

БІОДЕЗАЙН ЯК ОСНОВА СУЧАСНОГО ДИЗАЙНУ

Наприкінці ХХ століття в переліку спеціальностей вищих навчальних закладів поряд із класичними спеціальностями – архітектурою, образотворчим та декоративно-прикладним мистецтвом з'явився дизайн. У сучасному визначенні дизайн це: по-перше - художнє конструювання та оформлення речей, знарядь праці, промислової продукції, елементів навколишнього середовища; по-друге – художньо-конструктивна діяльність, спрямована на створення нових видів і типів виробів, які мають відповідати вимогам суспільства щодо їх корисності, зручності в експлуатації, краси тощо.

З розвитком ринкової економіки значення дизайну в Україні стрімко зростає. Короткий історичний екскурс свідчить про те, що виникнення та функціонування дизайну в Україні було безпосередньо пов'язане з наявністю відповідного інженерно-технічного середовища. Давався взнаки також високий художньо-промисловий потенціал, який живився народними промислами. Показовим є те, що в кінці ХІХ - на початку ХХ століть у більшості вищих і середніх навчальних закладів України викладалися такі дисципліни, як рисунок, живопис, теорія стилів (сучасний курс основ композиції), креслення, що сприяло загальній і фаховій естетичній підготовці спеціалістів, а разом з тим і проектуванню якісних конкурентноспроможних виробів. На жаль, із часом, починаючи із 70-х років ХХ ст., ці надбання були втрачені. Архітектура, образотворче мистецтво керувалися ідеологічними принципами соціалістичного реалізму, а промислове виробництво перетворилося в ординарно серійне. В умовах планового ведення господарства з існуючою системою розподілу, при відсутності конкуренції не було стимулів для розвитку дизайну. Навіть цей термін був відсутній, а використовувався термін «художнє конструювання».

Сьогодні є очевидним, що економічний і культурний розвиток України, підвищення добробуту і духовності народу неможливі без залучення дизайнерів до процесу створення об'єктів навколишнього середовища, промислових виробів, одягу, різноманітного обладнання та графічної продукції.

© В.Є. Михайленко, О.В.Кащенко, 2006

Україна нині переживає період перебудови всього народного господарства на нових ринкових умовах. Будь-який виріб чи товар легкої та важкої промисловості повинен бути не тільки міцним, корисним, але й привабливим, красивим, сучасним. На протязі десятків років в умовах суцільного дефіциту цим питанням на внутрішньому ринку не приділялося уваги, а що стосується експорту, то основними його предметами були сировина та напівсировина. Історія України свідчить, що її народ завжди приділяв увагу естетичній складовій, що реалізовувалося в декоративно-прикладному, ужитковому мистецтві, в побуті і в навколишньому середовищі. Ця естетика була тісно пов'язана з природою України, з її тваринним і рослинним світом. За багатомільйонну історію природа старанно потурбувалася про різноманітність своїх форм і фарб. Будучи її невід'ємною частиною, ми щодня стикаємося з ними: одних просто не помічаємо, інші викликають у нас захват та жвавий інтерес. Але чи так далекі вони одне від одного? Досить озброїтися вимірювальними інструментами, і ми з'ясуємо, що форми, які здавалися таким різними, здебільшого ближчі, аніж різні. У дійсно бездонній коморі форм живої природи неодмінно знайдуться чудові зразки довершених конструкцій та механізмів; знайдуться там також добре знайомі «інженерні рішення», розробка яких вимагала б у людей значних витрат сил та часу. Але діалог з природою не простий. Ми відчуваємо дефіцит засобів спілкування з нею. Розроблені методи та прийоми, що відкривають деякі «будівельні» принципи живої природи, свідчать про необхідність більш глибокого їх розгляду.

В кінці ХХ століття з'явився термін «біодизайн», який поєднав дві науки - біоніку та дизайн. Сплав цих двох наук виявився дуже ефективним як в теоретичному, так і в практичному напрямках. В своїй «Метафізиці» Арістотель писав: «...природа і мистецтво – це дві основні рушійні сили світу...». Давньоримський архітектор Вітрувій у своєму творі про архітектуру часто посилається на природу як джерело вивчення та наслідування. Італійський архітектор Альберті вважав, що задача митця полягає в наслідуванні природі, яка є «кращим майстром форм». Леонардо да Вінчі називав живопис дочкою або онучкою природи, а митець повинен знаходити прекрасні пропорції, закладені в природі. Дідро вважав, що «в природі немає нічого неправильного і що гармонія найкращої картини є слабим на-

слідуванням гармонійності природи». В Київській Русі одним з перших заговорив про красу природи Володимир Мономах. Російському та українському читачеві на красу природи відкрили очі поети О.Пушкін, М.Лермонтов, Тарас Шевченко, Леся Українка, Іван Франко, Ф.Тютчев, А.Фет, письменники І.Тургенєв, А.Чехов, І.Бунін, Михайло Коцюбинський, Панас Мирний.

Американський дослідник Р.Ульрих підрахував, що до більшості лауреатів Нобелівської премії геніальні ідеї прийшли під час прогулянок по красивих ландшафтах.

Однією з трьох гілок дизайну є індустріальний дизайн, у якому використання «патентів» живої природи дає цікаві результати. Винахідники багато працювали над проблемою конструювання надійного пристрою для буріння свердловин. Було створено кілька десятків конструкцій ножів, але дійшовши до твердих порід, всі ножі тупилися, тоді винахідники звернули увагу на зуби як вимерлих палеооящерів, так і бобра та нутрії. Ці зуби мають специфічну форму, яка сприяє їхньому загостренню при роботі. Спираючись на цю ідею, були створені різці не тільки для буріння свердловин, але й для обробки металів. Запозичивши у пінгвіна спосіб пересування по снігу та тонкому льоду, коли він лягає на живіт і відштовхується ластами, конструктори з Нижнього Новгорода створили снігоходну машину «Пінгвін». Біопрототипи широко використовуються при конструюванні сільськогосподарської техніки. Так на основі прототипу з риючими кінцівками жучків вовчка і носорога були розроблені нові конструкції плоскорізальних робочих органів із зубами на лемешах і стоюку. Риючі форми тіла крота послужили ідеєю для створення робочих органів стрільчастого типу. Під керівництвом професора В.І.Корабельського розроблені робочі органи для рихління ґрунту на різних глибинах. Такі органи мають криві лінійні лапи, здатні інтенсифікувати рихління за рахунок знакозмінних деформацій. Прототипи живої природи використовуються також і для плаваючих засобів – човнів та кораблів. Одним із найшвидших плаваючих представників живої природи є риба-меч, максимальна швидкість плавання якої досягає 130 км/год. Риба-меч відзначається своєрідною формою тіла довжиною до 2 м. Високу ефективність має хвостовий плавник, величина якого перевищує найбільшу товщину тіла у 2,2 рази. Роль жо-

рсткого стабілізатора меч-риби відіграє спинний плавник обтічної форми.

Вироби людини поступово удосконалюються, а якщо вони стають, або їх стає занадто багато, їх ліквідують. В живій природі померлі об'єкти є основою для нового життя. На жаль, сучасна людина з цією проблемою поки що не справляється. Величезні відходи виробництва, забруднення річок, морів та повітря, утворення в атмосфері озонових дірок, загальне потепління врешті-решт приведуть до глобальної катастрофи, якщо людина не усвідомить всю серйозність ситуації. Жива природа завжди була прикладом і для архітектури, яка існує вже 5 тисяч років. Особливо корисним є приклад живої природи при будівництві з легких конструкцій, тобто - як при мінімальній витраті матеріалу та праці отримати максимальний результат. Прообразами тонкостінних оболонок, тентових та вантових покриттів, пневматичних конструкцій є твори представників живої природи. Це паутина, яка характеризується високою міцністю при малій вазі, це пташині гнізда, це раковини молюсків тощо.

В храмі Саграда Фаміліа в Барселоні (Іспанія, архітектор Антоніо Гауді) розташування вікон, фігурні водостічні жолоби, шпилі вершин башт викликані типовими для цієї місцевості тваринним та рослинним світом: тут ящірки, морські та сухопутні слимаки, саламандри, жаби, пуголовки та збільшені колоски рослин. Пластика Гауді, що виражена у формах та кольорових відтінках, заснована на глибокому вивченні природи. Про це свідчать його власні слова: «Це дерево поряд з моєю майстернею – мій учитель». Об'єктам та предметам, створеним людиною, притаманні такі закономірності як ритм, рівновага, динамічність та статичність форми, симетрія та асиметрія, масштаб і масштабність, пропорції, контраст і нюанс. Всі ці закономірності людина також взяла з природи.

Велику роль жива природа відіграє і в графічному дизайні. Зокрема, тут провідним фактором є колір. Барвистість природи є невичерпним джерелом емоційних відчуттів та естетичних переживань людини. Прикладом наслідування кольорам природи є Японія з її мальовничою і барвистою природою, з її змінами у відповідності з порами року. Завдяки цьому у японців розвинулася висока чутливість до кольорів і відтінків, яка відбилася на декоративно-прикладному мистецтві, як професійному, так і народному. Так у романтичних

розповідях придворних дам згадуються назви різних кольорів, кількість яких доходить до 170 найменувань. Те ж можна сказати й про Україну, де ще з часів Трипілля (ІУ – ІІІ ст. до н.е.) спостерігався тісний зв'язок людини з природою. Про це свідчать археологічні розкопки. Цікаво, що різні райони України характеризуються своїми особливостями в формах, кольорах, орнаментиці предметів, створених людиною. В центральній Україні строкатість полтавських квітів, пологі пагорби та сонячність неба відбилися у яскравих вишивках сорочок, в білих хатах з округлими солом'яними стріхами. Інша колористика в Карпатах з туманними сивими горами, синіми смерічками, темними стрімкими потоками, які відбилися у гостродахих дерев'яних будівлях, а одяг має контрастний геометричний орнамент зі значною часткою чорного кольору. Кольори України проявляються у своєму багатобарвному розмаїтті в різних районах, у відповідності з переважаючими кольорами, кліматом і ландшафтом. Флора України здебільшого може бути охарактеризована контрастними сполученнями різноманітного за тональністю зеленого і білого кольорів та насиченими червоним, жовтогарячим, жовтим та синім кольорами квітів або ягід (мак, ромашка, соняшник, волошка, калина, вишня, чорнобривці, мальва, барвінок, кульбаба).

В 1965 році американський архітектор Чарльз Мур виконав інтер'єр великого будинку в Каліфорнії, в якому на стінах були нанесені величезні кольорові квадрати і кола. Цей прийом Мур назвав суперграфікою. Джерела суперграфіки спостерігалися в матеріальній культурі ще за минулих часів, але особливого розвитку суперграфіка набула в ХХ столітті. Це супрематичні конструкції К.Малевича, архітектурна поліхромія Б.Таута, графічні експерименти Я.Черніхова, зокрема, його серія «Сітчастий орнамент». Суперграфіка одержала значне поширення в Японії. На початку 70-х років архітектор Тікадзава фарбує будинки в яскраві кольори, архітектор Танака використовує на фасадах поперечні кольорові смуги. Таким чином ефективне використання біодизайну мало б сприяти становленню національного українського дизайну. На превеликий жаль, становлення професійного дизайну на початку ХХ століття в Україні було неукраїнським, однією з причин було те, що у свідомості значної частини населення України все українське було пов'язане лише з селом. Це культивувалося спочатку царською Росією, зокрема Петром І та Катериною ІІ, а

пізніше радянською ідеологією в СРСР. Для досягнення оновленої національної ідентичності слід глибоко дослідити матеріали, пов'язані з народженням та розвитком новітнього національно орієнтованого дизайну в Японії, Фінляндії та Італії. Саме в цих країнах сформувався дизайн, що втілює глибинні національні сутності мовою сучасних візуальних форм. Однією зі складових такого народження повинно стати використання в дизайні ідей і форм тваринного та рослинного світу України. Слід зазначити, що ідентичність нинішньої української нації повністю не збігається з тією, що була за часів Шевченка, чи козаччини, чи Київської Русі – ні в побуті, ні в сприйнятті людей. Тому треба створювати своє сьогодинське характерне обличчя, з урахуванням великої кількості сучасних чинників. Покищо не поставлена задача створення «українського дизайну», а існує лише «дизайн на землі України». На сторінках існуючої й досить чисельної дизайнерської преси відсутня дискусія між дизайнерами стосовно «українського дизайну». Парадоксом є те, що всі архітектурно-дизайнерські журнали видаються, переважно, російською мовою. Основною теоретичною базою розвитку біодизайну є спільність інформаційної основи процесів формоутворення в природі і в штучно створюваному середовищі. Це відноситься до особливостей функціонування біосистем, їх взаємозв'язку і ієрархічності побудови, що відповідає типологізації об'єктів штучного середовища та їх співвідношенню між собою.

Спільність (в основному) інформаційної бази формоутворення в природі та техніці, архітектурі, дизайні, мистецтві дозволяє розвивати принцип аналогії двох різних за цільовим призначенням систем на різних рівнях [1, 2] для освоєння природних форм з метою відтворення їх цільових характеристик в штучно створюваних об'єктах. При цьому можливе відтворення якостей біоформ на рівні образу, форми, характеру дії, комплексно або частково.

Образне моделювання біоформ в дизайні передбачає відтворення основних ознак природного аналога за формою, структурою побудови, кольором, характером дії, компоновки, геометрії побудови тощо. Найпоширенішою сферою застосування образного моделювання біоформ є графічний дизайн (стилізація біоформ на основі побудови асоціативних рядів при розробці товарних знаків, логотипів, символів тощо), в техніці і архітектурі – при наданні виробу, об'єкту ознак

природного (без моделювання інших ознак). Діапазон моделей в цьому випадку можна охарактеризувати рядом «копія – стилізація – символ».

Моделі функціональних якостей біоформ використовуються при розробці механічних пристроїв (біомеханічні моделі), при розробці аеро-, гідродинамічних форм. Сферою застосування моделей є техніка, архітектура, медицина. Структурні моделі дозволяють відтворити спосіб компоновки тіла або поверхні біоформ при конструюванні блочних або стрижневих систем.

Геометричне моделювання природних форм дозволяє перенести в практичну галузь копію поверхні біоформи або спосіб її утворення при зміні основних параметрів. Моделювання біоформ на відтворення фізичних аналогій дозволяє отримати таку дизайн-форму, яка за принципом роботи конструкції (каркасу, оболонки) «повторює» раціональну (оптимальну) її форму. У таблиці 1 поданий зв'язок галузей діяльності з видами моделювання (художньо-композиційним, конструктивним, системним). У таблиці 2 ілюструє проблемно-аспектні зв'язки у системі “види моделювання – способи подання інформаційних ознак об'єкту моделювання” у контексті біодизайну.

ЛІТЕРАТУРА

1. Михайленко В.Е., Кащенко А.В. Природа-геометрия-архитектура. – К.: Будівельник, 1988.
2. Волкотруб И.Т. Основы художественного конструирования. – К.: Вища школа, 1988.
3. Бабицький Л.Ф. Біологічні напрями розробки ґрунтообробних машин. – К.: Урожай, 1998.
4. Борейко В.Е. Введение в природоохранную эстетику. – К.: Киевский эколого-культурный центр, 1999. - Вып. 14.

Таблиця 1

Види моделювання		Комплексне моделювання										
		Художньо-композиційне моделювання				Конструктивне моделювання				Системне Моделювання		
		Образність	Композиція	Колір	Форма	Конструкція	Структура	Матеріал	Спосіб дії	Технологія	Інформаційні процеси	Система
Мистецтво	Образотворче											
	Декоративно-прикладне											
	Ужиткове						+	+				
Дизайн	Індустріальний						+	+		+	+	+
	Графічний											
	Середовищний						+	+		+		
Архітектура	Система розселення										+	+
	Будинки і споруди						+	+		+	+	+
	Інтер'єр						+	+				

Таблиця 2

Аспект	Галузь	Проблема	Питання	Метод
Філософський	Естетика	Естетика середовища	Дослідження закономірності естетичного середовища	Евристичний аналіз
Методологічний	Теорія дизайну, архітектури, мистецтва	Гармонізація рішень	Закономірності художньо-естетичної основи форми	Статистичний аналіз
Методичний	Методи проектування, конструювання	Фізичні основи формоутворення	Синтез моделей	Структурний аналіз, числовий експеримент
Технічний	Реалізація теоретичних положень	Відтворення якостей біопрототипів	Виконання проекту зображення	Проектне моделювання

Получено 16.03.2006 г.

В.Є. Михайленко, В.О. Плоский

**ЗАДАЧІ ПОДАЛЬШОГО РОЗВИТКУ УКРАЇНСЬКОЇ АСОЦІАЦІЇ
З ПРИКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ**

В червні цього року минає сім років від дати реєстрації Міністерством юстиції України статуту „Української асоціації з прикладної геометрії”. Цей строк – солідний і можна було б отримати серйозні результати діяльності Асоціації в науковому, методичному, інженерному та організаційному напрямках.

Безумовно, певні успіхи мають місце, але їх могло бути значно більше, якщо б вплив Асоціації розширився на всю Україну. В статуті Асоціації записано, що метою її функціонування є задоволення та захист законних соціальних, економічних, творчих та інших спільних інтересів своїх членів і сприяння всебічному розвитку прикладної геометрії. Стратегічна мета функціонування Асоціації – покращення викладання графічних дисциплін в Україні, виробництво та реальне впровадження науково-технічного продукту, а також кадрове відтворення та розширення геометричної школи України шляхом її цілісного розвитку в ринкових умовах.

У більшості областей України створено понад 30 осередків Асоціації, але тільки кілька з них (Київський, Харківський, Мелітопольський, Одеський, Миколаївський, Львівський, Кримський) активно працюють, а решта, в кращому разі, обмежується збиранням річних внесків. Досвід роботи фахівців з Харкова свідчить, що для продуктивної роботи осередків необхідне регіональне об’єднання з організацією неформального управління. Позитивний приклад в цьому відношенні – плідна співпраця харківських професорів Л.М. Куценка та Ю.М. Тормосова. Є необхідним посилення взаємодії Асоціації та її осередків з керівництвом вищих навчальних закладів в регіонах через організацію спільних зі спеціалістами - суміжниками заходів: семінарів, конференцій, в тому числі студентських тощо. Позитивні приклади в цьому питанні – конференції з енергозбереження, екології та дизайну в Криму, конференції з математичного моделювання в Херсоні тощо.

© В.Є. Михайленко, В.О. Плоский, 2006

Суттєвими результатами за цей час є видання підручників та навчальних посібників, написаних державною мовою. Це перш за все, навчальний комплекс, що складається з підручника „Інженерна та комп'ютерна графіка” (два видання) та „Збірника задач з інженерної та комп'ютерної графіки” (В.Є. Михайленко, В.М. Найдиш, А.М. Підкоритов, І.А. Скидан), підручник „Основи геометричного моделювання” (Ю.М. Ковальов), підручники „Інженерна графіка” (В.Є. Михайленко, В.В. Ванін, СМ. Ковальов) (два видання), „Нарисна геометрія” (В.Є. Михайленко, М.Ф. Євстифеев, С.М. Ковальов, О.В. Кащенко), „Інженерна графіка: креслення, комп'ютерна графіка” (за ред. А.П. Верхоли), „Оформлення конструкторської документації” (В.В.Ванін та ін.). Для дизайнерів та архітекторів вийшов посібник „Основи композиції” (В.Є. Михайленко, М.І. Яковлєв). Завершується робота по створенню посібника для аспірантів та пошукувачів, присвяченого спеціальним питанням геометричного моделювання. Вийшла в світ програма з нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки для трьох рівнів викладання, в залежності від числа навчальних годин. Завершується робота над навчальним посібником „Основи біодизайну” (В.Є. Михайленко, О.В. Кащенко). Харківськими вченими створюється перший мультимедійний підручник з нарисної геометрії.

Рік тому керівництву вищих навчальних закладів, де наукової та серйозної методичної роботи з прикладної геометрії не ведеться, Асоціацією були направлені листи з пропозиціями про співпрацю та надання допомоги, але майже ніякої реакції на дану ініціативу від керівництва вузів та відповідних кафедр немає. Очевидно, це підкреслює досить поширене ставлення до графічних дисциплін в регіонах, де відсутня активна наукова діяльність з нашої спеціальності, як до другорядної та архаїчної дисципліни.

В Україні виходять чотири науково-технічні збірники. Більше 40 років виходить збірник „Прикладна геометрія, інженерна графіка”, першим відповідальним редактором якої був засновник української школи в галузі прикладної геометрії професор С.М. Колотов. Зараз збірники з прикладної геометрії виходять в Харкові та Мелітополі, а за спеціальністю 05.01.03 в Києві почав виходити збірник „Технічна естетика і дизайн”.

Збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка” вже досягнув такого стану, що його слід виводити на міжнародний рівень. Робочими мовами у ньому можуть бути українська, англійська та російська. До складу редакційної колегії збірника вже включено керівників Міжнародної спілки з геометрії та графіки проф. Гюнтера Вайса (ФРН) та проф. Гельмута Штахеля (Австрія).

Одним з найважливіших завдань Асоціації було і є підготовка наукових кадрів. Обумовлено це як постарінням кадрів, так і зниженням інтересу сучасної молоді до наукової роботи. Якщо 15-20 років тому, наприклад, на двох кафедрах у Київському національному університеті будівництва і архітектури (КНУБА), які готують спеціалістів за спеціальністю 05.01.01, одночасно навчалось понад 20 аспірантів, то зараз тільки 5; якщо за часів СРСР на кафедрах навчалися представники багатьох союзних республік, особливо середньоазіатських, то тепер навчаються лише представники України з причини високої вартості навчання в аспірантурі.

Пару років тому в газеті „Урядовий кур’єр” опубліковано статтю В.Є.Михайленка „Невикористаний капітал”, в якій писалося, що у вищих навчальних закладах України накопичено великий капітал у справі підготовки кандидатів та докторів наук, який зараз зовсім не використовується. Кілька місяців тому ми звернулися до президента України з аналогічним листом, додавши до листа ксерокопію з „Урядового кур’єра”. Безумовно, це звернення не дійшло до Президента, оскільки ми отримали на цей лист формальну відписку, що цей лист передано до президії Національної академії наук для реагування, хоча у вузах України підготовка наукових кадрів мала значно більший масштаб, ніж у інститутах НАН України. Ми переконані, що необхідно на міждержавному рівні розглянути питання про підготовку в Україні науково-педагогічних кадрів в обмін на туркменський газ, казахстанську мідь, узбецьку бавовну, молдовські фрукти тощо. Думаємо, що тепер від імені нашої асоціації слід написати відповідне звернення до Кабінету Міністрів України. Настав також час внести суттєві зміни та доповнення до паспорту спеціальності „Прикладна геометрія та інженерна графіка” та до програми підготовки кандидатських екзаменів з цієї спеціальності. Керівництво Асоціації вже отримало відповідні пропозиції з Мелітополя (проф. В.М.Найдиш) та Харкова (проф. Куценко Л.М.). Ми будемо надзвичайно вдячні всім

спеціалістам, які хотіли б висловитись з цього приводу, для того щоб нові редакції паспорту та програми були якнайбільше збалансовані та з максимальною повнотою враховували напрямки наукових інтересів всієї української геометричної спільноти.

В Україні щорічно проводяться міжнародні конференції з прикладної геометрії та технічної естетики. У 2002 році Асоціація організувала та провела X Всесвітню конференцію з геометрії та графіки (ICGG), в якій взяли участь представники 24 країн. Завдяки проведенню цієї конференції Україна була визнана як держава, де успішно розвиваються прикладна геометрія та графіка.

У 2005 році в Харкові було успішно проведено першу українсько-російську конференцію. В 2007 році планується провести російсько-українську конференцію в Белгороді.

За останні роки активізувалася робота по підготовці і захисту докторських дисертацій. Цьому сприяє робота міжвузівського докторантського семінару при КНУБА, який проводиться раз на квартал. Докторанти по 2-3 рази доповідають на семінарі, враховуючи зауваження та побажання його учасників. Подібні семінари, очевидно, мають існувати і для попереднього знайомства з кандидатськими дисертаціями.

Дуже важливе питання для України – відродження технічної естетики як теоретичної основи дизайну. Українці завжди відзначалися високим естетичним смаком, - стосується це інтер'єру сільської хати, народного костюму, виробу з дерева чи кераміки тощо. На превеликий жаль, зараз основними продуктами українського експорту є сировина та напівсировина. Однією з причин такого становища є також і недостатній естетичний рівень продукції, що випускається в Україні. Професійно-проектний дизайн ще не став економічно-культурним явищем і однією з причин цього є відсутність відповідних висококваліфікованих кадрів з технічної естетики – і перш за все – кандидатів та докторів наук. Треба істотно розширити аспірантуру і докторантуру в цій галузі, а також видати відповідні підручники та навчальні посібники. Спілка дизайнерів України, на жаль, не відіграє серйозної ролі в цій галузі, існуючи скоріше на папері. Сучасна середня школа також не дає випускникам необхідної художньої та графічної підготовки.

10-15 років тому у нас існувала цікава і корисна практика, коли кожний аспірант та пошукувач, крім публікації статей у фахових збірниках, подавав заявку на авторське свідоцтво чи патент. Наша наука є прикладною і в більшості дисертаційних робіт є об'єкт, процес чи явище, на які можна оформити заявки. Слід було б поновити таку практику, хоча суттєвою перепорою цьому є значна вартість патентування. Маємо надію, що з розвитком ресурсного забезпечення Асоціації остання могла б спонсорувати оформлення найбільш цікавих винаходів.

Спроба інформативно впорядкувати наукові та науково-методичні досягнення вчених-геометрів у формі “Паспортів розробок” поки що не привели до очікуваного результату. Асоціація вдячна всім авторам, які підтримали цю ініціативу. Але, попри роз'яснення мети паспортизації – відкрити розробки для комерційного використання на користь авторів, об'єм матеріалу, отриманого виконавчою дирекцією, є незначним.

У нас поки що не встановлено тісних зв'язків з виробництвом, хоча і є деякі позитивні виключення. Це зв'язки професора В.М. Корчинського з Державним конструкторським бюро „Південне” (космічні технології, м. Дніпропетровськ), професора Л.М. Куценка з Міністерством з надзвичайних ситуацій, кафедри Київського національного технічного університету „КПІ” з Київським авіаційним заводом, професора В.М. Борисенка з Миколаївським кораблебудівним заводом тощо. Але поки що це несистемні випадки. Крім впровадження наукових розробок, виробничників слід також зацікавлювати можливістю захисту дисертацій.

Дуже важливе питання – методичне забезпечення дистанційної освіти з графічних дисциплін. Така форма освіти поширена у багатьох країнах світу. Тут можна було б почати з невеликих за обсягом курсів, наприклад, для технологічних спеціальностей.

Життя підказує, що нагальним є перехід наукової інформаційної взаємодії в межах Асоціації на новий технологічний рівень. Очевидно, що існування стандартного Інтернет-сайту Асоціації на сьогодні недостатньо. Необхідно створити повноцінний Інтернет-портал з прикладної геометрії, де слід надавати для вивчення найбільш цікаві розділи підручників та статей з існуючих збірників, матеріали з підготовки до кандидатських іспитів тощо.

І ще одне серйозне зауваження щодо адаптації навчального процесу у вищих технічних навчальних закладах у відповідності з Бонською декларацією. Для входження України до європейського та світового наукового простору необхідне ефективне запровадження у систему вищої школи кредитно модульної та акумулюючої системи (ECTS), що передбачає посилення самостійної роботи студентів, використання новітніх педагогічних методик тощо. Впровадження ECTS треба здійснювати поетапно, не втрачаючи при цьому цінних та ефективних прийомів, напрацьованих раніше.

Очевидно, що задач, які потребують оперативного розв'язання, більше, ніж досить. Для впорядкування організаційної діяльності Асоціації необхідно розробити та затвердити оперативний план роботи, а контроль за його реалізацією покласти на Ревізійну комісію УАПГ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Михайленко В.Є. Українська асоціація з прикладної геометрії: результати роботи, задачі, перспективи // Сборник научных трудов Киевского национального университета технологий и дизайна (спецвыпуск). - К. : КНУТіЗ, 2004. – С. 3 - 9.
2. Plosky V.O. From the System Analysis of Applied Geometry Methods Toward Structure of Ukrainian Geometrical School /Proc. of 10th International Conference on Geometry and Graphics. - Vol. 3.- Kyiv, 2002.
3. Михайленко В.Є. 10 Міжнародна конференція ICGG // Технічна естетика і дизайн, 2004. – Вип. 3 / 4.
4. Плоский В.А. Прикладная геометрия с позиции теории организаций: аспект методологического анализа // Вісник Херсонського державного технічного університету. – 2002. - № 2(15).
5. Михайленко В.Є., Ковальов С.М., Ванін В.В., Скидан І.А. Програми дисципліни „Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка” // МОН України, Науково-методичний центр вищої освіти. - Київ, 2005.
6. Михайленко В.Е. Прикладная геометрия в Украине // Материалы украино-российской научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования». - Харьков: ХДУХТ, 2005.

Получено 10.03.2006 г.

В.М.Корчинський, Д.М.Свинаренко

**ІНФОРМАЦІЙНІ ОЗНАКИ ПРОСТОРОВИХ ФОРМ
РОЗПОДІЛІВ ЯСКРАВОСТЕЙ БАГАТОТОНОВИХ
РАСТРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ, ІНВАРІАНТНІ ДО
АФІННИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ**

Постановка проблеми. Розпізнавання геометричних форм зображень, отриманих центральним проєкціюванням, є однією з основних проблем у ряді прикладних областей, зокрема інтерпретації видових даних дистанційного зондування Землі (ДЗЗ) з великовисотних носіїв. Характерною особливістю таких даних є неоднорідний розподіл яскравості по полю зображення, який має сутєву інформаційну значущість. Принципово важливим є забезпечення інваріантності процедури розпізнавання до позиційних умов формоутворення зображень, варіювання яких спричиняє просторові перерозподіли їхніх яскравостей. Наявність таких перетворень, неминучих в реальних умовах проєкціювання, є фактором, який суттєво перешкоджає змістовній інтерпретації зображень, одержаних у різних сеансах проєкціювання. Це зумовлює актуальність розроблення систем інформаційних ознак (ІО) багатотонових зображень, інваріантних до перетворень, спричинених зазначеними факторами.

Аналіз останніх досліджень. Існуючі результати щодо визначення просторово-інваріантних ІО одержані у контексті загальної проблематики теорії розпізнавання образів і стосовно зображень орієнтовані на їхнє двотонове (“чорно-біле”) подання [1 - 3]. Між тим, специфіка апаратних засобів фіксації видових даних ДЗЗ зумовлює багатотонувий (з багатьма рівнями яскравостей) растровий характер отримуваних. Зазначимо, що проблема визначення ІО, множина яких утворює метричний простір (як і правила обчислення його метрики), не є задачею загальної теорії розпізнавання образів і приймається апіорно заданою [4], хоча ця проблема є основою для ефективного застосування методів багатовимірної та цілочисельної геометрії для

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Метою статті є означення системи інтегральних інформаційних характеристик проєкційних багатотонових зображень, інваріантної до геометричних перетворень групи подібностей у просторі “площина проєкцій – рівень яскравості”.

© В.М.Корчинський, Д.М.Свинаренко, 2006

Основна частина. Неоднорідний розподіл яскравості проекційного растрового зображення розглядаємо як тривимірний геометричний об'єкт (поверхню) у 3-просторі “ площина проекцій - рівень яскравості” (далі 3-ППРЯ) з декартовою системою координат $Oxyz$, де підпростір Oxy розташований у площині проекцій, вісь Oz відповідає рівню яскравості. Перетворення групи подібностей у просторі 3-ППРЯ подається виразами

$$\begin{aligned}x' &= k_1 x + a; \\y' &= k_2 y + b; \\z' &= k_3 z.\end{aligned}\tag{1}$$

де k_i - коефіцієнти масштабування ($i = \overline{1,3}$); a, b - величини паралельних перенесень у площині проєціювання. Наслідком вимоги масштабної інваріантності ІО просторових форм розподілів яскравостей є їхня безрозмірність. За основу побудови подібно-інваріантних ІО зображень приймемо центровані декартові моменти просторових розподілів яскравостей

$$m_{pqs} = \int_{(\Omega)} (x-a)^p (y-b)^q z^s F(x,y,z) dx dy dz, \tag{2}$$

де p, q, s - цілі невід'ємні числа ($p+q+s=N$ - порядок моменту); x, y - координати елементів зображення у площині проєціювання; $F(x, y, z)$ - індикаторна функція розподілу яскравості, що набуває значення 1 у межах зображення та 0 - поза ними. Інтегрування у виразі (2) здійснюється по області у 3-ППРЯ, зайнятій просторовим розподілом яскравостей.

Безрозмірні моменти, інваріантні до паралельних перенесень та масштабування у площині Oxy відшукуємо у вигляді

$$M_{pqs} = \frac{m_{pqs}}{\frac{a_1 p + b_1 q + c_1 s + d}{m_{200}} \frac{a_2 p + b_2 q + c_2 s + d}{m_{020}} \frac{a_3 p + b_3 q + c_3 s + d}{m_{002}}}, \tag{3}$$

де a_i, b_i, c_i, d та A - невідомі сталі.

Можна показати, що з вимоги афінної інваріантності величин M_{pqs} випливає наступна умова:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2, \\ b_1 + b_2 + b_3 = 2, \\ c_1 + c_2 + c_3 = 2. \end{cases} \tag{4}$$

Ще одна умова полягає в інваріантності M_{pqs} щодо операції ізо-
тропного масштабування (коефіцієнти масштабування однакові щодо
для усіх координатних осей простору 3-ППРЯ.

Цих умов достатньо для визначення невідомих параметрів у ви-
разі (3), у результаті чого отримуємо:

$$M_{pqs}(k_1, k_2, k_3, a, b) = \frac{\frac{1}{k_1^{p+1}} \frac{1}{k_2^{q+1}} \frac{1}{k_3^{s+1}} \bar{m}_{pqs}}{\left(\frac{1}{k_1^3 k_2 k_3} \bar{m}_{200} \right)^A \left(\frac{1}{k_1 k_2^3 k_3} \bar{m}_{020} \right)^B \left(\frac{1}{k_1 k_2 k_3^3} \bar{m}_{002} \right)^C}, \quad (5)$$

$$\text{де } A = \frac{4p - q - s + 2}{10}, B = \frac{-p + 4q - s + 2}{10}, C = \frac{-p - q + 4s + 2}{10}.$$

Інваріантність одержаних ІО була протестована на зображенні
(рис.1), що було піддане операції масштабування з різними коефіціє-
нтами вздовж координатних осей Ox , Oy (відповідно k_1, k_2). Через ве-
ликий розмір, отримані у такий спосіб зображення не подаються. Для
отриманих зображень були обчислені безрозмірні моменти за виразом
(5), а також відносні дефекти інваріантності.

На рис. 2 подані графіки за-
лежності відносної похибки безроз-
мірних моментів від порядку моме-
нтів $(p+q+s)$, обчислених для зо-
браження, що було отримане з ета-
лонного шляхом масштабування з
коефіцієнтами $k_1 = 3, k_2 = 2, k_3 = 1$.
Графіку з хрестиками відповідають
параметри переносу $a = 0; b = 220$; з
точками – $a = -320; b = 0$; з колами –
 $a = -320; b = 220$.

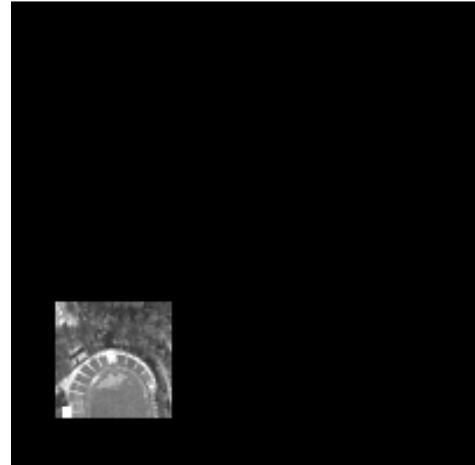


Рисунок 1

На рис. 3 подані графіки похибки, обчисленої для зображення,
що було отримане шляхом масштабування з коефіцієнтами
 $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 1$. Графіку з плюсами відповідають параметри перено-
су $a = 0; b = 330$. Графіку з точками – $a = -210; b = 0$. Графіку з колами
– $a = -210; b = 330$.

Як видно з рисунків похибка, практично не залежить від зміни коефіцієнтів масштабування, проте вона є досить великою, що є наслідком дуже великих значень параметрів переносу (які не зустрічаються на практиці).

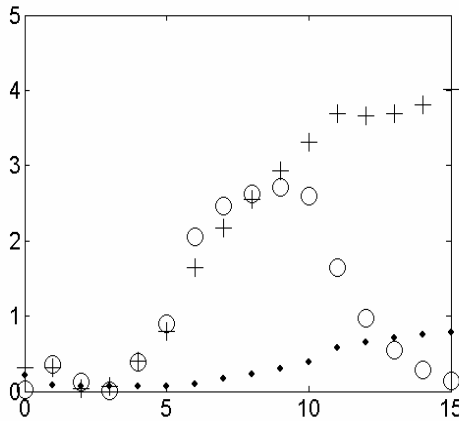


Рисунок 2

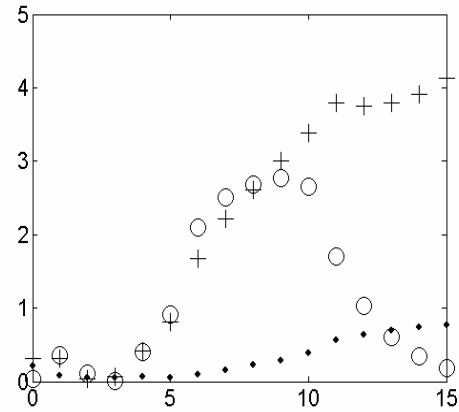


Рисунок 3

На рисунках 4 -7 наведено порівняльні графіки відносної похибки. На рисунках 4, 6 графіку з плюсами відповідають параметри переносу $a=0; b=330$; з точками – $a=0; b=33$. На рисунках 5 та 7 графіку з плюсами відповідають параметри переносу $a=-210; b=330$; з точками – $a=-21; b=33$. Як видно з графіків, при зменшенні на порядок параметрів переносу величина відносної похибки зменшується у 20 – 100 разів, і для практичних значень параметрів переносу знаходиться у припустимих межах.

На рисунках 8, 9 подані графіки дефекту інваріантності від порядку безрозмірних ІО, обчислених при наведених вище параметрах масштабних перетворень та перенесень.

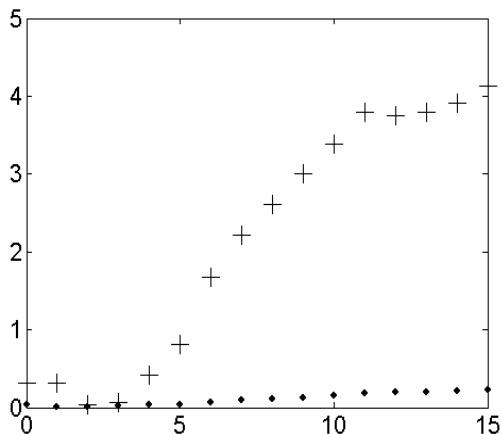


Рисунок 4

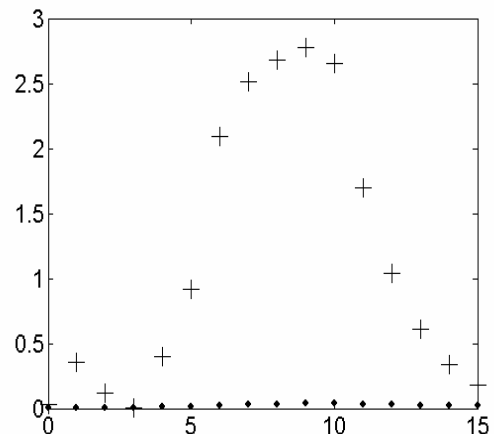


Рисунок 5

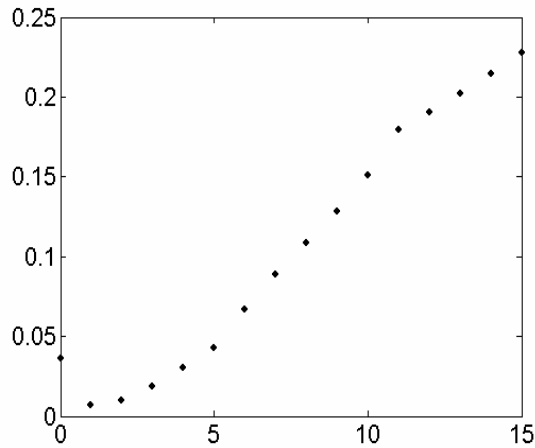


Рисунок 6

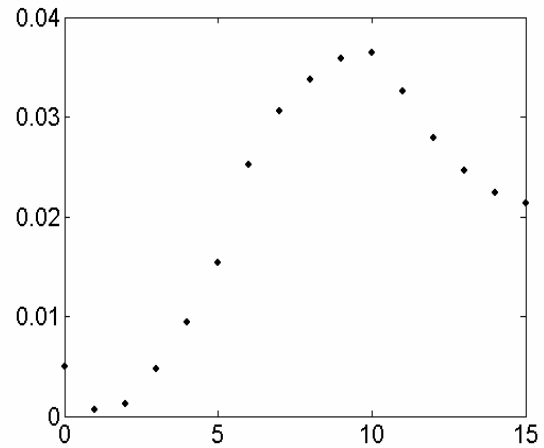


Рисунок 7

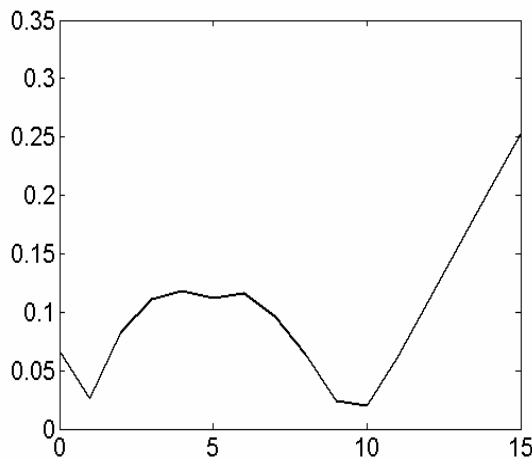


Рисунок 8

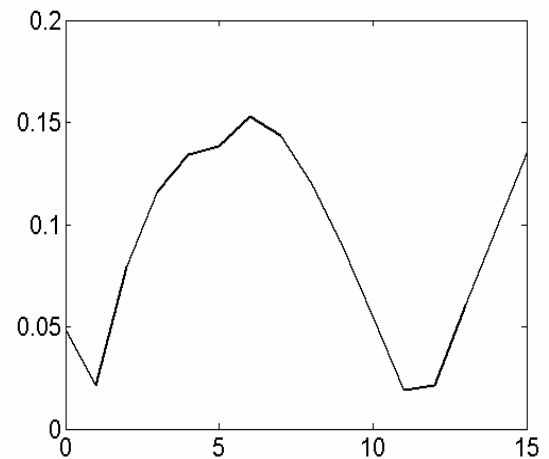


Рисунок 9

Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі запропоновано систему інформаційних ознак багатотонових растрових зображень, інваріантну до геометричних перетворень, характерних для технічних засобів ДЗЗ. Використання таких ознак суттєво підвищує достовірність інтерпретації видових даних. Перспективи подальших досліджень за проблематикою роботи пов'язані із розробленням на основі запропонованого підходу проективно-інваріантних інформаційних ознак та поширенням одержаних результатів на випадок багатоспектральних проекційних зображень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Melan A., Rudolph S. An analytical approach to classification by object reconstruction from features//Signal Processing: Sensor Fusion, and Target Recognition IX.- 2000.-Vol. 4052.-P.102 – 110.

2. Корчинський В.М. Інформативність афінно – інваріантної моделі проєкційних зображень в їх морфологічному аналізі // Proc. of the Sixth All-Ukrainian International Conf. "Signal/Image Processing and Pattern Recognition" (UkrOBRAZ'2002). - Kyiv (Ukraine). – 2002. - Р. 43-46.
3. Гнатушенко В.В., Корчинський В.М. Інваріантна інформаційно-геометрична модель ідентифікації ізопланатичних зображень // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 28-31.

Получено 11.03.2006 г.

УДК 528.71

В.В. Гнатушенко

МОДЕЛЬ ОРІЄНТУВАННЯ ПАРИ ЗНІМКІВ, ЩО НАЛЕЖАТЬ ОДНІЙ ПЛОЩИНІ

Постановка проблеми

В даний час усі сучасні аерокосмічні носії надають можливість користувачу одержувати стереозображення однієї ділянки земної поверхні. На етапі попередньої обробки таких даних, як правило, виникає необхідність знання елементів зовнішнього і внутрішнього орієнтування відповідних сенсорів (камер). Але у більшості випадків вони невідомі, тому постає проблема побудови і використання адекватних моделей формування зазначених зображень.

Аналіз останніх досліджень

Серед останніх досліджень у даному напрямку слід виділити роботи [1-5], в яких розглядаються можливості та використання багатьох найефективніших на сьогодні моделей орієнтування аерокосмічних знімків. Але при відповідному моделюванні стереозображень вони або є неефективними, або їхня програмна реалізація потребує потужних обчислювальних ресурсів.

Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Ці обставини ставлять задачу побудови адекватної моделі орієнтації стереозображень, які б враховували особливості їхнього формування.

