівнянням у [1]. Крім цього, воно відповідає рівнянню [4] для поверхневої нестійкості півплощини з початковими напруженнями для потенціалу Трелоара. Позначимо через x^* додатний дійсний корінь рівняння (10). Тоді із другого виразу (9) маємо

$$v^{*2} = C_R^2 = C_{sy2}^2 (1 - x^* \lambda_2^2 \lambda_1^2) = \lambda_1^2 C_s^{02} (1 - x^* \lambda_2^2 \lambda_1^2) \quad (11)$$

Вираз (11) визначає швидкість хвиль Релея у неогуківському тілі (півплощині) з початковими напруженнями.

Якщо початковий стан також визначається для плоскої деформації ($\lambda_3 = 1$), то з (11) із врахуванням $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ знаходимо

$$v^{*2} = C_R^2 = C_{sy2}^2 (1 - x^* \lambda_1^4). \quad (12)$$

Результати (10)-(12) збігаються із відомими результатами, одержаними іншим методом [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г. Гуца О.И. Введение в акустоупругость. – Киев: Наук. думка, 1977.-152с.
2. Бабич С.Ю., Гузь А.Н. Комплексные потенциалы плоской динамической задачи для сжимаемых упругих тел с начальными напряжениями // Прикл. механика.-1981.-Т.17, №7.-с. 75-83.
3. Гузь А.Н., Бабич С.Ю. Плоские динамические задачи для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями // Прикл. математика и механика.-1982.-Т.46, №2.-с. 263-271.
4. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями.-К.:Наук.думка,1983.-296 с.

5. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии.- К.: Наук. думка, 1990.-630 с.
6. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.В. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями.-К.:Вища школа,1995.-304 с.

Получено __.__.2006 г.