©В.В. Гнатушенко, 2006

Основна частина

При обробці даних стереозйомки, особливо одержаних з літаків, можна припустити, що літальний апарат рухається в одній площині (наприклад, паралельно поверхні Землі), тобто обидва знімки стереопари також належать одній площини. Така ситуація схематично подана на рис. 1, рис. 2. Тому будемо вважати таку ситуацію окремим випадком паралельно-проекційної моделі, що була запропонована в роботі [6], при цьому кути $\omega = \omega'$, $\varphi = \varphi'$. Запишемо поворотні матриці окремо для умовно лівого і правого знімків у наступному вигляді:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = R_{\omega} R_{\varphi} R_{\kappa} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

а для правого знімка стереопари

$$R' = \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} \\ r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} \end{bmatrix} = R_{\omega} R_{\varphi} R_{\kappa'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \kappa' & -\sin \kappa' & 0 \\ \sin \kappa' & \cos \kappa' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

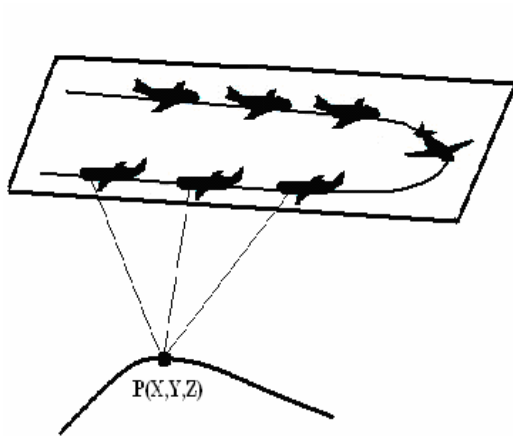


Рисунок 1

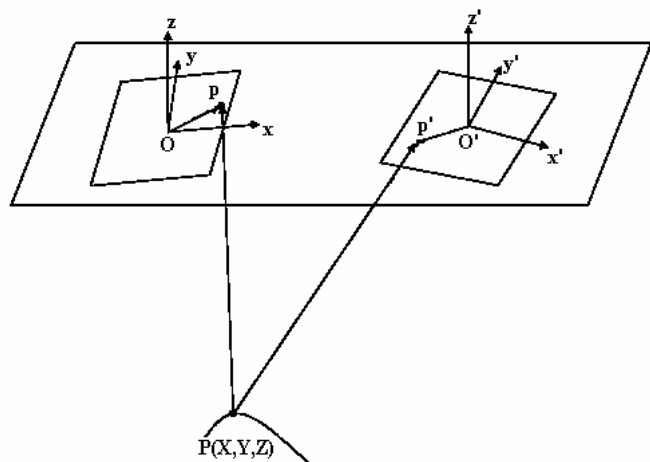


Рисунок 2

Обчислимо $R^T R'$ і запишемо результат у компактному вигляді:

$$\begin{aligned}
 R^T R' &= (R_\omega R_\varphi R_K)^T (R_\omega R_\varphi R_{K'}) = \begin{bmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \kappa' & -\sin \kappa' & 0 \\ \sin \kappa' & \cos \kappa' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \kappa \cos \kappa' + \sin \kappa \sin \kappa' & \sin \kappa \cos \kappa' - \cos \kappa \sin \kappa' & 0 \\ -(\sin \kappa \cos \kappa' - \cos \kappa \sin \kappa') & \cos \kappa \cos \kappa' + \sin \kappa \sin \kappa' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(\kappa' - \kappa) & -\sin(\kappa' - \kappa) & 0 \\ \sin(\kappa' - \kappa) & \cos(\kappa' - \kappa) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\kappa & -\sin \Delta\kappa & 0 \\ \sin \Delta\kappa & \cos \Delta\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_{\Delta\kappa}
 \end{aligned} \quad (3)$$

Використовуючи загальну модель, запропоновану в роботі [2], підставимо одержаний результат у співвідношення [4]

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ 0 \end{bmatrix} + s\lambda R^T \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} + \frac{s}{s'} R^T R' \begin{bmatrix} x' - \Delta x' \\ y' - \Delta y' \\ 0 \end{bmatrix} - s\lambda' R^T \begin{bmatrix} L' \\ M' \\ N' \end{bmatrix}, \quad (4)$$

після чого можна записати три наступні рівняння

$$\begin{aligned}
 x &= \Delta x + s\lambda(r_{11}L + r_{21}M + r_{31}N) + \frac{s}{s'}((x' - \Delta x')\cos \Delta\kappa - (y' - \Delta y')\sin \Delta\kappa) - \\
 &- s\lambda'(r_{11}L' + r_{21}M' + r_{31}N') \\
 y &= \Delta y + s\lambda(r_{12}L + r_{22}M + r_{32}N) + \frac{s}{s'}((x' - \Delta x')\sin \Delta\kappa + (y' - \Delta y')\cos \Delta\kappa) - \\
 &- s\lambda'(r_{12}L' + r_{22}M' + r_{32}N') \\
 0 &= 0 + s\lambda(r_{13}L + r_{23}M + r_{33}N) + 0 - -s\lambda'(r_{13}L' + r_{23}M' + r_{33}N')
 \end{aligned} \quad (5)$$

З останнього рівняння знаходимо λ :

$$\lambda = \frac{r_{13}L' + r_{23}M' + r_{33}N'}{r_{13}L + r_{23}M + r_{33}N} \lambda' \quad (6)$$

і підставляємо в інші рівняння співвідношення (5):

$$x = \left(\frac{s}{s'} \cos \Delta\kappa \right) x' + \left(-\frac{s}{s'} \sin \Delta\kappa \right) y' + \left(\Delta x - \frac{s}{s'} (\Delta x' \cos \Delta\kappa - \Delta y' \sin \Delta\kappa) \right) +$$

$$\begin{aligned} & \left(s(r_{11}L + r_{21}M + r_{31}N) \frac{r_{13}L' + r_{23}M' + r_{33}N'}{r_{13}L + r_{23}M + r_{33}N} - s(r_{11}L' + r_{21}M' + r_{31}N') \right) \lambda' \\ y = & \left(\frac{s}{s'} \sin \Delta\kappa \right) x' + \left(\frac{s}{s'} \cos \Delta\kappa \right) y' + \left(\Delta y - \frac{s}{s'} (\Delta x' \sin \Delta\kappa - \Delta y' \cos \Delta\kappa) \right) + \\ & \left(s(r_{12}L + r_{22}M + r_{32}N) \frac{r_{13}L' + r_{23}M' + r_{33}N'}{r_{13}L + r_{23}M + r_{33}N} - s(r_{12}L' + r_{22}M' + r_{32}N') \right) \lambda' \end{aligned} \quad (7)$$

Запишемо вираз (7) у вигляді системи рівнянь

$$\begin{aligned} x &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 \lambda' + c_4 \\ y &= c_5 x' + c_6 y' + c_7 \lambda' + c_8 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{де } c_1 &= \frac{s}{s'} \cos \Delta\kappa, \quad c_2 = -\frac{s}{s'} \sin \Delta\kappa, \quad c_4 = \left(\Delta x - \frac{s}{s'} (\Delta x' \cos \Delta\kappa - \Delta y' \sin \Delta\kappa) \right), \\ c_3 &= \left(s(r_{11}L + r_{21}M + r_{31}N) \frac{r_{13}L' + r_{23}M' + r_{33}N'}{r_{13}L + r_{23}M + r_{33}N} - s(r_{11}L' + r_{21}M' + r_{31}N') \right), \\ c_5 &= \frac{s}{s'} \sin \Delta\kappa, \quad c_6 = -\frac{s}{s'} \cos \Delta\kappa, \quad c_8 = \Delta y - \frac{s}{s'} (\Delta x' \sin \Delta\kappa - \Delta y' \cos \Delta\kappa), \\ c_7 &= s(r_{12}L + r_{22}M + r_{32}N) \frac{r_{13}L' + r_{23}M' + r_{33}N'}{r_{13}L + r_{23}M + r_{33}N} - s(r_{12}L' + r_{22}M' + r_{32}N'). \end{aligned}$$

З першого рівняння (8) виразимо λ' :

$$\lambda' = \frac{1}{c_3} x - \frac{c_1}{c_3} x' - \frac{c_2}{c_3} y' - \frac{c_4}{c_3}. \quad (9)$$

В результаті підстановки виразу (9) у друге рівняння співвідношення (8), отримаємо:

$$\begin{aligned} y &= c_5 x' + c_6 y' + c_7 \left(\frac{1}{c_3} x - \frac{c_1}{c_3} x' - \frac{c_2}{c_3} y' - \frac{c_4}{c_3} \right) + c_8 = \\ &= \left(\frac{c_1 c_7 - c_3 c_5}{c_3 c_6 - c_2 c_7} \right) x' + \left(\frac{-c_7}{c_3 c_6 - c_2 c_7} \right) x + \left(\frac{c_3}{c_3 c_6 - c_2 c_7} \right) y + \left(\frac{c_4 c_7 - c_3 c_8}{c_3 c_6 - c_2 c_7} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Вираз (10) може використовуватися для вирішення точкової відповідності між двома сценами і відновлення параметрів орієнтування сенсорів. Проведені тестування запропонованої моделі підтвердили її адекватність.

Висновки та перспективи подальших досліджень

Запропонована модель дозволяє користувачам використовувати величезний потенціал аерокосмічних стереозображень, особливо високого просторового розрізнення, без наявності точної фізичної моделі сенсорів та GCP.

Наші подальші дослідження будуть присвячені аналізу можливостей використання даних стереозйомки з космічних апаратів EROS, SPOT, ASTER для подальшої побудови цифрової моделі рельєфу (DEM).

ЛІТЕРАТУРА

1. Lee, C., Theiss, H.J., Bethel, J.S., Mikhail, E.M., 2000. Rigorous mathematical modeling of airborne pushbroom imaging systems. *Photogrammetric Engineering & Remote Sensing*, Vol. 66, No.4, pp. 385-392.
2. Гнатушенко В.В. Паралельно-проекційна модель сканерних аерокосмічних зображень // Матеріали Міжнародної наукової конф. “Математичні проблеми технічної механіки” / Дніпропетровськ: ДНВП “Системні технології”.- 2005. – С. 146-147.
3. Murai, S., Matsumoto, Y., Li, X., 1995. Stereoscopic imagery with an airborne 3-line scanner (TLS). In: *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, Vol.30, Part 5W1, pp.20-25.
4. Гнатушенко В.В. Альтернативні геометричні моделі одержання супутникових зображень високого розрізнення // Геометричне та комп’ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2004. – Вип. 8. – С. 48-53.
5. Гнатушенко В.В., Дмитрієва І.С. Моделі супутникових стереозображень високої просторової здатності // Геометричне та комп’ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2006. – Вип. 14. – С. 72-78.
6. Morgan M., Kim K., Jeong S., Habib A. Parallel projection modelling for linear array scanner scenes // XXth Congress of ISPRS, 12-23 July, 2004.

Получено 10.03.2006 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Введение. В работе рассмотрена задача компьютерного моделирования геометрического фазового перехода, как динамического процесса агрегации (формирование устойчивых структурных образований) в среде хаотически движущихся частиц. Объектом исследования являются растровые изображения металлоструктур, которые характеризуются контурами – границами структурных образований, полученными сечением плоскостью 3-мерных металлических материалов. Отличительной особенностью таких объектов является подобие фрагментов изображения (скейлинг), что рассматривается в работе как проявление фрактальных свойств [1].

Анализ публикаций. Следуя определению, данному в [2], будем считать, что фаза - это однородная часть термодинамической системы, то есть тело, физические и химические свойства которого во всех точках одинаковы и не зависят от количества вещества. При этом, фазы отделены одна от другой поверхностями раздела. Твердое состояние, жидкость, пар - привычные примеры разных фаз одного и того же вещества. Их физические характеристики, например плотность, существенно отличаются и определяют агрегатные состояния. Однако различные фазы одного и того же вещества совсем не обязательно существуют в разных агрегатных состояниях (графит и алмаз).

Геометрический фазовый переход связан с образованием структур, характеризующихся новыми топологическими свойствами, и не обусловлен изменением агрегатного состояния вещества [3]. При этом переход из состояния с одной топологической структурой к состоянию с другой топологической структурой предопределяет наличие промежуточной фазы – хаоса, предполагающей полное разрушение старой структуры, и не допускает ее трансформирование.

Вопросам формирования фрактальных структур в результате геометрических фазовых переходов посвящена многочисленная литература [3-6], в которой рассмотрена статистическая концепция. Таким образом, игнорируется основной тезис хаотической динамики: хаотическое движение порождается детерминированными нелинейными системами.

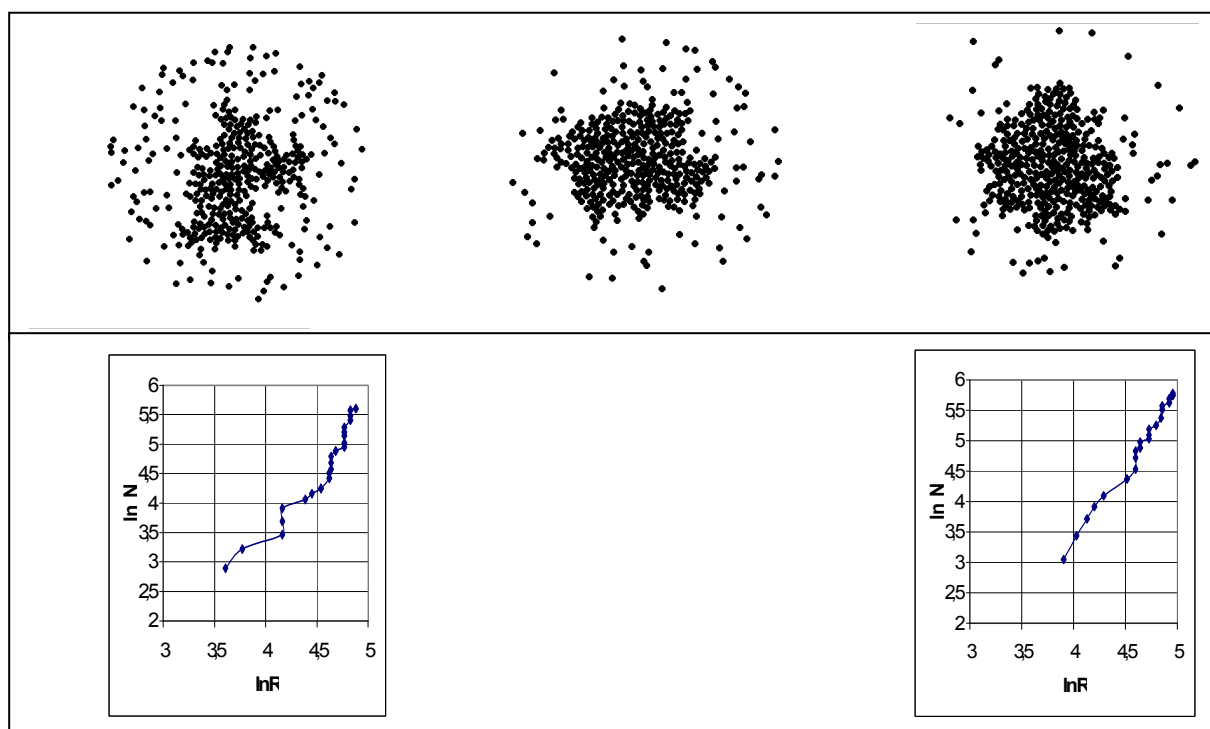
Постановка задачи. Настоящая работа посвящена вопросам моделирования динамики формирования устойчивых структурных образований в распределенных хаотических системах. Основной задачей работы является исследование на разработанной компьютерной модели влияния характеристик среды (условий) формирования на параметры кластерных образований, как результата геометрического фазового перехода.

© А.И.Михалев, А.И. Деревянко, 2006

Основная часть. Рассмотрен этап геометрического фазового перехода – процесс агрегация частиц совершающих хаотические колебания на плоскости.

В процессе диффузии, вызванной эффектом фазовой синхронизации элементов распределенной хаотической колебательной системы, синергетические переходные процессы приводят к образованию устойчивых пространственных структур, которые растут, оставаясь самоподобными. Такая модель формирования, например тонкой структуры наноматериалов, создает предпосылки для использования фрактально-кластерного анализа микроструктуры [4], основным свойством которых является пространственная (пространственно-временная) масштабная инвариантность [5].

В реализованной имитационной модели диссипативного процесса “слипания” частиц, их количество определяется до начала эксперимента. Для динамического фрактального кластера, при сохранении условий роста, фрактальная размерность остается неизменной во времени, однако в случае формирования кластеров в ограниченном пространстве с непроницаемыми границами, количество свободных частиц уменьшается, что приводит к многомодовой функции распределения массы кластеров.



а) $\chi=10$, $D=1.7299$; б) $\chi=40$, $D=2.3101$; в) $\chi=50$, $D=2.1794$;
г) $\chi=100$, $D=2.6062$.

Рисунок 1 – Влияние коэффициента диффузии χ на фрактальную размерность D кластера.

Заметное влияние на фрактальную размерность кластера, которая характеризует рыхлость его структуры, оказывает коэффициент диффузии свободных частиц (рис.1). Для фрактального кластера число частиц в кластере связано с его радиусом R соотношением [1]

$$N = \lambda \cdot (R/R_0)^D, \quad (1)$$

где λ - коэффициент, определяющий вид упаковки частиц в кластере, R_0 - радиус этих частиц (предполагается неизменным), D -размерность кластера.

Для описания топологических свойств фрактального множества F , вложенного в евклидово пространство E^n , введем геометрическую характеристику фрактала - индекс связности [8]

$$\theta = 2(d_\theta - 1), \quad (2)$$

где d_θ имеет смысл хаусдорфовой размерности геодезических линий на F .

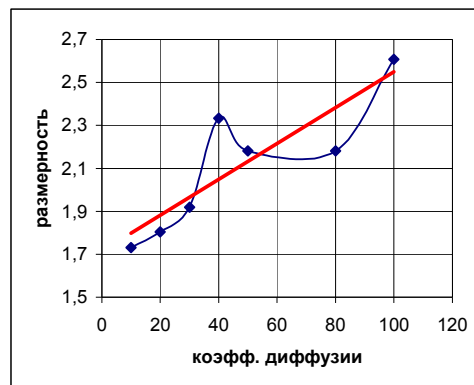


Рисунок 2 - Зависимость фрактальной размерности от коэффициента диффузии

Индекс связности θ равен нулю для гладких множеств, включая евклидовы пространства E^n при $n > 1$, т.к. в этом случае $d_\theta = 1$ то для таких множеств $\theta=0$.

Для фрактального множества F , вложенного в евклидово пространство E^n при $n \geq 2$, значение индекса θ определяется условием линейной связности F и топологией пустот, образуемых множеством F . При этом, если F не содержит внутренних пустот, то $\theta[F] = 0$, а при их наличии $\theta > 0$. Для F - фрактального линейно связного множества $d_\theta > 1$ и $\theta > 0$, а для не связного имеет место условие $d_\theta < 1$ и $\theta < 0$. Следовательно, знак θ выступает индикатором линейной связности (несвязности) фрактального множества F .

Определим значение хаусдорфовой размерности геодезических линий d_θ в следующем виде

$$d_{\theta}(\chi) = \frac{d D(\chi)}{d \chi} + 1. \quad (3)$$

где D фрактальная размерность множества F . При этом значение D является функцией параметра. Появление в выражении (3) слагаемого равного 1 обусловлено значением размерности нефрактальных линий на плоскости.

Фрактальная размерность, как известно [1], является интегральной характеристикой растрового изображения, обусловленной топологией изображения, поэтому любые изменения структуры изображения вызывают изменение значения D . При этом скачок значения фрактальной размерности связан с моментом возникновения особенностей топологии. Поэтому полученная зависимость (рис.2) демонстрирует разрывный характер фрактальной размерности при $\chi=40$, что соответствует $\theta=0$ и вызвано существованием в кластере «пустот» при $\chi<40$ и их исчезновением при $\chi>40$.

Для вычисления фрактальной размерности в разработанной программе выделения контуров использовался метод «Triangular prism surface area» [9], предназначенный для обработки растрового изображений в градациях серого. В процессе формирования нескольких кластеров (рис.3) между ними образуется граница за счет градиента плотности свободных частиц. Это служит иллюстрацией условий роста кластеров в локальной области при геометрическом фазовом переходе [7].

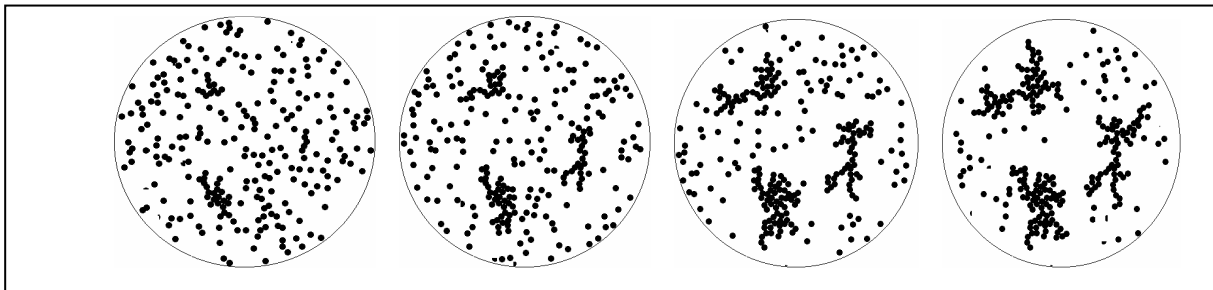


Рисунок 3 – Одновременный рост трех фрактальных кластеров

Следует отметить, что эта граница наблюдалась только на средней фазе моделирования роста кластеров и в дальнейшем разрушалась. Такая неустойчивость границы связана с отсутствием в алгоритме моделирования условия прекращения роста кластера, который продолжается до «приклеивания» всех свободных частиц к кластерам.

Выводы. Разработанная компьютерная модель роста кластеров в среде хаотически движущихся частиц позволила получить ряд эффектов, недоступных для наблюдения в случае использования модели ограниченной диффузной агрегации [6].

Предложенный метод определения индекса связности по значению фрактальной размерности позволяет численно оценить критическое значение параметра χ связанное с возникновением внутренних

пустот в кластере. Программная реализация алгоритма этого метода является частью программного комплекса по обработке растровых изображений микрошлифов металлических сплавов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федер Е. Фракталы. – М.: Наука, 1991. – 136 с.
2. Физическая энциклопедия. – М.: «Советская энциклопедия», 1980.
3. Кулак М.И. Фрактальная механика материалов. Мн.: Выш.шк. 2002. – 304 с.
4. Structure Formation Model for Hardening Process of Metals / Ju. N. Taran, A. I. Mikhalyov, A. I. Derevjanko, T. E. Vlasova, V. E. Khrychikov //5-th International Symposium of Croatian Metallurgical Society Materials and Metallurgy (SCMS'2002, June, 23-27, 2002). – Metallurgy. –Vol. 41. – N 3, 2002. - P. 226.
5. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. М.: Наука. 1991. – 136 с.
6. Meakin Paul. Fractals, scaling and growth far from equilibrium. Cambridge University Press,1998. - 663 p.
7. Баландин Г.Ф. Состояние и перспективы математической теории формирования отливки // Литейное производство. – 1980. -№1. - С. 6-9.
8. Зеленый М.Л., Милованов А.В. Фрактальная топология и странная кинетика . // УФН – 2004. – Т. 174, №8. - С. 809-852.
9. Фрактальная модель роста зерен при затвердевании сплавов / Таран Ю.Н., Михалев А.И., Хрычиков В.Е., Деревянко А.И. //Современные проблемы металлургии. Научные труды Нац. металл.академии Украины. - Том 3. - 2001. - С. 414-421.

Получено 21.03.2006 г.

УДК 004.9268:539:621

А.И. Михалев, В.В. Помулев

ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУР МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ КЛАСТЕРОВ

Введение

Благодаря ряду работ последнего десятилетия уже не вызывает сомнений оправданность и эффективность применения фрактальных моделей для описания металлоструктур и процессов их образования [1-6].

© А.И.Михалев, В.В. Помулев, 2006

Структурообразования (структуры) такие как: цементит, перлит и т.п. принято рассматривать как кластеры, а в качестве их параметров состояния, в рамках фрактального подхода, используют фрактальную размерность D_f или мультифрактальные спектры, вычисленные по «плоскому» изображению или по изображениям сечений [2-7].

В тоже время структура находится в трехмерном объеме расплава и может рассматриваться как пористый фрактальный кластер. В нем одновременно возможна двусторонняя перколяция (протекание). То есть образуются два вложенных друг в друга перколяционных кластера: один, состоящий из частиц кластера, другой - из материала среды, окружающей кластер [1].

Таким образом, применение теории перколяции к описанию и моделированию структур металлических материалов, при определенных ограничениях, позволит перейти к рассмотрению 3D структуры расплава [8]. Настоящая работа посвящена моделированию 3D строения структурообразований металлических материалов.

Пространственная перколяция

Теория перколяции имеет дело с эффектами распределения соединенных ячеек в случайной системе. Основная идея перколяции состоит в определении условий четкого перехода из связного (long-range connectivity) состояния в состояние с отсутствием дальней связности (или наоборот). Такой переход в системе наблюдается при достижении некоторой обобщенной критической плотности или при достижении *порога перколяции*.

Существуют два различных по природе, но схожих по поведению процесса:

так называемая *решеточная перколяция*, наблюдаемая в коммуникативных системах;

и *пространственная перколяция*, наблюдаемая, например, в металлических фильмах и пористых кластерах.

Простейший пример пространственной перколяции это d -мерная коробка (решетка) в которую случайным образом накинаны два типа шаров: проводящие и изоляторы. При этом ключевым параметром является величина, называемая критическим отношением объемов (critical volume fraction) [9]:

$$\phi_c(L, d) = v(L, d) \cdot p_c(L, d),$$

где $\nu(L, d)$ – коэффициент упаковки – зависит от типа решетки, $p_c(L, d)$ – порог перколяции (критическое отношение числа проводящих шаров к непроводящим, при котором система остается проводником рис.1). При этом, как показывают исследования [9], величина не зависит от типа решетки (L) т.е. является геометрическим инвариантом. Другой важной геометрической характеристикой является корреляционная длина:

$$l \sim r \cdot (p - p_c)^\nu, \quad (1)$$

где r – размер элементов (полиэдры, шары, эллипсоиды), ν – критическая экспонента [9], p – отношение числа проводящих элементов к не проводящим.

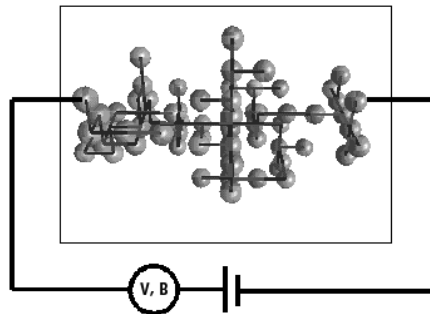


Рис. 1. Простой пример пространственной перколяции [12]

Величина (1) тесно связана с важным для кластера параметром – массой:

$$s \sim l^f, \quad (2)$$

где f – критическая экспонента.

Причем для случая $p=p_c$ всегда $f < D_E$. Более того, $(D_E - f)$ – это дефицит размерности или соразмерность Хаусдорфа, являющаяся связывающим звеном между теорией фракталов и перколяционными кластерами.

Связь количественных параметров перколяционной системы и фрактальной размерности дает возможность получить новые модели для описания структур металлов и процессов их структурообразования.

Например, если рассматривать в качестве элементов перколяционной системы полиэдры [10], а, кстати, именно полиэдрическую форму рассматривают в стереометрической металлографии в качестве

формы зерна [8], то можно получить модели подобные показанной на рис.2.а.

Другой пример, при моделировании пористого кластера элементы выгодно рассматривать в виде цилиндров, оконцованных полусферами (т.н. прутья) [11], что показано на (рис. 2.б).

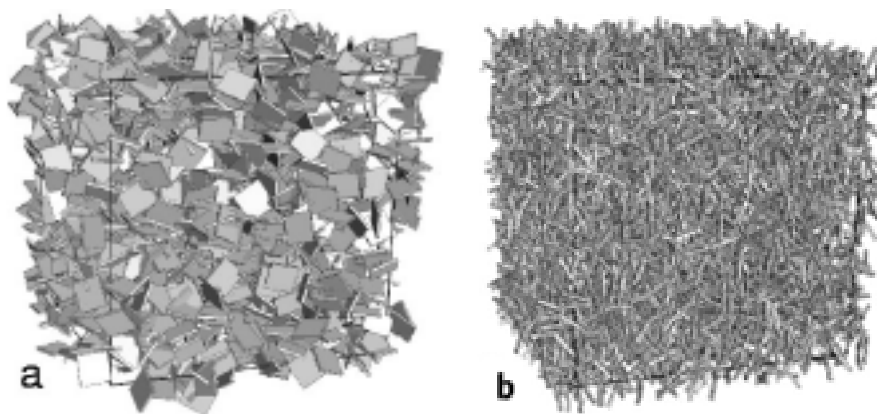


Рис.2. Примеры пространственных перколяционных кластеров: а) элемент полиэдр, б) - «прут»

Выводы

Наличие связи размерности Хаусдорфа (фрактальная размерность) и количественных параметров перколяционных кластеров дает возможность применять комбинированный подход, заключающийся в применении перколяции для моделирования 3D-структуры и аналитического вычисления технологических, механических, а также фрактальных характеристик материала с последующей проверкой последних на реальных объектах [5,6], используя связь фрактальных характеристик и параметров перколяционных кластеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов Д.В., Меркалова Н.В., Закирничная М.М. Физическая природа разрушения// <http://www.mahp.oil.ru>, 1999.
2. Синергетика и фракталы в материаловедении / В.С. Иванова, А.С. Баланкин, И.Ж. Бунин, А.А. Оксогоев - М.: Наука, 1994. - 383 с.
3. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. М.:Наука, 1991.- 136 с.
4. Бунин И.Ж., Колмаков А.Г., Встовский В.Г., Тереньтьев В.Ф. Концепция фрактала в материаловедении. // Материаловедение. - 1999. - № 2. - с. 19-26.
5. Михалев А.И., Дервянко А.И., Помулев В.В. Фрактальное оценивание зернистости металлоструктур // Системные технологии. Ре-

- гиональный межвузовский сборник научных работ. - Выпуск 2 (10) - Днепропетровск. 2000. с. 104-112.
6. Михалев А.И., Деревянко А.И., Помулев В.В. Применение методов фрактальной геометрии для анализа металлоструктур // Вестник ХГТУ. - 2001. № 3(12). - с. 178-180.
7. Встовский В.Г., Колмаков А.Г., Бунин И.Ж. Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов. - Москва-Ижевск: РХД, 2001. - 116 с.
8. Салтыков С. А. Стереометрическая металлография, М.: Металлургия-1970.
9. Wu J. Introduction to Percolation Theory // <http://socrates.berkeley.edu/~jqwu/>
10. Saar M.O., Manga M. Continuum percolation for randomly oriented soft-core prisms // PHYSICAL REVIEW E.-2002.-Vol.65.
11. Eda Z.N., Florian R., Brechet Y. Continuum percolation of isotropically oriented sticks in 3D revisited // Physical Review E 59.-1999.-pp. 3717-3720.
12. Nir Yefet 3D Visualization of percolation clusters // <http://phycomp.technion.ac.il/~comphy/nir.-1998>.

Получено 16.03.2006 г.

УДК 515.1

Д.Ф.Кучкарова

СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА РЕГУЛЯРНОЙ СЕТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Постановка проблемы. При решении многих прикладных задач возникает необходимость построения модели рельефа на заданной сети (регулярной, нерегулярной) исходных данных. Степень соответствия между построенной моделью и реальной поверхностью зависит от точности определения структурных линий рельефа, наиболее полно отражающих геоморфологию моделируемой поверхности. Структурные модели рельефа, известные также под названием полиэдральных, предполагают представление поверхности в виде системы многогранников, ребрами которых являются линии, соединяющие экстремальные точки на смежных горизонталях и структурных линиях рельефа.

© Д.Ф.Кучкарова, 2006

Традиционный подход основан на поиске подходящей поверхности, которую можно «натянуть» на заданный каркас точек с последующим определением ее особенностей и структурных линий. Однако при таком подходе зачастую происходит потеря первоначальной информации о поверхности. Разработка способов построения модели рельефа с максимальным сохранением первоначальной информации о поверхности – одна из актуальных прикладных задач.

Анализ последних исследований и публикаций. Разработаны различные способы дифференциации участков рельефа на основе построения прямоугольных матриц значений высот, либо матриц относительных их превышений – путем дифференцирования матрицы значений высот, визуализации последней, различного рода классификации матриц относительных превышений высот (по критериям Пирсона, Колмогорова – Смирнова и т.д.) [1,2,3]. Все они используют традиционный подход. Нерегулярные поверхности, к которым относятся и топографические, обладают рядом свойств, которые не учитываются при традиционном моделировании.

Цель статьи. На основе классификации типа точек топографической поверхности (ТП) рассмотреть способ идентификации структурных линий и особенностей поверхности.

Основная часть. Классификация типа точек и линий топографической поверхности рассмотрена в [4,5]. Пусть задана матрица высот некоторого участка рельефа:

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

где z_{ij} – значения высот исходных точек инцидентных некоторой ячейке. Для каждого элемента матрицы z_{ij} (неизменными остаются крайние правый и левый столбцы, верхняя и нижняя строки – граница области) вычисляются вторые частные и смешанная производные

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{ij} = \frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{\Delta x_1 \Delta x_2}; \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]_{ij} = \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{\Delta y_1 \Delta y_2}; \quad (2)$$

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right]_{ij} = \frac{z_{i+1,j+1} - z_{i+1,j-1} - z_{i-1,j+1} + z_{i-1,j-1}}{4(\Delta x_1 + \Delta x_2)(\Delta y_1 + \Delta y_2)};$$

Определяются гессиан A и квадратичная форма (Ax, y)

$$A = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{ij} & \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right]_{ij} \\ \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right]_{ij} & \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]_{ij} \end{bmatrix}$$

характер которых выявляет тип исследуемой вершины.

Возможны следующие случаи:

$$A = \begin{bmatrix} -\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{ij} & 0 \\ 0 & -\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]_{ij} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (Ax, y) = -\lambda'x^2 - \lambda''y^2 \quad (3)$$

Вершина z_{ij} является невырожденной критической точкой - вершиной типа α_1 (рис .1) первого порядка:

$$A = \begin{bmatrix} +\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{ij} & 0 \\ 0 & +\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]_{ij} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (Ax, y) = \lambda'x^2 + \lambda''y^2 \quad (4)$$

Вершина z_{ij} является невырожденной критической точкой типа α_2 (рис.2) первого порядка;

$$A = \begin{bmatrix} +\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{ij} & 0 \\ 0 & -\left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]_{ij} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (Ax, y) = \lambda'x^2 - \lambda''y^2 \quad (5)$$

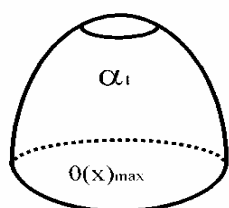


Рис.1

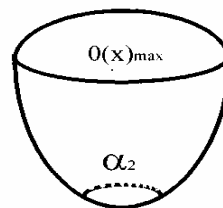


Рис.2

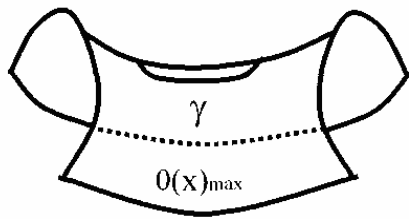


Рис. 3

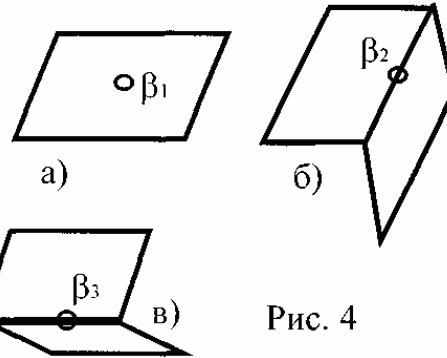


Рис. 4

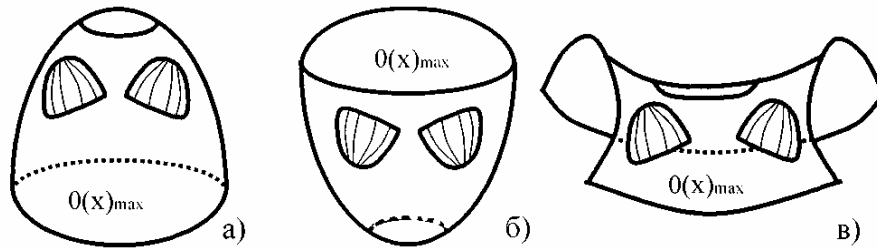


Рис. 5

Вершина z_{ij} является невырожденной критической точкой - вершиной типа γ (рис.3) первого порядка.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (Ax, y) = 0 \quad (6)$$

Вершина z_{ij} является вырожденной критической точкой — вершиной типа $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (рис.4)

$$A = \begin{vmatrix} \pm \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{ij} & \pm \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right]_{ij} \\ \pm \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right]_{ij} & \pm \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right]_{ij} \end{vmatrix} \neq 0, (Ax, y) = \pm \lambda' x^2 \pm \lambda'' y^2 \pm \lambda''' yx \quad (7)$$

Вершина z_{ij} является некритической точкой типа $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ - с комплексом точек второго порядка, включённых в максимальную окрестность вершины z_{ij} (рис.5). В реальных условиях работы с вещественными переменными на ЭВМ малые значения производных $\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial y_i} \right]_{i=1,2, j=1,2}$ близкие к нулю идентифицируются как нули.

В результате вычислений матрица (1) преобразуется в матрицу:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots z_{1n} \\ z_{21} & \alpha_i(w_i^{j\pm}) & \dots z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_{m-1,1} & \beta_i(w_i^{j\pm}) & \dots z_{m-1,n} \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots z_{mn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Пусть задана матрица [A] значений высот некоторого участка рельефа:

$$[A] = \begin{bmatrix} 13.91 & 13.90 & 13.85 & 13.84 & 13.95 & 13.90 & 13.81 & 13.80 & 13.82 & 13.80 \\ 13.81 & 13.90 & 13.80 & 13.90 & 13.80 & 13.70 & 13.80 & 13.90 & 13.90 & 13.81 \\ 13.81 & 13.80 & 13.80 & 13.80 & 13.70 & 13.80 & 13.90 & 13.90 & 13.90 & 13.82 \\ 13.91 & 13.85 & 13.85 & 13.75 & 13.74 & 13.75 & 13.72 & 13.85 & 13.80 & 13.75 \\ 13.91 & 13.82 & 13.75 & 13.85 & 13.70 & 13.75 & 13.80 & 13.85 & 13.74 & 13.73 \\ 13.85 & 13.85 & 13.85 & 13.74 & 13.75 & 13.65 & 13.60 & 13.74 & 13.75 & 13.61 \\ 13.85 & 13.75 & 13.60 & 13.65 & 13.52 & 13.55 & 13.75 & 13.70 & 13.60 & 13.60 \\ 13.81 & 13.75 & 13.64 & 13.52 & 13.52 & 13.54 & 13.42 & 13.65 & 13.52 & 13.53 \\ 13.82 & 13.74 & 13.50 & 13.50 & 13.40 & 13.54 & 13.40 & 13.50 & 13.54 & 13.41 \\ 13.82 & 13.70 & 13.55 & 13.54 & 13.41 & 13.43 & 13.43 & 13.31 & 13.31 & 13.50 \end{bmatrix} \quad (9)$$

В результате дифференцирования матрицы и вычисления гессиа-на в каждой точке матрица [A] преобразуется к виду

$$[A'] = \begin{bmatrix} 13.91 & 13.90 & 13.85 & 13.84 & 13.95 & 13.90 & 13.81 & 13.80 & 13.82 & 13.80 \\ 13.81 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & 13.81 \\ 13.81 & \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & 13.82 \\ 13.91 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & 13.75 \\ 13.91 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 & 13.73 \\ 13.85 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & 13.61 \\ 13.85 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_1 & 13.60 \\ 13.81 & \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & 13.53 \\ 13.82 & \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & \beta_1 & 13.41 \\ 13.82 & 13.70 & 13.55 & 13.54 & 13.41 & 13.43 & 13.43 & 13.31 & 13.31 & 13.50 \end{bmatrix}$$

Анализ матрицы [A'] с привлечением программ «Кластер» позволяет выявить структурные линии

$[a_{26}, a_{35}, a_{45}, a_{55}, a_{65}, a_{66}, a_{76}, a_{86}, a_{86}, a_{87}, a_{97}, a_{10.0}, a_{10.8}, a_{10.9}]$ Аппликаты точек, инцидентных структурным линиям и близлежащих точек анализируются и представляются в виде: $|x^2 - y^2 - 2xy| + |x^2 + y^2 - 2xy|$

На рис. 6 представлена структурная модель поверхности.

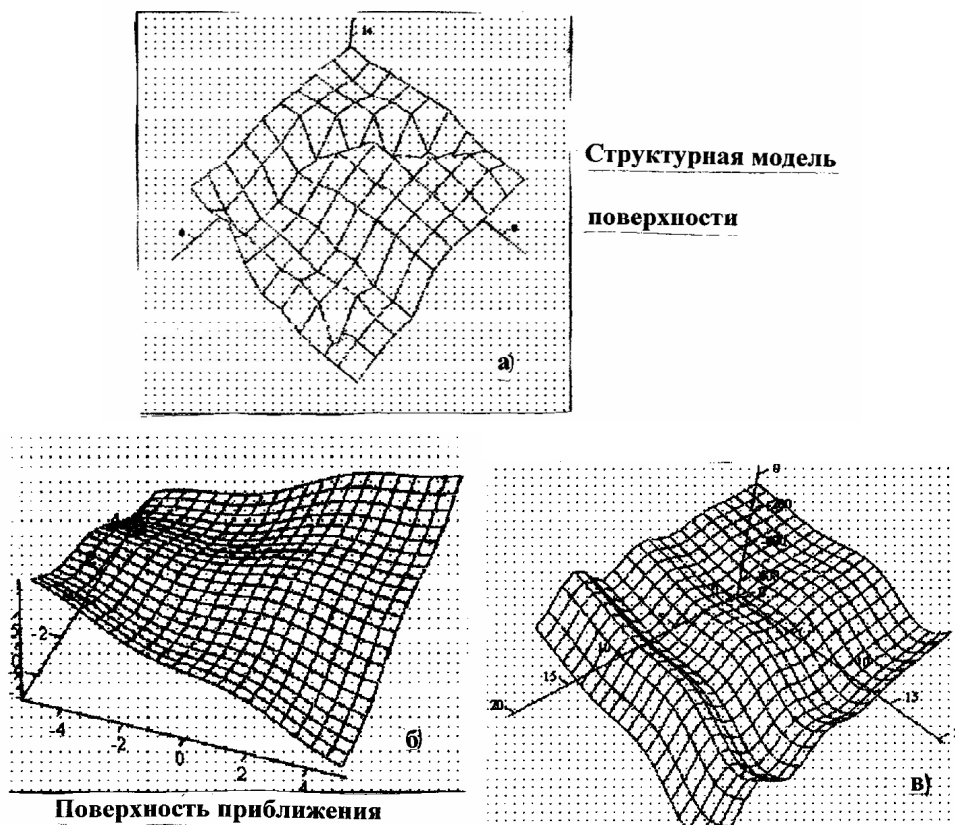


Рис. 6

Выводы. Предложенный способ построения структурных моделей ТП позволяет моделировать участки рельефа с минимальными потерями первоначальной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maguire, D.I., Coodchild, M.F. and Rhind, D.W., Geographical Information Systems: Principles and Applications, Longmann Scientific and Technical, England, 1991
2. Burrough, P.A., Principles of Geographical Information Systems for Land Resource Assesment, Cearendon Press, Oxford, 1998
3. Panel Discussion: The future of DTM – Photogrammetric Engineering and Remote Sensing., 1998, vol, 44 № 12
4. Михайленко В.Е., Кучкарова Д.Ф. Геометричні моделі топографічних поверхонь в задачах проектування – // Прикладная геометрия и инженерная графика, Будівельник, Киев, вып.65, 1999, с.53-58.
5. Кучкарова Д.Ф. Алгоритмы определения кластера структурных линий топографической поверхности, - // Тезисы международной научно – практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования», Донецк, 2000, с.130-132.

Получено 17.03.2006 г.

А.Ф.Кириченко, А.И. Павлов, В.В.Немцев

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРИВЕДЕННОГО РАДИУСА КРИВИЗНЫ В ЗАЦЕПЛЕНИИ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

Постановка проблемы. Значение приведенного радиуса кривизны в зацеплении зубчатых передач является наиболее важным параметром, определяющим величину контактных напряжений. Графическое представление приведенного радиуса дает наглядное изображение для сравнительного анализа различных зацеплений. В литературе по теории зацеплений этот вопрос не рассматривается.

Таким образом, **цель** работы – графическое изображение приведенного радиуса кривизны в зацеплении. Контакт в полюсе передачи является наиболее важным вопросом, поэтому все **исследования** проведем для контакта в полюсе передачи. Для графического изображения приведенного радиуса кривизны необходимо получить аналитические выражения, поэтому рассмотрим построение Бобилье для разных систем зацепления.

На рис.1 выполнено построение Бобилье для эвольвентного зацепления с углом зацепления α и передаточным отношением u и для эволютного зацепления [1-4] с теми же параметрами. Поэтому величина коэффициента разновидности определяется проведением луча WD из полюса зацепления под углом α к межосевой линии.

Радиусы кривизн в эвольвентном зацеплении для контакта в полюсе передачи равны:

$$\begin{aligned}C_1 W &= ur \sin \alpha, \\C_2 W &= r \sin \alpha,\end{aligned}\tag{1}$$

где r – радиус делительной окружности шестерни $WO_1 = r$. Следовательно, приведенный радиус кривизны эвольвентного зацепления в полюсе передачи

$$\rho_{np} = \frac{ur \sin \alpha}{u + 1},\tag{2}$$

© А.Ф.Кириченко, А.И. Павлов, В.В.Немцев, 2006

что отражается отрезком WM, построенным следующим образом. На луче C_2O_1 откладывается отрезок $C_2G=C_2W$, затем C_1 соединяем с точкой G, и точка M пересечения C_1G с WD определяет приведенный радиус WM. Доказать это просто, если рассмотреть подобные треугольники C_2GC_1 и WMC_1 :

$$\frac{WM}{C_2G} = \frac{C_1W}{C_1C_2} \quad (3)$$

Для построения приведенного радиуса кривизны эволютного зацепления необходимо из мгновенного центра D провести линию $DF \parallel C_1C_2$ до пересечения с межосевой линией O_1O_2 . Доказательство этого факта: приведенный радиус кривизны эволютного зацепления при выпукло-вогнутом контакте определяется по формуле

$$\rho_{np} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}, \quad (4)$$

где

$$\rho_1 = C_1W; \quad (5)$$

$$\rho_3 = \frac{urk \sin \alpha}{ur \sin \alpha \cos \alpha + k}. \quad (6)$$

Формула (6) получена из рассмотрения подобных треугольников O_2WC_3 и O_2FD , для которых записана пропорция

$$\frac{O_2W}{O_2W+WF} = \frac{WC_3}{FD}. \quad (7)$$

Величины сторон треугольников определяются из формул:

$$O_2W = ur; \quad (8)$$

$$WF = kctg \alpha + ktg \alpha = k/\sin \alpha \cos \alpha; \quad (9)$$

$$WC_3 = \rho_3; \quad (10)$$

$$FD = k/\cos \alpha. \quad (11)$$

После подстановки в (4) значений радиусов кривизны (2) и (10), получим, что

$$\rho_{np} = \frac{k}{\cos \alpha}, \quad (13)$$

следовательно, $FD = \rho_{пр}$. Случай по отношению к эволютному зацеплению, рассмотренный выше, является частным. В общем случае приведенный радиус кривизны в зацеплении будет отрезок на линии общей нормали в точке контакта (рис.2), построенный следующим образом. Из центра вращения O_1 проводим луч параллельно линии общей нормали C_1C_2 до пересечения с лучом WD . Далее соединяем точку D с центром O_2 . Точка пересечения C_3 дает отрезок C_3W , который и является величиной приведенного радиуса кривизны в зацеплении.

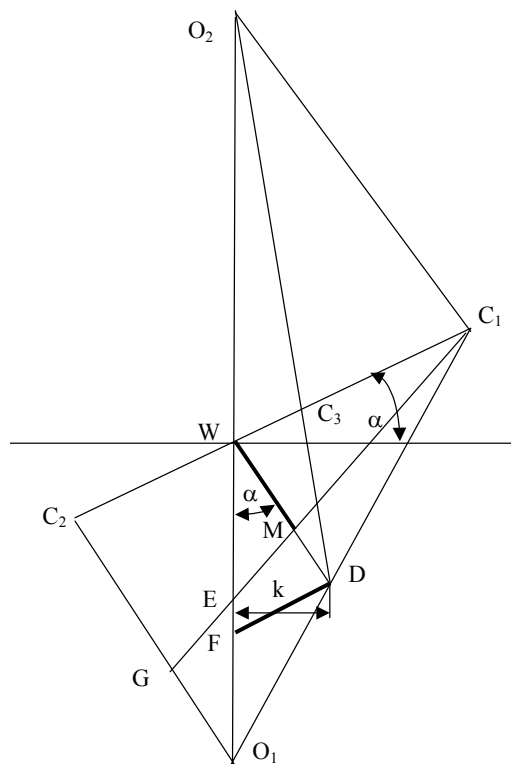


Рисунок 1. Построение Бобилье для частных случаев

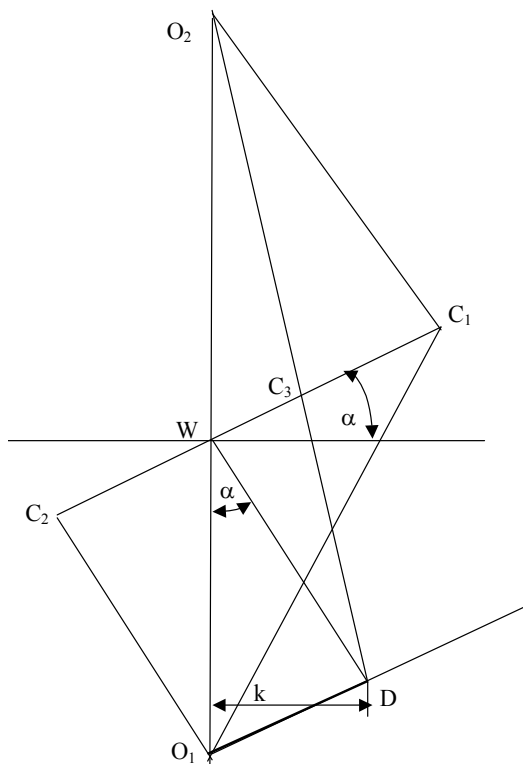


Рисунок 2. Построение Бобилье для эволютного зацепления

Анализируя полученные выражения для приведенных радиусов кривизны в полюсе передачи отметим, что для эвольвентного зацепления $\rho_{пр}$ зависит от параметров передачи: передаточного отношения u , радиуса делительной окружности r и угла зацепления. Не зависит $\rho_{пр}$ от значения коэффициента разновидности k . Для эволютного зацепления также приведенный радиус кривизны не зависит от значения коэффициента разновидности. Предельное значение коэффициента разновидности $k = 0,5r \sin 2\alpha$, а приведенного радиуса кривизны $\rho_{пр} = r \sin \alpha$.

В общем случае построение приведенного радиуса кривизны в зубчатом зацеплении можно выполнить следующим образом. Пусть имеется нормаль в зацеплении с центрами кривизны C_1 и C_2 и точкой контакта K (рис.3). Центры кривизны в данном случае расположены по разные стороны от точки контакта. Это свидетельствует о контактировании двух выпуклых поверхностей. Из точки C_2 проводим луч под произвольным углом и откладываем на нем величину от точки K

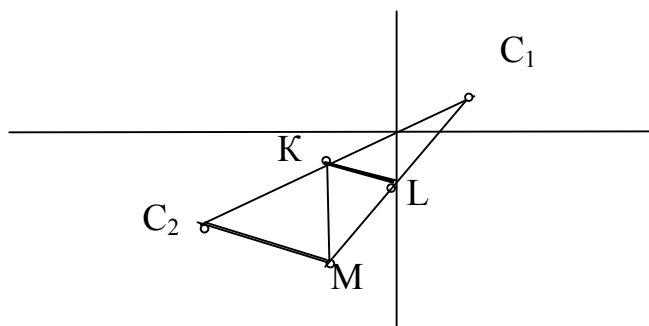


Рисунок 3. Приведенный радиус кривизны в зацеплении с двояковыпуклым контактом

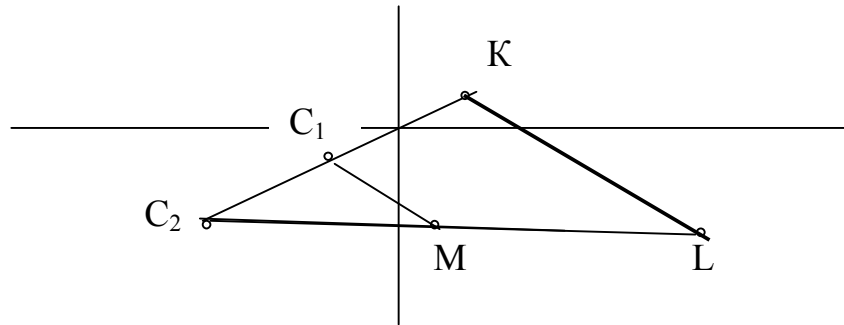
$C_2M = C_2K$. Соединяем точку M со вторым центром C_1 , а из точки контакта проводим луч KL параллельно C_2M до пересечения с C_1M . Точка пересечения L дает отрезок KL , равный приведенному радиусу кривизны.

В случае выпукло-вогнутого контакта (рис.4) аналогично из точки C_2 проводим луч под произвольным углом и откладываем от точки C_1 на нем величину $C_1M = C_1K$. Из точки K проводим KL параллельно C_1M до пересечения с продолжением C_2M . Точка пересечения L дает отрезок KL , равный приведенному радиусу кривизны.

Доказательство справедливости построений видна из формулы, записанной на основании подобия треугольников:

$$\frac{\rho_{np}}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{\Sigma \rho} \quad ,$$

полученной на основании определения приведенного радиуса ρ_{np} (4). Под значением $\Sigma \rho$ надо понимать сумму абсолютных значений радиусов кривизн контактирующих поверхностей, при этом в случае выпукло-вогнутого контакта эта сумма приобретает вид разности.



Из приведенных рисунков видно, насколько больше величина приведенного радиуса кривизны в случае выпукло-вогнутого контакта, а также влияние полюсного расстояния на его величину.

Выводы.

1. Графическое определение значения приведенного радиуса кривизны позволяет анализировать его изменение от вида контакта и параметров передачи.

2. В полюсе передачи любого вида зацепления приведенный радиус кривизны зависит от угла зацепления, числа зубьев передачи и передаточного отношения и не зависит от коэффициента разновидно-сти.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов А. И. Особенности построения зацеплений с выпукло-вогнутым контактом // Вестник Харьковского гос. политехн. ун-та.- 1999, вып. 50.-С. 135-141.

2. Павлов А.И. Зацепления с выпукло-вогнутым контактом для силовых зубчатых передач //Вестник ХГПУ. - Харьков. - 2000, вып. 68.-С. 49-53.

3. Кириченко А.Ф., Матюшенко Н.В., Павлов А.И. Аналитическое описание эволютного зацепления. // Вестник Харьковского национального технического университета “ХПИ”. - Вып.9, т. 2.- Харьков.-2003.-С.23-26.

4. Кириченко А.Ф., Павлов А.И. Подальший розвиток теорії зачеплень для побудови силових зубчастих передач //”Машинознавство”, Львів, N10, 2003.- С.34-36.

Получено 17.03.2006 г.

ОСНОВНІ РИСИ НОВОГО НАПРЯМКУ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ – ЧИСЛЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ТРИВЕКТОРІВ

Постановка проблеми. Практика висуває перед прикладними науками все більш складні задачі, пов'язані з моделюванням явищ і процесів, пред'являючи при цьому до моделей і моделюючого апарату цілу низку вимог, наприклад, диференціального, позиційного, геометричного характеру. Таким чином, існує наукова проблема побудови більш повних, точних і адекватних моделей, що описують явища і процеси складної, векторної і скалярної природи, та відповідного до них моделюючого апарату, який дозволить враховувати всі різновиди властивостей досліджуваного явища або процесу. Загальна постановка задачі моделювання векторних або скалярних полів із заданими диференціально-геометричними властивостями складається в побудові такого поля, яке у деякій області задовольняє заданим диференціальним умовам, а на краю цієї області має визначені диференціальні і позиційні властивості. Розробка методів моделювання таких полів важлива для теорії і практики, тому, що дозволяє одержати розв'язки багатьох прикладних і наукових задач, таких як задачі теорії пружності, теорії теплопровідності, теорії коливань та ін. Складність поставленої задачі полягає в необхідності врахувати при побудові геометричної моделі диференціальні умови, які відображають фізику процесу, геометричну форму області, у якій досліджується процес, розмаїття крайових умов на краю цієї області.

Аналіз останніх досліджень. Аналіз відомих методів у розв'язанні задач моделювання векторних і скалярних полів із заданими диференціально-позиційними характеристиками [1]-[3] дозволяє зробити наступні висновки:

– існуючі методи моделювання полів із заданими диференціально-позиційними властивостями виявляються неефективними при розв'язанні задач на областях складної конфігурації і при складних комбінованих диференціально-позиційних умовах;

- не розроблені теоретичні основи проблеми геометричного моделювання векторних і скалярних полів із заданими диференціальними умовами та відсутній відповідний геометричний апарат для розв’язання цієї проблеми;

- відсутній апарат, на підставі якого можна будувати аналітичні векторні тривимірні функції векторного аргументу;

- відсутня теоретична база для моделювання процесів і явищ векторно-скалярної природи.

На наш погляд це пояснюється відсутністю відповідного моделюючого геометричного апарата, в рамках якого було б можливо враховувати складні диференціальні і геометричні умови, і який би забезпечив спільні підходи до моделювання процесів і скалярної, і векторної природи.

Ціль статті. Сформулювати основні риси і принципи нового напрямку геометричного моделювання – числення узагальнених три векторів (О-тривекторів).

Основна частина. Перераховані причини визначають необхідність розробки нового числення, яке складає основи геометричного моделювання скалярних, векторних і векторно-скалярних полів із заданими диференціальними і позиційними властивостями на базі апарата аналітичних узагальнено-тривекторних функцій [4]-[6].

Основні риси пропонованого числення:

- числення відкриває шляхи розв’язання задач моделювання полів із заданими диференціально-позиційними властивостями різних класів;

- теоретичні основи нового числення складають базу для розробки нових методів моделювання скалярних, векторних і векторно-скалярних полів і є універсальними у відношенні геометричних вимог до моделей;

- методи, які розроблені на базі числення мають просте алгоритмічне рішення, програмне забезпечення яких складає єдину програмну оболонку, яка має модульну структуру, що дозволяє нарощувати її повними складовими.

Методологічні принципи числення:

- суть числення складає геометричний апарат, в основі якого лежать нові геометричні об’єкти узагальнені тривектори (О-тривектори) і система операцій над ними;

– предметною областю числення є векторні, скалярні і векторно-скалярні поля, що задовольняють заданим диференціальним і геометричним вимогам.

Зміст числення складає новий апарат О-тривекторних аналітичних функцій, який має повноту і несуперечність базових визначень операцій. **Основою методу** моделювання на базі О-тривекторного числення є загальний алгоритм урахування диференціальних умов задачі за допомогою побудови набору базисних О-тривекторних функцій і урахування позиційних умов задачі, завдяки конструюванню спеціальної метрики у просторі розв'язків. **Застосування методу** дозволяє одержати розв'язок з припустимою похибкою. Обчислювальна реалізація методу орієнтована на нові можливості сучасних комп'ютерних технологій і забезпечує задану точність.

Особливості нового числення:

– змістовна особливість полягає в тому, що на базі нового геометричного апарата О-тривекторів будується аналіз аналітичних функцій О-тривекторного аргументу, що дає можливість моделювати векторні, скалярні і векторно-скалярні поля із заданими диференціальними властивостями у вигляді апроксимуючого О-тривекторного полінома. Конструювання спеціальної метрики у просторі функцій-розв'язків дозволяє моделювати векторні, скалярні і векторно-скалярні поля з заданими позиційними властивостями на областях складної конфігурації;

– обчислювальна особливість полягає в тім, що програмна реалізація методу орієнтована на нові можливості сучасних комп'ютерних технологій;

– алгоритмічна особливість методу складається в універсальності і спільності алгоритмів для розв'язання задач різних класів, при моделюванні, як поверхонь, так і векторних, і векторно-скалярних полів;

– практична особливість складається в можливості побудови геометричних моделей реальних процесів і явищ векторної, скалярної і векторно-скалярної природи.

Висновки. Сформульовано основні риси нового моделюючого апарата на базі спеціально побудованого узагальнено-тривекторного числення. В рамках побудованого числення О-тривекторів розроблені нові методи моделювання векторних і скалярних полів у виді апроксимуючих векторних або скалярних О-тривекторних поліномів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля. - М.: Физматгиз, 1962. - 132 с.
2. Кантор И.А., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. - М.: Наука, 1973. - 98 с.
3. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1970. - 287 с.
4. Найдиш В.М., Малкіна В.М. Побудова алгебри тривекторів. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 2001. - Вип.68. - С.11-15.
5. Малкіна В.М. Побудова кільця узагальнених три векторів // Праці Таврійської держ. агротех. академії. - Мелітополь: ТДАТА, 2001. - Том 13. - Вип.4. - С. 91-94.
6. Малкіна В.М. Дослідження аналітичних функцій узагальнено-тривекторного аргументу // Праці Таврійської Держ. агротех. академії. - Мелітополь: ТДАТА, 2002. - Том 16. - Вип.4. - С. 69-72.

Получено 11.03.2006 г.

УДК 514.182.7:519.651

В.М.Найдиш, В.В.Спірінцев

**АДАПТИВНА СХЕМА ЛОКАЛЬНОГО ЗГУЩЕННЯ
ТОЧКОВОГО РЯДУ З ЗАДАНИМИ У ВУЗЛАХ
ДОТИЧНИМИ**

Постановка проблеми. Проблема полягає в розробці нової схеми локального згущення точкового ряду з заданими у вузлах дотичними при умові відсутності осциляції.

Аналіз останніх досліджень. В цьому напрямку Верещага В.М. [1, 2] запропонував дві схеми (мультиплікативна, адитивна) розрахунку згущення та отримав результати по одночасному формуванню дискретних неосцилюючих графіків y_i та y'_i . Дані схеми гарантують відсутність осциляції і пропонують проектувальнику максимальні можливості в корекції та пошуку оптимального розв'язку. Однак, ці схеми застосовуються тільки для однозначних ДПК і мають великі похибки, при положеннях дотичних, близьких до вертикальних. Тому вважаємо за необхідне продовження досліджень в цьому напрямку.

© В.М.Найдиш, В.В.Спірінцев, 2006

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є отримання основного алгоритму, за яким можна розв'язати задачу дискретної інтерполяції ДПК довільної конфігурації за розробленою адаптивною схемою.

Основна частина. Основною особливістю даної схеми є те, що процес згущення здійснюється в одному напрямку (від меншого кута до більшого), оскільки точка згущення повинна знаходитися на лінії зв'язку нижче нижньої точки перетину дотичних з заданою лінією зв'язку. Інакше можлива поява осциляції. Розглянемо локальне згущення ділянки $(i, i+1)$ ДПК (рис.1), де у вузлах i і $i+1$ задані дотичні y'_i і y'_{i+1} , відповідно. Розіб'ємо ділянку $(i, i+1)$, довжина якої l , на n частин, що утворюють рівномірну сітку з кроком $\bar{h}$, і на цій сітці побудуємо точки згущення.

Розв'язання поставленої задачі пропонується здійснити наступним чином.

1) Порівнюємо кути α_{i+1} і α_i (рис.1), утворені дотичними y'_{i+1} і y'_i у вузлах $i+1$ і i , відповідно, з вихідною ланкою $(i, i+1)$. Виявляємо менший з них. З боку меншого кута, згідно з рис.1 – α_{i+1} , проводимо промінь α_4 під кутом $\alpha_4 = \arctg(p_4 \cdot \tg \alpha_{i+1})$ до вихідної ланки $(i, i+1)$, де p_4 – деякий коефіцієнт, що залежить від n . В результаті перетину даного променя α_4 з лінією зв'язку $\bar{x} = 3$ одержуємо точку згущення т.3, ордината якої: $\bar{y}_3 = \bar{h} \cdot \tg \alpha_4$. Далі з'єднуємо отриману точку згущення т.3 з вузловою т.0 хордою 0-3, що утворює з вихідною ланкою $(i, i+1)$ кут φ_3 : $\varphi_3 = \arctg\left(\frac{\bar{y}_3}{l - \bar{h}}\right)$; зв'язку $\bar{x} = 3$ одержуємо точку згущення т.3, ордината якої: $\bar{y}_3 = \bar{h} \cdot \tg \alpha_4$. Потім з'єднуємо отриману точку згущення т.3 з вузловою т.0 хордою 0-3, що утворює з вихідною ланкою $(i, i+1)$ кут φ_3 : $\varphi_3 = \arctg\left(\frac{\bar{y}_3}{l - \bar{h}}\right)$;

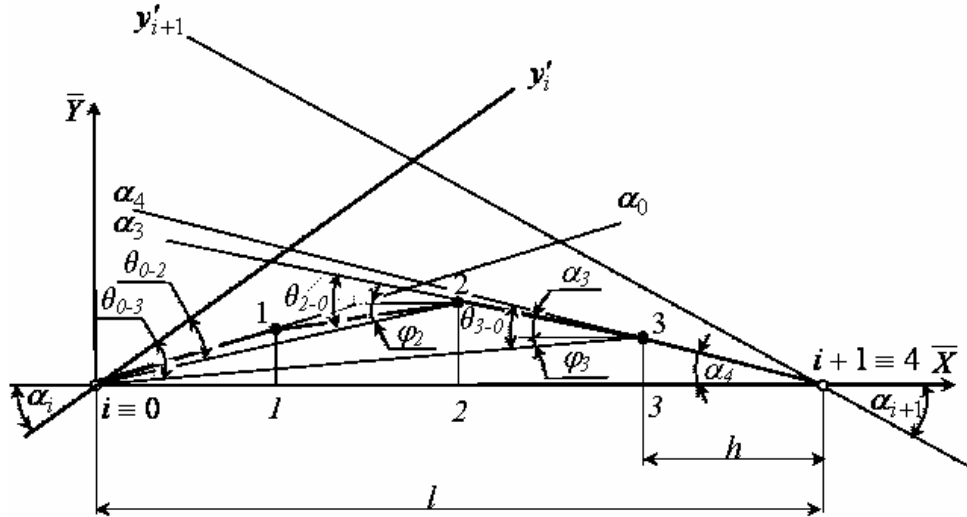


Рис.1. Схема адаптивного згущення при заданих у вузлах дотичних (схема 1)

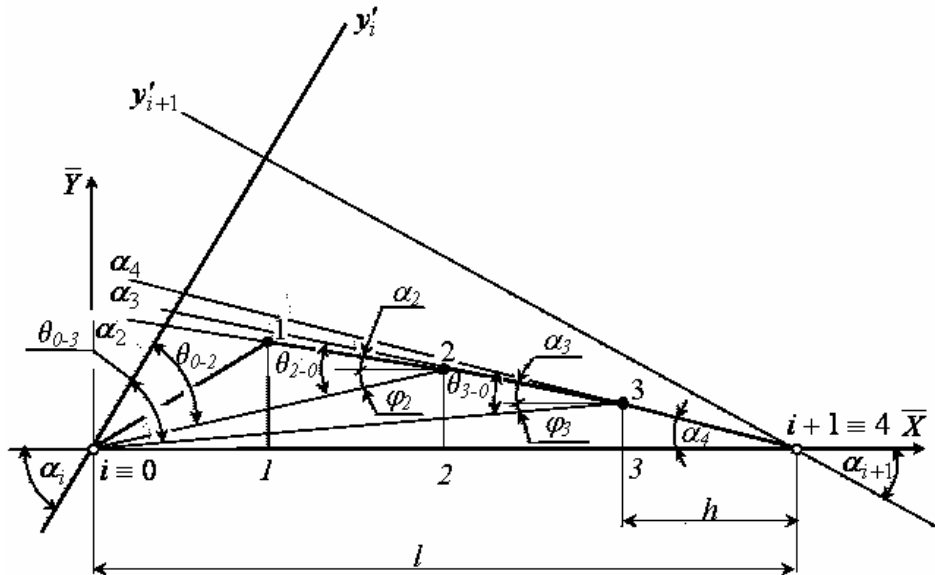


Рис. 2. Схема адаптивного згущення (схема 2)

2) Порівнюємо отримані кути θ_{3-0} і θ_{0-3} , де θ_{3-0} – кут, що утворює хорда 0-3 і промінь α_4 : $\theta_{3-0} = \alpha_4 + \varphi_3$; θ_{0-3} – кут, що утворює хорда 0-3 і дотична y_i' , $\theta_{0-3} = \alpha_i - \varphi_3$. В результаті порівняння даних кутів θ_{3-0} і θ_{0-3} виявляємо менший з них. В нашому випадку, згідно з рис.1 $\theta_{3-0} < \theta_{0-3}$. Продовжуємо згущувати з боку меншого кута θ_{3-0} згідно з пунктом 1): проводимо промінь α_3 з отриманої раніше точки згущення т.3 під кутом $\alpha_3 = \arctg(p_3 \cdot \tg \alpha_{i+1})$ до вихідної ланки $(i, i+1)$, де p_3 – деякий коефіцієнт. В результаті перетину даного променя α_3 з

лінією зв'язку $\bar{x} = 2$ одержуємо точку згущення т.2. З'єднуємо отриману точку згущення т.2 з вузловою т.0 хордою 0-2, що утворює з вихідною ланкою $(i, i+1)$ кут φ_2 : $\varphi_2 = \arctg\left(\frac{\bar{y}_2}{(l-2\bar{h})}\right)$, де $\bar{y}_2 = y_3 + \bar{h} \cdot \tg \alpha_3$ – ордината точки згущення т.2. Повертаємося до початку пункту 2), тобто порівнюємо отримані кути θ_{2-0} і θ_{0-2} , де θ_{2-0} – кут, що утворює хорда 0-2 і промінь α_3 , $\theta_{2-0} = \alpha_3 + \varphi_2$; θ_{0-2} – кут утворений між хордою 0-2 і дотичною y'_i , $\theta_{0-2} = \alpha_i - \varphi_2$. Виявляємо менший з них. В результаті одержуємо дві схеми: згідно з рис.1 $\theta_{0-2} < \theta_{2-0}$ – схема 1; згідно з рис.2 $\theta_{0-2} > \theta_{2-0}$ – схема 2.

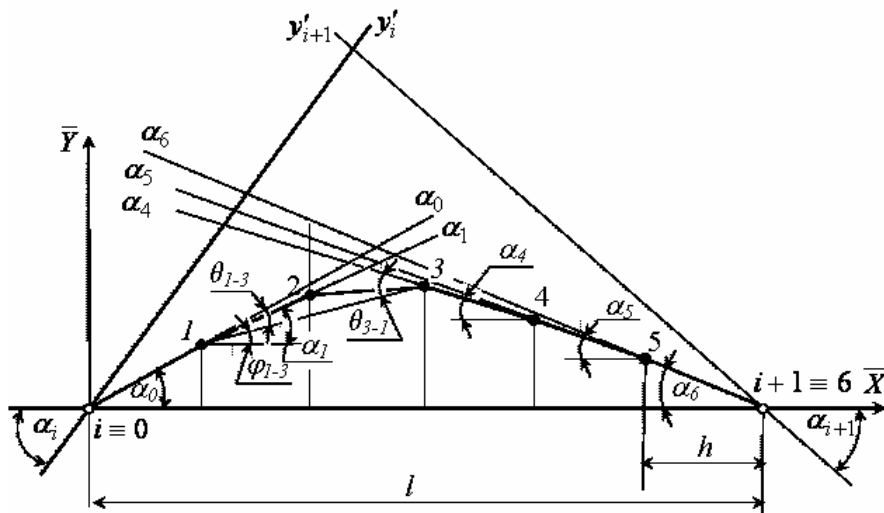


Рис. 3. Схема адаптивного згущення (схема 3)

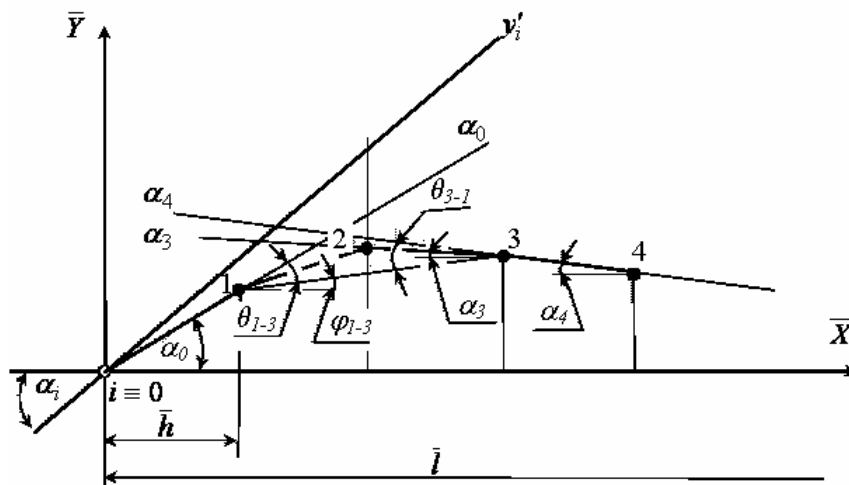


Рис. 4. Фрагмент деякої ділянки (схема 4)

Виходячи з основної особливості, відзначеної раніше, даної адаптивної схеми, як в першому випадку (рис.1), так і в другому (рис.2) процес згущення продовжується з боку меншого кута: $\theta_{0.2}$ – рис.1, $\theta_{2.0}$ – рис.2. В першому випадку (рис.1) проводимо промінь α_0 з вузлової точки i під кутом $\alpha_0 = \arctg(p_0 \cdot \tg \alpha_i)$ до вихідної ланки, де $p_0 = p_4$ - деякий коефіцієнт. В результаті перетину даного променя α_0 з лінією зв'язку $\bar{x} = 1$ одержуємо точку згущення т.1, ордината якої $\bar{y}_1 = \bar{h} \cdot \tg \alpha_0$. В другому випадку (рис.2) проводимо промінь α_2 з отриманої точки згущення т.2 під кутом $\alpha_2 = \arctg(p_2 \cdot \tg \alpha_{i+1})$ до вихідної ланки $(i, i+1)$, де p_2 - деякий коефіцієнт. В результаті перетину даного променя α_2 з лінією зв'язку $\bar{x} = 1$ одержуємо точку згущення т.1, ордината якої $\bar{y}_1 = y_2 + \bar{h} \cdot \tg \alpha_2$.

Зауважимо, що довільну ланку отриманої СЛЛ (наприклад 0-1) можна взяти в якості вихідної і згустити її додатково за тим же самим алгоритмом. Вказані побудови характеризують локальність методу та можливість застосування його до корекції розв'язку.

Можливі й інші варіанти отримання розв'язку поставленої задачі. Розглянемо рис. 3. Основна особливість даної схеми 3 (рис. 3) полягає у побудові точки згущення т.2, оскільки всі інші точки згущення т.1, т.3, т.4 і т.і., будуються відповідно до розглянутої вище методики (схема 1). Для побудови т.2 необхідно визначитися з напрямком згущення, тобто з якої точки згущення (т.1 чи т.3) будемо проводити промінь α який в результаті перетину з лінією зв'язку $\bar{x} = 2$ і дасть шукану точку згущення т.2. Для цього з'єднуємо отримані раніше точки згущення т.1 і т.3 хордою 1-3, що утворює з вихідною ланкою $(i, i+1)$ кут φ_{1-3} : $\varphi_{1-3} = \arctg\left(\frac{(\bar{y}_3 - \bar{y}_1)}{2\bar{h}}\right)$. Далі порівнюємо отримані кути $\theta_{3.1}$ і $\theta_{1.3}$, де $\theta_{3.1}$ – кут, що утворюється між хордою 1-3 і променем α_4 : $\theta_{3.1} = \alpha_4 + \varphi_{1-3}$; $\theta_{1.3}$ – кут, що утворюється між хордою 1-3 і променем α_0 , $\theta_{1.3} = \alpha_0 - \varphi_{1-3}$. Виявляємо менший з них. В результаті одержуємо дві схеми: згідно з рис. 3 – $\theta_{1.3} < \theta_{3.1}$ (схема 3); згідно з рис.4 – $\theta_{3.1} < \theta_{1.3}$ (схема 4).

Як у випадку рис. 3, так і у випадку рис.4 процес згущення продовжується з боку меншого кута: θ_{1-3} – рис. 3, θ_{3-1} – рис. 4. У випадку рис. 3 проводимо промінь α_1 з отриманої раніше точки згущення т.1 під кутом $\alpha_1 = \arctg(p_1 \cdot \tg \alpha_i)$ до вихідної ланки $(i, i+1)$, де p_1 – деякий коефіцієнт. В результаті перетину даного променя α_1 з лінією зв'язку $\bar{x} = 2$ одержуємо точку згущення т.2, ордината якої $\bar{y}_2 = \bar{y}_1 + \bar{h} \cdot \tg \alpha_1$. У випадку рис.4 проводимо промінь α_3 з отриманої точки згущення т.3 під кутом $\alpha_3 = \arctg(p_3 \cdot \tg \alpha_{i+1})$ до вихідної ланки $(i, i+1)$, де p_3 – деякий коефіцієнт. В результаті перетину даного променя α_3 з лінією зв'язку $\bar{x} = 2$ одержуємо точку згущення т.2, ордината якої: $\bar{y}_2 = \bar{y}_3 + \bar{h} \cdot \tg \alpha_3$.

3) З'єднуємо отримані точки згущення ланками СЛЛ.

Відзначимо, що можливі різні комбінації запропонованих схем в процесі здійснення процесу згущення.

На підставі викладеної методики проведення процесу локального згущення деякої ділянки $(i, i+1)$ ДПК, де у вузлах i і $i+1$ задані дотичні y'_i і y'_{i+1} , відповідно, був складений наступний загальний алгоритм згущення.

1) Порівнюємо кути α_{i+1} і α_i , утворені дотичними y'_{i+1} і y'_i у вузлах $i+1$ і i , відповідно, з вихідною ланкою $(i, i+1)$. Виявляємо менший з них.

2) Визначаємо кут, утворений вихідним променем з вихідною ланкою $(i, i+1)$:

– якщо працює схема 1 (рис. 1), кут визначаємо згідно з (1), (2), то

$$\alpha_s = \arctg(p_s \cdot \tg \alpha_{i+1}), s = \overline{2; n}, \quad (1)$$

де p – деякий коефіцієнт, що залежить від числа розбивок n вихідної ланки $(i, i+1)$;

α_{i+1} – менший з кутів, утворених дотичними у вузлах з вихідною ланкою.

$$\alpha_s = \arctg(p_s \cdot \tg \alpha_i), \quad s = \overline{0; n-1}, \quad (2)$$

Тут α_i – більший з кутів, що утворені дотичними у вузлах з вихідною ланкою.

- якщо працює схема 2 (рис.2), кут визначаємо згідно з (3),

$$\alpha_s = \arctg(p_s \cdot \tg \alpha_{i+1}), s = \overline{1; n}, \quad (3)$$

3) Визначаємо ординату точки згущення:

- якщо працює схема 1, ордината точки згущення визначається згідно з (4)-(6)

$$\bar{y}_{s-1} = \bar{h} \cdot \tg \alpha_s, s = n, \quad (4)$$

$$\bar{y}_s = \bar{y}_{s+1} + \bar{h} \cdot \tg \alpha_{s+1}, s = \overline{2; n-1}, \quad (5)$$

$$\bar{y}_{s+1} = \bar{h} \cdot \tg \alpha_s, s = 0. \quad (6)$$

- якщо працює схема 2 – згідно з (4), (7)

$$\bar{y}_s = \bar{y}_{s+1} + \bar{h} \cdot \tg \alpha_{s+1}, s = \overline{1; n-1}. \quad (7)$$

- якщо працює схема 3 - згідно з (4) - (6), (8)

$$\bar{y}_{s+1} = \bar{y}_s + \bar{h} \cdot \tg \alpha_s, s = \overline{1; n-1}. \quad (8)$$

- якщо працює схема 4 – згідно з (4)-(8).

4) Визначаємо кут нахилу отриманої хорди з вихідною ланкою

- якщо працює схема 1-2 - згідно з (9)

$$\varphi_s = \arctg \left(\frac{\bar{y}_s}{(\bar{l} - s \cdot \bar{h})} \right), s = \overline{2; n}, \quad (9)$$

- якщо працює схема 3-4 - згідно з (9), (10)

$$\varphi_{k-m} = \arctg \left(\frac{\bar{y}_m - \bar{y}_k}{(m-1) \cdot \bar{h}} \right), \quad (10)$$

де k, m – індекси точок згущення, що з'єднані хордою.

5) Визначаємо кути θ :

- якщо працює схема 1-2 - згідно з (11)

$$\theta_{s-i} = \alpha_s + \varphi_s, s = \overline{2; n-1},$$

$$\theta_{i-s} = \alpha_i - \varphi_s, s = \overline{2; n-1}, \quad (11)$$

де i – індекс вузла, що відповідає більшому з кутів, утвореному дотичною в даному вузлі і вихідною ланкою.

- якщо працює схема 3-4, то згідно з (11), (12)

$$\theta_{k-m} = \alpha_{k-1} - \varphi_{k-m},$$

$$\theta_{m-k} = \alpha_{m+1} + \varphi_{k-m}. \quad (12)$$

6) Порівнюємо кути θ і виявляємо менший (для вибору схеми згущення) і повертаємося до пункту 2) .

Однак у проведених дослідженнях не була вирішена задача вибору необхідного коефіцієнта p . Вирішенню даного питання і будуть присвячені подальші дослідження.

Висновки. Згідно з проведеними дослідженнями було розв'язано задачу дискретного інтерполяції ДПК довільної конфігурації з заданими у вузлах дотичними при умові відсутності осциляції на основі розробленої адаптивної схеми локального згущення точкового ряду.

ЛІТЕРАТУРА

1. Верещага В.М. Дискретно-параметрический метод геометрического моделирования кривых линий и поверхностей: Дисс. ... д-ра техн. наук: 05.01.01. – Мелитополь, 1996. – 320 с.
2. Верещага В.М. Формирование производных в узлах плоской дискретно представленной кривой // Мелитоп. ин-т механиз. с. хоз-ва. – Мелитополь, 1994. Деп. в ГНТБ Украины 22.02.1994, №337 – Ук 94.

Получено 13.03.2006 г.

УДК 681. 327.1

М.П. Осипов, С.И. Ротков

ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ АЛГОРИТМА ПРЯМОГО ПОСТРОЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ ДЕЛОНЕ

Постановка проблемы. Триангуляцией называется планарный граф, все внутренние области которого являются треугольниками [2]. Построение триангуляции широко применяется в машиностроении, медицине, археологии, в области мультимедиа, в геоинформационных системах и т.д.

Поскольку задача построения триангуляции по набору точек является неоднозначной, необходимо выбрать из набора различных триангуляционных разбиений лучшее разбиение. В качестве оптимальной на практике обычно используют триангуляцию, удовлетворяющую теореме Делоне о пустом шаре [1]:

© М. П. Осипов, С. И. Ротков, 2006

Система взаимосвязанных не перекрывающихся треугольников имеет наименьший периметр, если ни одна из вершин не попадает внутрь ни одной из окружностей, описанных вокруг образованных треугольников.

Треугольники, образовавшиеся при такой триангуляции, максимально приближаются к равносторонним. Оптимальность представленной триангуляции заключается в том, что метод предполагает формирование локально наиболее правильных треугольников.

На сегодняшний день, существует большое количество алгоритмов генерации триангуляционного разбиения, но стандартных процедур триангуляции не существует. Это обусловлено неустойчивостью этих алгоритмов и неудовлетворительным временем их работы на реальных наборах данных. Поэтому алгоритмы триангуляции интенсивно совершенствуются, и критериями их эффективности являются достоверность и быстродействие.

Анализ последних исследований и публикаций. В зависимости от используемого подхода алгоритмы построения триангуляции Делоне разделяются на четыре типа [2]:

- 1) алгоритмы слияния
- 2) итеративные алгоритмы
- 3) двухпроходные алгоритмы
- 4) алгоритм прямого построения

Из всех типов построения триангуляции Делоне лишь алгоритм прямого построения строит такие треугольники, которые удовлетворяют условию Делоне в конечной триангуляции и поэтому не должны перестраиваться. На практике, проверка на условие Делоне и последующее перестроение занимают довольно большую часть времени. Поэтому разработку алгоритма решено было делать на основе идеи прямого построения, не требующей перестройку триангуляции.

Алгоритм прямого построения работает путем постоянного наращивания к текущей триангуляции по одному треугольнику за шаг [3]. Вначале триангуляция состоит из одного ребра. На каждой итерации алгоритм ищет новый треугольник, удовлетворяющий условию Делоне, который подключается к границе текущей триангуляции. Иными словами, на каждой итерации происходит поиск очередной точки для текущего ребра, принадлежащего границе триангуляции, с целью образования нового треугольника. Поскольку для поиска сле-

дующей точки, необходимо производить перебор всех точек разбиения, общая трудоемкость алгоритма составляет $O(N^2)$ арифметических операций для N точек. Использование клеточного пошагового алгоритма прямого построения, описанного в работе [2], позволяет сократить среднюю трудоемкость алгоритма до $O(N)$ на ряде распространенных распределений. Для этого вся область разбивается на клетки и точки сортируются по клеткам. Общее количество клеток должно быть порядка $O(N)$. Использование данного подхода позволяет эффективно применять этот алгоритм на практике наравне с другими алгоритмами триангуляции, обладающими подобной трудоемкостью (алгоритм динамического кэширования, алгоритм послойного сгущения, двухпроходный алгоритм невыпуклого полосового слияния, ленточный алгоритм) [4].

Дальнейшая оптимизация работы алгоритма состоит в сведении к минимуму времени работы и вычислительной сложности процедуры выбора следующей точки, формирующей новый треугольник. Выбор точки будет осуществляться из текущего набора точек. Текущий набор точек – это множество точек попавших в окрестность текущего ребра (“пузырь”). “Пузырь” это окружность, проходящая через концы текущего ребра, центр которой находится на серединном перпендикуляре к текущему ребру [3].

В традиционном алгоритме прямого построения поиск точки для текущего ребра осуществляется по следующему принципу:

Выбирается точка из текущего набора точек образующая с концами текущего ребра максимальный угол.

Количество основных операций, выполняемых методом для n точек текущего набора:

1. n * операция вычисления угла по трем точкам.
2. n * операция сравнения (выбор максимума).

Основные недостатки такого подхода:

1. Использование при определении угла тригонометрических функций, которые резко замедляют процесс
2. Последовательная обработка всех точек текущего набора.

В работе [5] был предложен другой метод выбора следующей точки. Работа метода основана на теореме Делоне о пустом шаре. Определяется точка из текущего набора образующая с текущим ребром треугольник, описанная окружность которого не содержит внутри се-

бя точек. Центры описанных окружностей для всех точек из текущего набора лежат на серединном перпендикуляре к текущему ребру. Пусть C_5 окружность, включающая в себя концы текущего ребра и не содержащая внутри себя точек. В ходе работы алгоритма в качестве C_5 удобнее всего взять окружность, описанную вокруг треугольника, включающего в себя текущее ребро (ABC на рис. 1). Тогда искомой будет являться точка, формирующая описанную окружность, центр которой имеет минимальное расстояние до центра окружности C_5 (точка O_5 на рис. 1).

Количество основных операций, выполняемых методом для n точек текущего набора:

1. n * операция вычисления центра описанной окружности;
2. n * операция вычисления расстояния;
3. n * операция сравнения (выбор минимума).

Работа данного метода имеет выигрыш в скорости по сравнению с классическим подходом, поскольку трудоемкая операция вычисления тригонометрических функций заменяется операцией определения центра описанной окружности. Основным недостатком данного подхода состоит в том, что для определения искомой точки необходимо обработать все точки текущего набора. То есть операцию вычисления центра описанной окружности необходимо применить ко всем точкам текущего набора.

Формулировка целей статьи. Целью работы является модификация классического алгоритма прямого построения для оптимизации его вычислительной сложности.

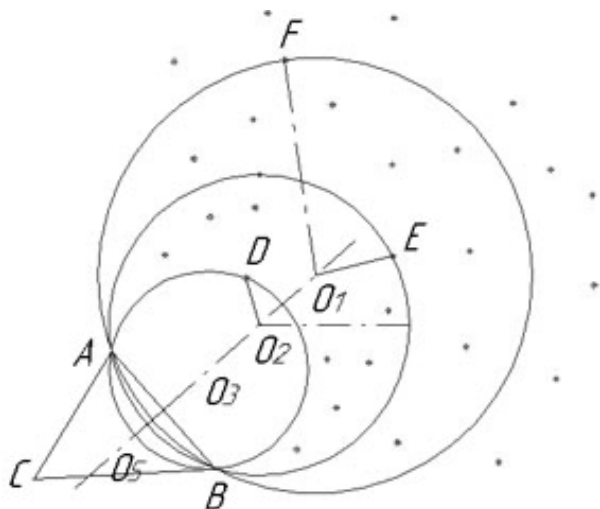


Рисунок 1 - Поиск следующей точки для текущего ребра

Описание нового метода. Для минимизации недостатков традиционных методов выбора следующей точки предлагается модифицированный подход, идея которого основана на пошаговом сужении набора текущих точек.

Пошаговый алгоритм поиска точки для текущего ребра с целью формирования нового треугольника:

1. Выбор очередной “точки-кандидата” из текущего набора точек (точки F, E, D на рис. 1).
2. Формирование окружности, проходящей через “точку-кандидат” и концы текущего ребра.
3. Проверка на попадание точек из текущего набора во внутрь данной окружности.
4. Если внутри этой окружности лежит хотя бы одна точка из текущего набора точек, то переход на шаг 5. Иначе переход на шаг 6.
5. Текущим набором точек являются точки, попавшие внутрь сформированной на шаге 2 окружности. Переход на шаг 1.
6. Текущая точка кандидат является искомой точкой.

Таким образом, искомой является точка из текущего набора, образующая с данным ребром треугольник, описанная окружность которого не имеет внутри себя точек. Построенный треугольник соответствует теореме Делоне о пустом шаре.

Критерием выбора очередной “точки-кандидата” на шаге 1 является минимальное расстояние до центра текущей окружности (отрезки DO_1 и FO_2 на рис. 1). Выбор такого критерия позволяет существенно сократить текущий набор точек без затрат на дополнительные вычисления, так как требуемое расстояние было найдено на шаге 3 при определении набора точек попавших в текущую окружность. В качестве другого критерия выбора “точки-кандидата” может быть использовано минимальное расстояние до центра текущего ребра. Исследования, проведенные на различных распределениях точек, показали, что в большинстве случаев трудоёмкость алгоритмов использующих данные критерии одинакова.

По ходу работы алгоритма с каждым очередным циклом происходит существенное уменьшение рассматриваемого набора точек. Это сделано, потому что любая точка, попавшая внутрь окружности, образует с текущим ребром треугольник, описанная окружность кото-

рого будет всегда лежать внутри текущей окружности (рис. 1). Следовательно, внутрь этой новой окружности не могут попасть точки не лежащие в текущей окружности. Поэтому рассматриваемый набор точек на попадание во внутрь новой окружности ограничивается набором точек попавших в окружность на предыдущем шаге. То есть, в случае попадания определённого количества точек внутрь описанной окружности, только эти точки становятся новым текущим набором. Тем самым с каждым шагом существенно сокращается область поиска. Общее количество основных операций, выполняемых модифицированным методом для n точек текущего набора $(n + m_1 + m_2 + \dots + m_k) \cdot [\text{вычисление расстояния до центра описанной окружности} + 2 \cdot \text{операция сравнения}] + k \cdot [\text{вычисление центра описанной окружности}]$, где k – количество осуществляемых циклов выбора “точки-кандидата”, m_i – количество точек из текущего набора в i -ом цикле ($1 < m_i \leq n$, $i = 1 \dots k$; $m_1 > m_2 > m_3 > \dots > m_k$).

Общее количество операций, выполняемых методом, описанным в работе [5] для n точек текущего набора:

$n \cdot \text{операция вычисления центра описанной окружности} + n \cdot \text{операция вычисления расстояния} + n \cdot \text{операция сравнения}$

Исследования, проведенные на различных распределениях точек, показали, что в среднем количество циклов выбора “точки-кандидата” равняется трём ($k=3$). В тоже время, при больших наборах данных количество циклов резко снижается. Так, например, при количестве точек из текущего набора $n = 7850$ алгоритм работал всего семь циклов ($k=7$). Таким образом, при больших наборах данных, резко сокращается количество вычислений трудоёмкой операции, осуществляющей определение центра описанной окружности. Экспериментально установлено в среднем двукратное увеличение скорости работы представленного алгоритма по сравнению с традиционным, описанным в работе [5].

Преимущества модифицированного подхода:

- возможность определения искомой точки за один проход;
- постепенное сужение набора “точек-кандидатов”.

Выводы. Приведенные модификации классического алгоритма прямого построения привели к резкому снижению вычислительных затрат, необходимых для его работы. Дальнейшая оптимизация алгоритма состоит в определении оптимального критерия выбора “точки-кандидата” из текущего набора точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Делоне Б. Н. О пустоте сферы / Б. Н. Делоне. – М.: ОМОН, 1934. – С. 793-800.
2. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и ее применение / А. В. Скворцов. – Томск: Томский ун-т, 2002. – 128 с.
3. Романюк А. Алгоритмы триангуляции / А. Романюк, А. Сторчак // Компьютеры + Программы. – М.: Комиздат. – 2001. – № 1.
4. Скворцов А. В. Эффективные алгоритмы построения триангуляции Делоне / А. В. Скворцов, Ю. Л. Костюк // Геоинформатика. Теория и практика / Томский ун-т. – 1998. – № 1. – С. 22–47.
5. Ласло М. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++ : Пер. с англ. — М. : БИНОМ, 1997. – 304 с.

Получено 15.03.2006 г.

УДК 515.2

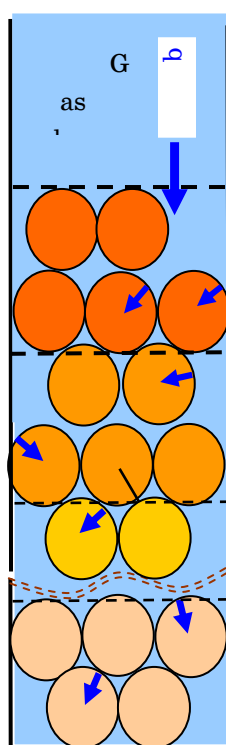
M. Petryk, D. Mykhalyk

MATHEMATICAL MODELING OF CONCENTRATION PROFILES IN HETEROGENEOUS AND NANOPORES MEDIA

Introduction. The transport of molecules in the pore system of zeolites and other solids has been extensively studied by several authors (Barrer 1979, Kärger and Ruthven 1992, Chen *et al.* 1994). When a bed of zeolite crystallites is considered, it can be assumed that molecular transport involves two important processes: diffusion in the macropores formed by the space between the crystallites (intercrystallite diffusion) and diffusion in the nanopores within the crystallites (intracrystallite diffusion). To determine the contribution of each of these processes to the overall diffusion process, one has to know the values of certain parameters, such as diffusion coefficients, the pressure in the gas phase, the dimensions of the crystallite bed, the adsorption isotherm, etc.

© M. Petryk, D. Mykhalyk, 2006

The relationship between these different parameters and the concentration profiles can be established after having chosen a diffusion model and solved the equations which describe it. In a previous article by Magalhães *et al.* 1997, the competitive effects of inter- and intra-molecular diffusion were analyzed semi quantitatively on the basis of the concentration profiles obtained by a numerical method. In the present work, analytical solutions of the diffusion equations are presented both for macropores and micropores. In this way the parameter which allows an evaluation of the relative importance of inter- and intracrystalline diffusion is clearly identified.



Diffusion in macropores

Characteristic length: ℓ

Diffusion coefficients: D_{inter_k} ;

Characteristic times: τ_{inter_k}

Diffusion in nanopores

Characteristic length: R

Diffusion coefficients: D_{intra_k}

Characteristic times: τ_{intra_k}

Fig.1 - The scheme of the process of diffusion in the zeolite bed

Mathematical model. The mathematical model of benzene diffusion kinetics in the zeolite bed which we consider to be heterogeneous and multicomposed (n-composed) media constituting the pore system of the zeolite bed is a boundary problem: to find in the area

$$I_n = \left\{ t > 0, r \in (0, R), z \in \bigcup_{k=1}^{n+1} (\zeta_{k-1}, \zeta_k); \zeta_0 = 0; \zeta_{n+1} \equiv l < \infty \right\}$$

the bounded solution of the partial differential equations system:

$$\varepsilon_{inter_k} \frac{\partial c_k}{\partial t} = D_{inter_k} \cdot \varepsilon_{inter_k} \frac{\partial^2 c_k}{\partial z^2} - \frac{3(1 - \varepsilon_{inter_k})}{R} \cdot (D_{int ra_k} \frac{\partial q_k}{\partial r})|_{r=R} ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial q_k}{\partial t} = D_{int ra_k} \left(\frac{\partial^2 q_k}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial q_k}{\partial r} \right) \quad (2)$$

with the initial conditions :

$$c_k(t=0, z) = 0, \quad q_k(t=0, r, z) = 0 ; \quad (3)$$

the boundary conditions:

$$c_{n+1}(t, z=l) = c_{\infty n+1}, \quad q_k(t, r=R, z) = K_k \cdot c_k(z, t); \quad (4)$$

$$\frac{\partial c_l}{\partial z}(t, z=0) = 0, \quad \frac{\partial q_k}{\partial r}(t, r=0, z) = 0 \quad (5)$$

and interface conditions:

$$[c_k(t, z) - c_{k+1}(t, z)]|_{z=\zeta_k} = 0 ; \quad \left[\frac{\partial}{\partial z} c_k(t, z) - \frac{\partial}{\partial z} c_{k+1}(t, z) \right] \Big|_{z=\zeta_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (6)$$

here $K_k = \frac{q_{\infty k}}{c_{\infty k}}; k = \overline{1, n+1}$.

Analytical solution: concentration profiles. Applying the Laplace integral transformation for the system boundary problems, we finally obtain the analytical solution of this problem in such form:

$$C_k(t, Z) = I + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\exp(-\beta_j^2 \cdot t)}{\beta_j^2 \cdot d\delta(\beta_j)} \left\{ \begin{aligned} & \prod_{j=1}^n \varphi_{j+1}(\beta) \cdot \cos[\varphi(\beta)Z] && ; k=l \\ & \prod_{j=k}^n \varphi_{j+1}(\beta) \cdot \left[\Phi_{22}^{k-l}(\varphi_k(\beta)l_{k-l}, \varphi_k(\beta)Z) \delta_{l,2k-l}(\beta) - \Phi_{12}^{k-l}(\varphi_k(\beta)l_{k-l}, \varphi_k(\beta)Z) \delta_{l,2k-l}(\beta) \right] && ; k=\overline{1, n} \\ & \left[\Phi_{22}^n(\varphi_{n+1}(\beta)Z, \varphi_{n+1}(\beta)l_{n+1}) \cdot \delta_{l,2n-l}(\beta) - \Phi_{12}^n(\varphi_{n+1}(\beta)Z, \varphi_{n+1}(\beta)l_{n+1}) \cdot \delta_{l,2n-l}(\beta) \right] && ; k=n+1 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

and

$$Q_k(t, X, Z) = \frac{2\pi}{\tau_{mk}} \sum_{j_l=0}^{\infty} j_l (-1)^{j_l+1} \frac{\sin(j_l \pi \cdot X)}{X \cdot \mu_{j_l}^2}.$$

$$\cdot \left(1 - \exp(-\mu_{j_l}^2 \cdot t) \cdot \left[1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{j,l}(t)}{\beta_j^2 \cdot d\delta(\beta_j)} \right] \prod_{j=k}^n \varphi_{j+1}(\beta) \cdot \left[\begin{aligned} & \prod_{j=1}^n \varphi_{j+1}(\beta) \cdot \cos[\varphi(\beta)Z] && ; k=l \\ & \left[\Phi_{22}^{k-l}(\varphi_k(\beta)l_{k-l}, \varphi_k(\beta)Z) \delta_{l,2k-l}(\beta) - \Phi_{12}^{k-l}(\varphi_k(\beta)l_{k-l}, \varphi_k(\beta)Z) \delta_{l,2k-l}(\beta) \right] && ; k=\overline{1, n} \\ & \left[\Phi_{22}^n(\varphi_{n+1}(\beta)Z, \varphi_{n+1}(\beta)l_{n+1}) \cdot \delta_{l,2n-l}(\beta) - \Phi_{12}^n(\varphi_{n+1}(\beta)Z, \varphi_{n+1}(\beta)l_{n+1}) \cdot \delta_{l,2n-l}(\beta) \right] && ; k=n+1 \end{aligned} \right] \right)$$

where: $\beta_j, j = \overline{1, \infty}$ are roots of transcendental equation:

$$\delta(\beta) \equiv \delta_{12}(\varphi_{n+1}(\beta)l_n, \varphi_{n+1}(\beta)l_{n+1}) \cdot \delta'_{1,2n-1}(\beta) - \delta_{22}(\varphi_{n+1}(\beta)l_n, \varphi_{n+1}(\beta) \cdot \delta_{1,2n-1}(\beta) = 0. \quad (9)$$

Symbols. C - dimensionless benzene concentration in macropores; Q - dimensionless benzene concentration in nanopores; M - dimensionless benzene mass integral; $X=r/R$ - dimensionless distance from crystallite centre; $Z=z/\ell$ - dimensionless distance from bottom of the crystallites bed; ε - bed porosity; **Numerical Simulation and Discussion.** Modeling on the basis of specially developed programs gives the solution of the two problems: inverse problem and direct problem.

Solution of the inverse problem. For numerical modeling we are using the experimental data profiles which were determined with method RMN (Prof. J. Fraissard) for benzene adsorptions in zeolite bed. Using experimental benzene absorbed mass profiles for micro- and nanopores of zeolites bed and modeling absorbant concentration profiles in microspores Q , according to eq. (8), we compute the diffusion coefficients profiles for benzene D_{inter} and D_{intra} by solving the inverse problem.

Solution of the direct problem. Using the obtained value of the benzene diffusion coefficients profiles for macropores in intercrystallite space D_{inter} and intracrystallite space D_{intra} for heterogeneous catalitical zeolite bed, we can compute the concentration distributions $C(t, z)$, $Q(t, X, z)$ and mass integral $M(t, z)$. The other parameters, for example, the function of diffusion velocitys and diffusion gradients in macropores and nanopores also can be calculated. The concentration and mass integral distribution curves are presented in function of time and geometrical coordinates: distances from the zeolite-bed bottom z and dimensionless distance from crystallite centre $X = r / R$.

Figure 2 shows the comparison of the computed (model) and experimental kinetic curves of dimensionless mass integral $M(t, z)$ versus time t for four's different values of coordinate of distance in crystallite zeolite-bed z : $z=1mm$, $z=5mm$, $z=7mm$, $z=15mm$. As is seen from fig.2, the model distributions (type 2 curves - Model) agrees satisfactory with experimental kinetic curves (type 1 curves - Experimental) of dimensionless mass integral $M(t, z)$. This is assured by solution of the inverse problem: the obtained profiles of D_{inter} and D_{intra} . The relative error value does not exceed 3-5% for upper part of bed (a) $z=1mm$; b) $z=5mm$; c) $z=7mm$).

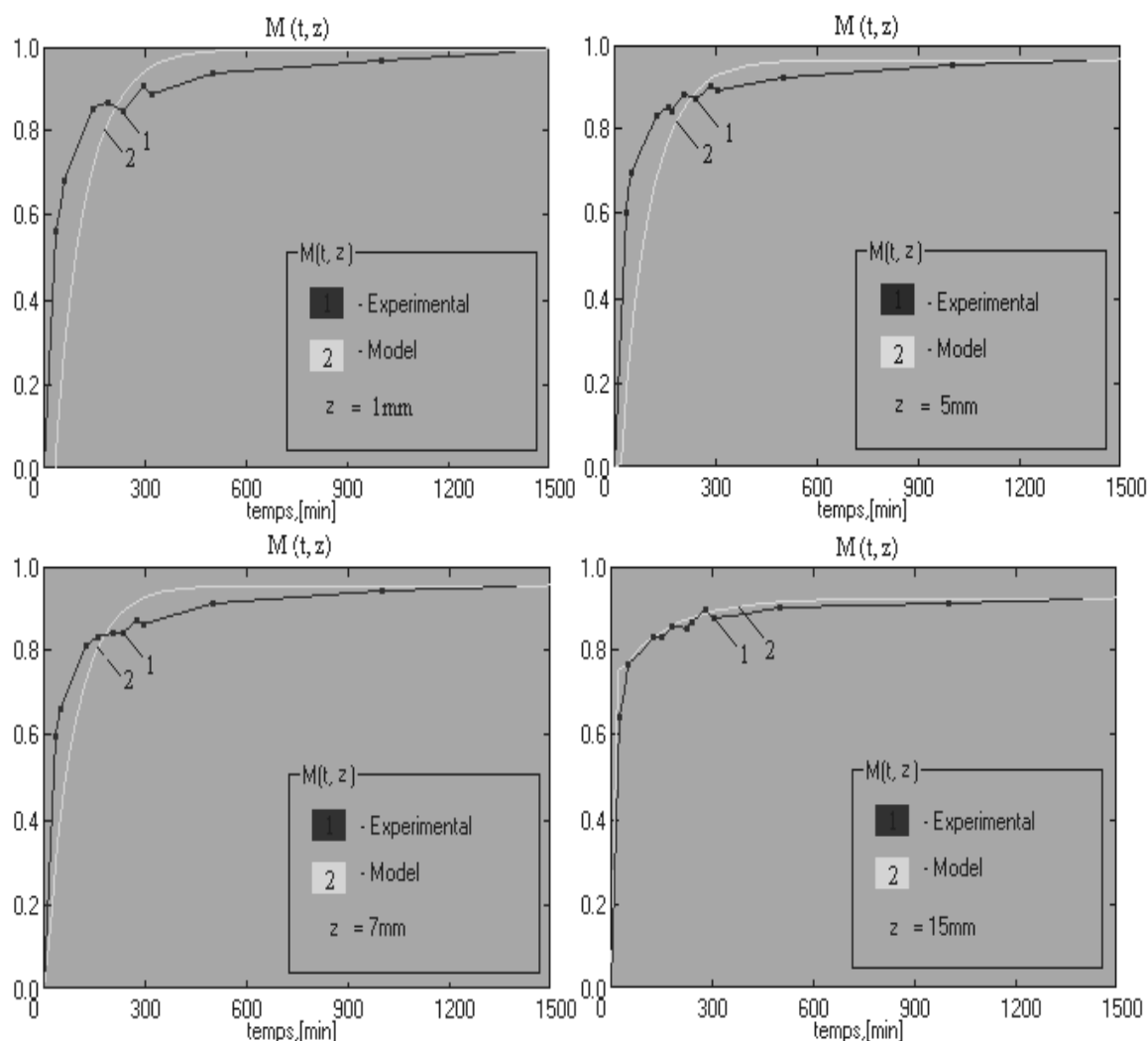


Fig. 2 - Model and experimental kinetic curves of dimensionless mass integral versus time t [min] for different value of distance of the crystallite zeolite-bed z

For lower part of crystallite bed (d) $z=15mm$), relative error value does not exceed 2%. For long diffusion time in intracrystallite space (more then 300 min) we can observe an equilibrium condition for all curves $M(t, z)$. For distance equal $z=1mm$, value of equilibrium dimensionless integral mass in nanopores of crystallites equal to 0.98. For lower layers of bed, we can observe natural reducing of equilibrium dimensionless mass as result of C_6H_6 current concentration reducing in macropores of intercrystallite space $C_k(t, z)$.

In fig.3 shows concentration profiles of C_6H_6 in intercrystallite space $C_k(t, z)$. As is seen in fig.3, concentration curves for each distance z are going to equilibrium values.

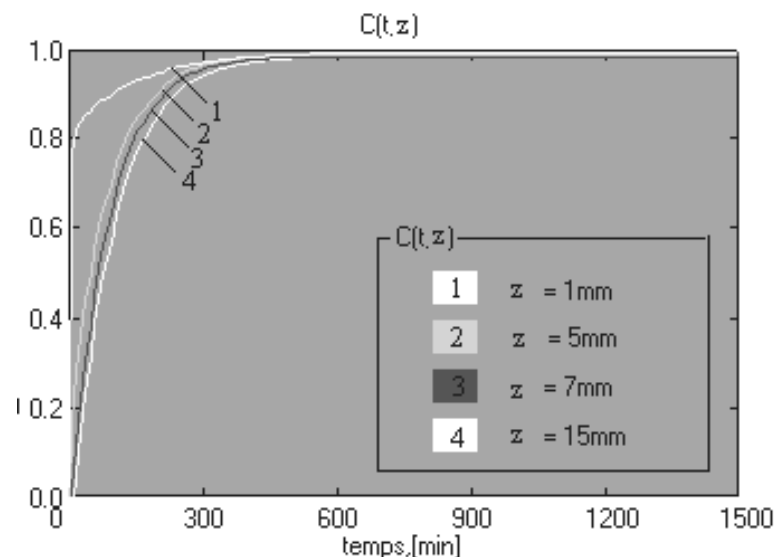


Fig. 3 - C_6H_6 concentration profiles $C_k(t, z)$ versus time t [min] for different values of the distance from the bottom of the crystallite zeolite-bed

z

Figure 4 presents the model concentrations profiles of C_6H_6 in crystallites $Q(t, X, z)$ as a function of dimensionless distance from crystallite centre X for different time values t [min] and four's layers of the crystallite bed z [mm]. As can be seen from fig.4, the concentration in intracrystallite space $Q(t, X, z)$ is more decreased in centre of crystallites ($X=0$) and elevated towards to crystallite surface ($X=1.0$).

Conclusion. The solution of proposed mathematical model of benzene diffusion in heterogeneous zeolite bed is based on the *Laplace* integral transformation and *Couchy* methods. The analytical solution of this model permits to analyse the benzene fluid transport in macropores and nanopores of crystallite zeolite beds.

The solution of the inverse problem on the base of experimental data permitted the calculation of D_{inter} and D_{intra} diffusion coefficients distributions as function of time and crystallite dimensionless position.

The direct problem solution permitted the estimation of the concentration profiles, concentration gradients profiles and other parameters profiles inside of nano- and macropores of heterogeneous crystallite bed of zeolite. The comparison of experimental and model kinetic curves of dimensionless mass integral for different layer thickness shows their reasonable adequacy.

REFERENCES

1. Leniuk M.P., Petryk M.R. Fourier, Bessel integral transformations methods with spectral parameter in mathematical modelling problems of mass transfer in heterogenous multilayer medias. - Kyiv (UA): Naukova Dumka (Academic Publishing), 2000. - 372 p.
2. Leniuk M.P., Petryk M.R. The mathematical modeling of mass transfer with spectral parametr for heterogeneous n – interface limited micro porous medias // Volyn Mathematical Bulletin (UA). - 2003.- № 10. – P. 161-185.

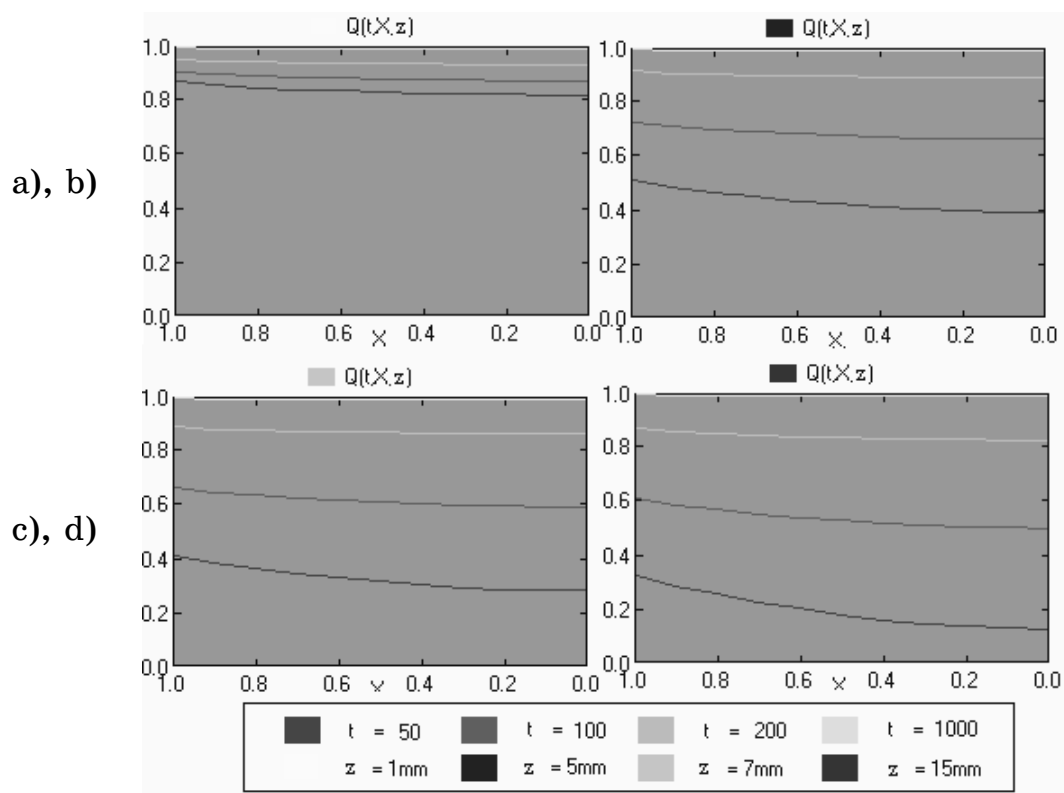


Fig. 4. C_6H_6 - concentration profiles in nanopores of intracrystallite space $Q(t, X, z)$ versus dimensionless distance from crystallite centre X for different distance from bottom of the crystallites bed z and time t [min] : a) $z=1mm$; b) $z=5mm$; c) $z=7mm$; d) $z=15mm$

Получено 17.03.2006 г.

С.Ф.Пилипака, В.М.Несвідомін, Т.С.Пилипака

ПАРАМЕТРИЧНІ ТА НАТУРАЛЬНІ РІВНЯННЯ КРИВИХ ІЗ ЗАДАНИМИ КІНЕМАТИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Постановка проблеми. При дослідженні плоских кривих виявляються властивості, які можуть бути використані для розв'язування технічних задач. Інколи такі криві, окрім параметричних, мають також натуральні рівняння. До них відносяться: логарифмічна спіраль, ланцюгова лінія, евольвента кола, трактриса та ін. [1]. Закономірний також шлях знаходження параметричних та натуральних рівнянь кривих за наперед заданими властивостями.

Аналіз останніх досліджень. Взаємозв'язок параметричних та натуральних рівнянь кривих є предметом дослідження для багатьох авторів. Про це свідчить згадувана праця [1], а також праці окремих дослідників [2-4].

Формулювання цілей статті. Знайти параметричні та натуральні рівняння кривих за заданими кінематичними характеристиками руху по них матеріальної точки.

Основна частина. Якщо матеріальна точка рухається по циліндричній поверхні з горизонтальними твірними під дією сили власної ваги, то її траєкторією буде плоска крива – ортогональний переріз поверхні. Таким чином розгляд руху точки по поверхні можна звести до її руху по плоскій кривій, яка розташована у вертикальній площині. Із теоретичної механіки відомо, що при русі матеріальної точки по криволінійній траєкторії виникає відцентрова сила F_c , яка завжди спрямована по головній нормалі в сторону, протилежну від центра кривини. Інша сила – сила тертя F_m – завжди спрямована по дотичній до траєкторії в сторону, протилежну напрямку руху. Звідси випливає, що при складанні диференціального рівняння руху точки зручно проєкціювати сили на орти супровідного тригранника траєкторії. Розглянемо матеріальну точку (або частинку) на кривій та прикладені до неї сили (рис. 1). Диференціальне рівняння руху матеріальної частинки у векторному вигляді запишеться:

$$m\overline{w} = \overline{F}, \quad (1)$$

де $\overline{w}$ - вектор прискорення; $\overline{F}$ - вектор результуючої сили; m – маса частинки.

© С.Ф.Пилипака, В.М.Несвідомін, Т.С.Пилипака, 2006

Оскільки частинка рухається в напрямі дотичної $\vec{\tau}$, то рівняння (1) запишемо в проекції на цей орт:

$$mw = mg \sin \alpha - F_m, \quad (2)$$

де mg – сила ваги частинки ($g=9,81 \text{ м/с}^2$); α – кут між напрямом головної нормалі і вектором сили ваги; F_m – сила тертя.

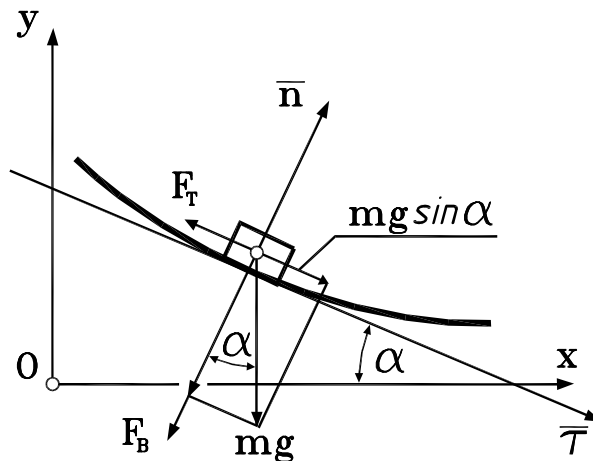


Рисунок 1 – Розкладання діючих сил на головну нормаль $\vec{n}$ і дотичну $\vec{\tau}$

Сила тертя F_m залежить від сили тиску і коефіцієнта тертя f . Спроеціювавши всі сили на головну нормаль і помноживши на f , отримаємо:

$$F_m = f(F_v + mg \cos \alpha) \quad \text{або} \quad F_m = f(mv^2 k + mg \cos \alpha) \quad (3)$$

де v – швидкість руху частинки; k – кривина траєкторії в точці, в якій знаходиться частинка.

Рівняння (2) із врахуванням (3) після скорочення на масу m набуває вигляду:

$$w = g \sin \alpha - f(v^2 k + g \cos \alpha). \quad (4)$$

За рівняннями (4) можна знаходити швидкість і прискорення частинки, якщо задана крива у вигляді $k=k(\alpha)$ або ж знаходити саму криву за заданими кінематичними параметрами руху. Розглянемо два випадки із постійною швидкістю руху ($v=const$).

Випадок перший. Знайдемо криву, на яку частинка при русі по ній чинить нульовий тиск. Для цього прирівнюємо силу тиску (3) до нуля:

$$f(mv^2k + mg \cos \alpha) = 0 \quad \text{звідки} \quad k = \frac{g}{v^2} \cos \alpha. \quad (5)$$

Якщо відома залежність радіуса кривини від кута α , $\rho = \frac{1}{k(\alpha)}$, то параметричні рівняння кривої можна знайти із виразів [3]:

$$x = \int \rho \cos \alpha d\alpha; \quad y = \int \rho \sin \alpha d\alpha. \quad (6)$$

Підставивши (5) у (6), одержимо:

$$x = \frac{v^2}{g} \alpha; \quad y = \frac{v^2}{g} \int \operatorname{tg} \alpha d\alpha = -\frac{v^2}{g} \ln \cos \alpha. \quad (7)$$

Знайдемо довжину дуги s кривої (7). Оскільки $k = \frac{d\alpha}{ds}$, то $ds = \frac{d\alpha}{k}$. Із врахуванням (5), цей вираз можна записати наступним чином:

$$s = \frac{v^2}{g} \int \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \frac{v^2}{g} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (8)$$

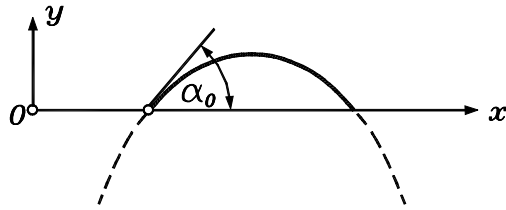
Щоб знайти натуральне рівняння кривої (7), необхідно виключити із рівнянь (5) і (8) спільний параметр α . Шляхом перетворень із (8) знаходимо:

$$\cos \alpha = \frac{2 \exp \left(\frac{g}{v^2} s \right)}{1 + \exp \left(\frac{2g}{v^2} s \right)} = \operatorname{sech} \left(\frac{g}{v^2} s \right). \quad (9)$$

Підставивши (9) в (5), одержимо натуральне рівняння кривої, заданої параметричними рівняннями (7):

$$k = \frac{g}{v^2} \operatorname{sech} \left(\frac{g}{v^2} s \right). \quad (10)$$

Отримане рівняння (10) описує лінію, яка в науковій літературі відома, як ланцюгова лінія рівного опору [1]. Форму такої кривої приймає гнучка важка нитка із змінним поперечним перерізом. Така нитка у всіх перерізах має однакову міцність, отже і однакову ймовірність розриву. Звідси і походить назва кривої [1].

Рисунок 2 – Крива, задана рівняннями (7) і (10) для $v=3$ м/с

Якщо таку криву повернути на 180° , тобто розташувати вершиною вгору, то вона стає, як ми з'ясували, кривою нульового тиску (рис.2). Якби по мосту заданої форми (рис.2) рухалося тіло із постійною швидкістю v , яка входить до рівнянь (7), то тиск на міст був би відсутній. Звідси іще одне трактування цієї кривої – це крива, що є траєкторією руху тіла, кинутого під кутом до горизонту без врахування опору середовища, якщо тіло рухається із постійною швидкістю. Із курсу теоретичної механіки відомо, що тіло, кинуте під кутом до горизонту, рухається по параболі, однак швидкість при цьому змінна. Якби тілу вдалося забезпечити сталу швидкість, то воно рухалось би по знайдений кривій.

Випадок другий. Знайдемо криву, по якій рухається частинка із постійною швидкістю під дією сили власної ваги за наявності тертя. В такому випадку прискорення $w=0$ і з рівняння (4) можна знайти:

$$k = \frac{g \sin \alpha - fg \cos \alpha}{fv^2} \quad \text{або} \quad \rho = \frac{fv^2}{g \sin \alpha - fg \cos \alpha}. \quad (11)$$

Перед тим, як інтегрувати вирази (6) із врахуванням (11), зробимо деякі спрощення. Відомо, що $f = \tan \varphi$, де φ - кут тертя. Якщо площину із відомим коефіцієнтом тертя f встановити під кутом φ до горизонтальної площини, то частинка по цій площині буде рухатися із постійною початковою швидкістю, включаючи і $v=0$ (перебуває в спокої). Підставимо в (11) замість f його значення $\tan \varphi$ і після спрощень проінтегруємо за формулами (6):

$$\begin{aligned} x &= \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \int \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} d\alpha = \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \{ \ln[\sin(\alpha - \varphi)] \cos \varphi - \alpha \sin \varphi \}; \\ y &= \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \int \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} d\alpha = \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \{ \ln[\sin(\alpha - \varphi)] \sin \varphi + \alpha \cos \varphi \}. \end{aligned} \quad (12)$$

На рис. 3 за рівняннями (12) зображено криву для $f=0,577$ ($\varphi=\pi/6$) і $v=3$ м/с. Матеріальна частинка буде рухатися по кривій вниз із заданою постійною початковою швидкістю за рахунок сили ваги, яка врівноважується силою тертя. Крива розбита на ділянки точками A і B . Якщо надати частинці в точці A початкову швидкість v , спрямовану вправо, то частинка буде рухатися із цією швидкістю по опуклій стороні кривої, яка з часом все більше наближається до прямої, нахиленої до горизонту під кутом тертя φ . Якщо ж в точці A надати частинці початкову швидкість v , спрямовану вліво, то вона теж буде рухатися далі із цією швидкістю по кривій, яка з часом наближатиметься до прямої, але вже по увігнутій стороні. В цьому випадку дугу AB можна вважати кожухом, який змінює напрям руху частинки під час вільного польоту. Якби не було кожуха AB , то частинка рухалася б по параболі із прискоренням (без врахування опору середовища). Кожух гасить прискорення за рахунок тертя і зберігає швидкість постійною.

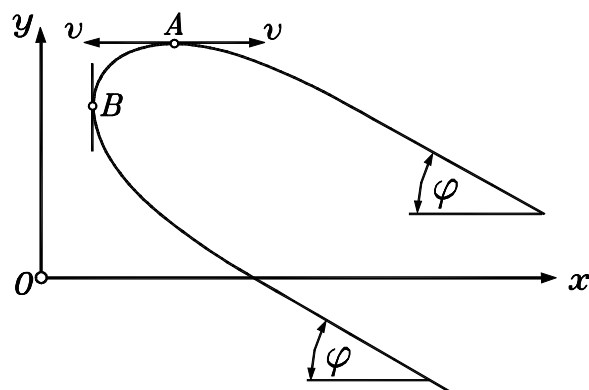


Рисунок 3 – Крива, задана рівняннями (12) для $\varphi=\pi/6$ і $v=3$ м/с

Знайдемо натуральне рівняння кривої (12). Із врахуванням того, що $f = \operatorname{tg} \varphi$, перший вираз (11) можна переписати:

$$k = \frac{g}{v^2 \sin \varphi} \sin(\alpha - \varphi). \quad (13)$$

Визначимо довжину дуги s аналогічно (8):

$$s = \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \int \frac{d\alpha}{\sin(\alpha - \varphi)} = \frac{v^2 \sin \varphi}{g} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha - \varphi}{2} \right) \right]. \quad (14)$$

Щоб отримати натуральне рівняння, необхідно виключити із рівнянь (13), (14) змінну величину α . Перейдемо в рівнянні (14) від $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha - \varphi}{2}\right)$ до $\sin(\alpha - \varphi)$. Після перетворень одержимо:

$$\sin(\alpha - \varphi) \left[\left(1 + \exp\left(\frac{2gs}{v^2 \sin \varphi}\right) \right) \sin(\alpha - \varphi) - 2 \exp\left(\frac{2g}{v^2 \sin \varphi}\right) \right] = 0. \quad (15)$$

Із (15) можна знайти два значення $\sin(\alpha - \varphi)$:

$$\sin(\alpha - \varphi) = 0, \quad \text{тобто } \alpha = \varphi \quad \text{і} \quad \sin(\alpha - \varphi) = \operatorname{sech}\left(\frac{gs}{v^2 \sin \varphi}\right). \quad (16)$$

У першому випадку із (13) одержимо: $k = 0$, тобто маємо пряму лінію, нахилenu під кутом φ до горизонтальної прямої. Підстановка другого виразу (16) в (13) дасть натуральне рівняння кривої:

$$k = \frac{g}{v^2 \sin \varphi} \operatorname{sech} \frac{g}{v^2 \sin \varphi} s. \quad (17)$$

Порівнюючи натуральні рівняння (10) і (17) бачимо, що вони відрізняються тільки сталим коефіцієнтом, тобто описують одну і ту ж криву.

Твердження. Крива постійної швидкості під дією сили власної ваги, вісь симетрії якої нахилена під кутом φ до горизонтальної прямої, де φ - кут тертя, може стати кривою постійної швидкості нульового тиску. Для цього її потрібно повернути вершиною вгору так, щоб вісь симетрії стала вертикальною і надати матеріальній точці швидкості $v\sqrt{\sin \varphi}$, де v і φ - відповідно швидкість і кут, за якими була розрахована перша крива.

Для доведення даного твердження достатньо прирівняти між собою сталі коефіцієнти у рівняннях (10) і (17). Слід зазначити, що кут тертя φ не може бути довільним – він знаходиться в певних межах в залежності від матеріалу, який рухається і по якому рухається частинка. Наприклад, при $\varphi = 0$ (тертя відсутнє, поверхня ідеально гладенька) твердження втрачає сенс. Необхідно також звернути увагу на те, що твердження вдалося сформулювати завдяки переходу від параметричних рівнянь (7) і (12) кривих до їх натуральних рівнянь.

Висновки. За заданими кінематичними характеристиками руху матеріальної точки знайдено криві ортогональних перерізів циліндрів, що забезпечують цей рух із постійною швидкістю. З одержаних натуральних рівнянь кривих з'ясовано, що крива постійної швидкості руху під дією сили власної ваги точки і крива, що чинить нульовий тиск, описуються одним і тим же натуральним рівнянням. Криві відрізняються сталими коефіцієнтами у натуральних рівняннях і положенням у вертикальній площині. Такі криві в науковій літературі носять назву ланцюгової лінії рівного опору. Досліджені властивості доповнюють трактування фізичної суті цих кривих.

ЛІТЕРАТУРА

1. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. – М.: Физматгиз, 1960. – 292 с.
2. Пилипака С.Ф. Графо-аналитический метод приближенного построения кривой по заданному натуральному уравнению // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1989. – Вып. 48. – С. 44-45.
3. Бадаев С.Ю. Універсальний криволінійний обвід // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 189-191.
4. Борисенко В.Д., Устенко С.А. Спіцин В.Є. Геометричне моделювання плоского криволінійного обводу за заданою кривою // Геометричне та комп'ютерне моделювання: Збірник наукових праць Харк. державного університету харчування та торгівлі. – Харків, 2004. – Вип. 5. – С. 30-34.

Получено 17.03.2006 г.

УДК 515.2

О.Л. Підгорний

ПРИКЛАДНУ ГЕОМЕТРІЮ У НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЦЕС

Постановка проблеми. Впровадження в практику результатів досліджень з прикладної геометрії в окремих роботах чи циклах робіт набув галузевого характеру. Але, як правило, впровадження в практику, особливо по кандидатських дисертаціях, носить характер окремих прикладів, які не мають значного поширення.

© О.Л. Підгорний, 2006

Тому слід підняти роль впровадження в навчальний процес як важливу проблему, яка має галузевий рівень і високий ступінь ефективності. Підготовка кадрів нової генерації, озброєних методами геометричного моделювання, приведе через них до значного зростання ролі прикладної геометрії в розв'язанні сучасних задач розвитку галузей народного господарства.

Аналіз останніх досліджень і постановка задач публікації. В ряді робіт та в спеціальних дослідженнях [1-4] розглядались питання міждисциплінарних зв'язків між прикладною геометрією та іншими науковими дисциплінами, які впливають на збагачення теоретичного ядра прикладної геометрії та підсилюють зв'язки з предметними областями впровадження, з якими більш тісно пов'язані суміжні наукові дисципліни. Але вплив на підсилення практичної значущості методів прикладної геометрії через навчальний процес і підготовку кадрів ще не підлягав аналізу. Тому основною задачею цієї публікації є ініціювання початку такого аналізу та виклад досвіду кафедри архітектурних конструкцій КНУБА по впровадженню досліджень в навчальний процес, які частково висвітлювались в роботах [5-7].

Основна частина. Більш ніж півстолітня історія розвитку прикладної геометричної науки характеризується зростаючою багатогранністю зв'язків досліджень з практичними задачами в різних галузях техніки і виробничої діяльності, архітектури і мистецтва [1].

Спочатку це була чисто вузівська наука і сфера її практичних інтересів зосереджувалась на задачах самовдосконалення основної навчальної дисципліни – нарисної геометрії і в меншій мірі креслення, викладачі яких працювали на кафедрах нарисної геометрії і креслення. Вдосконалювались способи отримання ортогональних проекцій і методів їх перетворення, методи розв'язання позиційних і метричних задач, розвивалась теорія аксонометричних і перспективних проекцій, теорія тіней, проекцій з числовими позначками, поглиблювалось вивчення кривих ліній та поверхонь, створювалась і розвивалась теорія допоміжного проекціювання стосовно всіх розділів нарисної геометрії, включались методи проективної геометрії, робились спроби сумісного викладання з аналітичною геометрією і, нарешті, включалась параметризація геометричних фігур і їх зображень і здійснювався перехід до комп'ютеризації освіти. Тобто в межах можливого впровадження досліджень виразилось в удосконаленні графічної під-

готовки як першої ступені інженерної чи архітектурної освіти. Об'єм навчальних годин, залишався майже незмінним і не відповідав змістовному наповненню дисципліни. Тому багатий набір прикладних задач міг використовуватись хіба що для ілюстрації значущості навчальної дисципліни в майбутніх ступенях навчання чи професійної діяльності. Звичайно там, де виділявся додатковий об'єм навчального часу, наприклад для комп'ютерної графіки, якість роботи кафедр і авторитет зростали. Намагання ж викроїти для цього години з основної дисципліни призводили тільки до зниження якості її засвоєння.

Отже, принаймні в останні десятиліття була досягнута "критична маса" результатів досліджень, якими можна було б насичувати цикл графічних дисциплін.

З іншого боку прикладна орієнтованість досліджень забезпечувала розширення зв'язків з предметними областями в різних галузях, що піднімало роль прикладної геометрії в науково-технічному прогресі як носія теорії і практики геометричного моделювання об'єктів, явищ та процесів. Це моделювання носить творчо-пошуковий характер, бо завжди враховує параметри завдання, які визначають область рішень, в межах якої відбувається варіантний пошук раціональних чи оптимальних рішень за певними критеріями.

Така особливість геометричного моделювання забезпечує її значуще місце в прикладній сфері, дякуючи таким основним чинникам:

1. Суть моделювання співпадає з особливостями творчої діяльності інженера, конструктора, технолога, архітектора чи дизайнера.
2. Візуально-образне представлення ходу моделювання та його результатів забезпечує найбільш ефективне взаєморозуміння дослідників, проектувальників та виконавців проектів.
3. Формалізація процесу моделювання з визначенням параметрів варіювання та управління забезпечує можливість комп'ютерних та інших технологій, засобів автоматизації на всіх етапах від початкового задуму до здійснення в натурі.

Застосування геометричного моделювання в ряді випадків набуло галузевого масштабу (авіабудування, архітектура і будівництво, сільгоспмашинобудування, турбінобудування, інструментальне виробниц-

тво тощо). Однак, практичне впровадження результатів досліджень в дисертаційних роботах, як правило, ще носить рівень окремих прикладів, на окремих виробництвах чи об'єктах без значного поширення в галузі. В той же час навчання у вищих навчальних закладах має галузевий характер. Саме тут найбільшу ефективність можуть мати інноваційні інтелектуальні інвестиції, тому що йде підготовка для галузі кадрової зміни більш високого і сучасного інформаційного рівня ніж той, що має діючий, хоча і досвідчений, склад.

Слід відзначити, що розуміння нових можливостей прикладної геометрії в цілому і в окремих її напрямках вже привело до ряду ефективних рішень в організації і кадровому забезпеченні навчального процесу в Україні, які заслуговують на їх аналіз поширення. Для проведення аналізу потрібна активна науково-методична робота, яка, на жаль, в Україні знаходиться в запущеному стані. До того ж вона потребує оновлення змісту роботи і встановлення міжпредметних зв'язків. Не мобілізовані на це також закладені в статуті можливості УАПГ, в основному із-за невиконання організаційних вимог, яке не дозволяє ефективно задіяти колективний розум громадського об'єднання.

В першу чергу велике значення для ефективного впровадження наукових здобутків прикладної геометрії в навчальний процес має обмін досвідом. З цієї точки зору може бути корисною інформація про досвід кафедри архітектурних конструкцій КНУБА.

Кафедра забезпечує вивчення на архітектурному факультеті як основних дисциплін конструкцій будинків і споруд і архітектурно-будівельної фізики (кліматологія та теплофізика огорожуючих конструкцій, архітектурна світлотехніка – інсоляція, сонцезахист, освітлення, колір в архітектурі, архітектурна акустика - акустика закритих залів і відкритих театрів, шумозахист, веде комплексне проектування з профілюючими кафедрами, курсові роботи з будівельної фізики, консультації дипломних робіт з питань конструкцій та архітектурно-будівельної фізики, бере участь в роботі ДЕК.

Додатково кафедрою ведуться учбовий практикум та спецкурси з сучасних ефективних конструкцій, засновані з ініціативи кафедри.

На інженерних факультетах читається загальний курс "Архітектура будівель і споруд" з включенням теплотехнічних і світлотехнічних розрахунків, виконуються курсові проекти та ведуться консуль-

тації по дипломному проектуванню. Для екологів кафедрою створено курс "Метеорологія і кліматологія". Виконання навчальної роботи з широкого кола дисциплін забезпечує 17 викладачів, які мають архітектурну та інженерно-будівельну базову освіту, 13 мають вчені ступені, з них 6 за спеціальністю "Прикладна геометрія, інженерна графіка" (1 доктор наук, 5 кандидатів наук).

Найбільше впровадження методів геометричного моделювання відбувається на архітектурному факультеті. В заснованих в 1973 році спецкурсах з сучасних ефективних конструкцій основне місце займає вивчення просторових конструкцій, теоретичну частину якого складають дослідження автора [8] та його учнів.

В спецкурсі розглядається класифікація просторових конструкцій, їх особливості та переваги перед лінійними, роль в розв'язанні архітектурно-образних та функціональних задач. Далі вивчається геометричне моделювання контурів, поверхонь і структур конструкцій з урахуванням специфіки архітектурного варіантного формоутворення, законів архітектоники. Воно розраховане на вільний творчий пошук архітектурних форм і наступну їх формалізацію для забезпечення інформації для всіх наступних етапів: конструювання і розрахунку, технології відтворення в натурі та геодезичного контролю форми. Особливістю створюваних геометричних моделей, контурів і теоретичних поверхонь конструкцій є те, що побудова контурів розглядається тільки в межах дуг і відрізків та їх сполучень, а поверхонь як відсіків, обмежених контурами. Це виключає використання центрів, осей, фокусів і т.п.

Враховуючи аналоговий характер архітектурного проектування, розглядаються приклади з вітчизняної та світової практики по класах конструкцій як з точки зору принципів конструювання, співвідношення габаритів і розмірів складових частин конструкцій, так і з точки зору застосовуваних геометричних форм і їх модифікацій.

Практичне засвоєння відбувається на основі проведення двох клаузур та курсової роботи по ескізному конструюванню.

При проведенні кожної клаузули створюються ескізи архітектурних форм з криволінійними контурами і поверхнями, відбирається не менше трьох для подальшої розробки, узгоджуються способи описання контурів дугами кривих другого порядку в першій та відсіками поверхонь в другій. Набір поверхонь: не-лінійчаті поверхні 2-го по-

рядку, розгортні та косі поверхні 2-4 порядків, поверхні обертання, переносу, гвинтові, поверхні, представлені одно- параметричною сім'єю кривих другого порядку та сполучення модулів цих поверхонь з використанням симетрій різного виду.

Курсова робота також ґрунтується на створенні ескізів архітектурних об'єктів по заданому призначенню і формі плану або як вільної композиції модулів різних поверхонь чи різних видів просторових конструкцій. По ескізу визначається раціональний тип конструкцій. Описується геометрична форма, розробляється конструкція в цілому та не менше трьох їх вузлів, спираючись на аналоги та існуючу літературу. Вивчення спецкурсу є корисним етапом підготовки до дипломного проектування.

Дослідження автора та його учнів з геометричного моделювання прямого сонячного освітлення стосовно задач інсоляції, сонцезахисту, геліотехніки та геліоосвітлення, природного дифузного освітлення, задач акустики та шумозахисту [9], а також досліджень змінної геометрії світлотіней при архітектурному формоутворенні в реальних умовах, моделюванні теплових полів та теплообміну в оточуючому середовищі та будівлях, забезпечення енергозбереження використовуються в лекціях, практичних заняттях та курсових роботах з акустики та світлотехніки, теплофізики огорожуючих конструкцій, метеорології та кліматології, в консультаціях по курсових та дипломних проектах, в науково-дослідній роботі студентів, при участі спеціалістів кафедри в розробці нормативних документів.

Ряд перелічених досліджень в поєднанні з унікальним досвідом кафедри по проведенню учбового практикуму на архітектурному факультеті з широким залученням фірм, що забезпечують в будівництві застосування конструкцій і технологій європейського і світового рівня привели до створення кафедрою унікального навчального посібника з грифом МОН [10], який користується попитом у вузах, проектних організаціях та фірмах. В ньому зайняли належне місце розділи "Моделювання умов прямого і відбитого сонячного опромінення" (Підгорний О.Л.) та "Фізико-технічні розрахунки світлопрозорих огорожень" (Сергейчук О.В.), в якому також грають значну роль геометричні методи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Павлов А.В., Ковальов С.Н., Михайленко В.Е., Подгорный А.Л. Научные исследования по прикладной геометрии: итоги, задачи, перспективы. // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1990. - Вип.50.
2. Подгорный А.Л., Плоский В.А. Роль межнаучного взаимодействия в развитии прикладной геометрии // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 1997. - Вип. 61.
3. Плоский В.О. Прикладна геометрія як соціотехнічна система: проблеми структури та функціонування // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА. 1998. - Вип.64.
4. Плоский В.О., Підгорний О.Л., Чорноморденко І.В., Яковлев М.І. Інформаційні компоненти прикладної геометрії та технічної естетики: проблема співвідношення / В книзі "Філософія науки, техніки та архітектури: постмодерний проект" К.: КНУБА, 2002.
5. Підгорний О.Л. Прикладна геометрія в навчальному процесі спеціальних кафедр. // Тези доповідей міжнародної науково-методичної конференції "Геометричне моделювання та інженерна і комп'ютерна графіка." – Львів: Львівська політехніка, 1994.
6. Podgorny O.L. Application of the Methods of Geometrical Modeling by the Chair of Architectural Constructions and its Research // 7th International Conference on Engineering Computer Graphics and Descriptive Geometry, Proceedings, Vol. 2. – Krakow, 18-22 July 1996.
7. Підгорний О.Л. Прикладна геометрія та будівельна фізика. (дослідницькі та навчальні взаємозв'язки) // Наука і освіта. Збірник наукових праць АН ВШ України. – К.: Хрещатик, 1997. - Кн. III.
8. Подгорный А.Л. Геометрическое моделирование пространственных конструкций: Дисс...д-ра техн. наук: 05.01.01. – Киев, 1975.
9. Подгорный А.Л. Некоторые результаты и перспективы развития прикладной геометрии в архитектурно-строительной области // Современные проблемы геометрического моделирования. Сборник трудов Украина-российской научно-практической конференции. Спецвыпуск. - Харьков: ХГУПТ, 2005.
10. Підгорний О.Л., Щепетова І.М., Сергейчук О.В., Зайцев О.М., Процюк В.М. Світлопрозорі огороження будинків / Під ред. О.Л.Підгорного. – К.: Видавець Домашевська О.А., 2005.

Получено 14.03.2006 г.

МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЦИЛІНДРИЧНИХ СВІТЛОВИХ ШАХТ З ДИФУЗНИМ ВІДБИВАННЯМ СВІТЛА

Постановка проблеми. Уточнена оцінка ефективності світлових шахт (СШ) дозволить раціонально підбирати їх тип, число та взаємне розташування, забезпечить відповідність світлового середовища призначенню приміщення, що зменшить зорову втомлюваність і виробничий травматизм.

Аналіз досліджень та публікацій. Існуючим способом розрахунку освітленості від циліндричних СШ та оцінці їх світлопропускання [1, 2, 4] притаманна певна спрощеність, що пояснюється намаганням отримати прості формули, використання яких не вимагає комп'ютерної реалізації. Така спрощеність призводить до похибок. В [5] запропоновано метод розрахунку освітленості від циліндричних СШ, який в даній роботі адаптується для визначення ефективності (світлопропускання) СШ.

Мета роботи – розробити метод автоматизованої оцінки ефективності циліндричних СШ та порівняти його з існуючими методами.

Основна частина. Нехай циліндрична СШ має радіус R і висоту H . Її ефективність будемо визначати як відношення вихідного та вхідного світлових потоків. Оскільки освітленість точок верхньої основи СШ дорівнює $E = (7/9)\pi L_z$ [5], то вхідний світловий потік визначимо інтегруванням:

$$F_{vh} = \frac{7}{9} \pi L_z \int_0^{2\pi} \int_0^R p dp d\phi_1 = \frac{7}{9} \pi^2 R^2 L_z, \quad (1)$$

де p – полярна відстань (вимірюється від центру верхньої основи СШ), ϕ_1 – кутовий параметр, L_z – яскравість небосхилу в зеніті.

Для визначення вихідного світлового потоку необхідно розрахувати освітленість довільної точки на нижній основі СШ. Проте осьова симетрія СШ і розподілу яскравості хмарного за Муном-Спенсер неба дозволяють розраховувати освітленість тільки вздовж радіуса нижньої основи СШ. Освітленість точок нижньої основи СШ складається з прямої освітленості (від небосхилу) та відбитої від внутрішньої поверхні СШ.

© Є.В. Пугачов, Т.М. Кундрат, 2006

Для розрахунку останньої визначимо спочатку пряму освітленість внутрішньої поверхні СШ вздовж твірної, яку зручно взяти у площині $y = 0$. Розрахунок прямої освітленості точок на твірній, чи на нижній основі СШ потребує опису границь області небесної півсфери, яка освітлює задану розрахункову точку (РТ) з координатами (x_0, y_0, z_0) . Області інтегрування (рис. 1, 2) висікаються на небесній півсфері одиничного радіусу (φ – кут між проекцією радіус-вектора точки півсфери на площину $z = z_0$ та віссю Ox , β – кут між згадуваним радіус-вектором і віссю Oz), що задається параметричними рівняннями

$$x_s = \sin \beta \cos \varphi + x_0, y_s = \sin \beta \sin \varphi, z_s = \cos \beta + z_0, \varphi \in [0, 2\pi], \beta \in [0, \pi/2] \quad (2)$$

конусом другого порядку.

Кутові параметри циліндра СШ φ і небесної півсфери φ_1 пов'язані залежностями (рис. 3):

$$\varphi_1 = \varphi - \arcsin\left(\frac{x_0 \sin \varphi}{r}\right), \varphi_1 = 2\varphi - \pi, \quad (3)$$

що одержані за теоремою синусів для розрахункових точок $x_0 < r$ та $x_0 = r$ відповідно. Тоді границі областей інтегрування по небесній півсфері опишуться рівнянням:

$$\beta = \arcsin(r'/Gp), \quad (4)$$

де при $x_0 < r$ $r' = \sqrt{(r \cos \varphi_1 - x_0)^2 + (r \sin \varphi_1)^2}$, $Gp = \sqrt{r'^2 + H^2}$, а при $x_0 = r$ $r' = r\sqrt{(\cos \varphi_1 - 1)^2 + (\sin \varphi_1)^2}$, $Gp = \sqrt{r'^2 + (H - z_0)^2}$.

Кутові параметри циліндра СШ φ і небесної півсфери φ_1 пов'язані залежностями (рис. 3):

$$\varphi_1 = \varphi - \arcsin\left(\frac{x_0 \sin \varphi}{r}\right), \varphi_1 = 2\varphi - \pi, \quad (5)$$

що одержані за теоремою синусів для розрахункових точок $x_0 < r$ та $x_0 = r$ відповідно. Тоді границі областей інтегрування по небесній півсфері опишуться рівнянням:

$$\beta = \arcsin(r'/Gp), \quad (6)$$

де при $x_0 < r$ $r' = \sqrt{(r \cos \varphi_1 - x_0)^2 + (r \sin \varphi_1)^2}$, $Gp = \sqrt{r'^2 + H^2}$, а при $x_0 = r$ $r' = r\sqrt{(\cos \varphi_1 - 1)^2 + (\sin \varphi_1)^2}$, $Gp = \sqrt{r'^2 + (H - z_0)^2}$.

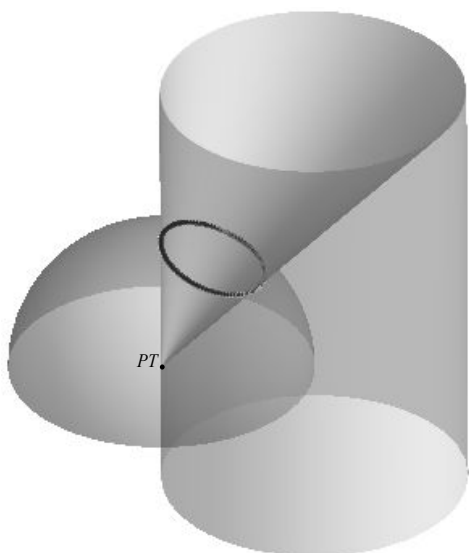


Рисунок 1

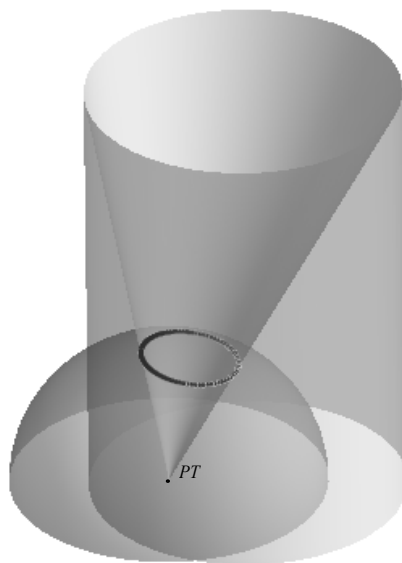
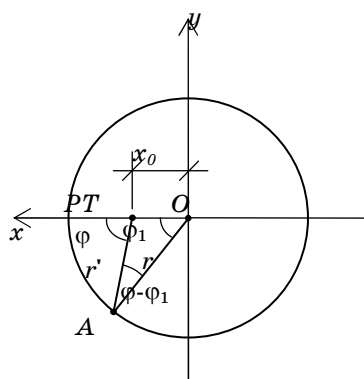


Рисунок 2

а)



б)

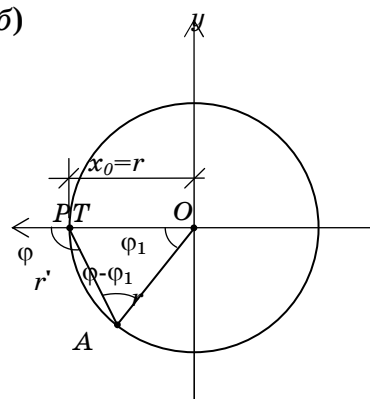


Рисунок 3

А координати світлового вектора в РТ на основі та твірній циліндра від зазначених областей небесної півсфери визначаються за формулами [5]:

$$x' = -\frac{1}{3} L_z \int_0^{\varphi} \int_0^{\beta} (\sin \beta)^2 \cos \varphi (1 + 2 \cos \beta) d\beta d\varphi, \quad y' = 0; \quad (7)$$

$$z' = -\frac{1}{3} L_z \int_0^{\varphi} \int_0^{\beta} \cos \beta \sin \beta (1 + 2 \cos \beta) d\beta d\varphi,$$

де $\varphi \in [0, 2\pi]$ для РТ на основі, $\varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]$ для РТ на твірній, а кут β визначається з (4) для відповідних випадків розташування РТ.

Багаторазове відбивання світла всередині СШ змодельоване послідовним відбиванням. На рис. 4 показано залежності прямої освітленості точок твірної від їх висоти на СШ - 3, освітленості відбитим після k відбивань світлом - 2 та сумарної (прямої і відбитої) освітленості - 1 для таких умов $R=1$, $H=3$, $\rho=0,8$, $k=8$, $L_z=1$.

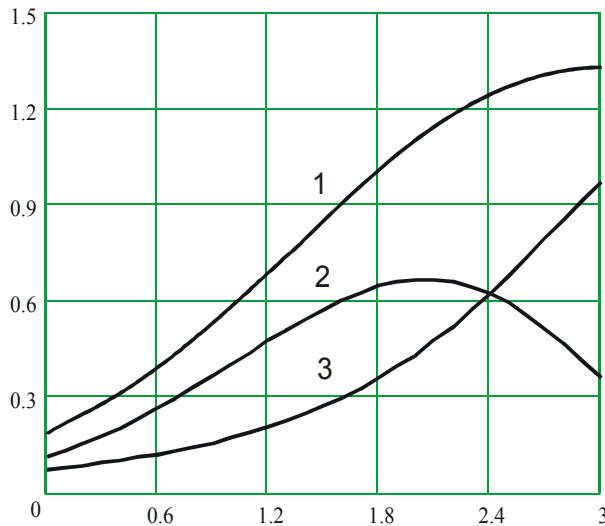


Рисунок 4

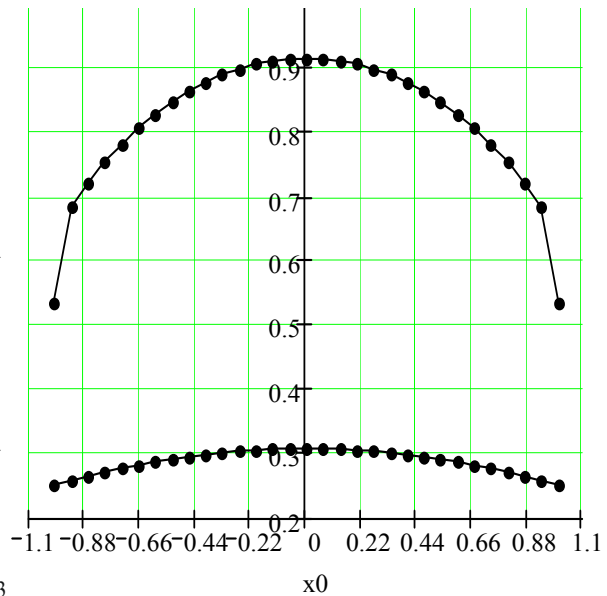


Рисунок 5

Сумарна освітленість твірної була підґрунтям для розрахунку освітленості точок на її основі світлом, відбитим від внутрішньої поверхні СШ. Освітленість РТ на нижній основі циліндра СШ від прямого та відбитого світла E дорівнює їх сумі. На рис. 5 показано графіки сумарної освітленості E від прямого та відбитого світла на нижній основі СШ (верхній графік) та прямої освітленості (нижній графік). Тоді світловий потік на виході з СШ визначимо, інтегруючи по поверхні її нижньої основи:

$$E_{vuh} = L_z \int_0^{2\pi} \int_0^R E \rho d\rho d\varphi_1. \quad (8)$$

Ефективність СШ K_p у відсотках визначиться відношенням:

$$K_p = \frac{F_{vh}}{F_{vuh}} 100\%. \quad (9)$$

На рис. 6 показано залежності ефективності СШ від кількості відбивань світла для різних значень коефіцієнта світловідбивання (від 0,1 до 0,9). З рисунку видно, що для малих коефіцієнтів світловідбивання (до 0,6) ефективність СШ несуттєво залежить від кількості відбивань, і практично достатньо 5-6 відбивань, а для великих коефіцієнтів світловідбивання (більше 0,6) необхідно для відтворення реальної картини 9-10 відбивань світла.

На рис. 7 показано залежності світлопропускання циліндричних СШ від відношення R/H (індекс СШ) при $\rho = 0,88$ за даними [3] – 1, [4] – 3 та за результатом розрахунку авторів – 2 ($k = 8$). Графік 3 значно відхиляється від інших двох графіків, що пояснюється надмірними спрощеннями, прийнятими в [4]. Графік 2, починаючи приблизно з індексу СШ 0,7, практично збігається з графіком 1, що отриманий експериментально. Тобто збігається для світлопрорізів, що є вже швидше зенітними ліхтарями круглої форми, для яких відбите стінками світло не відіграє таку значну роль, як для СШ. На жаль в [3] не описуються умови експерименту та устаткування. Але в роботі [2] того ж автора зазначається, що він проводив теоретичні та експериментальні дослідження для рівнояскравого небосхилу, а не для небосхилу з розподілом яскравості за Муном-Спенсер (стандарт МКО).

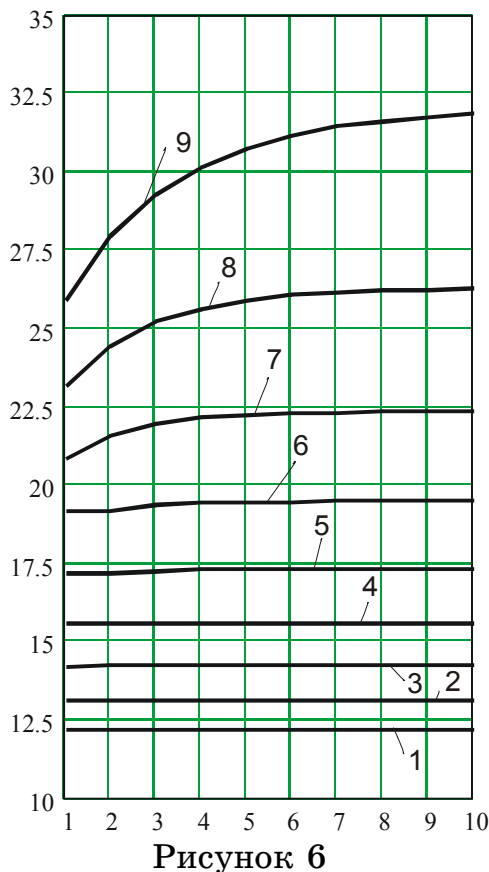


Рисунок 6

ками світло не відіграє таку значну роль, як для СШ. На жаль в [3] не описуються умови експерименту та устаткування. Але в роботі [2] того ж автора зазначається, що він проводив теоретичні та експериментальні дослідження для рівнояскравого небосхилу, а не для небосхилу з розподілом яскравості за Муном-Спенсер (стандарт МКО).

Висновки. Розроблений метод і його програмна реалізація в середовищі MathCad дозволяють точніше визначити ефективність світлопропускання циліндричних СШ з дифузним відбиванням світла і відповідно раціонально підбирати СШ. Подальші дослідження можна спрямувати на автоматизацію розрахунку освітленості від СШ, визначення їх необхідного числа

та раціонального розміщення, виходячи з призначення та розмірів приміщення.

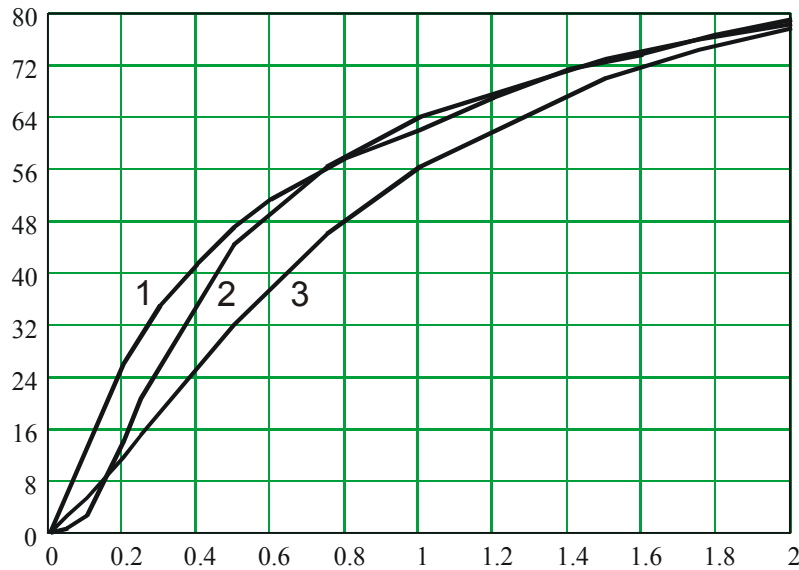


Рисунок 7

ЛІТЕРАТУРА

1. Земцов В.А. Естественное освещение помещений через зенитные фонари шахтного типа // Исследования по строительной светотехнике. Труды НИИСФ. – М., 1981. – С. 28-31.
2. Земцов В.А. К расчёту естественного освещения помещений с зенитными фонарями // Исследования по строительной светотехнике. Труды НИИСФ. – М., 1984. – С. 56-58.
3. Земцов В.А. Светопропускание проёмов зенитных фонарей направленного отражения // Вопросы качества естественного и искусственного освещения зданий. Труды НИИСФ. – М., 1980. – С. 70-77.
4. Киреев Н.Н. Метод расчёта коэффициента светопропускания фонарей без заполнения // Светотехника. – 1975. – №8. – С. 10-12.
5. Пугачов Є.В. Дискретне геометричне моделювання скалярних і векторних полів стосовно будівельної світлотехніки: Дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 – К., 2001. – 353 с.

Получено 14.03.2006 г.

ВІДОБРАЖЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТОРУ K^4

Постановка проблеми. Формування сфер n -вимірному простору належить до числа задач, які розв'язує багатовимірна геометрія евклідового простору [1]. Частинні випадки відображення сфер використовуються у комплексному просторі при розв'язанні деяких задач, які полягають у формуванні замкнених областей параметрів.

Аналіз останніх досліджень. Основні тригонометричні функції косинус і синус комплексного аргументу одержують заміною дійсного значення аргументу на комплексне значення $t = T + i\tau$. В літературних джерелах перед знаком тригонометричної функції користуються співмножником у вигляді дійсного числа [2], що дорівнює функції:

$$\begin{aligned}\omega &= \cos t = \cos(T + i\tau) = \cos T \operatorname{ch} \tau - i \sin T \operatorname{sh} \tau; \\ z &= \sin t = \sin(T + i\tau) = \sin T \operatorname{ch} \tau + i \cos T \operatorname{sh} \tau.\end{aligned}\tag{1}$$

Параметричні рівняння сфер, до складу яких входять основні тригонометричні функції, містять значення амплітуди. Для комплексного простору амплітуда набуває комплексне значення $R = r + i\bar{r}$. Значення обидвох функцій також комплексні $\omega = u + iv$ та $z = x + iy$, тому простором відображення основних тригонометричних функцій слугують чотиривимірні комплексні простори. З урахуванням комплексного значення R основні тригонометричні функції мають вигляд

$$\begin{aligned}\omega &= u + iv = R \cos(T + i\tau) = R(\cos T \operatorname{ch} \tau - i \sin T \operatorname{sh} \tau); \\ z &= x + iy = R \sin(T + i\tau) = R(\sin T \operatorname{ch} \tau + i \cos T \operatorname{sh} \tau).\end{aligned}\tag{2}$$

Для дійсних значень амплітуди r основні тригонометричні функції мають вигляд [3]:

$$\begin{aligned}\omega &= u + iv = r \cos T \operatorname{ch} \tau - ir \sin T \operatorname{sh} \tau; \\ z &= x + iy = r \sin T \operatorname{ch} \tau + ir \cos T \operatorname{sh} \tau.\end{aligned}\tag{3}$$

Формування цілей статті. Для формування сфер комплексного простору необхідно розробити геометричні засоби у вигляді комплексних та аксонометричних проєкцій подання багатовидів як моделей основних тригонометричних функцій комплексного простору.

Основна частина. При дійсних значеннях аргументу T ($T=0$) маємо вирази тригонометричних функцій у площинах дійсних змінних ouT і oxT :

©А.Г. Ренкас, 2006

$$\begin{aligned}\omega &= u = r \cos T; \\ z &= x = r \sin T.\end{aligned}\tag{4}$$

Для уявних значень аргументу τ ($T=0$) маємо вирази тригонометричних функцій у площинах $oi\tau u$ та $oi\tau iy$

$$\begin{aligned}\omega &= u = r \operatorname{ch} \tau; \\ z &= iy = ir \operatorname{sh} \tau.\end{aligned}\tag{5}$$

Якщо вирази (4) тригонометричних функцій визначають сферу двовимірного простору

$$\omega^2 + z^2 = u^2 + x^2 = r^2,\tag{6}$$

то вирази (5) визначають криву лінію комплексної площини $oiyu$:

$$\omega^2 + z^2 = u^2 + (iy)^2 = r^2 (\operatorname{ch}^2 \tau + (\operatorname{ish} \tau)^2).$$

Розкриши значення уявної одиниці, маємо

$$u^2 - y^2 = r^2,\tag{7}$$

звідки одержуємо залежність

$$u = \pm \sqrt{r^2 + y^2},\tag{8}$$

що реалізується кривою лінією $oiyu$.

Проекції гіперповерхонь як графічних моделей основних тригонометричних функцій одержимо, використовуючи вирази (3).

Перетином поверхонь як проекцій основних тригонометричних функцій площинами рівня it_j одержуємо лінії каркасів, що описуються рівняннями:

$$\begin{aligned}u_j &= r \operatorname{ch} \tau_j \cos T; \\ iv_j &= -ir \operatorname{sh} \tau_j \sin T; \\ x_j &= r \operatorname{ch} \tau_j \sin T; \\ iy_j &= ir \operatorname{sh} \tau_j \cos T.\end{aligned}\tag{9}$$

З рівнянь (9) видно, що проекції являють тригонометричні функції дійсного аргументу T , амплітуда яких залежить від положення січної площини τ_j (рис. 1).

Перетином поверхонь як проекцій основних тригонометричних функцій площинами рівня T_j одержуємо лінії каркасів, які описуються рівняннями

$$\begin{aligned}
 u_j &= r \cos T_j \operatorname{ch} \tau; \\
 iv_j &= -ir \sin T_j \operatorname{sh} \tau; \\
 x_j &= r \sin T_j \operatorname{ch} \tau; \\
 iy_j &= ir \cos T_j \operatorname{sh} \tau.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

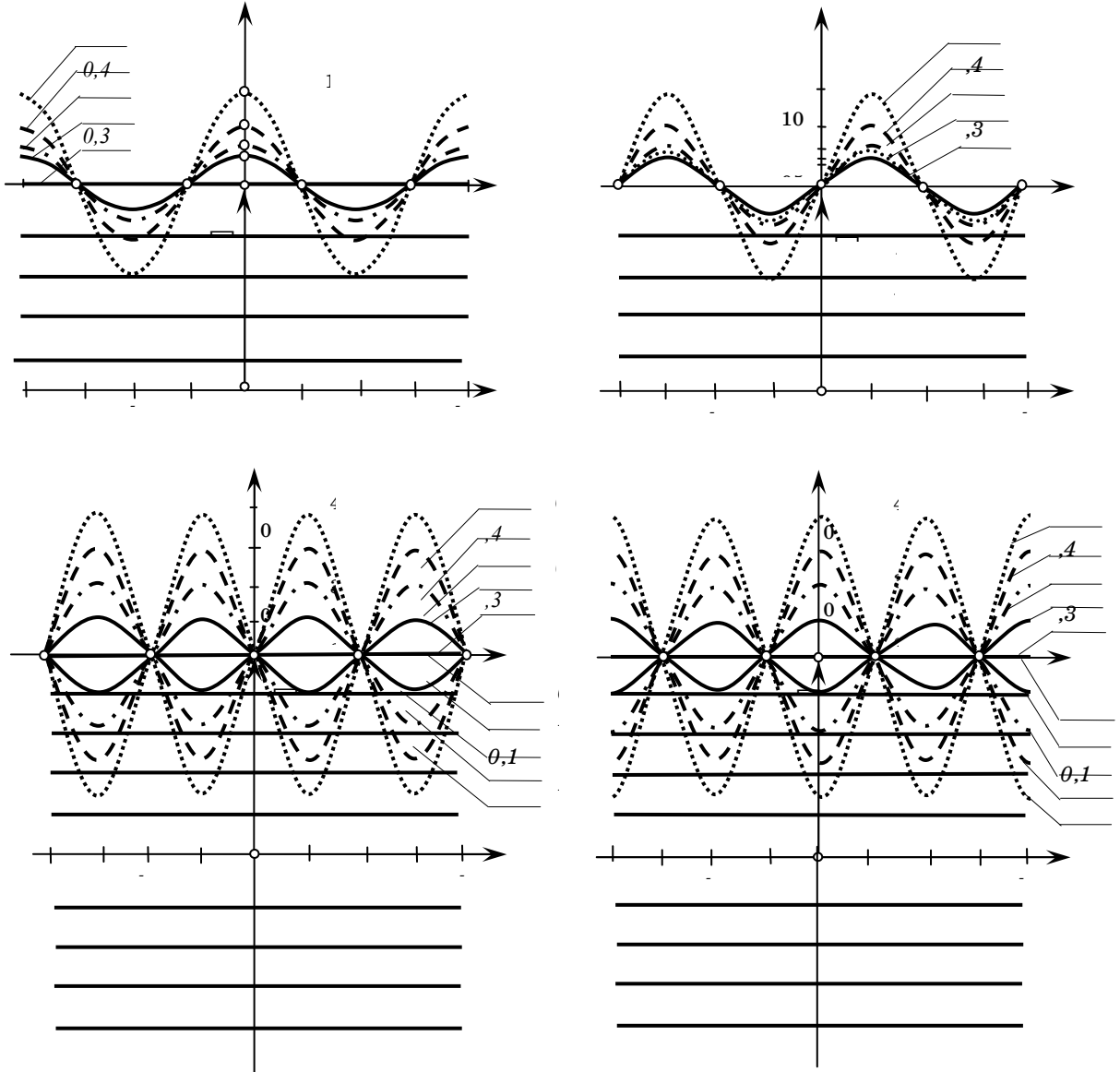


Рис.1. Проекції складових основних тригонометричних функцій у січних площинах τ_j

З рівнянь (10) видно, що проекції являють гіперболічні функції косинуса та синуса, вигляди яких визначаються положенням січної площини T_j (рис. 2).

Використовуючи приведені проекції основних тригонометричних функцій у двовимірних площинах, побудуємо їх проекції у тривимірних комплексних підпросторах ouT_{it} , $oivT_{it}$, oxT_{it} , $oiyT_{it}$ (рис. 3).

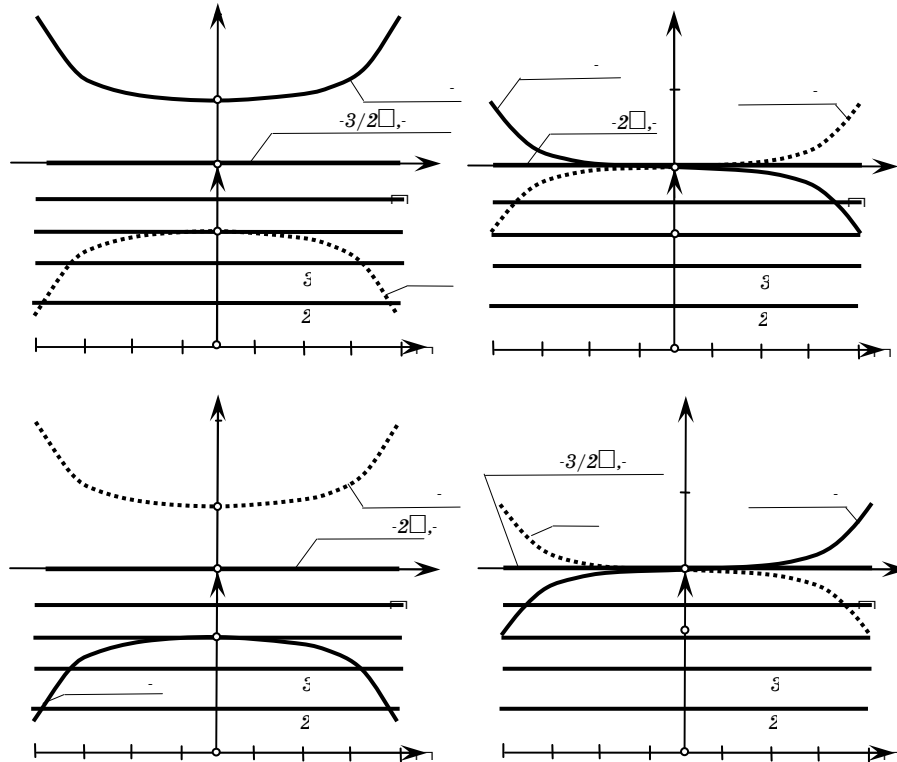


Рис.2. Проекції складових основних тригонометричних функцій у січних площинах T_j

Аналіз дво- і тривимірних проекцій основних тригонометричних функцій показує, що їх дійсні та уявні частини мають нулі з періодом Π в усій двовимірній комплексній площині $oT_i\tau$ та є періодичними, амплітуди усіх складових змінюються пропорційно до зміни гіперболічних $ch\tau$ і $sh\tau$.

Прирівнюємо обидві тригонометричні функції до нуля:

$$\begin{aligned}\omega = u + iv &= \cos Tch\tau - i\sin Tsh\tau = 0; \\ z = x + iy &= \sin Tch\tau + i\cos Tsh\tau = 0.\end{aligned}\tag{11}$$

Висновки. Для рівності нулю комплексних значень ω і z потрібно, щоб дорівнювали нулю дійсна і уявна частини одночасно. При $\tau=0$ уявні частини обидвох виразів (11) дорівнюють нулю. Дійсні частини являють вирази $u = \cos T = 0$, $x = \sin T = 0$, які дорівнюють нулю відповідно при $T=(2n-1)\pi / 2$ і $n\pi$. При інших значеннях τ з періодом $n\pi/2$ перетворюються у нуль по чергово дійсні та уявні частини (11).

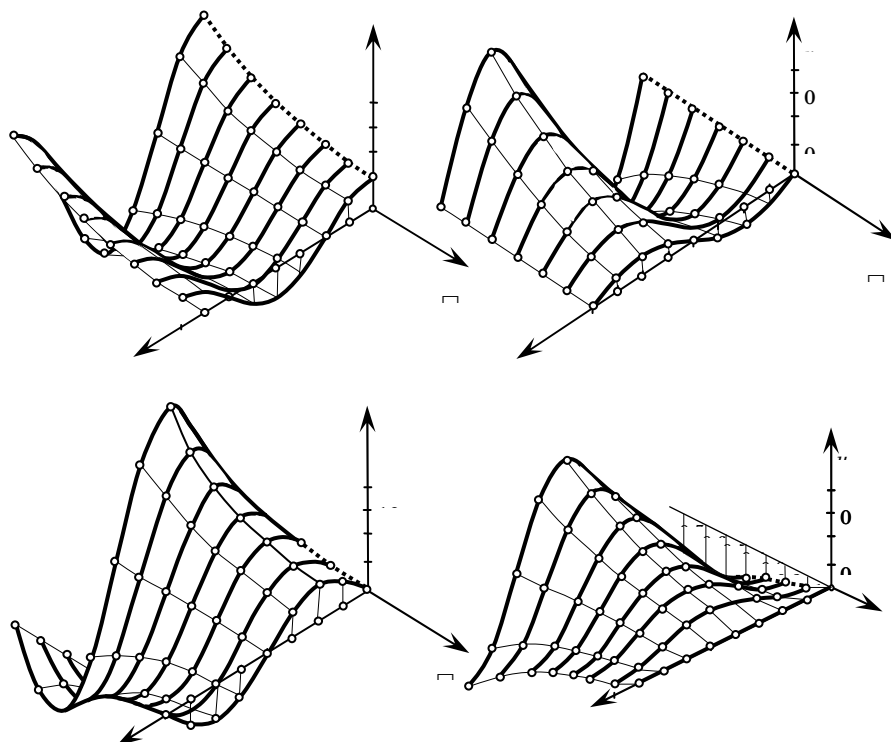


Рис. 3. Основні тригонометричні функції у тривимірних комплексних підпросторах при значеннях амплітуди r

ЛІТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства - М.:Наука, 1966.- С. 215 - 232.
2. Мартин Є.В. Визначення деяких метричних характеристик лінійної аналітичної функції комплексних змінних // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КДТУБА, 1998. - Вип. 64. - С. 112-115.
3. Gumen M.S., Martyn E.V., Renkas A.G.. Graphic representation of the multikinds of the complex space K^4 // Праці X-ї Всесвітньої конференції з прикладної геометрії та графіки. Том 1. - К.: КНУБА, 2002. - С. 149-151.

Получено 20.03.2006 г.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА В АТМОСФЕРЕ ПРИ ЯСНОМ НЕБЕ

Постановка проблемы. В задачах оптимизации формы зданий по критерию энергосбережения необходимо учитывать тепловое излучение атмосферы и земли. Для этого требуется определять энергетическую яркость небосвода и подстилающей поверхности в зависимости от их метеорологических и физических показателей. Существующие методы расчета лучистого теплообмена в атмосфере не ориентированы на решение оптимизационных задач в строительстве.

Анализ основных исследований и публикаций. Известны дифференциальные уравнения переноса длинноволновой (тепловой) радиации в атмосфере [1, 2]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_{\lambda}(h, \vartheta)}{\partial h} &= \frac{k_{\lambda}}{\cos \vartheta} \rho [G_{\lambda}(h, \vartheta) - E_{\lambda}(h)], \\ \frac{\partial U_{\lambda}(h, \vartheta)}{\partial h} &= \frac{k_{\lambda}}{\cos \vartheta} \rho [E_{\lambda}(h) - U_{\lambda}(h, \vartheta)],\end{aligned}\quad (1)$$

где $G_{\lambda}(h, \vartheta)$ – интенсивность монохроматического излучения, направленного из верхней полусферы (нисходящее излучение); $U_{\lambda}(h, \vartheta)$ – тоже, из нижней полусферы (восходящее излучение); λ – длина волны; h – высота расчетной точки; ϑ – угол между направлением луча и вертикалью; k_{λ} – массовый коэффициент поглощения; ρ – плотность поглощающего излучение вещества; $E_{\lambda}(h)$ – функция Планка для интенсивности излучения абсолютно черного тела при температуре атмосферы на высоте h . Граничными условиями для решения этих уравнений являются:

$$G_{\lambda}(\infty, \vartheta) = 0; \quad U_{\lambda}(0, \vartheta) = \delta E_{\lambda}(0) + 2(1 - \delta) \int_0^{\pi/2} G_{\lambda}(0, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta, \quad (2)$$

где δ – относительный коэффициент поглощения подстилающего слоя.

На практике расчеты тепловых потоков и энергетических яркостей в атмосфере делаются с помощью радиационных номограмм [1]. Эти методы не предназначены для решения оптимизационных задач в строительстве.

© О.В.Сергейчук, 2006

Постановка задачи. Разработать геометрическую модель теплового излучения системы атмосфера-земля при ясном небе, ориентированную на решение оптимизационных задач в строительстве, и реализовать ее в виде пакета m-файлов в системе компьютерной математики "Matlab".

Основная часть. При разработке геометрической модели излучения приняты следующие допущения:

1. Земля – шар, радиуса 6371,21 км.
2. Атмосфера ограничена высотой 25 км. Она изотропная и представляет собой полупрозрачную среду для тепловой радиации.
3. Поглощающими (и, соответственно, излучающими) веществами в атмосфере являются водяной пар, углекислый газ и озон. В слое атмосферы высотой 25 км от поверхности земли сосредоточен практически весь водяной пар и более 95% углекислого газа. Распределение водяного пара по высоте подчиняется формуле Зюринга [2]

$$e = e_0 \cdot 10^{-\frac{h}{6} - \frac{h^2}{120}},$$

где e и e_0 – давление водяного пара на высоте h , км, и на поверхности Земли ($h=0$), соответственно. Объемное содержание углекислого газа в атмосфере постоянно и равняется 0,033%. Отношение его плотности к плотности сухого воздуха составляет 1,529 [2].

4. Озон сосредоточен в слое толщиной 3,4 мм, который находится на высоте 20 км от поверхности Земли. Его температура равна средневзвешенной (по массе) температуре озона в атмосфере. Такое допущение для модели, рассчитанной на тепловую оптимизацию зданий вполне корректно, так как высота даже 200-этажного здания очень незначительна в сравнении с высотой слоя, где сосредоточена основная масса озона (в умеренных широтах - 19÷21 км [2]).
5. Температура t в атмосфере меняется с высотой h следующим образом:

- от подстилающей поверхности до 1 м

$$t = t_z + (t_0 - t_z) \sqrt{2h - h^2}, \quad (3)$$

где t_z – температура подстилающей поверхности, t_0 – расчетная температура воздуха на высоте 2 м. Интерполяционная кривая, которая описывается формулой (3) – четверть эллипса, заклю-

ченная между его осями. Такое распределение температуры хорошо соответствует распределению в слое термической шероховатости.

- от 1 метра до верхней границы приземного слоя (до высоты 50 м) температура постоянна и равняется t_0 .

- выше 50 м и до верхней границы тропосферы (до температуры $-56,5^\circ\text{C}$) температура меняется по линейному закону, причем средний градиент температуры в тропосфере равен $6,5^\circ\text{C}$ на 1 км.

- выше тропосферы до высоты 25 км находится тропопауза, где температура постоянная и равняется $-56,5^\circ\text{C}$.

6. Коэффициенты поглощения зависят от температуры и давления поглощающего вещества и определяются формулами [1]

- для водяного пара и углекислого газа:

$$k_{\lambda}(h) = k_{\lambda 0} \left(\sqrt{\frac{p(h)}{p_0}} \cdot \sqrt[4]{\frac{T_0}{T(h)}} \right);$$

- для озона:

$$k_{\lambda}(h) = k_{\lambda 0} \sqrt[4]{\frac{p(h)}{p_0}},$$

где $k_{\lambda 0}$ – значение коэффициента поглощения на некоторой фиксированной высоте, где температура равняется T_0 , К, а давление – p_0 ; h – высота, где рассчитывается k_{λ} .

7. Подстилающая поверхность – серое изотропное тело, имеющее температуру t_z [1].

8. Для получения значений интегральных энергетических яркостей нисходящего и восходящего потоков пределы интегрирования ограничиваются длинами волн 4 и 99 мкм. В соответствии с законом М.Планка, на эту полосу приходится около 99% излучения абсолютно черного тела при температурах, имеющих место в атмосфере. Учитывая очень сложный селективный характер излучения атмосферных газов, вся полоса разбита на 37 достаточно узких спектральных участков, в границах которых коэффициент поглощения при фиксированных температуре и давлении считается постоянным. Такое упрощения общепринято. Обычно число участков равно 15÷25. Значения коэффициентов поглощения приняты по данным [1-3], с учетом приведения их к единым исходным условиям (таблица1).

Интегрирование дифференциальных уравнений (1) с учетом (2) и принятых допущений дает следующие формулы для определения энергетических яркостей нисходящего и восходящего потоков:

$$\lambda = 1, 2, 3, \dots, 37;$$

$$G(h, \alpha) = \sum_{\lambda} \int_h^{25000} \sum_{i=1}^3 k_{\lambda i}(\xi) \cdot \rho_i(\xi) \cdot k_{\alpha}(\xi) \cdot E_{\lambda}(\xi) \cdot e^{-\int_{h=1}^{\xi} \sum_{i=1}^3 k_{\lambda i}(\zeta) \cdot \rho_i(\zeta) d\zeta} d\xi;$$

$$U_{\lambda}(0, \alpha) = \delta \cdot E_{\lambda}(0) + 2 \cdot (1 - \delta) \int_0^{\pi/2} G_{\lambda}(0, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta; \quad (4)$$

$$U_{\lambda}(h, \alpha) = U_{\lambda}(0, \alpha) e^{-\int_0^h \sum_{i=1}^3 k_{\lambda i}(\zeta) \rho_i(\zeta) d\zeta} + \int_0^h \sum_{i=1}^3 k_{\lambda i}(\xi) \rho_i(\xi) k_{\alpha}(\xi) E_{\lambda}(\xi) e^{-\int_{\xi=1}^h \sum_{i=1}^3 k_{\lambda i}(\zeta) \rho_i(\zeta) d\zeta} d\xi;$$

$$U(h, \alpha) = \sum_{\lambda} U_{\lambda}(h, \alpha)$$

В формулах (4) вместо угла ϑ принят угол α - угол наклона луча к плоскости горизонта. $-90^{\circ} \leq \alpha \leq 90^{\circ}$. Для восходящего потока он отрицателен.

Таблица 1

Коэффициенты поглощения радиации водяным паром, углекислым газом и озоном на принятых спектральных участках при $T_0 = 290$ К, $p_0 = 1013,2$ ГПа

Ширина участка λ , мкм	Коэффициент поглощения			Ширина участка λ , мкм	Коэффициент поглощения		
	Водяно-го пара $k_{\lambda 1}$, м ² /кг	Углекислого газа $k_{\lambda 2}$, м ² /кг	Озона $k_{\lambda 3}$, см ⁻¹		Водяно-го пара $k_{\lambda 1}$, м ² /кг	Углекислого газа $k_{\lambda 2}$, м ² /кг	Озона $k_{\lambda 3}$, см ⁻¹
4÷5	0,01	0,09	0	21÷22	5,8	0	0
5÷5,5	4	0	0	22÷23	6,4	0	0
5,5÷6	19,8	0	0	23÷24	7,5	0	0
6÷6,5	9,8	0	0	24÷25	8	0	0
6,5÷7	15,6	0	0	25÷26	5,3	0	0
7÷7,5	4,6	0	0	26÷27	9,3	0	0
7,5÷8	1,28	0	0	27÷28	11,6	0	0
8÷8,5	0,34	0	0	28÷29	13,6	0	0
8,5÷9	0,01	0	0	29÷30	15,2	0	0
9÷12	0,01	0	0,829	30÷31	17,9	0	0
12÷13	0,025	0	0	31÷32	17,9	0	0
13÷14	0,084	0,64	0,15	32÷33	17,9	0	0
14÷15	0,13	0,64	0,15	33÷34	19,8	0	0
15÷16	0,165	0,64	0,15	34÷35	11	0	0
16÷17	0,44	0,64	0	35÷43	200	0	0
17÷18	1,72	0	0	43÷55	200	0	0
18÷19	1,4	0	0	55÷83	500	0	0
19÷20	4,3	0	0	83÷99	500	0	0
20÷21	2,3	0	0				

Кроме того, вместо коэффициента $1/\cos\vartheta$, который в формулах (1) учитывает увеличение массы атмосферы в направлении ϑ , по сравнению с направлением на зенит, принят коэффициент $k_\alpha(\xi)$:

$$k_\alpha(\xi) = \frac{R + h + \xi}{\sqrt{(R + h + \xi)^2 - (R + h)^2 \cos^2 \alpha}},$$

где R – радиус Земли, h – высота расчетной точки над поверхностью земли, ξ – расстояние элементарного слоя толщиной $d\xi$ от расчетной точки. Коэффициент $1/\cos\vartheta$ не учитывает кривизну атмосферы, что вносит существенную ошибку при больших значениях ξ и малых α (рис. 1).

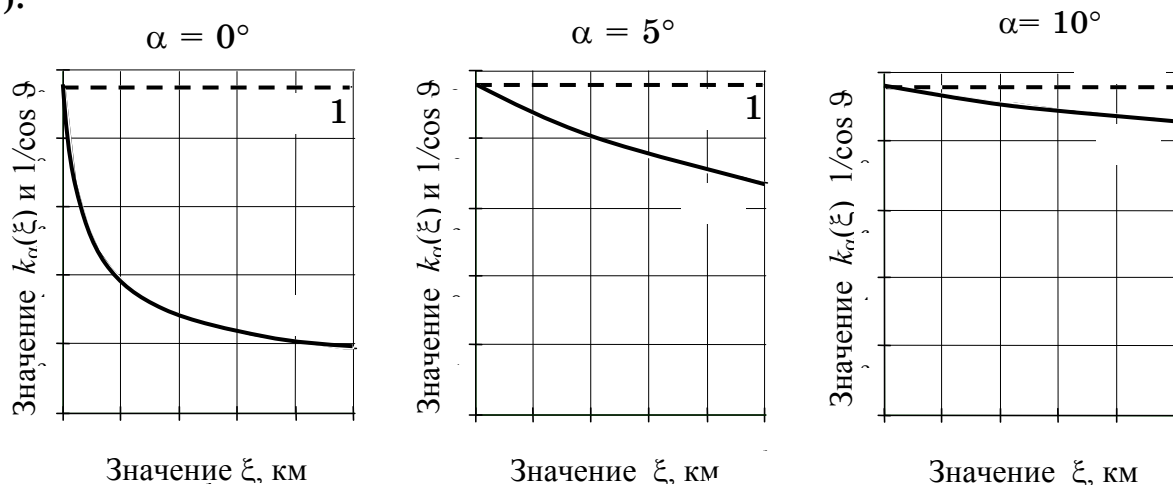


Рисунок 1 - Графики зависимости $k_\alpha(\xi)$ и $1/\cos \vartheta$ при разных значениях α ; $h = 0$.

Определение значений яркостей в зависимости от высоты расчетной точки над поверхностью земли и угла α реализовано в виде пакета m-файлов.

Выводы и перспективы. Разработанный пакет программ предназначен для дальнейшего применения в задачах оптимизации формы энергосберегающих зданий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондратьев К.Я. Лучистый теплообмен в атмосфере / Под ред. П.Н. Тверского. – Л.: ГИМИЗ, 1956. – 420 с.
2. Матвеев Л.Т. Курия общей метеорологии. Физика атмосферы. – СПб.: ГИМИЗ, 2000. – 778 с.
3. Хргиан А.Х. Физика атмосферы. Том 1. – Л.: Гидрометеиздат, 1978. – 247 с.

Получено 12.03.2006 г.

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ОБ'ЄКТАМИ З НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Постановка проблеми. Проектування систем керування динамічними об'єктами з нечіткими параметрами стало можливим із розвитком сучасних інформаційних технологій та математичних методів, що доповнюються наочними геометричними інтерпретаціями. Традиційні методи теорії систем та теорії керування показали при цьому свої вади. Проблеми розробки систем керування в ускладнених нечіткістю умовах займають особливе місце в інформаційних технологіях.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Проектування систем керування складними динамічними об'єктами з нечіткими параметрами досі проводилося з використанням традиційних детермінованих методів та алгоритмів [1,2]. На сучасному етапі, перевага віддається створенню модульних систем нечіткого регулювання (fuzzy control system, fuzzy controller), заснованих на положеннях нечіткої логіки (fuzzy-logic) [3].

Постановка задачі. На прикладі проектування системи керування динамічним об'єктом з нечіткими параметрами продемонструвати зв'язок між методами проектування систем керування та сучасними теоріями, заснованими на позиціях геометричної інтерпретації.

Основна частина. З розвитком інформаційних технологій спостерігається новий сплеск інтересу до застосування сучасних математичних методів і моделей до задач керування динамічними об'єктами з нечіткими параметрами. Нечіткість виникає, як у наслідок недостатньої вивченості об'єкту керування, так і через участь у керуванні людей. Раніше її часто не приймали до уваги або замінювали експертними оцінками та середніми значеннями. Сучасний підхід заснований на тому, що компонентами мислення є не числа, а елементи нечітких множин або класів, для яких перехід від "належності" до "неналежності" є плавним. Цей підхід дає наближені, але ефективні засоби описання поведінки систем з нечіткими параметрами. Теоретичні ж його засади цілком точні й суворі і не є джерелом нечіткості.

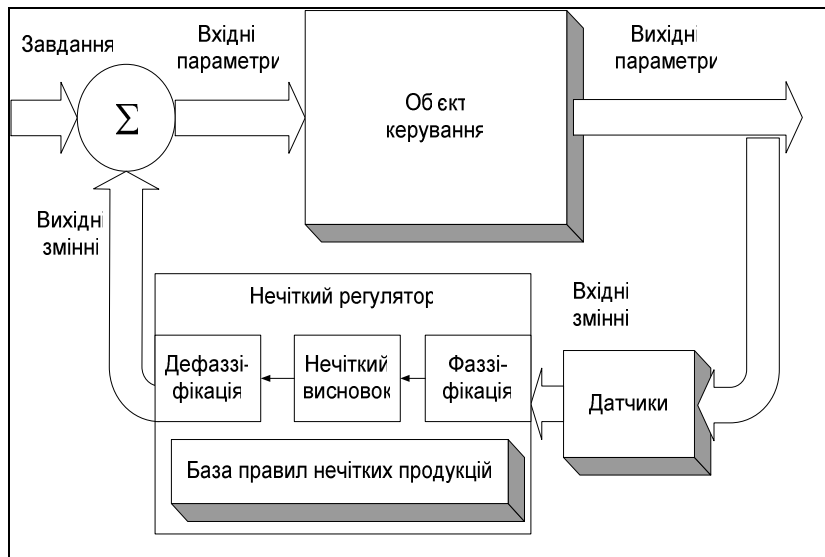


Рисунок 1 - Загальна схема системи нечіткого керування

Базова модель процесу нечіткого керування (рис.1) ґрунтується на представленні об'єкта та нечіткого регулятора як системи, де: об'єкт характеризується кінцевою множиною вхідних та вихідних параметрів; на вхід нечіткого регулятора надходять вхідні змінні з дат-

чиків; на виході, при використанні алгоритму нечіткого висновку, формуються вихідні змінні, що комбінуючись із значеннями вхідних параметрів об'єкта, корегують його поведінку у бажаному напрямку.



Рисунок 2 - Алгоритмічна схема нечіткого висновку

Основні етапи нечіткого висновку [5], а також процес переходу до чіткого рішення, наведені в алгоритмічній формі на рис. 2.

Далі наведемо реалізацію цього алгоритму на прикладі розробки системи керування динамічним об'єктом з нечіткими параметрами. В якості об'єкта керування виберемо систему кондиціонування повітря в приміщенні (рис. 3). Оскільки температура навколишнього середовища змінюється, це дестабілізує температуру повітря в приміщенні та призводить до необхідності регулювання режиму роботи кондиціонера. На систему нечіткого керування приходять із датчиків дві вхідні змінні: температура в приміщенні (T , °C) та швидкість її зміни ($S = dT/dt$, °C/хв). Вихідною змінною нечіт-

кого регулятора є поворот регулятора кондиціонера на відповідний кут відносно деякої точки, в якій кондиціонер є вимкненим: ліворуч

– подача холодного повітря; праворуч – подача теплового повітря. Реалізація задачі виконана у середовищі MATLAB 7.0.1 модулі Simulink із підключенням інструментарію Fuzzy logic.

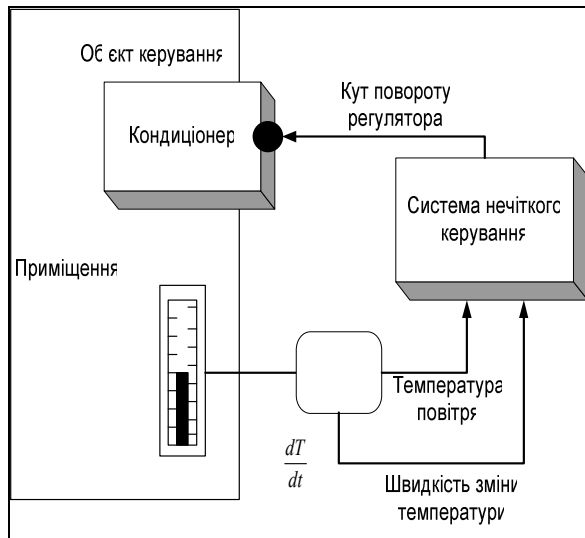


Рисунок 3 - Система нечіткого керування кондиціонером

1. If (T is Hot) and (S is PS) then (Angle is NB) (1)
2. If (T is Hot) and (S is NS) then (Angle is NS) (1)
3. If (T is Warm) and (S is PS) then (Angle is NM) (1)
4. If (T is Warm) and (S is NS) then (Angle is Z) (1)
5. If (T is Cold) and (S is NS) then (Angle is PB) (1)
6. If (T is Cold) and (S is PS) then (Angle is PS) (1)
7. If (T is Cool) and (S is NS) then (Angle is PM) (1)
8. If (T is Cool) and (S is PS) then (Angle is Z) (1)
9. If (T is Hot) and (S is Z) then (Angle is NM) (1)
10. If (T is Warm) and (S is Z) then (Angle is NS) (1)
11. If (T is Cold) and (S is Z) then (Angle is PM) (1)
12. If (T is Cool) and (S is Z) then (Angle is PS) (1)
13. If (T is Normal) and (S is PS) then (Angle is NS) (1)
14. If (T is Normal) and (S is NS) then (Angle is PS) (1)
15. If (T is Normal) and (S is Z) then (Angle is Z) (1)

Рисунок 4 - База правил нечітких продукцій

Спочатку, необхідно ввести лінгвістичні змінні, тобто, для вхідної змінної T задається набір з 5 термів (окремих нечітких значень): Cold – холодно, Cool – прохолодно, Normal – нормально, Warm – тепло та Hot – жарко. Для вхідної змінної S – набір з 3 термів: NS – негативна, Z – нульова, PS – позитивна. Для вихідної змінної Angle – набір з 7 термів: NB – великий негативний, NM – середній негативний, NS – малий негативний, Z – нульовий, PS – малий позитивний, PM – середній позитивний та PB – великий позитивний. Після завдання лінгвістичних змінних переходимо до формування бази нечітких правил, що формалізують емпіричні знання про предметну область. Для нашого прикладу формуємо базу з 15 правил, що формують поведінку нечіткого регулятора (рис. 4).

Згідно з алгоритмом нечіткого висновку, наступним етапом є процес фаззифікації, де встановлюється відповідність між значеннями вхідних змінних регулятора та відповідними термами лінгвістичних змінних. Після завершення цього процесу для всіх вхідних змінних задані конкретні значення функцій належності. Для заданого регулятора вони побудовані на основі базових функцій, запропонованих пакетом MATLAB (трапецеїдальних та трикутних), що мають наочну геометричну інтерпретацію, яку зображено на рис. 5.

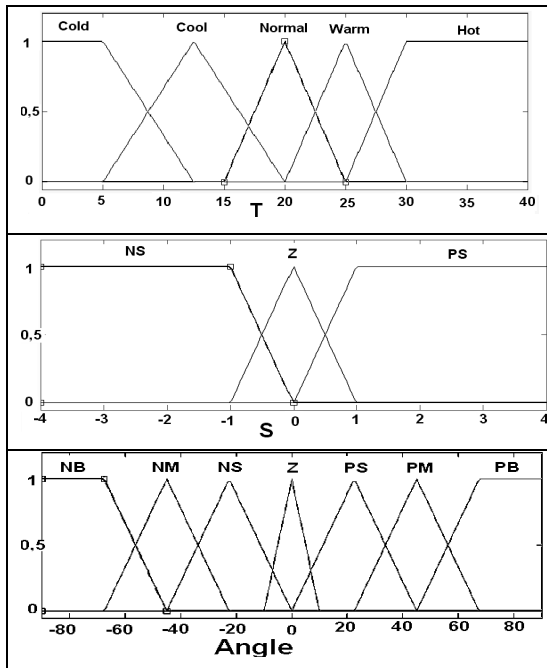


Рисунок 5 - Функції належності вхідних та вихідної змінних

Для прикладу, візьмемо температуру в приміщенні $+14^{\circ}\text{C}$, а швидкість її зміни $+0,5^{\circ}\text{C/хв}$. При заданих умовах нечіткі правила починають працювати, (рис. 6). Процес фаззифікації для першої вхідної змінної видає міру істинності 0,8 для терма Cool, а для другої вхідної змінної – 0,5 для терма Z та для терма PS (рис. 7). Відповідні підумови є в правилах нечітких продукцій з номерами 8 та 12 на рис. 4 і 6. Ці правила вважають активними та використовують в процесі агрегування, що визначає міри істинності умов по кожному з активних нечітких правил, та у нашому випадку дає у результаті однакові

числа 0,5.

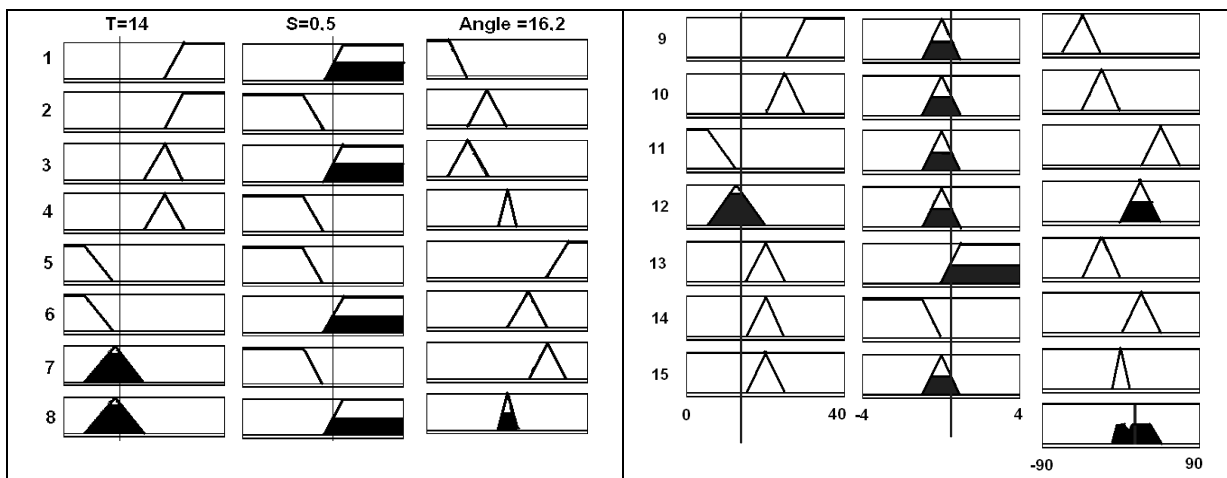


Рисунок 6 - Реалізація нечітких правил при заданих умовах

Проводячи процес активізації підвисновків у нечітких правилах 8 та 12, отримуємо дві нечіткі множини. Акумуляування висновків призводить до результуючої нечіткої множини, рис. 8. Дефаззифікації виявляє найкращу стратегія поведінки регулятора – $\text{Angle} = 16,2^{\circ}$ – подачу тепла. Результати при усіх можливих комбінаціях вхідних змінних, формують поверхню поведінки (рис. 9), за допомогою якої є можливість дослідити поведінку нечіткого регулятора унаочненням векторних полів (рис.10).

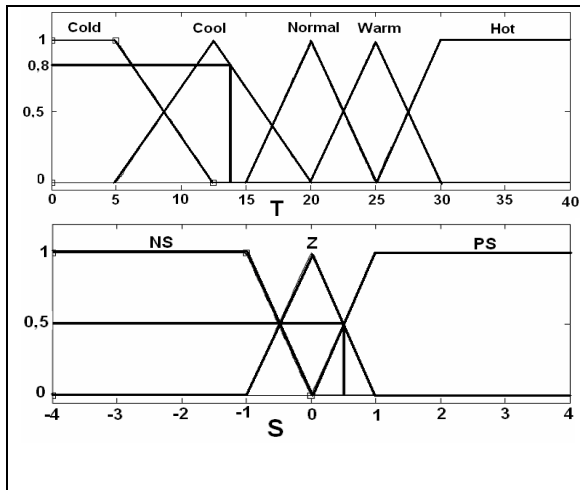


Рисунок 7 - Процес фазифікації
вхідних змінних

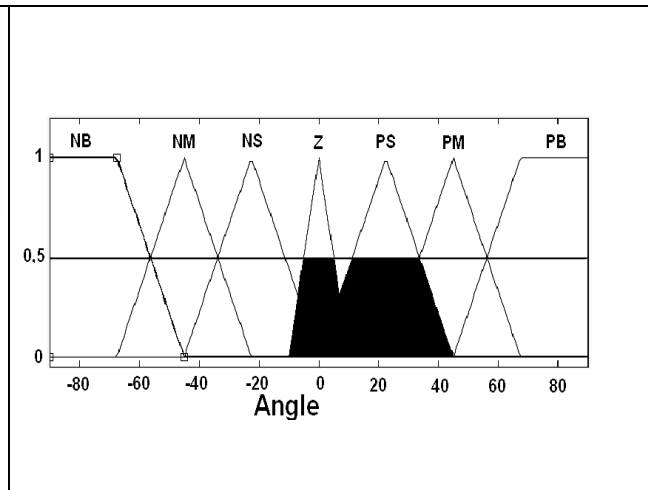


Рисунок 8 – Результат процесу
акумуляції

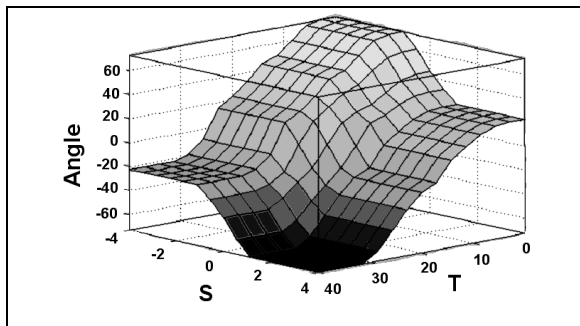


Рисунок 9 - Поверхня поведінки
нечіткого регулятора

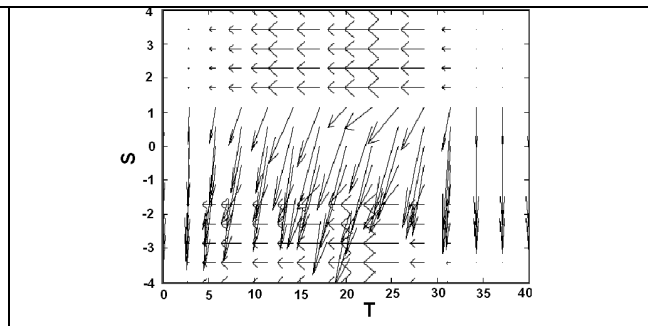


Рисунок 10 - Реалізація поведінки
регулятора на векторному полі

Висновки. Проектування та дослідження систем керування динамічними об'єктами з нечіткими параметрами, доцільно виконувати з використанням методів геометричного моделювання та теорії нечітких множин, супроводжуючи їх наочними геометричними інтерпретаціями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. - М.: "Лаборатория базовых знаний", 2001. – 616 с.
2. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления. - М.: "Лаборатория базовых знаний", 2002. – 832 с.
3. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. - М: Мир, 1976. – 165 с.
4. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH.- СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.

Получено 12.03.2006 г.

В.И. Слюсаренко, С.А. Недодатко, Т.П. Яровая

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕКОНСТРУИРОВАНИЕ ПАМЯТНИКОВ АРХИТЕКТУРЫ, СОДЕРЖАЩИХ СООСНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ, ПО ИХ ОДИНОЧНЫМ СНИМКАМ

Постановка проблемы. Изучение, сохранение, восстановление, реставрация памятников архитектуры имеют актуальное социально-культурное значение для каждой нации и являются свидетельством жизнестойкости народа. Известно, что многие сооружения и даже целые кварталы Варшавы, Санкт-Петербурга, Киева и других городов были восстановлены в таком же виде, который они имели до разрушения во время войны. Архивные снимки являются важным, а часто основным, источником информации об объекте при составлении проекта его реставрации. Поэтому новые методы метрической обработки снимков имеют непреходящее значение. Они позволяют заменить этап изготовления макетов объекта для установления его соответствия снимку, что по сути является методом проб и ошибок, точными расчётами. Это даёт возможность сэкономить время и значительные средства.

Реконструирование, т.е. определение форм и размеров пространственных объектов по их фотоснимкам, представляет собой сложную задачу геометрического характера. При этом не может быть общего метода реконструирования, так как вид поставленной задачи зависит от количества снимков, выполненных с различных точек съёмки, формы реконструируемых объектов и характера дополнительной информации о них. Поэтому эта задача должна ставиться применительно к конкретному случаю реконструирования. Однако, в зависимости от формы реконструируемых объектов и характера дополнительной информации о них, можно провести некоторую классификацию реконструирования по одиночным фотоснимкам. Если для реконструирования используют изображения углов плоских фигур, действительные величины которых заранее известны, то такой метод можно условно назвать «методом углов», при использовании очерков проекций поверхностей вращения – «методом очерков» и т.д.

© В.И. Слюсаренко, С.А. Недодатко, Т.П. Яровая, 2006

Анализ последних исследований и публикаций. Существующие методы геометрического реконструирования объектов по их фотоснимкам [1, 2] не исчерпывают информацию, содержащуюся на снимках, так как используют для этого в качестве исходного репера плоские фигуры или пространственные формы, ограниченные плоскими фигурами. В архитектурных формах часто встречаются поверхности вращения в виде колоннад, куполов... Попытки использования для реконструирования очерков проекций поверхностей вращения и ранее имели место [3, 4]. Для этого использовалось изображение одиночной поверхности, а недостающая для реконструирования информация восполнялась из сочетания различных дополнительных условий другого рода, наложенных на фотоснимок объекта.

Нерешенные части общей проблемы. В «чистом виде», т.е. при использовании только очерков проекций поверхностей, реконструирование представлено в работе [5] для ряда конгруэнтных поверхностей вращения типа колоннады, где определяются параметры аппарата проецирования, объекта и их взаимного положения. Но в архитектурных формах часто встречаются соосные поверхности вращения в виде барабанов, куполов и т.д., для которых задача реконструирования в выше указанном виде не рассматривалась.

Цель статьи. Решить задачу реконструирования по фотоснимку соосных поверхностей вращения, в которой по известным радиусам нескольких поверхностей и координатам их очерков от изображения оси определить:

- фокусное расстояние снимка и расстояние от точки съёмки до оси – параметров, необходимых для реконструирования других объектов, изображённых на снимке;
- радиусы утраченных поверхностей по координатам их очерков от изображения оси.

Основная часть исследования. Рассмотрим плоскую задачу в плоскости на уровне линии горизонта h (рис.1) соосных поверхностей вращения на примере купольной части собора при главной точке P' снимка, лежащей на изображении оси i' . Известны радиусы R_1 барабана и R_2 его карнизной части – кирпичных элементов, чаще всего сохраняющихся при разрушениях. Фокусное расстояние f снимка определяется по формуле

$$f = X_1 \cdot X_2 \sqrt{\frac{R_1^2 - R_2^2}{X_1^2 R_2^2 - X_2^2 R_1^2}}, \quad (1)$$

где X_1 и X_2 - координаты от изображения на снимке оси i' очерков барабана и его карнизной части.

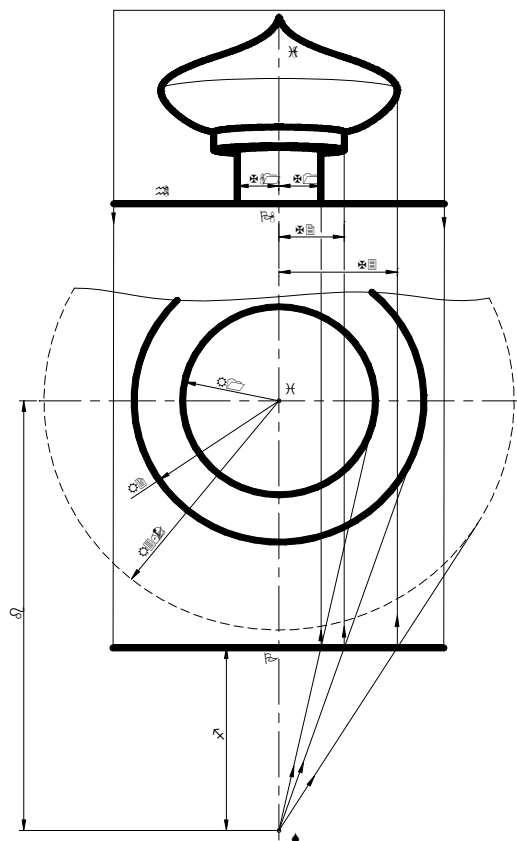


Рисунок 1

Расстояние b от точки съёмки S до оси i' поверхностей определяется по формуле

$$b = R_1 \cdot R_2 \sqrt{\frac{X_1^2 - X_2^2}{X_1^2 R_2^2 - X_2^2 R_1^2}}, \quad (2)$$

Радиус R_3 утраченного купола определяется по формуле

$$R_3 = \frac{bX_3}{\sqrt{X_3^2 + f^2}}, \quad (3)$$

где X_3 - координата от изображения оси i' очерка купола в самом большом его сечении.

Посредством натурных измерений определены точностные характеристики данного метода. Он даёт 5% относительную погрешность,

допустимую при реконструировании, при значении $\frac{R_1}{b} > 1$, где R_1 – наименьший радиус поверхностей, используемых для расчёта. Рассмотрен идеальный случай съёмки, когда главная точка P' снимка лежит на изображении i' оси поверхностей, при котором координата X_1' от оси i' левой части очерка равна координате X_1 его правой части. При их неравенстве для уменьшения относительной ошибки следует выбрать меньшее X_1 из этих значений. При $\frac{X_1'}{X_1} < 0,96$ относительная

ошибка выходит за указанный 5% предел, чем и ограничивается приемлемость данного метода реконструирования.

Выводы. Предложенный метод реконструирования фотоснимков может применяться самостоятельно, а при наличии дополнительных данных об объекте – в сочетании с другими методами. Если одна и та же величина может быть определена различными методами, то ни один из этих методов не может быть излишним, так как за счёт полученной избыточной информации можно определить значение искомой величины наиболее надёжно и оценить её точность.

Работа в виде методических указаний передана для использования в научно-реставрационное производственное управление Госкомитета Украины по делам строительства и может представлять интерес для архитекторов-реставраторов, специалистов в области фотограмметрии и начертательной геометрии, для студентов-архитекторов при прохождении измерительной практики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольберг О.А. Лекции по начертательной геометрии. – М. - Л.: Учпедгиз, 1947.-348с.
2. Евстифеев М.Ф., Пшеничный В.В. Особый случай реконструкций перспективного изображения // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1972, Вып.15. - С.160-164.
3. Пшеничный В.В. Построение прямоугольных проекций поверхностей вращения по центральной проекции // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1971, Вып.13. - С. 120-124.
4. Horn A. Konstruktive photogrammetrische Verfahren zur Rekonstruktion von Rotationsflächen // Periodica Polytechnica – Budapest, 1969. – Vol. 13. - N. 1. – P. 15-20.

5. Слюсаренко В.И., Яровая Т.П. Геометрическое реконструирование памятников архитектуры, содержащих ряд поверхностей вращения, по их фотоснимку // Геометричне та комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн. – К.: ВГО Українська асоціація з прикладної геометрії, 2005. – С. 121-124.

Получено 13.03.2006 г.

УДК

П.А.Стеблянко

ПРИМЕНЕНИЕ ДВУХМЕРНОГО КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Введение. При численном решении пространственных нестационарных задач теории термоупругопластичности как с использованием конечно-элементной модели, так и при конечно-разностном подходе представления исходного тела сложной формы возникает задача, связанная с аппроксимацией частных производных первого и второго порядка от искомых функций [2,3]. Предлагается решать ее при помощи похода, основанного на использовании для описания сложных геометрических объектов специально разработанных двухмерных кубических сплайнов.

Построение нормированного двухмерных кубических сплайна. Пусть в ортогональной криволинейной системе координат α, β задана точка $A(\alpha_i, \beta_j)$. Тогда для интерполяции некоторой функции $W(\alpha, \beta)$ в ее окрестности будем использовать такой полином

$$W(\alpha, \beta) = \sum_{m=0}^3 \sum_{n=0}^3 L_{mn}^{ij} (\alpha - \alpha_i)^m (\beta - \beta_j)^n. \quad (1)$$

В работе реализован вариант, когда значения искомых функций определялись на равномерной сетке. Представленная поверхность симметрична относительно осей координат и состоит из шестнадцати «склеенных» частей трех типов А, В, С.

Для угловых областей А (рисунок 1) исходя из условий в вершинах квадрата $A(0;0), B(0;1), C(1;0), D(1;1)$ вида

$$S_{2D}(0;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = 0,$$

© П.А.Стеблянко, 2006

$$S_{2D}(0;1) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(1;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(1;1) = W_D, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = W'_{D1}, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = W'_{D2},$$

из условий нормировки сплайна, условий непрерывности значений сплайна и его первых производных получено такое выражение

$$S_A(\xi; \eta) = L_A^{33} \xi^3 \eta^3 + L_A^{32} \xi^3 \eta^2 + L_A^{23} \xi^2 \eta^3 + L_A^{22} \xi^2 \eta^2. \quad (2)$$

Для областей B (рисунок 2) соседних с A и расположенных на границе исходя из условий в вершинах квадрата $C(0;0), D(0;1), E(1;0), F(1;1)$ вида

$$S_{2D}(0;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(0;1) = W_D, \\ \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = W'_{D1}, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = W'_{D2}, S_{2D}(1;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(1;1) = W_F, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = W'_{F2},$$

условий нормировки сплайна, условий непрерывности значений сплайна и его первых производных получено выражение

$$S_B(\xi; \eta) = L_B^{33} \xi^3 \eta^3 + L_B^{32} \xi^3 \eta^2 + L_B^{23} \xi^2 \eta^3 + L_B^{22} \xi^2 \eta^2 + L_B^{13} \xi \eta^3 + L_B^{12} \xi \eta^2 + L_B^{03} \eta^3 + L_B^{02} \eta^2 \quad (3)$$

Для центральных областей C (рисунок 3) исходя из условий в вершинах квадрата $D(0;0), N(0;1), F(1;0), M(1;1)$ вида

$$S_{2D}(0;0) = W_D, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = W'_{D1}, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = W'_{D2}, S_{2D}(0;1) = W_N, \\ \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = W'_{N1}, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(1;0) = W_F, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = W'_{F2}, S_{2D}(1;1) = W_M, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = 0,$$

условий нормировки сплайна, условий непрерывности значений сплайна и его первых производных получено

$$S_C(\xi; \eta) = \xi^3 [L_C^{33} \eta^3 + L_C^{32} \eta^2 + L_C^{31} \eta + L_C^{30}] + \xi^2 [L_C^{23} \eta^3 + L_C^{22} \eta^2 + L_C^{21} \eta + L_C^{20}] + \\ + \xi [L_C^{13} \eta^3 + L_C^{12} \eta^2 + L_C^{11} \eta + L_C^{10}] + L_C^{03} \eta^3 + L_C^{02} \eta^2 + L_C^{01} \eta + L_C^{00}. \quad (4)$$

Склейка поверхностей (2)-(4) производилась по 16 областям.

В общем случае можно записать выражение для двухмерного кубического сплайна:

$$S_{2D}(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=2}^3 \sum_{n=2}^3 L_A^{kn} \xi^k \eta^n, \text{ где } \left\{ \begin{array}{l} \xi = x+2, \eta = y+2, \quad x \in [-2;-1], y \in [-2;-1] \quad (A), \\ \xi = 2-y, \eta = x+2, \quad x \in [-2;-1], y \in [1;2] \quad (A_1), \\ \xi = -x+2, \eta = -y+2, \quad x \in [1;2], y \in [1;2] \quad (A_2), \\ \xi = y+2, \eta = -x+2, \quad x \in [1;2], y \in [-2;-1] \quad (A_3), \end{array} \right. \\ \\ \sum_{k=0}^3 \sum_{n=2}^3 L_B^{kn} \xi^k \eta^n, \text{ где } \left\{ \begin{array}{l} \xi = x+1, \eta = y+2, \quad x \in [-1;0], y \in [-2;-1] \quad (B), \\ \xi = y+1, \eta = x+2, \quad x \in [-2;-1], y \in [-1;0] \quad (B_1), \\ \xi = 1-y, \eta = x+2, \quad x \in [-2;-1], y \in [0;1] \quad (B_2), \\ \xi = x+1, \eta = 2-y, \quad x \in [-1;0], y \in [1;2] \quad (B_3), \\ \xi = -x+1, \eta = -y+2, \quad x \in [0;1], y \in [1;2] \quad (B_4), \\ \xi = -y+1, \eta = -x+2, \quad x \in [1;2], y \in [0;1] \quad (B_5), \\ \xi = y+1, \eta = -x+2, \quad x \in [1;2], y \in [-1;0] \quad (B_6), \\ \xi = -x+1, \eta = y+2, \quad x \in [0;1], y \in [-2;-1] \quad (B_7), \end{array} \right. \\ \\ \sum_{k=0}^3 \sum_{n=0}^3 L_C^{kn} \xi^k \eta^n, \text{ где } \left\{ \begin{array}{l} \xi = x+1, \eta = y+1, \quad x \in [-1;0], y \in [-1;0] \quad (C), \\ \xi = 1-y, \eta = x+1, \quad x \in [-1;0], y \in [0;1] \quad (C_1), \\ \xi = -x+1, \eta = -y+1, \quad x \in [0;1], y \in [0;1] \quad (C_2), \\ \xi = y+1, \eta = -x+1, \quad x \in [0;1], y \in [-1;0] \quad (C_3). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5)$$

При помощи непосредственной проверки можно убедиться в том, что в сечениях $x = 0$, $y = 0$ формула (5) дает известное выражение для нормированного одномерного кубического В-сплайна [1, 2].

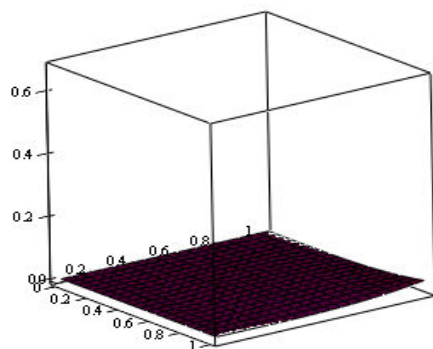


Рис.1

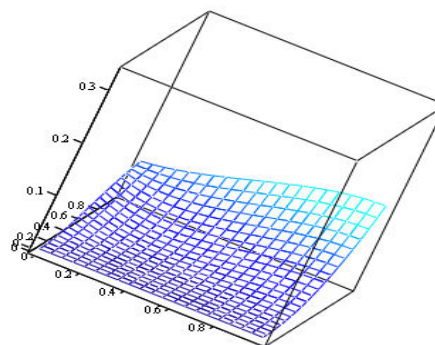


Рис.2

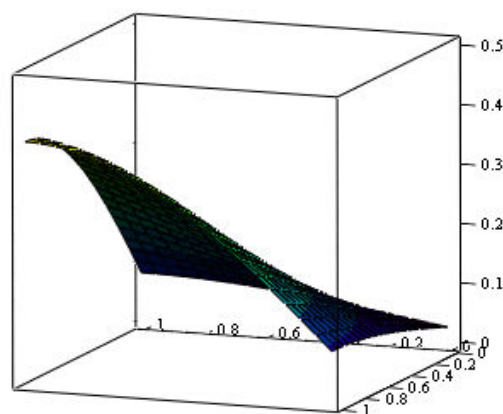
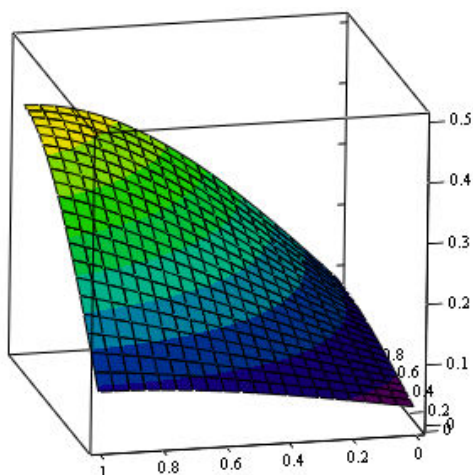


Рисунок 3

Расчетная формула. В общем случае сложная геометрическая поверхность может быть описана при помощи линейной комбинации двумерных кубических В-сплайнов (5)

$$W_m(x; y) = \sum_{l=1}^2 \sum_{n=1}^2 b_{i+l, j+n} S_{2D}(x; y). \quad (6)$$

При этом неизвестными являются коэффициенты $b_{i+l, j+n}$ при двумерных сплайнах (6). Они определяются из системы шестнадцати уравнений, которая сама записывается при помощи выражения (6) на основании данных в узлах (x_{i+r}, y_{j+q}) , $r, q = 0, 1, 2, 3$.

Выводы. Получено выражение для двумерного кубического В-сплайна, которое может применяться как для аппроксимации дифференциальных операторов полной системы уравнений в частных производных, так и использоваться для получения значений искомых функций с четвертым порядком точности по координатам между узлами пространственной сетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
2. Стеблянко П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304 с.
3. Стеблянко П.А. Методы решения нестационарных задач теории пластичности. - Тверь: Приз, 1999. – 424 с.

Получено 16.03.2006 г.

УДК 515.2, 378.147

Р.І.Таранова, І.П.Тарас

**ДОСВІД ПРОВЕДЕННЯ ЕКЗАМЕНАЦІЙНОГО
ТЕСТУВАННЯ НА КАФЕДРІ ІНЖЕНЕРНОЇ ТА
КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ ІФНТУНГ**

Постановка проблеми. Приєднання України до Болонського процесу потребує зміни традиційних підходів до навчального процесу: впровадження кредитно-модульної системи, модернізації контролю знань студентів. Одним з напрямків може бути введення тестування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання управління процесом підготовки спеціалістів розглядається багатьма вченими в галузі як педагогіки, так і спеціальних дисциплін. Особлива увага приділяється підсумковому контролю. При цьому відмічається можливість проведення його у вигляді тестування [1]. Але питанню підсумкового тестового контролю з конкретних дисциплін, особливо таких специфічних як нарисна геометрія, приділяється в літературі не достатньо уваги.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є розглянути здобутий досвід в проведенні підсумкового контролю знань студентів з графічних дисциплін за допомогою тестування.

Основна частина. *Мета і завдання контролю знань.* Завдання будь-якого іспиту, також і з нарисної геометрії, оцінити досягнута чи ні мета вивчення даного курсу відповідно до програми. В оцінку входить виявлення рівня засвоєння теоретичних знань, а також умінь і навичок, якими повинен оволодіти студент при вивченні курсу. У нарисній геометрії це вміння й навички рішення задач просторового характеру на плоскому комплексному кресленні графічними методами, яким в певній мері властивий формалізм.

© Р.І.Таранова, І.П.Тарас, 2006

Графічні задачі є тим інструментом, що повинен застосовувати студент у наступній практичній діяльності. Однією із цілей вивчення нарисної геометрії є також розвиток просторової уяви та мислення. Контроль повинен бути всебічним. Це означає високий ступінь охоплення контролем змісту навчального матеріалу (теорії й практики), глибину засвоєння змісту, осмислення.

Традиційний іспит. На традиційному екзамені з нарисної геометрії перевіряється знання теоретичного матеріалу, володіння символікою, уміння рішати задачі графічними методами й здатність студента пояснити хід рішення задачі. Завдання викладача проаналізувати результат відповіді та дати об'єктивну оцінку знань студента. Традиційний іспит проводиться, як правило, за білетами в письмовій формі, тому що завдання вимагають відповідей в графічній інтерпретації. На традиційному іспиті викладач при відповіді студента може задати йому додаткові питання, що уточнюють ті або інші моменти. При традиційному іспиті викладач більшою мірою здійснює індивідуальний підхід і враховує психологічні особливості студента, зокрема, активність студента, вміння включитися в роботу, логічно мислити, невразність студента й ін. Велике виховне значення приділяється бесіді викладача і студента. На іспиті загострюється почуття відповідальності студента за пророблену на протязі семестру роботу з даного курсу.

Проведення іспиту за допомогою тестування. У зимову сесію 2005 / 2006 року був проведений експеримент по прийому іспиту за допомогою тестових завдань. База даних була підготовлена для проведення екзамену в тестувальному центрі університету, де білет комплектується питаннями автоматично за допомогою генератора випадкових чисел. Перевірка правильності відповідей студента проводиться автоматично. В цьому році була проведена апробація цієї системи на кафедрі. Екзамен проводився в “напіваавтоматичному” режимі, хоча майже всі переваги повної атоматизації були збережені.

За основу поняття «тест» було прийнято наступне визначення: тест - це коротка точно сформульована й обмежена за часом задача. Тести були складені з усіх розділів курсу нарисної геометрії й відповідали діючим програмам. Для кожної спеціальності було складено свій набір білетів і тестів. Число тестів з кожного розділу було різним, але їх загальна кількість з кожного розділу була достатньою, щоб охопити навчальний матеріал і при цьому виключити повторен-

ня однакових завдань при складанні екзаменаційних білетів. Тести були чотирьох типів.

В завданнях першого типу студент повинен був проаналізувати креслення, вказати на якому з них геометрична фігура займає задане положення. В завданні давалося кілька комплексних креслень в основному у двох проекціях.

В завданнях другого типу містилося питання на знання основних понять нарисної геометрії. В завданнях цього типу креслення не давалося. Студент повинен був вибрати правильну відповідь із чотирьох - п'яти запропонованих.

Третій тип тестів був спрямований на виявлення знань алгоритмів рішення задач. В такому завданні були зазначені всі операції, які повинен виконати студент при графічному рішенні задачі на комплексному кресленні. В завданнях цього типу треба було вказати відповідь, в якій послідовність виконання дій при побудові тієї або іншої геометричної фігури була правильною.

В завданнях четвертого типу треба було вказати креслення, на якому була правильно визначена взаємна видимість фігур, наприклад, при перетині конуса та призми.

При складанні тестів ми виходили з наступних положень. Тести повинні включати завдання зі всіх розділів курсу. Формулювання завдання повинне бути максимально коротким та допускати тільки однозначну відповідь. Відповіді на завдання повинні бути в основному позитивні і лише в окремих випадках негативні. Креслення повинно включати мінімум надлишкової інформації.

Організація іспиту. Іспит проводився в одній академічній групі. Загальна чисельність студентів у групі не перевищувала 25 чоловік. Білет містив 30 завдань із різних розділів курсу. Завдання були розташовані послідовно за розділами і темам курсу, у тій же послідовності, в якій в семестрі вивчався матеріал. Завдання оцінювалися в три або чотири бали, у сумі за білетом студент міг набрати 100 балів. В чотирибальну систему сума набраних балів переводилася за загальноприйнятою шкалою. Ця інформація була доведена до студента за допомогою екзаменаційних бланків. Студентові також повідомлявся час, відведений на відповіді (60 хвилин), тобто в середньому дві хвилини на одне питання.

Час, витрачений студентами на відповіді по тестових завданнях, коливалося від 25-40 хвилин у добре встигаючих студентів, до 50-60 хвилин у погано встигаючих студентів. Перевірка всіх тестів даній групі виконувалася відразу, після іспиту.

Результати. Слід зазначити, що відмінно й добре встигаючі студенти могли одержати оцінку за результатами успішності на протязі семестру, тобто їм були поставлені "автомати". У всіх інших студентів оцінка, отримана на іспиті, як правило, відповідає успішності в семестрі.

Порівняння звичайного іспиту та екзамену за тестовими завданнями. Позитивна сторона прийому екзамену за тестами полягає в тому, що скорочується час, необхідний для проведення безпосередньо іспиту, а також час перевірки відповідей. Але тут не слід забувати, що викладач у кожному разі повинен проаналізувати результати іспиту й зробити відповідні висновки на майбутнє. Як би не була актуальна економія навчального часу, цим не можна зловживати.

При тестуванні реалізується більш формальний й, можливо, більш об'єктивний підхід до оцінки відповідей студента, тому що кожне тестове завдання вже оцінене, і «вартість» питання однакова у всіх білетах. При цьому особливості засвоєння знань не приймаються до уваги. По тесту важко сказати, як студент орієнтується в матеріалі, що вивчався: тільки на запам'ятовування й збереження в пам'яті, чи в нього сформовані необхідні якості мислення. Навчання, що орієнтоване тільки на запам'ятовування й збереження матеріалу в пам'яті, не може відповідати сучасним вимогам вищої школи. Можна сказати, що тестовими завданнями контролюється в основному теоретична частину навчального матеріалу, а практична частина фактично не контролюється. Невідомо як студент може рішення ту або іншу задачу нарисної геометрії, наскільки вірні були його міркування й графічні побудови. Можна звичайно заперечити проти такого твердження й довести, що якщо студент знає теорію, то він рішення і задачу. Однак, практика показує, що це далеко не так. До позитивних моментів тестових завдань можна віднести те, що навчальний матеріал розділений на малі дози, причому саме формулювання точне й коротке, і це якоюсь мірою для студента простіше запам'ятати, ніж використати цілу систему понять.

Одним із принципів педагогіки є принцип індивідуального підхо-

ду в навчанні, викладач повинен врахувати індивідуально-психологічні особливості студента, адже індивідуальні особливості й стилі мислення в людей різні. Одні студенти відразу дають відповідь, в тому числі й неправильну, а іншим потрібен певний час, але вони дають правильну відповідь.

Теоретичні знання студента з нарисної геометрії, як і з інших дисциплін, необхідно розглядати з погляду застосування їх до рішення практичних задач, тобто необхідно перевірити вміння й навички студента при рішенні задач. У нарисній геометрії - це рішення задач на комплексному кресленні графічними методами. На іспиті потрібно перевірити саме таке вміння студента. При перевірці рішення задачі з нарисної геометрії викладач повинен проконтролювати «правильність графічних побудов й отриманого результату, уміння студента обґрунтувати виконані побудови й довести, що він усвідомлено застосовує відомі йому графічні прийоми, використовуючи змістовні геометричні відносини» [2]. Формальне рішення студентами задачі з нарисної геометрії не є виключенням. На жаль, при прийомі іспиту за допомогою тестових завдань уміння й навички рішення задач графічним методом фактично не контролюються, тобто відсутній контроль досягнення однієї із цілей вивчення даного курсу, що не може вважатися нормальним. Не маючи можливості вести бесіду зі студентом під час екзамену-тестування, викладач не може виявити і інші специфічні моменти засвоєння дисципліни, зокрема рівень просторової уяви студента та ін.

Висновки. Основний висновок полягає в тому, що на екзамені із графічних дисциплін необхідно, поряд зі знанням теорії, контролювати вміння й навички студентів у рішенні задач графічними методами. Тому поряд з тестовими завданнями в екзаменаційний білет потрібно включити завдання, що вимагають виконання графічних побудов. Це підвищить якість і теоретичних знань, і практичних умінь, і навичок, необхідних студентів технічного вузу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Атаманчук П.С., Мендерецький В.В. Управління процесом фахового становлення вчителя фізики засобами контролю // Педагогіка і психологія. – 2005. - № 4 (49). - С. 74-84.
2. Гурова Л.Л. Психологический анализ решения задач. – Воронеж: Из-во Воронежского ун-та, 1976.- 327 с.

Получено 11.03.2006 г.

Ю.М. Терентьев

ВЫРОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ФЛОКЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕННО- ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Постановка проблемы. Теория распространения электромагнитных волн в пространственно – периодических структурах [1] является результатом анализа задач дифракции рентгеновского излучения на атомной структуре кристаллов [2], исследования распространения света в многослойных оптических покрытиях [3] и диэлектрических кристаллах [4], разработки и конструирования периодических структур для микроволновой электроники и ускорительной техники [5,6] . В последнее десятилетие теория распространения электромагнитных волн в пространственно – периодической среде в значительной мере развивается в связи с физикой фотонных кристаллов – диэлектрических кристаллов, в которых средствами полупроводниковой технологии создается периодическая пространственная модуляция диэлектрической проницаемости [7].

Общность математического аппарата связывает проблему распространения волн в пространственно – периодической среде с квантовомеханической задачей Блоха о движении в пространственно – периодическом потенциале. Физическим аналогом запрещенной энергетической зоны в теории распространения электромагнитных волн является частотная полоса непропускания волн, обусловленная их селективным отражением[8]. Прямым аналогом фотонных кристаллов здесь являются полупроводниковые сверхрешетки, в которых искусственно созданная периодическая структура используется для управления спектром носителей и явлениями переноса в полупроводниках [9]. С другой стороны, непропускание волн можно интерпретировать как развитие в системе неустойчивости параметрического типа, что определяет общность теории распространения волн с теорией колебаний[10]. Полосам непропускания в пространственно – периодических структурах соответствуют области параметрической неустойчивости и явление параметрического резонанса. Исследование параметрической неустойчивости, как метод анализа нелинейных колебаний вблизи стационарного состояния [11], соединяет теорию параметрических систем с задачами нелинейной физики [12].

© Ю.М. Терентьев, 2006

Разнообразие методов анализа, применяемых для исследования и расчета параметрических систем, вследствие не вполне выясненной области их применимости и степени точности, обращает внимание на модельные эталонные задачи, где аналитические и достаточно прозрачные численные методы позволяют проанализировать физику развития неустойчивости. С другой стороны, такие модельные задачи могут быть использованы для апробации методов, предназначенных для исследования сложных случаев, где аналитические возможности заведомо ограничены.

Анализ известных результатов и постановка задачи. Общепринятыми модельными задачами при анализе параметрической неустойчивости являются исследование неустойчивости решений дифференциального уравнения второго порядка Матье [13] и, с другой стороны, неустойчивости волн, в слоистой периодической среде [1, 3]. Для уравнения Матье имеется достаточно полный анализ областей неустойчивости и периодических решения на границах областей. Для второй из эталонных моделей в случае прозрачной двухслойной среды возникает сравнительно простая расчетная схема, известная как модель Мейснера, позволяющая в аналитическом виде получить характеристическое уравнение для анализа спектра волн. В квантовой механике этот подход известен как модель Кронига – Пенни, а в теории колебаний соответствует импульсной накачке параметрической системы.

Цели исследования. В настоящей работе для модели Мейснера впервые анализируются следствия центральной симметрии и исследуется вырождение решений задачи Флоке, приводятся характеристические уравнения для границ областей селективного отражения.

Основной материал исследования. В задаче о распространении поперечных электромагнитных волн в пространственно периодической среде уравнения Максвелла приводят к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k^2 \cdot \varepsilon(x) \cdot E = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon(x + L) = \varepsilon(x)$$

Для прозрачной двухслойной периодической среды, где чередующиеся слои: ..., $a, b, a, b, a, b, \dots$ отличаются величиной показателя

преломления $n_a = n_1 \neq n_u = n_2$ предполагаем, что решение в каждом из двух слоев является суперпозицией двух решений для однородной среды, и получаем общепринятый вид матрицы перехода

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 & \frac{\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2}{n_1} + \frac{\sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1}{n_2} \\ -n_1 \cdot \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - n_2 \cdot \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1 & \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

выраженной через волновое число, показатель преломления и размер каждого из слоев, $\varphi_m = k \cdot l_m \cdot n_m \quad m = 1, 2$

След матрицы на двухслойной ячейке имеет известный вид:

$$Sp \mathbf{R} = 2 \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \quad (3)$$

Областям селективного отражения (неустойчивости) электромагнитных волн соответствуют частоты, при которых:

$$|Sp \mathbf{R}| > 2. \quad (4)$$

При чётных и нечетных периодических решениях на границе областей неустойчивости имеют место соотношения $Sp \mathbf{R} = 2$, $Sp \mathbf{R} = -2$. Преобразуя углы набега фазы в слоях, для границ областей неустойчивости, соответствующих четным решениям, получаем:

$$-4 \cdot \frac{\left(\sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cdot \tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cdot \tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cdot \tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cdot \tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \right)}{\left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \right) \cdot \left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \right)} = 0, \quad (5)$$

а для границ, соответствующих нечетным решениям,

$$4 \cdot \frac{\left(\frac{n_1}{n_2} - \tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \right) \cdot \left(\frac{n_2}{n_1} - \tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \right)}{\left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \right) \cdot \left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \right)} = 0 \quad (6)$$

Приведенные соотношения приводят к использованию матрицы перехода, связывающей компоненты решения в центре симметрии, т.е. в центре каждого из двух слоев, и представления её в одной из следующих форм:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \quad ; \quad \mathbf{R}'' = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) - \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) & \frac{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{n_1} + \frac{\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{n_2} \\ -n_1 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) - n_2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) - \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (8)$$

и, соответственно,

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) - \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) & \frac{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{n_1} + \frac{\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{n_2} \\ -n_1 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) - n_2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) & \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) - \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (9)$$

Перемножение матриц приводит к формулам для недиагональных,

$$\mathbf{R}'_{12} = \left[2 \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) - \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \right] \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}{n_1} + \frac{\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{n_2} \right) \quad (10)$$

$$\mathbf{R}'_{21} = - \left[2 \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) - \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \right] \cdot \left(n_1 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) + n_2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \right) \quad (11)$$

и диагональных,

$$\mathbf{R}'_{11} = \mathbf{R}'_{22} = \left[\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \frac{1}{2} \left(\frac{n_2}{n_1} + \frac{n_1}{n_2} \right) \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) \right] \quad (12)$$

компонент матрицы перехода.

Прямое сопоставление дает $\mathbf{R}' = \mathbf{R}''$ и доказывает вырождение решений Флоке, причем решения соответствующие одинаковым собственным значениям и собственным векторам матрицы перехода связаны преобразованием сдвига на половину периода. Характеристические уравнения для четных границ областей совпадают с приведенными выше соотношениями (5). Предложенная методика построения матрицы перехода в модели Мейснера дает новое характеристическое уравнение для границы области непротекания:

$$\left(2 - \left(\frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1} \right) \tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \right) = 0. \quad (14)$$

Решение (14) соответствует диагональной матрице перехода и ранее неизвестной паре линейно независимых периодических решений.

Выводы. Метод настоящей работы использует только наличие центра симметрии. При этом условии вырождение решений Флоке для волн в пространственно – периодической среде имеет место безотносительно к модели Мейснера. В частности, центр симметрии имеется в моделях параметрических систем соответствующих уравнениям Матье и Хилла. Результаты работы с очевидной модификацией справедливы для модели Кронига – Пенни в задаче Блоха и в задаче и импульсной накачке параметрической системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука. 1979. - 384 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука. 1979. - 384 с.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
4. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. – М.: Мир, 1987. – 616 с.
5. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
6. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Изд-во АН СССР, 1983.
7. Lopez C. Materials Aspects of Photonic Crystals // Adv. Mater. - 2003. - No. 20 (Oktober 18). - P. 1683-1701.
8. Займан Дж. Принципы теории твердого тела. – М.: Мир, 1974. – 472 с.
9. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
10. Чечулин С.Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. – 220 с.
11. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
12. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
13. Стретт М.Д.О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике: Пер. с нем. – Киев-Харьков: Гос. науч.-тех. изд.-во Украины, 1935. – 238 с.

Получено 17.03.2006 г.

Д.И.Ткач, А.Б.Нифанин

ГЕОМЕТРИЯ ТРЕЩИНОУСТОЙЧИВЫХ И САМОЗАМЫКАЮЩИХСЯ СТРУКТУР ДОРОЖНЫХ ПОКРЫТИЙ

Постановка проблемы. Одной из важнейших научно-технических задач, имеющих большое народнохозяйственное значение для нашей страны, является решение проблемы высококачественных и долговечных покрытий автомобильных дорог. Их существующие конструкции из песчаной подготовки, подстилающего слоя шлака или щебня и сплошного двухслойного асфальтобетонного покрытия представляют собой термодинамические системы, толщина и ширина которых несоизмеримо малы в сравнении с их длиной. Разрушение этого покрытия происходит от знакопеременных температурных деформаций, вызывающих возникновение трещин. Вода, попадающая в них, при замерзании и оттаивании вызывает их развитие и образование вторичной сети трещин, уходящих в глубину покрытия. Положение усугубляется динамическими нагрузками от движущегося транспорта. В итоге сплошное асфальтобетонное дорожное покрытие оказывается недолговечным, нуждающемся в частых, как правило, косметических ремонтах, которые не решают проблему в принципе.

Решение этой проблемы представляется возможным на основе понимания процесса распространения трещины и создания условий для управления этим процессом. Так как их образование неизбежно, то, развиваясь в плоскости покрытия, они разбивают её на неодинаковые, произвольной формы участки, играя при этом роль швов между ними. Отсюда следует непосредственный вывод о необходимости замены сплошного покрытия дорожного полотна его комбинаторным эквивалентом. Эта мысль не является новой, так как те дороги и площади, которые были вымощены булыжником столетия тому назад и дошли до нашего времени в прекрасном состоянии, являются такими комбинаторными эквивалентами. Сейчас мы являемся свидетелями замены сплошных асфальтовых покрытий пешеходных тротуаров конгруэнтными плитками, разнообразие форм которых определяется возможностями плоскостной комбинаторики.

© Д.И.Ткач, А.Б.Нифанин, 2006

В итоге оказалось, что эти покрытия компенсируют знакопеременные температурные деформации, но не являются трещиностойкими, так как возникнув, трещины беспрепятственно в них распространяются. Относительно стабильная лакуарность [1] тротуарного покрытия, т.е., степень его заполнения элементами, которые разделены швами или лакунами постоянной ширины, обеспечивается наличием жестких бордюров.

Целью настоящей публикации является попытка геометризовать поверхность покрытия автомобильной дороги средствами плоскостной комбинаторики таким образом, чтобы в итоге она обладала высокой степенью трещиностойкости, обеспечивающей её долговечность.

Основной материал исследования. Достижение поставленной цели будет практически приемлемым при удовлетворении следующих наложенных условий:

1. Покрытие должно быть сборным, а его элементы конгруэнтными при минимальном количестве их типоразмеров;
2. Формы элементов покрытия должны быть высоко технологичны как в их изготовлении, так и при их монтаже;
3. Структура швов между элементами покрытия должна играть роль трещин его сплошнотелого предшественника, но препятствовать их распространению.

Очевидно, что первые два условия должны формировать такую структуру швов между элементами покрытия, чтобы она максимально усложняла путь развития трещины. Известно, что если этот путь часто и резко меняет своё направление, то развитие трещины по такому пути постепенно гаснет, а если трещина, развиваясь, возвращается к началу своего развития, то она прекращает развиваться. [2]. Таким образом, успех достижения поставленной цели сводится к поиску наиболее оптимальной геометрической формы элементов сборного покрытия, швы между которыми были бы максимально сложными или обеспечивали бы возврат трещины к своему началу. Условие технологичности изготовления и монтажа элементов покрытия требует их конгруэнтности, а также прямолинейности и прямоугольности их формы. Этим требованиям удовлетворяют форма квадрата (рис.1,а), которая широко применяется в напольных покрытиях, испытывающих только вертикальные нагрузки. Швы между такими элементами прямолинейны и трещины по ним распространяются бес-

препятственно. Если такие элементы смещать относительно друг друга в одном (рис.1,б) или в двух направлениях (рис.1,в), то траектории развития трещин по направлениям их швов от горизонтальных усилий усложняют свой путь, но не изменяет направлений своего развития. При этом в последнем случае возникает второй элемент – квадрат, стороны которого вдвое короче сторон исходного квадрата. Если же возникает эксцентриситет при приложении горизонтальной нагрузки, то возникающему моменту в этих структурах не возникает противодействия.

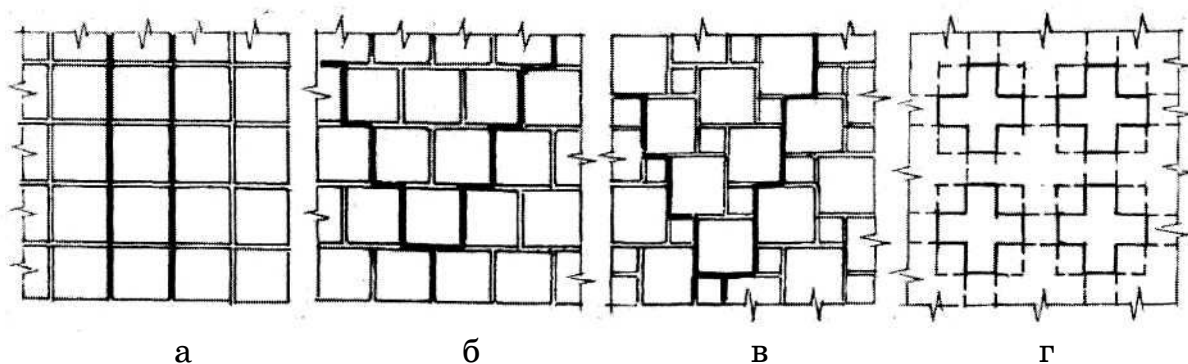


Рисунок 1

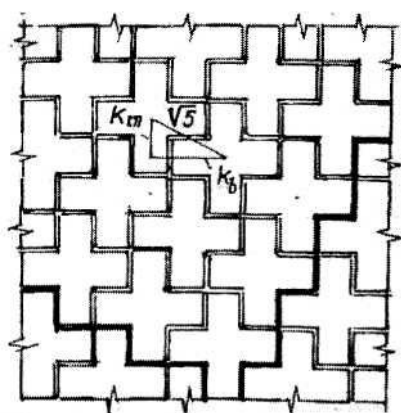


Рисунок 2

Четвёртый комбинаторный вариант предполагает частичное наложение квадратов, смещенных относительно друг друга на одну треть длины их сторон. В итоге в каждом исходном квадрате возникает изопериметрический ему крест и 4 малых квадрата (рис.1,г). Полученная фигура креста оказалась удобной для плотной упаковки плоскости (рис.2). Траектории развития трещин по швам крестового мощения усложнились, раздвоившись по двум взаимно-

перпендикулярным и неизменным направлениям. Но, если при этом возникает эксцентриситет приложения горизонтальной нагрузки, то возникающему крутящему моменту противодействие по прежнему отсутствует. Возникновение такого противодействия оказалось возможным при введении в крестовую структуру второго элемента в виде свастики (рис. 3). В такой двухэлементной структуре усилия в любой точке вызывают распространения трещин по наиболее сложным фигурам швов, которые ограничивают по площади от половины до

трёх четвертей элементов покрытия. Если при возрастании нагрузки вплоть до критической станут возникать крутящие моменты, то система взаимосвязанных крестов и свастики заклинивается или самозамыкается, включив в совместную работу весь массив покрытия. При этом критическая нагрузка перераспределяется между всеми его элементами, напряжения в них соответственно уменьшаются и получается, что в целом такая структура покрытия может выдерживать нагрузки в четверо превышающие те, которые выдерживает структура, приведенная на рис. 1,б, включающая в работу одну четверть элементов.

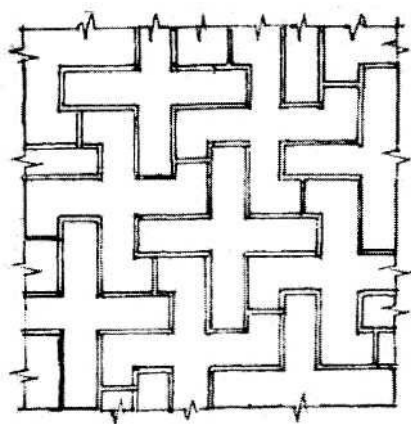


Рисунок 3

Такое увеличение несущей способности конструкции покрытия определено только лишь комбинаторным изменением формы его элементов и характера связей между ними без изменения их материала с его прочностными характеристиками.

Если прочность конструкции является мерой энергии его сопротивления нагрузкам, то получается, что форма слагающих её структурных элементов и характер связей между ними является инструментом управления этой прочностью.

Энергетизм формы ярко демонстрируется разной прочностью алмаза и графита, состоящих из углерода, атомы которого располагаются в узлах их кристаллических решеток принципиально разной формы. Если посередине одного из крестообразных элементов свастики провести прямую линию и принять ее за ось симметрии, то в результате преобразования симметрии фигура свастики превратится в Т-образный крест. Приняв его за комбинаторный элемент, получаем новую структуру трещиноустойчивого покрытия, вторым элементом которого является квадрат с выбранными серединами сторон, названный «жабкой» (рис. 4). Эта «жабка» образует с Т-образными крестами замковые соединения, препятствующие распространению трещин, так как, возникнув в любой точке её замкнутого контура, она возвращается к своему началу. Однако соблюдение принципа техноло-

гичности, который требует применения элементов одного типоразмера, привело к форме квадрата с 4-мя крестами (рис. 5). Комбинаторика из таких элементов плотно упаковывает плоскость и максимально усложняет развитие трещин по швам между ними (рис. 6).

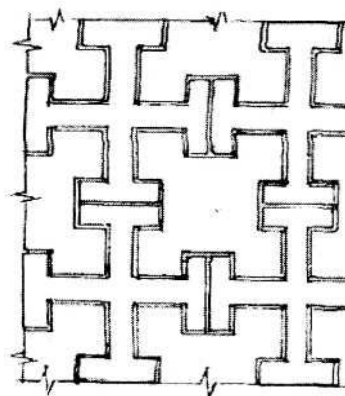


Рисунок 4

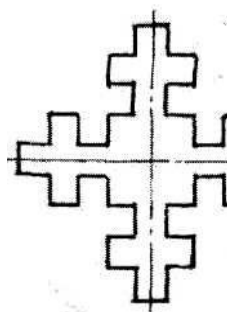


Рисунок 5

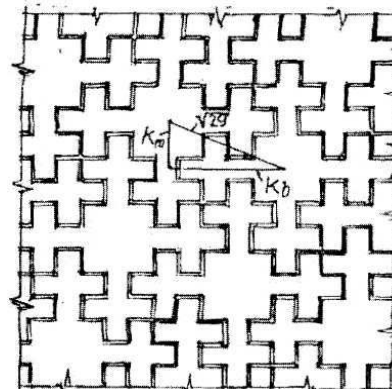


Рисунок 6

На первый взгляд крестовые ветви у их оснований представляются хрупкими. Но, входя в замковые соединения, они образуют самозамыкающиеся системы поддерживающих друг друга крестовых фигур. И действительно, если произойдет разрушение одной крестовой ветви элемента покрытия, то за оставшиеся три его будут удерживать 4 его окружающие крестовые элемента. Эта поддержка будет продолжаться постоянно, ибо каждый элемент покрытия, окруженный 4-мя ему подобными и взаимосвязанными с ним элементами имеет как бы 4 степени надёжности в их совместной работе. Это обстоятельство обеспечивает замыкание разрушения в месте его образования. Поэтому по характеру работы структуры подобного рода являются самозамыкающимися, а по принципу организации этой работы – самоорганизующимися, т.е., синергетическими [3, 4]. Интересна диалектика развития формы элементов покрытия с замковыми соединениями. Если исходным элементом покрытия является одна квадратная клетка (см. рис. 1,а), то путём присоединения к её сторонам ещё по одной квадратной клетке получается простой 5-клеточный крестообразный элемент (см. рис.2) . Если соединить центры этих элементов, то полученная наклонная линия явится гипотенузой прямоугольного треугольника Дюрера с отношением катетов 1:2, т.е., диагональю двойного квадрата, длина которой равна $\sqrt{5}$. Таким образом, 5-клеточный крест является результатом топологического преобразования исход-

ной квадратной клетки. Сравнение структур 5-клеточного креста и крестового элемента на рис.5 показывает, что последний также является результатом топологического преобразования первого. Здесь исходная квадратная клетка первого элемента расширилась до 9-клеточного квадрата, а каждый из его одноклеточных концов расширился до 5-клеточного креста. В итоге исходный 5-клеточный элемент преобразовался в 29-клеточный, самоподобный исходному. Такое преобразование полностью удовлетворяет понятию фрактального [1,5], но названо фрактальным расширением, обладающим свойством конформности [6], сохраняющим прямые углы, а также конгруэнтности 5-клеточных крестов в 29-клеточных элементах. Этим фигуры фрактального расширения резко отличаются от фрактальных фигур типа снежинки Коха, пыли Кантора или коврика Серпинского, элементы которых самоподобно уменьшаются, стремясь к дробномерному бесконечно удалённому пределу.

При фрактальном расширении происходит обратный процесс. За исходный элемент принимается простая квадратная клетка, которая фрактально расширяясь, преобразовывается по определённому закону во всё более сложные по форме комбинаторные фигуры, лакунарно плотно упаковывающие плоскость (рис. 7).

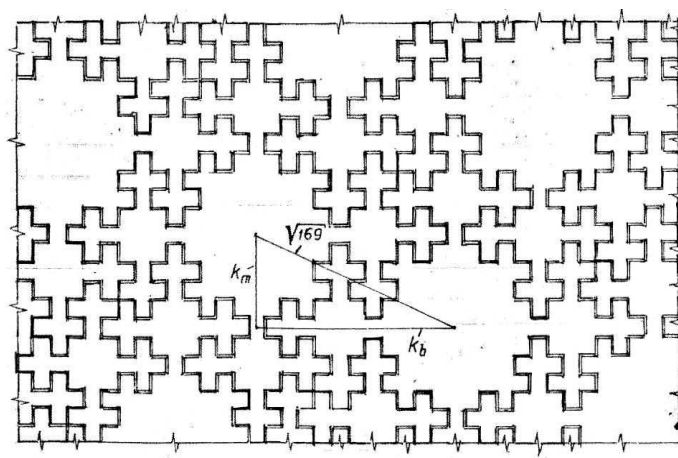


Рисунок 7

На рис. 7 приведен результат фрактального расширения 29-клеточных элементов в 169-клеточные с замковыми соединениями. Наклонная прямая, соединяющая центры этих элементов, является гипотенузой прямоугольного треугольника с отношением катетов 5:12, длина которой равна значению корня квадратного из числа клеток, составляющих эти элементы. Экстраполируя полученные значения катетов рассмотренных треугольников как относительных коор-

динат взаимного расположения центров фигур фрактального расширения, можно определить его общую закономерность.

Номер фрактального преобразования (n)	I	II	III	IV	V	VI	VII
k_b - катет большой	1	2	5	12	29	70	169
k_m - катет малый	0	1	2	5	12	29	70

Наблюдается закономерность вида: $k_{b(n)} = 2k_{b(n-1)} + k_{m(n-1)}$. Поскольку $k_{m(n)} = k_{b(n-1)}$, то $k_{b(n)} = 2k_{b(n-1)} + k_{b(n-1)}$. Таким образом, получен новый числовой ряд, который можно представить в виде $a_n = 2k_{n-1} + a_{n-2}$. Это выражение является общим алгоритмом построения крестообразных трещиноустойчивых покрытий.

Выводы: 1. Принятая в работе концепция управления процессом образования трещин в дорожном покрытии привела к последовательным комбинаторным поискам такой формы его элементов, швы между которыми способствуют их угасанию и, тем самым, обеспечивают долговечность покрытия; 2. Свойство самозамыкания и синергетизм структур предложенных конструкций плоского покрытия могут быть использованы при проектировании пространственных сборных систем типа оболочек; 3. Описанный в работе процесс фрактального расширения исходной фигуры является эффективным аппаратом комбинаторного конструирования самозамыкающихся трещиноустойчивых лакунарных покрытий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федер Е. Фракталы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991.
2. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Том. 2: Более сложные вопросы теории и задачи. - М.-Л.: ОГИЗ, 1946.
3. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. Пер. с англ. – М.: Прогресс, 1986.
4. Даниленко В.Я. Синергетичні та системні риси геометричних досліджень. // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДТУХТ, 2005. – Вип. 11. – С. 42-46.
5. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. с англ. – М.: Постмаркет, 2000. – 364 с.
6. Клейн Ф. Высшая геометрия. – М.-Л.: ГОНТИ, 1939.

Получено 18.03.2006 г.

ОПЫТ ПРЕПОДАВАНИЯ ГРАФИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МУЛЬТИМЕДИЙНЫХ СРЕДСТВ

Постановка проблемы. В последние годы педагогический состав кафедр начертательной геометрии и инженерной графики практически всех вузов отмечает неуклонное снижение уровня подготовки школьников в части получения изображений различных геометрических объектов, их оценки, а также общего развития пространственных представлений и связанного с этим пространственного мышления. В результате многие студенты первых курсов испытывают серьезные трудности, вызванные недостаточным пониманием основных вопросов начертательной геометрии и инженерной графики. Отсутствие необходимого уровня графической подготовки не позволяет вчерашним школьникам правильно оценивать геометрические объекты пространства, их отображение на чертежах, их взаимные отношения, образование составных пространственных объектов и т.д.

Анализ последних достижений и публикаций. В ряде вузов Украины и ближнего зарубежья ведутся интенсивные поиски путей активизации восприятия студентами излагаемого материала, повышения степени его понимания и создания условий для творческого подхода к его освоению. Особую значимость такие исследования приобретают при изучении законов построения изображений геометрических объектов, используемых в различных областях человеческой деятельности и решении различных пространственных задач. Среди методических разработок, в которых отражены результаты выполненных исследований, можно выделить работы: 1) касающиеся изменения структуры и содержания курса; 2) направленные на совершенствование существующих и поиск новых эффективных способов подачи учебного материала. Так, в работах [1,2] рассматриваются вопросы изменения содержания дисциплины с целью создания некоторых общих закономерностей, на базе которых могут решаться задачи, относящиеся к любым геометрическим объектам, а также возможные изменения структуры изложения, позволяющие исключить дублирование информации при изучении различных разделов.

Вопросам изменения форм преподавания, применения в лекционных и практических занятиях современных вычислительных средств, в частности, мультимедийных, посвящена работа [3]. Тем не менее, вопрос системных разработок способов, позволяющих повысить эффективность подачи учебного материала графических дисциплин, пока еще остается открытым.

Постановка задачи. По мнению авторов, одним из наиболее продуктивных путей решения поставленных задач является максимально возможная динамическая визуализация содержания дисциплины, что может быть достигнуто путем использования современных мультимедийных средств. Безусловно, такая визуализация требует значительной и достаточно трудоемкой предварительной подготовки учебного материала. При этом необходимо учитывать, что такая подготовка, в свою очередь, предполагает переработку общепринятых учебных материалов, включая учебники, их «препарирование» с учетом психологии восприятия изображений, демонстрируемых с помощью мультимедийных средств.

Основная часть. Как показал опыт, визуализация учебного материала, предлагаемого студентам в процессе лекционных и практических занятий, может выполняться различными способами. В одном случае – это показ непрерывного процесса, демонстрирующего, например, образование некоторой поверхности, в другом – пооперационная демонстрация последовательных этапов решения различных задач или выполняемых действий, например, нанесение размеров на изображение изделия. Именно при таком использовании возможностей мультимедийной техники у студентов вырабатываются четкие и долговременные связи между аудио и видеоинформацией, предъявляемой аудитории. При подготовке иллюстрационного материала можно выделить два этапа. На первом из них преподаватель, обладающий определенным педагогическим опытом, разрабатывает эскиз конкретной иллюстрации, расписывая ее в последовательности предъявления каждого из событий, т.е. фактически создает сценарий будущей демонстрации, предлагая при этом также цветовое решение элементов изображения. Подготовленная таким образом иллюстрация затем передается исполнителю, владеющему программными средствами, в частности, 3DS MAX, AutoCAD, Inventor, который создает изображение, просматриваемое преподавателем с целью установления

оптимальной длительности демонстрации каждого из событий и необходимого редактирования. Только после этой операции подготовленная иллюстрация подвергается рендерированию и становится avi-файлом, готовым к демонстрации. Для создания полного представления об объеме и трудоемкости выполняемой работы по подготовке иллюстрационного материала в качестве примера приведем преподавательский сценарий иллюстрации, описывающей процесс проецирования и основные элементы его аппарата на примере получения проекции произвольного объекта. Каждый из приводимых ниже пунктов должен сопровождаться соответствующим эскизом.

1. Появление поверхности общего вида, используемой в качестве поверхности проекций.
2. Появление некоторой кривой линии.
3. Появление указания направления проецирования.
4. Появление набора точек, принадлежащих кривой линии.
5. Появление проецирующих лучей, параллельных заданному направлению и их прохождение через точки кривой линии.
6. Пересечение проецирующих лучей с поверхностью проекций, образование соответствующих проекций точек и исчезновение проецирующих лучей.
7. Объединение проекций точек в проекцию кривой линии.
8. Последовательное мигание каждого из элементов изображения (указать количество миганий).

Каждый из приведенных пунктов сопровождается комментарием преподавателя, который в необходимый момент может остановить изображение или вернуться к любому событию.

Не имея возможности продемонстрировать описанную иллюстрацию в динамике, приводим ее в окончательном виде (рис.1). Подобные динамические иллюстрации разработаны по всей части дисциплины, рассматривающей основные положения начертательной геометрии. При этом часть иллюстраций подготовлена непосредственно в среде 3DS-MAX. В то же время для некоторых изображений понадобилось последовательное применение AutoCAD и 3DS-MAX. Это вызвано тем, что 3DS-MAX не обеспечивает четкого изображения линий пересечения объектов и для того, чтобы сосредоточить внимание на особенностях таких линий, необходимо получить их с помощью опе-

раций, предоставляемых AutoCAD, а затем анимировать и рендерировать в среде 3DS-MAX.

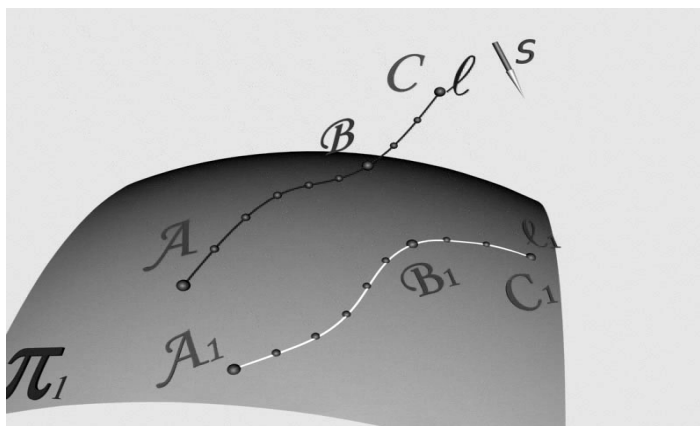


Рисунок 1 - Результат выполнения сценария процесса проецирования

Описанным выше образом, но несколько по другой технологии подготовлены иллюстрации для второй части дисциплины, рассматривающей вопросы оформления конструкторской документации. Использование возможностей AutoCAD не только перемещать отдельные части изображения технических форм, например, при рассмотрении разрезов, но и записывать послойно отдельные операции, которые потом последовательно предъявляются обучаемому до создания цельного изображения, позволяют демонстрировать порядок действий при разработке различных конструкторских документов. Так, сценарий для показа операций по конструированию развертывающихся поверхностей с параллельными граничными сечениями содержит следующие пункты:

1. Появление первого граничного сечения (горизонтальная проекция).
2. Появление второго граничного сечения (горизонтальная проекция).
3. Появление фронтальных проекций первого и второго граничных сечений.
4. Проведение касательной к первому сечению (горизонтальная проекция).
5. Проведение касательной ко второму сечению параллельно касательной в соответствии с п. 4.
6. Получение горизонтальной проекции отсека конструируемой поверхности.
7. Получение фронтальной проекции этого отсека.

8, 9, 10 и т.д. - повторение операций до получения полного изображения конструируемой поверхности.

Каждая из описанных операций записывается в отдельном слое чертежа и по мере объяснения предъявляется студентам.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Опыт использования в учебном процессе иллюстративного материала, подготовленного по описанной технологии, показал высокую эффективность, как в интенсификации учебного процесса, так и в активизации восприятия студентами изучаемого материала. В перспективе авторами предусматривается разработка электронного учебника по основным темам курса «Начертательная геометрия», который, в соответствии с основными требованиями Болонского процесса, при определенной фундаментальности содержания будет практически полезным, позволит обеспечить контролируемое качество обучения, будет способствовать активизации самостоятельной работы студентов, в том числе и при дистанционной форме обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Г.С. О содержании и структуре курса начертательной геометрии в современных условиях. Современные проблемы геометрического моделирования // Сборник трудов Україно-російської науково-практичної конференції. Спец. випуск.- Харків, 2005.- С.27-31.
2. Дубров А.А., Слободской Р.Б. О содержании дисциплины «Инженерная и компьютерная графика» в условиях уменьшения учебного времени // Геометричне та комп'ютерне моделювання: - Харків: ХДУХТ, 2005.- Вип.12.- С. 139-142.
3. Слободской Р.Б., Цюпко Т.В. О компьютерной поддержке курса ИКГ. Современные проблемы геометрического моделирования // Сборник трудов Україно-російської науково-практичної конференції. Спец. випуск.- Харків: 2005. - С. 343-345.

Получено 10.03.2006 г.

С.К.Тукаев, Д.Ш.Нурмаганбетов, К.А.Дауренбек

АНАЛИЗ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В производстве строительных конструкций и изделий основным используемым материалом является бетон. Проектирование состава бетона сопровождается проведением экспериментов. Каждый эксперимент требует значительных материальных и трудовых затрат. Даже незначительное уменьшение капиталовложений за счет сокращения количества натурных экспериментов или за счет определения оптимального состава (по заданному критерию) бетонной смеси дает значительную экономию ресурсов. В условиях рынка экономия трудовых и материальных ресурсов является особенно актуальной задачей.

В настоящее время для исследования многокомпонентных веществ широкое распространение получили традиционные математические методы планирования эксперимента. Для этих методов характерно, что многокомпонентные вещества описываются математическими моделями, исследователь при этом сталкивается с большим объемом арифметических действий и отсутствием наглядного представления об исследуемом многокомпонентном веществе. Если же исследовать многокомпонентную смесь с геометрической точки зрения, то вышеназванных недостатков можно избежать. Впервые использовать диаграммы состав-свойство для изучения многокомпонентных веществ, предложил Шеффе. Далее идею Шеффе развил академик Н.С.Курнаков. В настоящее время в физико-химическом анализе и термодинамике широкое распространение имеют графические и графоаналитические методы исследования многофакторных зависимостей. Эти методы, в основном, используются для построения и исследования диаграмм состав-свойство, они приведены в работах Филиппова П.В., Волкова В.Я., Первиковой В.Н. и др.

Анализ научных работ показывает, что поверхности отклика (ПО) как геометрическая модель свойств веществ, встречающихся на практике, редко бывают линейными. Чаще всего эти поверхности имеют сложную форму и описываются полиномами второго, третьего и более порядков. Из курса высшей математики известно, что чем выше порядок полинома, описывающего многофакторную зависимость, тем сложнее геометрия этой зависимости.

© С.К.Тукаев, Д.Ш.Нурмаганбетов, К.А.Дауренбек, 2006

При решении задач планирования эксперимента в исследованиях многокомпонентных веществ актуальной задачей также является разработка геометрических способов и методов, позволяющих:

1) глубже понять суть задачи и оценить возможные ее решения визуально;

2) оперативно изменять и определять оптимальный состав" многокомпонентного вещества;

3) автоматизировать процесс определения геометрической модели исследуемого вещества.

Геометрическая модель исследуемой многофакторной зависимости должна быть не только наглядной, простой в использовании, но и "удобной" в процессе разработки прикладных программ для автоматизированного вывода графической информации на принтер или графопостроитель, а также обладать необходимой точностью. Анализ имеющихся исследований по данной проблеме выявил следующее:

- для изображения многомерного пространства на бумаге, используется комплексный чертеж Радищева-Мемке, который не достаточно полно отображает информацию об исследуемом многокомпонентном веществе;

- создание геометрической модели (ГМ) исследуемого вещества позволяет автоматизировать процесс графического отображения многофакторных зависимостей на чертеже и на экране ПК, это в дальнейшем позволит исследователю наглядно и быстро оценивать свойство вещества, управлять оптимальным составом и корректировать выбор оптимальных значений входных факторов.

В трудах В.Н.Первиковой [1] и исследователей ее направления [2 - 7] освещены вопросы построения графических и графоаналитических моделей исследуемых многофакторных зависимостей, для построения чертежа которых используются комплексный чертеж Радищева-Мемке. Здесь задача определения уравнения, описывающего поверхность отклика исследуемой функции, выносится на "второй план". Задача поиска экстремума поверхности отклика решается графически. Так, например, в работе Л.А.Цыпыловой "Поиск особых элементов эмпирических поверхностей пространств E_3 , E_4 при помощи графоаналитических способов планирования эксперимента" [5] поиск экстремальной точки поверхности отклика проводится в два этапа: 1-й этап - этап планирования эксперимента первого порядка, здесь определяется стационарная область экстремальной точки поверхности отклика при помощи линии наибольшего ската плоскости, касатель-

ной к ПО; 2-й этап - планирование второго порядка, где уточняются координаты экстремальной точки с помощью приближенной индикатрисы Дюпена, в соответствии с рис. 1.

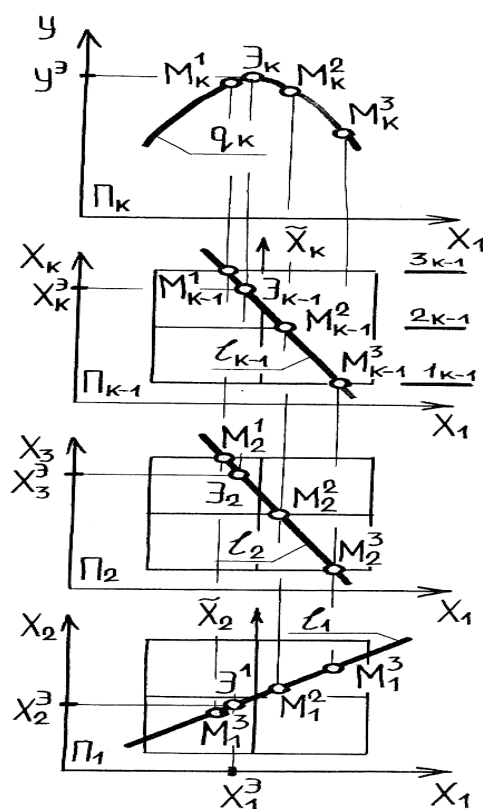


Рисунок 1 - Определение экстремальной точки с помощью индикатрисы Дюпена на чертеже Радищева-Мемке

За относительной наглядностью, по сравнению с традиционными математическими методами, в работе [5], по нашему мнению, имеются некоторые замечания:

- 1) комплексный чертеж Радищева не дает полной информации об исследуемом свойстве вещества;
- 2) кривые ПО, построенные на комплексном чертеже Радищева, сильно искажены;
- 3) каждый диаметр проходит только через две точки, а третья точка не учитывается; следовательно, уменьшается точность определения координат точки экстремума.

В исследовании "Геометрические основы формирования динамических моделей многофакторных систем применительно к процессам очистки воды" [7] М.М.Васильева разработала способ получения графоаналитических моделей многофакторных систем. Изменение значе-

ний входных факторов ведет к изменению графоаналитической модели. Интерполяция поверхности отклика позволяет строить гиперповерхность как на чертеже Радищева, так и на аксонометрическом чертеже. На наш взгляд, слабой стороной исследования М.М.Васильевой является то, что предлагаемый способ определения минимальной точки ПО с помощью аксонометрического изображения нагляден только при трехфакторном материале, в соответствии с рис. 2. Если же число входных факторов будет $k \geq 4$, то изобразить многофакторную зависимость в аксонометрической проекции не представляется возможным. В работе [8] для поиска экстремума поверхности отклика предлагаются аналитический и графоаналитический способы. Здесь, для определения стационарной области точки экстремума, сначала проводят планирование первого порядка. Затем в стационарной области проводят планирование второго порядка, где используют свойства индикатрисы Дюпена. Здесь используется комплексный чертеж Радищева, в соответствии с рис. 3.

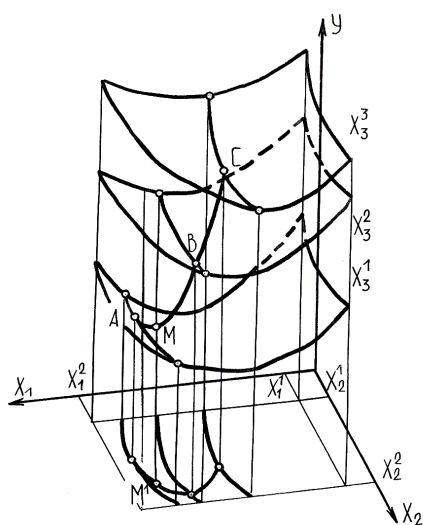
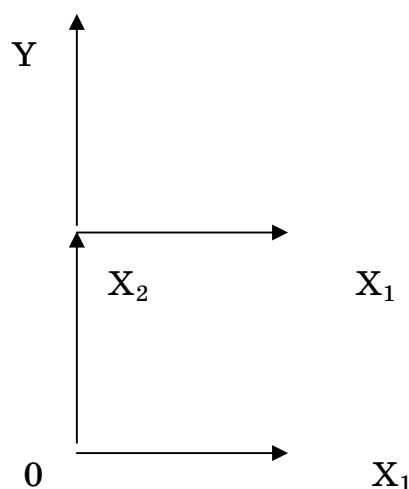


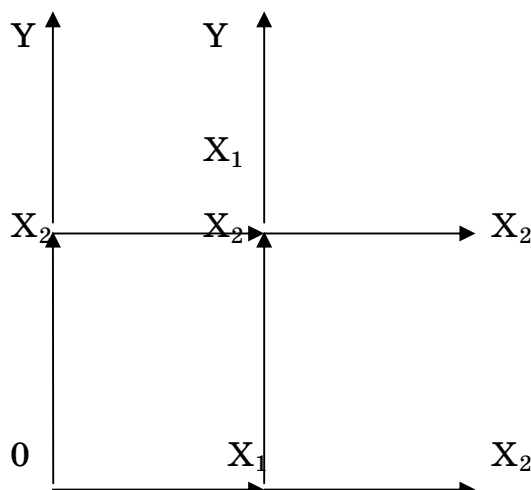
Рисунок 2 - Оптимизационная задача



X_1, X_2 - входные факторы, Y - отклик

Рисунок 3 - Система координатных осей на чертеже Радищева при реализации двухфакторного материала

Предлагаемый графоаналитический способ приближенного определения экстремальной точки поверхности отклика двух-, трех- и четырехкомпонентных веществ основан на использовании полного комплексного чертежа, описанном в работах [9 -12]. Используя ПКЧ, в соответствии с рис. 4, устраняются недостатки работы [8].



X_1, X_2 – входные факторы, Y – выходящий фактор (отклик)

Рисунок 4 - Система координатных осей полного комплексного чертежа при реализации двухфакторного материала

Реализация системы координатных осей, приведенных на рисунке 4, будет примерно выглядеть так, как показано на рисунке 5.

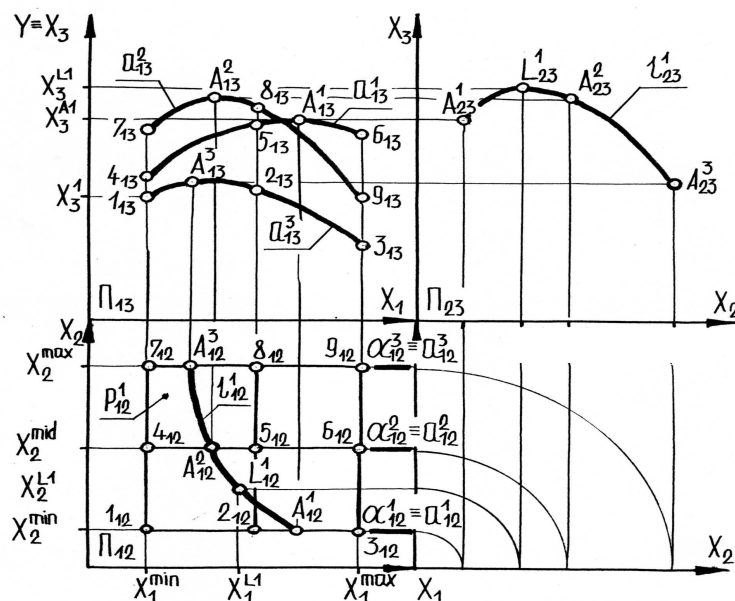


Рисунок 5 - Определение экстремальной точки L^1_2 -поверхности отклика P^1

ЛИТЕРАТУРА

1. Первикова В.Н. Теоретические основы построения чертежей многомерных фигур в синтетическом и векторном изложении с применением для исследования многокомпонентных систем. Автореф. дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн наук. - М.: МТИПП, 1974.

2. Руденко Н.Г. Исследование плоскостной модели каркасной модели оптимумов (хребтов) многофакторной зависимости с применением автоматизированного проектирования для инженерных расчетов. Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. - М.: МАИ, 1978.
3. Кадынская З.А. Исследование каркасных трехмерных поверхностей четырехмерного пространства с криволинейными и плоскими образующими. Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. - М.: МАИ, 1980.
4. Солодовникова Э.В. Моделирование многомерного пространства методом проекций с числовыми отметками и некоторые его приложения. Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. - К.: КИСИ, 1974.
5. Цыпылова Л.А. Поиск особых элементов эмпирических поверхностей пространств E_3 , E_4 при помощи графоаналитических способов планирования эксперимента. Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. - М.: МАИ, 1978.
6. Лазарева С.С. Исследование многомерных моделей при помощи графов с целью применения ЭВМ для построения диаграмм сложных многокомпонентных физико-химических систем. Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. - М.: МАИ, 1981.
7. Васильева М.М. Геометрические основы формирования динамических моделей многофакторных систем применительно к процессам очистки воды. Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. - К.: КИСИ, 1990.
8. Двадненко Л.А. Графический способ реализации экстремального планирования 2-го порядка 2- и 3- мерной поверхности отклика для автоматизации построений // Сб. "Прикладная геометрия и машинное проектирование". Труды МАИ. - Вып. 414. - М.: МАИ, 1977.
9. Байдабеков А.К., Нурмаханов Б.Н., Дауренбек К.А. Исследование стационарной области 2-поверхности отклика на полном комплексном чертеже. Современное образование в Казахстане: состояние и пути реформирования // Материалы Международной научно-методической конференции, посвященной 10-летию независимости Республики Казахстан. - Тараз: ТарГУ, 2001. - С. 284–286.
10. Нурмаханов Б.Н., Дауренбек К.А. Разработка графоаналитического способа нахождения точки экстремума 2-поверхности отклика с использованием ПКЧ // Вестник ТарГУ «Природопользование

- и проблемы антропосферы». – Тараз: ТарГУ, 2001 - № 2. - С. 160-165.
11. Разработка программной реализации геометрического способа моделирования трехфакторного технологического процесса // Вестник НАН РК. – 2004. - № 3.
12. Графоаналитический способ определения бетонной смеси по критерию прочности // Современные проблемы геометрического моделирования. Материалы Україно-російської науково-практичної конференції. - Харків: МОН України, 2005.

Получено 19.03.2006 г.

УДК 519.2

Г.Я.Тулученко, А.Н. Хомченко, І.О. Астіоненко

ЙМОВІРНІСНІ ВЛАСТИВОСТІ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ СИМПЛЕКСІВ РІЗНИХ ВИМІРНОСТЕЙ

Постановка проблеми. Алгоритми рандомізованих обчислень знаходять широке застосування при розв'язанні задач з різних наукових галузей. Використання ймовірнісних підходів у методі скінченних елементів дозволяє, зокрема, будувати базисні функції скінченних елементів, уникаючи побудови і розв'язання системи лінійних рівнянь на відміну від традиційного підходу [1].

Базисні функції симплекс-елементів є гармонічними функціями. А для гармонічних функцій добре відомі монте-карлівські алгоритми їх відновлення [2]. Використання в якості області випадкових блукань симплекс-елементів дозволяє встановити нові ймовірнісні властивості базисних функцій цих скінченних елементів.

Аналіз попередніх публікацій. В роботі [3] була сформульована гіпотеза про можливість використання локальних координат точки старту частинки, яка блукає по двовимірному або тривимірному симплексу, в якості ймовірностей її переходу у вершини симплексу в однокроковій схемі блукань. Припущення ґрунтувалося на результатах обчислювальних експериментів. А в роботі [4] ця гіпотеза доведена аналітично. Властивості випадкових блукань з одним стартом в k -вимірному симплексі досліджені в статті [5].

Цілі статті (постановка задачі). На основі ймовірнісних властивостей базисних функцій симплексів різних вимірностей встановити характеристики одночасних випадкових блукань системи n частинок по цим скінченим елементам.

© Г.Я.Тулученко, А.Н. Хомченко, І.О. Астіоненко, 2006

Основна частина. Спочатку розглянемо випадкові блукання по двовимірному симплексу $U_1U_2U_3$ з поглинаючими вузлами у вершинах. У локальній системі координат $(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ базисні функції цього скінченного елементу мають вигляд [6]:

$$N_i = \xi_i, \quad i = \overline{1;3}.$$

В роботі [4] доведено, що ймовірність поглинання блукаючої частинки з стартом в точці $M(\xi_1; \xi_2; \xi_3)$ вузлом симплексу U_i не залежить від траєкторії блукань і повністю визначається значенням базисної функції N_i , що зв'язана з вузлом U_i , в точці старту:

$$P(M(\xi_1; \xi_2; \xi_3) \rightarrow U_i) = N_i(M) = \xi_i, \quad i = \overline{1;3}.$$

Ця ймовірнісна властивість базисних функцій симплексу дозволяє встановити нові характеристики одночасних блукань множини частинок.

Твердження 1. Математичне сподівання перехідної ймовірності з будь-якої точки, що входить до множини n точок, які одночасно випадковим чином вкинуті у симплекс, у вершину цього симплексу дорівнює ймовірності переходу з барицентра множини вкинутих точок в ту ж вершину симплексу.

Доведення. Відомо [7], що локальні координати барицентра $M_0(\xi_1^0; \xi_2^0; \xi_3^0)$ системи n точок визначаються за формулою:

$$\xi_i^0 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \xi_i^l, \quad i = \overline{1;3}. \quad (1)$$

Математичне сподівання перехідної ймовірності з будь-якої точки, що входить до множини точок, які одночасно випадковим чином вкинуті у симплекс, у вершину цього симплексу визначається так:

$$m_i = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n P(M_l \rightarrow U_i) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n N_i(M_l) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \xi_i^l, \quad i = \overline{1;3}. \quad (2)$$

Співпадання правих частин формул (1) і (2) дозволяє зробити висновки, що шукане математичне сподівання дорівнює відповідній координаті барицентра системи вкинутих у симплекс точок:

$$m_i = \xi_i^0, \quad i = \overline{1;3}.$$

Наслідок. Отриманий результат дозволяє проводити різноманітні узагальнення задачі Бюффона, переходячи від кидання голки на площину до вкидання багатокутників у симплекс. В цьому випадку

вершини вкинутих у симплекс багатокутників розглядаються як точки старту одночасних блукань системи n частинок.

Твердження 2. Локальні координати барицентра системи n точок, вкинутих у симплекс, за ймовірністю збігаються до локальних координат барицентра симплексу $U_0\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$, якщо кількість точок системи необмежено зростає ($n \rightarrow \infty$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \xi_i^l = \frac{1}{3}, \quad i = \overline{1; 3}.$$

Доведення. За законом великих чисел середнє арифметичне спостережених значень випадкової величини за ймовірністю збігається до її математичного сподівання.

Щоб скористатися цим законом, будемо розглядати локальні координати точок старту ξ_i ($i = \overline{1; 3}$), як неперервні випадкові величини, що приймають значення з відрізка $[0; 1]$, і знайдемо їх математичні сподівання. Для цього спочатку відновимо інтегральну та диференціальну функції розподілу випадкових величин ξ_i . З геометричних міркувань ймовірність того, що координата ξ_i точки старту прийме значення менше, ніж ξ_i^* , за рис. 1 дорівнює відношенню площі трапеції $ABDE$ до площі симплексу ABC .

Трикутники ABC та DCE подібні, тому їх площі з врахуванням позначень, зроблених на рис. 1, відносяться як

$$\frac{S_{\text{ДDCE}}}{S_{\text{ДАBC}}} = \frac{(1 - \xi_i)^2}{1}.$$

$$\text{Тоді } P(\xi_i < \xi_i^*) = \frac{S_{ABDE}}{S_{\text{ДАBC}}} = \frac{S_{\text{ДАBC}} - S_{\text{ДDCE}}}{S_{\text{ДАBC}}} = 1 - \frac{S_{\text{ДDCE}}}{S_{\text{ДАBC}}} = 1 - (1 - \xi_i)^2.$$

Отже, інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини ξ_i має вигляд:

$$F(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ 1 - (1 - \xi_i)^2, & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

а її диференціальна функція розподілу відповідно задається так:

$$f(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ 2(1 - \xi_i), & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1. \\ 0, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

Тоді математичне сподівання випадкової величини ξ_i дорівнює:

$$M(\xi_i) = \int_0^1 \xi_i f(\xi_i) d\xi_i = 2 \int_0^1 \xi_i (1 - \xi_i) d\xi_i = \frac{1}{3}.$$

Таким чином, середнє арифметичне спостережених значень ξ_i за ймовірністю збігається до відповідної координати барицентра симплексу, тобто $1/3$. Доведені твердження залишаються в силі при зростанні вимірності симплексів.

Твердження 3. Математичне сподівання перехідної ймовірності з будь-якої точки, що входить до множини n точок, які одночасно випадковим чином вкинуті у тривимірний симплекс (тетраедр), у вершину цього симплексу дорівнює ймовірності переходу з барицентра множини вкинутих точок в ту ж вершину симплексу.

Доведення. Доведення твердження 3 відрізняється від доведення твердження 1 зростанням проміжку зміни індексу i до $i = \overline{1; 4}$.

Твердження 4. Локальні координати барицентра системи n точок, вкинутих у тривимірний симплекс (тетраедр), за ймовірністю збігаються до локальних координат барицентра симплексу $U_0\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$, якщо кількість точок системи необмежено зростає ($n \rightarrow \infty$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \xi_i^l = \frac{1}{4}, \quad i = \overline{1; 4}.$$

Доведення. Алгоритм доведення залишається той самий, що і для твердження 2. Але у відповідності до зростання вимірності задачі геометрична ймовірність визначається через об'єми відповідних частин тетраедра.

Ймовірність того, що координата ξ_i точки старту прийме значення менше, ніж ξ_i^* , за рис. 3 дорівнює відношенню об'єму зрізаної піраміди $ABCA_1B_1C_1$ до об'єму тетраедра $ABCD$.

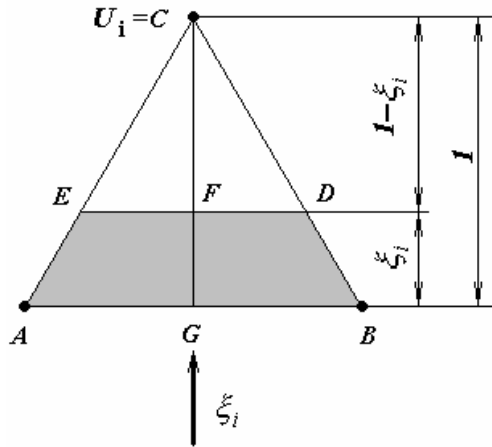


Рисунок 1 - Двовимірний симплекс

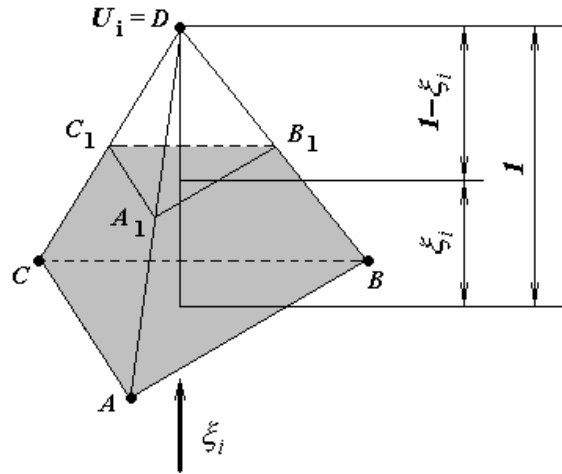


Рисунок 2 -Тривимірний симплекс

Тетраедри $A_1B_1C_1D$ та $ABCD$ подібні, тому їх об'єми з врахуванням позначень, зроблених на рис. 2, відносяться як

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D}}{V_{ABCD}} = \frac{(1 - \xi_i)^3}{1}.$$

Тоді

$$P(\xi_i < \xi_i^*) = \frac{V_{ABCA_1B_1C_1}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{ABCD} - V_{A_1B_1C_1D}}{V_{ABCD}} = 1 - \frac{V_{A_1B_1C_1D}}{V_{ABCD}} = 1 - (1 - \xi_i)^3.$$

Звідси послідовно отримуємо, що

$$F(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ 1 - (1 - \xi_i)^3, & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

$$f(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ 3(1 - \xi_i)^2, & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

$$M(\xi_i) = \int_0^1 \xi_i f(\xi_i) d\xi_i = 3 \int_0^1 \xi_i (1 - \xi_i)^2 d\xi_i = \frac{1}{4}.$$

У випадку k -вимірного симплексу твердження набувають такого вигляду.

Твердження 5. Математичне сподівання перехідної ймовірності з будь-якої точки, що входить до множини n точок, які одночасно випадковим чином вкинуті у k -вимірний симплекс, у вершину цього

симплексу дорівнює ймовірності переходу з барицентра множини вкинутих точок в ту ж вершину симплексу.

Доведення. Доведення твердження 5 відрізняється від доведення твердження 1 зростанням проміжку зміни індексу i до $i = \overline{1; k+1}$.

Твердження 6. Локальні координати барицентра системи n точок, вкинутих у k -вимірний симплекс, за ймовірністю збігаються до локальних координат барицентра симплексу $U_0\left(\frac{1}{k+1}; \frac{1}{k+1}; \dots; \frac{1}{k+1}\right)$, якщо кількість точок системи необмежено зростає ($n \rightarrow \infty$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \xi_i^l = \frac{1}{k+1}, \quad i = \overline{1; k+1}.$$

Доведення. Геометрична ймовірність, яка дозволяє відновити закон випадкової величини ξ_i , визначається в цьому випадку через міри відповідних частин k -вимірного симплексу, що приводить до наступних результатів:

$$F(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ 1 - (1 - \xi_i)^k, & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

$$f(\xi_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \xi_i \leq 0 \\ k(1 - \xi_i)^{k-1}, & \text{якщо } 0 < \xi_i \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } \xi_i > 1 \end{cases}$$

$$M(\xi_i) = \int_0^1 \xi_i f(\xi_i) d\xi_i = k \int_0^1 \xi_i (1 - \xi_i)^{k-1} d\xi_i = \frac{1}{k+1}.$$

Висновки. Встановлені властивості дозволяють будувати економічні схеми одночасних випадкових блукань по k -вимірним симплексам. Вони можуть дозволити, зокрема, зменшити обсяги обчислень значень підінтегральної функції при наближеному інтегруванні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Цибуленко О.В. Геометричні моделі процедур барицентричного усереднення: Дис...канд. техн. наук: 05.01.01. – Херсон, 2004. – 166 с.
2. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312 с.

3. Хомченко Б.А. Ймовірнісні моделі та алгоритми зваженого усереднення параметрів в інформаційних технологіях відновлення функцій: Дис...канд. техн. наук: 05.13.06. – Херсон, 2000. – 204 с.
4. Валько Н.В. Імовірнісні моделі і методи барицентричного усереднення граничних потенціалів: Дис...канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. – Дніпропетровськ, 2005. – 170 с.
5. Хомченко А.Н. Некоторые обобщения моделей бернуллиевых блужданий в K -мерном симплексе // Труды Института прикладной математики и механики. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 2001. – Т.6. – С. 159-163.
6. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
7. Балк М.Б. Болтянский В.Г. Геометрия масс. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 160 с.

Получено 15.03.2006 г.

УДК 515.2

Л.В.Ушаков

ПРОЕКТУВАННЯ ПОВЕРХНІ ВІДБИВАЧА ОСВІТЛЮВАЛЬНОГО ПРИЛАДУ ЩІЛИННОГО ТИПУ

Постановка проблеми. В нічний час під час проведення аварійно-рятувальних робіт виникає проблема надійного освітлення великих за розмірами місцевостей. На практиці використовуються освітлювальні прилади, поверхні відбивачів яких спроектовано на основі параболічних залежностей, і які формують пучок променів у межах „світлового конуса”. Для освітлення великих площ місцевостей такі прилади необхідно періодично рухати (тобто сканувати місцевість), що додає додаткові вимоги до конструкцій їх кріплень. Тому актуальними будуть дослідження, спрямовані на пошук форми нерухомого відбивача, здатного зосередити відбиті промені в просторі, відмінному за „світловий конус”, наприклад, щілинної конструкції.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Основу геометричного моделювання відбивачів променів методами синтетичної геометрії складають роботи професора О.Л.Підгорного [1]. Для складання комп’ютерних алгоритмів розрахунку відбивачів освітлювальних приладів більш зручним буде аналітичний опис відбивальної поверхні [2].

© Л.В.Ушаков, 2006

Постановка задачі. Описати поверхню відбивача, здатного зосередити відбиті промені в прошарку об'єму простору, обмеженого двома паралельними площинами (тобто поверхню відбивача щілинного типу).

Основна частина. Оберемо положення нерухомої прямокутної системи координат $Oxyz$ так, щоб серединна пряма щілини визначалася координатною площиною Oxz . Нехай система координат $OXYZ$ є рухомою і пов'язана з напрямком випромінювання. Сумістимо „одноіменними” осями з нерухомою системою координат $Oxyz$, а потім здійснимо її оберт навколо осі Oy на кут t . Описати такий оберт можна рівняннями

$$X = x \cos t + z \sin t; \quad Y = y; \quad Z = -x \sin t + z \cos t. \quad (1)$$

В рухомій системі координат $OXYZ$ задамо параболоїд обертання з фокусом в початку координат і з віссю обертання OZ :

$$X = \sqrt{v^2 - u^2}; \quad Y = u; \quad Z = \frac{v^2}{2p} - \frac{p}{2}, \quad (2)$$

де p – параметр форми параболоїда.

Вважатимемо, що завдяки переміщенню рухомої системи координат $OXYZ$ параболоїд обертання своєю віссю OZ «відслідковувати» необхідний напрям паралельних променів, де кут-параметр t змінюється у межах $t_{MIN} \leq t \leq t_{MAX}$. Якщо джерело світлових променів розташувати у спільному фокусі сім'ї конфокальних параболоїдів обертання, то шукана поверхня відбивача співпадатиме з обвідною елементів цієї сім'ї.

Для опису елемента сім'ї конфокальних параболоїдів необхідно на основі виразів (1) і (2) утворити систему рівнянь

$$\sqrt{v^2 - u^2} = x \cos t + z \sin t; \quad u = y; \quad \frac{v^2}{2p} - \frac{p}{2} = -x \sin t + z \cos t. \quad (3)$$

Після розв'язання системи (3) відносно x , y і z , одержимо опис параболоїда з фокусом в початку координат, повернутого навколо осі Oy на кут t :

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2p}[(v^2 - p^2) \sin t \mp 2p \cos t \sqrt{v^2 - u^2}]; \\ y &= u; \quad z = \frac{1}{2p}[(v^2 - p^2) \cos t \pm 2p \sin t \sqrt{v^2 - u^2}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут верхні знаки необхідно обирати при від'ємних значеннях параметра t , а нижні – при додатних значеннях. Для опису обвідної сім'ї конфокальних параболоїдів виду

$$x = v \cos t \cos u + \frac{p^2 - v^2}{2p} \sin t; \quad y = v \sin u; \quad z = v \sin t \cos u - \frac{p^2 - v^2}{2p} \cos t \quad (5)$$

необхідно залучити якобіан [4, 5]

$$J(u, v) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, t)} = -\frac{v^2(p^2 + v^2)}{2p^2} \cos u. \quad (6)$$

З рівняння $J(u, v) = 0$ відносно параметра u одержуємо корінь $u = \pi/2$. Підставивши $u = \pi/2$ у формули (5), маємо рівняння обвідної

$$x = -\frac{v^2 - p^2}{2p} \sin u; \quad y = v; \quad z = \frac{v^2 - p^2}{2p} \cos u. \quad (7)$$

Отже, відбивальна поверхня складатиметься з трьох частин. А саме, з двох фрагментів миттєвого положення параболоїда обертання - лівого півпараболоїда і правого півпараболоїда при значеннях параметра $t = t_{MIN}$ і $t = t_{MAX}$, а також з частини поверхні боковин відбивача. На рис. 1 зображено сім'ю конфокальних параболоїдів (4) (при $p = 2$), компоненти нерухомого відбивача, а також аксонометрію нової відбивальної поверхні.

Для дослідження відбивальних характеристик запропонованого рефлектора слід визначити напрям відбитого променя. Нехай поверхню R описано у вигляді $x=x(u, v)$; $y=y(u, v)$; $z=z(u, v)$, а джерело променів розташовано у точці $S(x_S, y_S, z_S)$. Відбитий промінь доцільно визначати за допомогою уявного джерела променів [2].

Твердження 1. Координати точки $M(x_M, y_M, z_M)$ - як уявного джерела променів - слід обчислювати за формулами:

$$x_M = x_S - 2km; \quad y_M = y_S - 2kn \quad \text{і} \quad z_M = z_S - 2kl, \quad (8)$$

$$\text{де} \quad k = \frac{(x_S - x)m + (y_S - y)n + (z_S - z)l}{m^2 + n^2 + l^2}; \quad m = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}; \quad n = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}; \quad l = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

Тоді відбитий від поверхні R в точці $P(x, y, z)$ промінь визначається формулами:

$$x_{BID} = x - (x_M - x)q; \quad y_{BID} = y - (y_M - y)q; \quad z_{BID} = z - (z_M - z)q, \quad (9)$$

де q – параметр точки на відбитому промені.

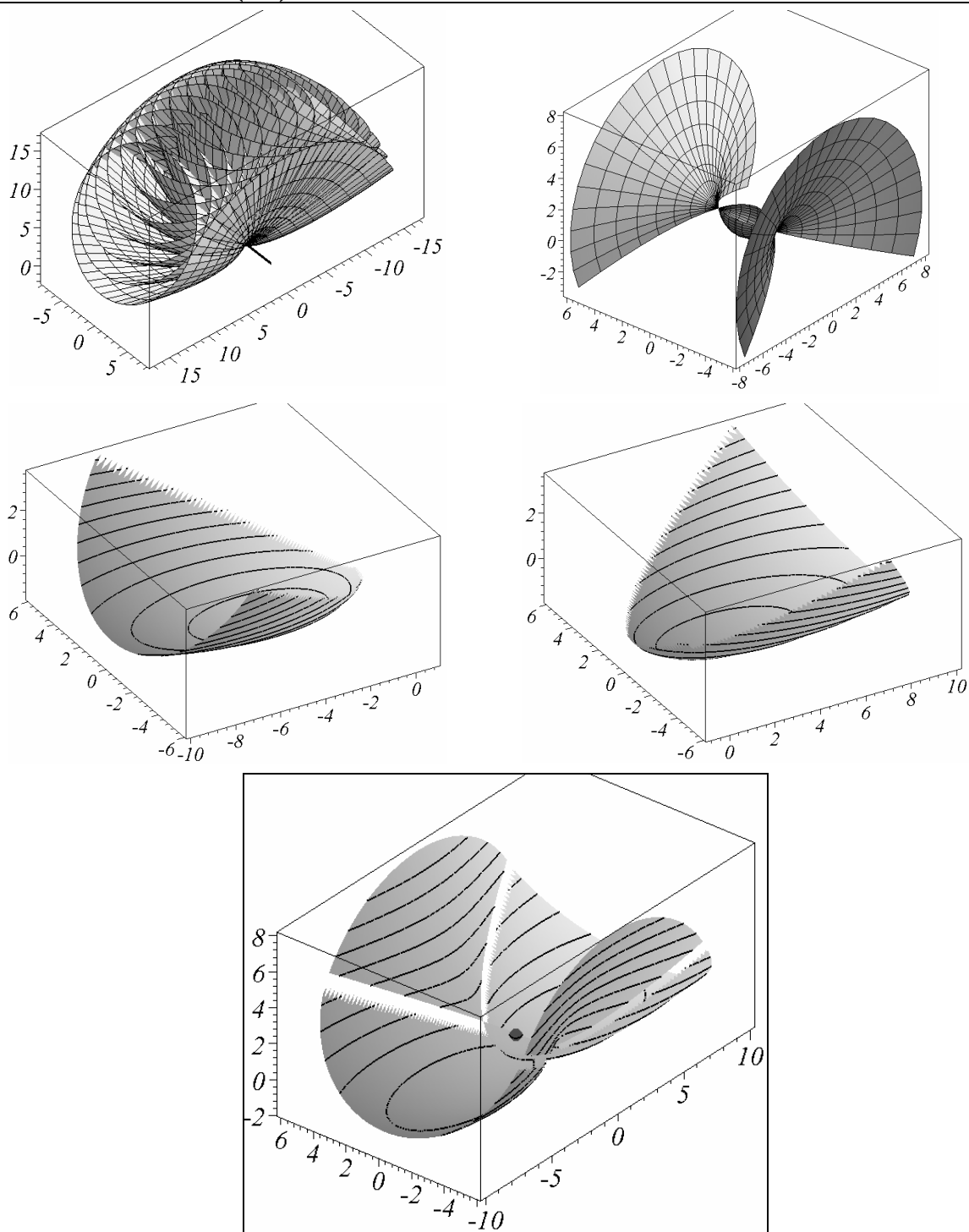


Рисунок 1 - Сім'я конфокальних параболоїдів, компоненти нерухомого відбивача та аксонометрія відбивальної поверхні

Твердження 2. Якщо поверхня „півпараболоїда” описана у параметричному вигляді (4), то координати вектора нормалі у точці падіння променя $x=x(u, v)$; $y=y(u, v)$; $z=z(u, v)$ слід обчислювати за формулами:

$$m(u, v) = v \frac{\sqrt{v^2 - u^2} \cos t \pm p \sin t}{p \sqrt{v^2 - u^2}}; \quad n(u, v) = \frac{uv}{p \sqrt{v^2 - u^2}};$$

$$l(u, v) = v \frac{\sqrt{v^2 - u^2} \sin t \mp p \cos t}{p \sqrt{v^2 - u^2}}, \quad (10)$$

де t – кут нахилу параболоїда відносно вертикальної осі (верхні знаки необхідно обирати при від’ємних значеннях параметра t , а нижні – при додатних значеннях).

Твердження 3. Якщо рівняння „боковин” описано у вигляді (7), то координати вектора нормалі у точці $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$; $z = z(u, v)$ падіння променя слід обчислювати за формулами:

$$m(u, v) = -\frac{1}{2p}(u^2 - p^2) \sin v; \quad n(u, v) = -\frac{u(u^2 - p^2)}{2p^2}; \quad l(u, v) = \frac{1}{2p}(u^2 - p^2) \cos v. \quad (11)$$

Тоді уявне джерело променів $M(x_M, y_M, z_M)$ матиме координати (8), де

$$k = p^2 \frac{2p(z_S \cos v - x_S \sin v) - 2uy_S + u^2 + p^2}{u^4 - p^4}. \quad (12)$$

Наведені твердження покладено в основу геометричного моделювання променів, відбитих від певної ділянки відбивача. На рис. 2 наведено зображення відбитих променів для правої боковини нової поверхні (тут $x_S = 0$; $y_S = 0$; $z_S = 0$).

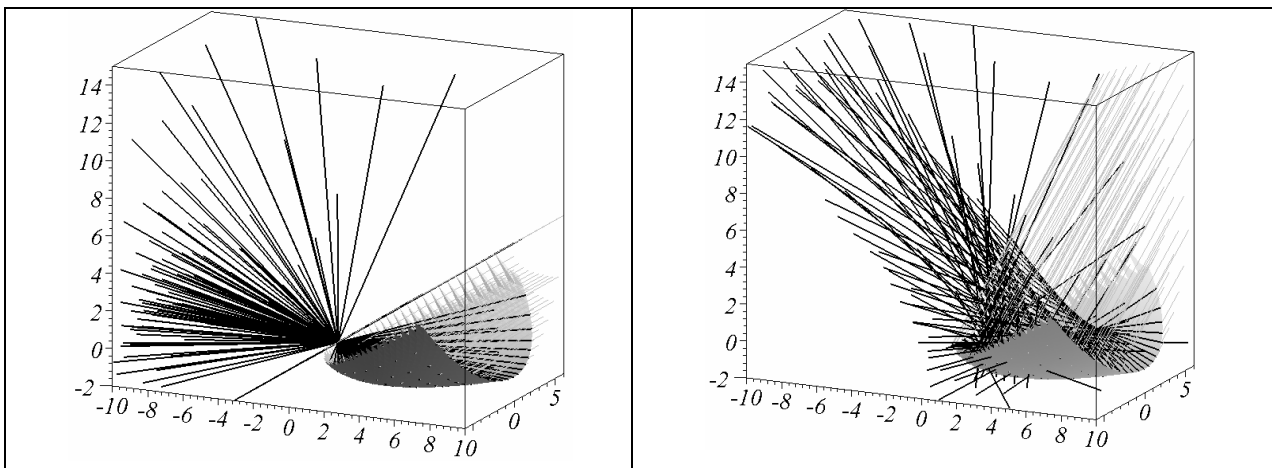


Рисунок 2 - Промені, які відбиті від правої боковини відбивача для різних напрямів падіння променів

Висновки. Опис відбивальної поверхні, яка дозволяє концентрувати відбиті промені у прошарку простору, складається з рівнянь (4) та (7).

ЛІТЕРАТУРА

1. Подгорный А.Л. К вопросу автоматизации инсоляционных расчетов // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1981.-Вып.31.– С.12–13.
2. Куценко Л.М. Визначення поверхні нерухомого відбивача у випадку рухомого джерела променів // Праці / Таврійська державна агротехнічна академія. - Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - Том. 24. - Мелітополь: ТДАТА,. - 2004 - С. 15 – 21.
3. Куценко Л.М. Метод опису геометричної форми відбивача у випадку рухомого джерела променів // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Харків: ХДУХТ, 2004. Вип. 6. - С. 3 - 8.
4. Куценко Л.М. Визначення поверхні нерухомого відбивача, здатного зосередити відбиті промені в заданій точці простору. - Сборник научных трудов КНУТД. - Киев: Випол, 2004. - С.28-38.

Получено 12.03.2006 г.

УДК 515.2:517.2

А.Н.Хомченко, С.В.Моисеенко

**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА БАЗИСА ЛИНЕЙНОЙ
3D– ИНТЕРПОЛЯЦИИ**

Постановка проблемы. Проблема трехмерной интерполяции является ключевой для методов дискретных элементов. В связи с развитием ЭВМ и появлением современных методов численного решения краевых задач возникла интересная методологическая проблема установления и изучения взаимосвязи между различными методами алгебраизации (аппроксимации). По мнению Зенкевича и Моргана [1] все процессы аппроксимации решений дифференциальных уравнений по существу составляют единое целое. В последние годы все большее число специалистов приходит к пониманию этого факта. В настоящей работе предпринята попытка найти характерные черты, объединяющие в единое семейство МКР, МКЭ, МГЭ и метод Монте-Карло. Установлено, что все эти методы фактически используют принцип барицентрического усреднения узловых параметров в фиксированном или текущем барицентре системы “материальных” узлов. Включение в общее семейство метода Монте-Карло стало возможным благодаря установлению вероятностных свойств базиса трехмерного симплекса.

© А.Н.Хомченко, С.В.Моисеенко, 2006

Анализ предшествующих публикаций и постановка задачи. Симплексом в трехмерном пространстве называют тетраэдр с 4-мя узлами в вершинах [2, 3, 4]. Симплексные модели связаны с использованием линейных интерполяционных функций в элементе: в двумерных задачах на треугольнике (3 узла), в одномерных – на отрезке прямой (2 узла). Эти модели одними из первых нашли применение в МКЭ [2]. Их использовали Тэрнер, Клаф, Мартин и Топп (1956 г.), Синг (1957г.), Галлагер, Педлог и Бейлард (1962г.). Свойства симплексных аппроксимаций исследовали Висманн (1963г.), Оден (1967, 1969г.), Фелиппа (1966г.) и другие. Базисные функции линейной интерполяции на симплексе иногда называют барицентрическими координатами симплекса [2]. Эти координаты, предложенные Мёбиусом в 1827г., долгое время применялись преимущественно в задачах геометрического содержания. В последние годы круг полезных приложений барицентрических координат заметно расширился [5]. Впервые удалось установить вероятностный смысл барицентрических координат и вероятностное содержание самой процедуры интерполяции на симплексе [6]. Основная задача работы состоит в установлении связей линейной интерполяции на симплексе с монте-карловской оценкой функции в текущей точке элемента. Кроме того, в работе приводится аналитическое доказательство новых вероятностных свойств базиса, обнаруженных в экспериментах со случайными блужданиями.

Основная часть. Полином линейной интерполяции на тетраэдре имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (1)$$

Расчетные узлы расположены в вершинах тетраэдра A_i (рис.1), число параметров в (1) соответствует числу вершин.

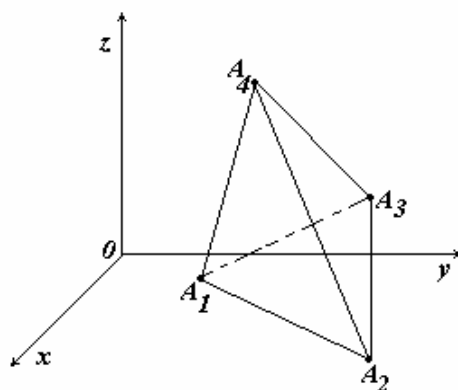


Рисунок 1 - Трехмерный симплекс

Построение интерполяционного полинома (1) сводится к определению параметров α_i ($i = \overline{1,4}$). Традиционный подход предусматривает составление на основе (1) и решение СЛАУ четвертого порядка. Мы попытаемся построить линейный интерполяционный полином на основе вероятностных представлений. Выберем внутри тетраэдра произвольную точку $M(x, y, z)$. Очень важно подчеркнуть, что точка M выбирается случайно в полном соответствии с законом равномерного распределения, плотность которого постоянна и равна Δ^{-1} , где Δ - объём тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Соединим точку M отрезками прямых с вершинами A_i . При этом внутри основного тетраэдра образуется четыре тетраэдра с общей вершиной M . Случайные перемещения вершины M приводят к перераспределению объёмов составляющих тетраэдров. Иными словами, объём отдельного тетраэдра, ассоциированного с вершиной A_i , является случайной величиной. Отношение объёма Δ_i к общему объёму Δ определяет вклад узлового значения φ_i в значение полинома $\varphi(x, y, z)$ в точке M . Для функции случайной точки мы можем составить дискретный закон распределения вероятностей в виде следующей таблицы:

Φ	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
P_i	P_1	P_2	P_3	P_4

Как видим, мы пришли к задаче Мёбиуса о тетраэдре со смещённым барицентром. Мёбиус пришел к барицентрическим координатам в поисках ответа на вопрос: как распределить единичную массу по вершинам тетраэдра A_i ($i = \overline{1,4}$), чтобы барицентр системы материальных точек A_i оказался в произвольно выбранной точке M ? Таким образом, вероятности P_i из приведенной выше таблицы и барицентрические координаты совпадают и могут быть определены геометрически через отношения объёмов. Например,

$$P_1 = \xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \text{ где } \Delta = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

Δ - объём тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$; Δ_1 - объём тетраэдра $MA_2A_3A_4$. Остальные функции ξ_i ($i = 2,3,4$) имеют вид: $\xi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где определитель Δ_i

образуется из Δ заменой второго, третьего и четвертого элементов i -ой строки координатами текущей точки M . Теперь, чтобы построить линейную интерполяцию, достаточно вычислить математическое ожидание функции случайной точки (см. таблицу):

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{i=1}^4 \xi_i(x, y, z) \cdot \varphi_i. \quad (2)$$

Заметим, что функции $\xi_i(x, y, z)$ по определению линейны, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа. В одношаговых схемах случайных блужданий ξ_i играют роль переходных вероятностей, а симплекс стал удобным вычислительным шаблоном для решения уравнения Лапласа с условиями Дирихле на границе произвольной формы [7].

В терминах метода Монте-Карло выражение (2) называют средним вознаграждением за выход блуждающей частицы в вершину симплекса. Многочисленные эксперименты со случайными блужданиями (на мелких сетках с тетраэдральными ячейками) подтвердили правильность замены апостериорных переходных вероятностей $\frac{n_i}{n}$ ап-риорными ξ_i . Такая замена существенно ускоряет получение монте-карловской оценки. Схема блужданий со случайным стартом превращается в конечно-разностную вычислительную схему, если все грани тетраэдра равны, а точка M зафиксирована в естественном барицентре. Теперь становится вполне очевидной связь между различными методами восстановления гармонической функции по четырем известным значениям в вершинах симплекса. Об этом и других применениях принципа барицентрического усреднения можно прочитать в [8, 9].

Эксперименты с многократными и многошаговыми зигзагоподобными блужданиями позволили обнаружить новое свойство переходных вероятностей. Ниже приводится аналитическое доказательство этого свойства. Мы рассматриваем случайную выборку из тетраэдров с общим барицентром M_0 , которые вложены в основной тетраэдр (рис.1). Тетраэдр называется вложенным в основной тетраэдр, если его вершины находятся внутри (возможно, на границе) основного тетраэдра. Случайный характер выборки обусловлен произвольным поворотом вложенного тетраэдра около барицентра M_0 , равномерным

растяжение или сжатием к барицентру вложенного тетраэдра. Вершины вложенного тетраэдра обозначим через k, l, m, n .

УТВЕРЖДЕНИЕ. Математическое ожидание переходной вероятности из вершины вложенного тетраэдра в вершину основного тетраэдра равно вероятности перехода из барицентра вложенного тетраэдра в указанную вершину основного тетраэдра.

Доказательство. Напомним, что вероятность случайного перехода из внутренней точки “ k ” основного тетраэдра в его вершину “ i ” определяется значением базисной функции $\xi_i(k) = \xi_i(x_k, y_k, z_k)$. Вычислим непосредственно среднее значение (математическое ожидание) переходных вероятностей по четырем маршрутам, проложенным из вершин k, l, m, n вложенного тетраэдра в вершину 1 основного тетраэдра

$$\overline{P}_1 = \frac{0,25}{\Delta} (\Delta_k + \Delta_l + \Delta_m + \Delta_n) = \frac{0,25}{\Delta} \begin{vmatrix} 4 & x_k + x_l + x_m + x_n & y_k + y_l + y_m + y_n & z_k + z_l + z_m + z_n \\ 4 & 4x_2 & 4y_2 & 4z_2 \\ 4 & 4x_3 & 4y_3 & 4z_3 \\ 4 & 4x_4 & 4y_4 & 4z_4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\Delta_0}{\Delta} = \xi_1(M_0),$$

где $x_0 = \frac{x_k + x_l + x_m + x_n}{4}$, $y_0 = \frac{y_k + y_l + y_m + y_n}{4}$, $z_0 = \frac{z_k + z_l + z_m + z_n}{4}$ - координаты барицентра вложенного тетраэдра. Аналогично, $\overline{P}_2 = \xi_2(M_0)$;

$$\overline{P}_3 = \xi_3(M_0); \quad \overline{P}_4 = \xi_4(M_0).$$

СЛЕДСТВИЕ. Математическое ожидание расстояния от вершины вложенного тетраэдра до какой-либо грани основного тетраэдра равно расстоянию от этой же грани основного тетраэдра до барицентра вложенного тетраэдра.

Выводы. Наиболее содержательной процедурой алгебраизации является аппроксимация базисными функциями. На симплексах это барицентрические координаты. Модель случайных блужданий по симплексам, использующая барицентрические координаты в качестве переходных вероятностей, прямо указывает на связь других методов дискретизации с методом Монте-Карло. Задача Дирихле для уравнения Лапласа – лучший пример существования такой связи. Ассоциация математического ожидания с барицентром является результатом удачного сочетания вероятностных подходов и механических аналогий. Образно говоря, барицентр – это хранитель усредненной информации о своем окружении.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
- 2.Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – Мир, 1976. – 464 с.
- 3.Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1981. - 216с.
- 4.Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. -392с.
- 5.Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс. – М.: Наука, 1987. - 160 с.
- 6.Хомченко А.Н. Способ построения интерполяционных формул на конечных элементах // Сопротивление материалов и расчет сооружений. - К.: КИСИ, 1985.-Вып.47.- С.67-70.
- 7.Хомченко А.Н. Вероятностные схемы в дискретном анализе температурных полей / Инж.-физич.журнал. - 1988.-Т.55. - №2. - С.323-324.
- 8.Хомченко А.Н., Крючковский В.В. Модели барицентрического усреднения и одношаговые схемы случайных блужданий//Матем.моделирование в образовании, науке и промышленности. - СПб.: МАН ВШ, 2005.-С.112-115.
- 9.Хомченко А.Н., Крючковский В.В. Об усреднении в математическом моделировании//Вестник Херс.национ.техн.ун-та. – Херсон:ХНТУ, 2005.-Вып. 22. - С. 340-343.

Получено 19.03.2006 г.

УДК 514.18:519.6

О.В. Цыбуленко, Е.И. Литвиненко, Ю.И. Николаенко

**АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МОДЕЛИ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ
БАЗИСОВ**

Постановка проблемы. В наше время сотовые структуры все больше привлекают внимание исследователей. Гексагональные элементы можно встретить от молекулярных решеток фуллеренов до ячеек твело ядерных реакторов. Это вызвало немалый поток работ исследователей самых разных областей наук, посвященных геометрическому моделированию.

© О.В. Цыбуленко, Е.И. Литвиненко, Ю.И. Николаенко, 2006

В каталоге дискретных элементов (ДЭ) метода конечных элементов (МКЭ) шестиугольные ДЭ долгое время не значились вследствие отсутствия унитарного базиса. Классический интерполяционный полином на шестиугольном дискретном элементе с шестью узлами в вершинах содержит шесть параметров. Попытка построить такой полином как можно меньшей степени алгебраически не увенчалась успехом, т.к. матрица СЛАУ оказывается вырожденной. Считается, что причиной этого является избыточная симметрия правильного шестиугольника. Поэтому исследователи стали применять геометрические методы построения базиса, что привело к появлению дробно-рационального базиса гексагона [1]. Как известно, использование дробно-рационального базиса связано с некоторыми вычислительными трудностями, особенно при вычислении кратных интегралов в расчетах по МКЭ. Задача построения унитарного полиномиального базиса на гексагоне вплоть до 80-х годов прошлого столетия оставалась нерешенной. В [2] с помощью геометрического моделирования был построен первый полиномиальный гексагональный базис (ПБ). Несмотря на свою эффективность, этот базис имеет некоторые недостатки. Поэтому проблема построения оптимально удовлетворяющего всем интерполяционным условиям базиса гексагона остается открытой.

Анализ предшествующих исследований. В работе [1] с помощью суперпозиции четырех плоскостей, проходящих через гексагон, строится система функций, которые, однако, еще не отвечают всем качествам базиса. Попытка усовершенствования этих функций (нормировки) приводит их к дробно-рациональному виду. Существуют и другие схемы построения базиса гексагона с помощью геометрического моделирования. Например, в [3] построена система функций для гексагона, которая, однако, тоже обладает рядом недостатков. В [4] предложен синтез двух несовершенных систем функций (полиномиальных и дробно-рациональных). Полученный базис удовлетворяет интерполяционной гипотезе, но он дробно-рациональный.

Схему построения полиномиального базиса гексагона [2], немного видоизменив относительно первоначальной трактовки, можно сформулировать следующим образом: полиномиальная базисная функция для узла 1 гексагона, вписанного в окружность единичного радиуса, определяется как суперпозиция

- 1) «параболического конуса», проходящего через узлы 2, 4, 6 и точку (1;0;1) (рисунок 1а),
- 2) плоскости, проходящей через узлы 3, 5 и точку (1;0;1) (рисунок 1б).

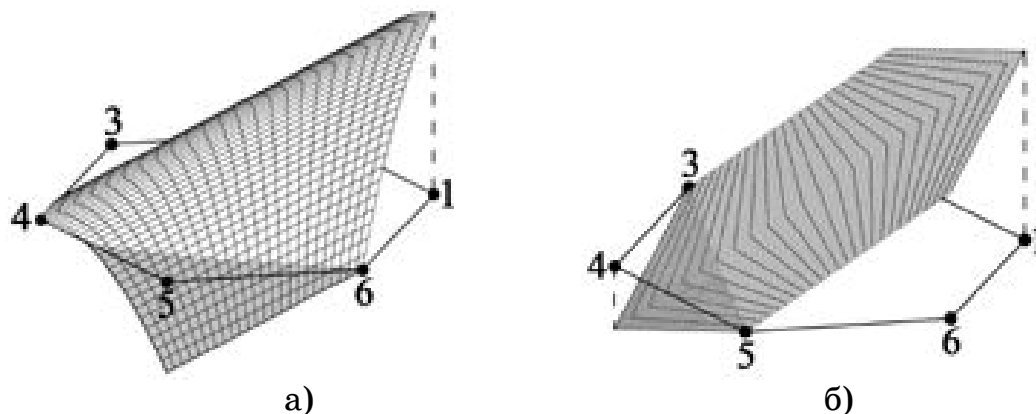
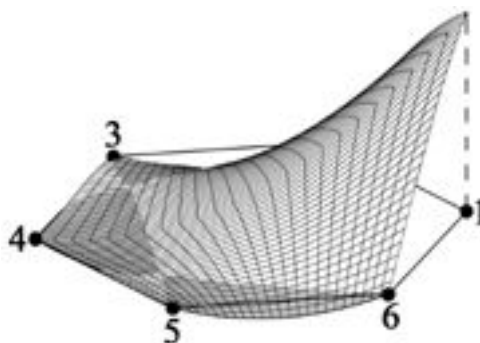


Рисунок 1 – Построение ПБ для гексагона

Тогда базисная функция для узла 1 имеет вид (рисунок 2):

$$N_1(x, y) = \frac{1}{6}(x - 2y^2 + 1)(2x + 1). \quad (1)$$

Рисунок 2 – Полиномиальная базисная функция для узла 1 $N_1(x, y)$

Остальные базисные функции можно найти из N_1 последовательным поворотом на угол 60° . Такой ПБ удовлетворяет интерполяционным условиям. Однако на сторонах гексагона функции N_i не являются линейными, тогда как при заданном распределении узлов ДЭ вдоль каждой стороны должны быть линейными. Хотя, это не мешало такому базису давать более точные результаты, чем дробно-рациональные базисы [5].

Постановка задачи. Задача состоит в том, чтобы найти оптимальный по своим свойствам полиномиальный гармонический базис

гексагона, который отвечал бы всем интерполяционным условиям и давал бы наиболее точные результаты.

Основная часть. Рассмотрим следующий шестипараметрический полином

$$P_i(x, y) = \alpha_1^i + \alpha_2^i x + \alpha_3^i y + \alpha_4^i x^2 + \alpha_5^i x^3 + \alpha_6^i y^2, \quad (i = \overline{1, 6}). \quad (2)$$

Положим $\alpha_1 = \frac{1}{6}$. Тогда из интерполяционных условий

$$P_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = \overline{1, 6}), \quad (3)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера,

$$\sum_{i=1}^6 P_i(x, y) = 1 \quad (4)$$

для узла 1 получим следующую базисную функцию:

$$f_1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3}x^3. \quad (5)$$

Остальные базисные функции можно найти из f_1 последовательным поворотом на угол 60° . Несмотря на то, что выполняются интерполяционные условия, функция (5) оказалась хуже функции (1) – она обладает тем же недостатком нелинейности на сторонах гексагона и притом гораздо сильнее осциллирует по области ДЭ.

Воспользовавшись приемом взвешенного усреднения [4], сложив базисы (1) и (5) с весовыми коэффициентами $3/4$ и $1/4$ получим новый базис. Например, для узла 1 (рисунок 3):

$$P_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{2}y^2x + \frac{1}{6}x^3. \quad (6)$$

Для этого базиса выполняются условия (3), (4). И хотя он снова таки нелинеен вдоль сторон гексагона, лапласианы каждой базисной функции равны нулю, чего нельзя сказать про базис (1). Это свойство дает гарантию гармоничности (по Лапласу) восстанавливаемой функции на гексагоне [5].

В работе [6] предложен качественно новый подход к построению полиномиального базиса для шестиузловое гексагонального ДЭ. С помощью вероятностно-геометрического моделирования строится полиномиальный базис степени выше чем (2), в котором исключены нечетные степени y . Коэффициенты такого базиса находятся с наперед заданной степенью точности. Например, для узла 1 базисная функция

имеет следующий вид (рисунок 4):

$$K_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x + 0,26535142x^2 - 0,26535142y^2 - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}x^3 - 0,37646253x^2y^2 + 0,06798191x^4 + 0,05750560y^4. \quad (7)$$

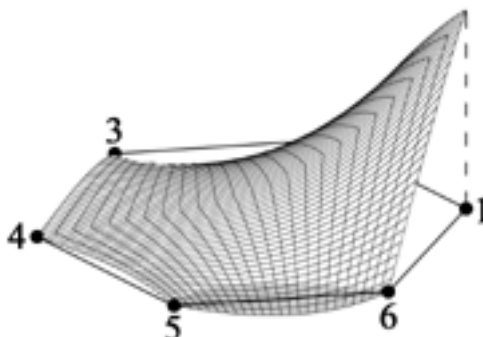


Рисунок 3 – Полиномиальная базисная функция для узла 1 $P_1(x, y)$

Такой базис не отвечает условиям (3), (4), но невязки достаточно малы, и для практических расчетов ими можно пренебречь. Лапласианы каждой базисной функции не равны нулю, хотя в сумме компенсируются и полностью «гасят» друг друга.

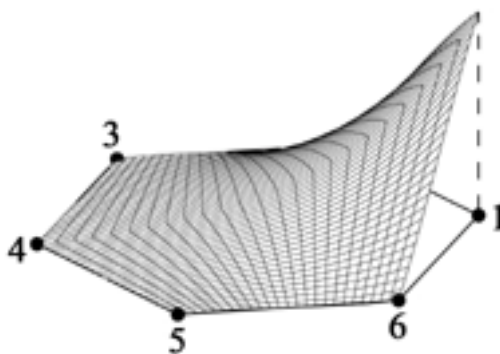


Рисунок 4 – Полиномиальная базисная функция для узла 1 $K_1(x, y)$

Достоинством полиномиального базиса (7), отличающим его от предыдущих базисов, является гладкость в области ДЭ и сохранение линейности вдоль границы гексагона. Таким образом, базис (7) тоже пригоден для расчетов. Предложенные базисы были протестированы на задаче восстановления стационарного температурного поля в пределах области гексагонального ДЭ, вписанного в окружность единичного радиуса, при заданных температурах в вершинах: $T_1 = 10^0$; $T_2 = 20^0$; $T_3 = 30^0$; $T_4 = 40^0$; $T_5 = 50^0$; $T_6 = 60^0$. Решение устанавливалось методом барицентрического усреднения (МБУ) [5].

Выберем вершину 1 гексагонального ДЭ в точке $(1;0)$, остальная нумерация – против часовой стрелки. Результаты расчетов по МБУ с использованием базисов (1), (6), (7) сравниваются со значениями, полученными методом сеток (итерациями Либмана) и многошаговыми блужданиями метода Монте-Карло (табл. 1).

Таблица 1

Температуры в контрольных точках гексагонального ДЭ

точка (x_i, y_i)	Значение в точке (x_i, y_i)				
	По методу сеток	По методу Монте-Карло	По МБУ с использованием базиса		
			(1)	(6)	(7)
$(0;0)$	35	35,133	35	35	35
$\left(\frac{1}{2};0\right)$	27,325	27,401	25	26,875	27,257
$\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	22,537	22,781	18,333	21,667	22,538

Рассмотрим задачу с теми же параметрами, но при условии теплоизоляции вдоль части границы, захватывающей узлы 1 и 6. Расчетные формулы МБУ приведены в [7]. В алгоритме расчета по методу Монте-Карло для теплоизолированной границы предусматривается идеальное отражение блуждающей частицы.

Таблица 2

Температуры в контрольных точках гексагонального ДЭ
с теплоизолированной частью границы

точка (x_i, y_i)	Значение в точке (x_i, y_i)			
	По методу Монте-Карло	По МБУ с использованием базиса		
		(1)	(6)	(7)
$(0;0)$	35,058	35	35	35
$\left(\frac{1}{2};0\right)$	33,684	24,444	30	29,833
$\left(-\frac{1}{2};0\right)$	36,971	39,355	38,571	38,437

Выводы. Проведенные расчеты для задач восстановления потенциальных полей на гексагональном ДЭ (с заданными значениями в вершинах) показывают, что, несмотря на существенные недостатки, именно полиномиальный базис (7) выигрывает в конкуренции с дру-

гими полиномиальными базисами. Более того, многочисленное тестирование показало, что он дает погрешности практически такие же, как и дробно-рациональные базисы, а это является еще одним плюсом в его сторону. Хотя необходимо отметить, базис (7) эффективен для задач с несимметричными граничными условиями. В то время как для задач с определенной симметрией заданных условий неизменно лидирует первый полиномиальный базис (1) [5]. Для задач с теплоизоляцией на границе гексагонального ДЭ независимо от граничных условий базис (7) (как и дробно-рациональные базисы [7]) дает лучшую аппроксимацию, чем базис (1).

Таким образом, наличие каталога базисов для гексагонального ДЭ позволяет исследователю варьировать инструментарием для поиска наиболее точного решения при тех или иных параметрах задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ishiguro M. Construction of hexagonal basis functions applied in the Galerkin – type finite element method // J. Inf. Process. 1984. – V. 7, № 2. – P. 89 – 95.
2. Хомченко А.Н. Об одном проекционно-сеточном алгоритме вычислительной механики // VI Всесоюз. съезд по теоретич. и прикладн. механике: Аннотации докладов – Ташкент, 1986. – С. 628 – 629.
3. Wachspress E.L. A rational finite element basis.– Academic Press. – N.- Y., 1975. – 216 p.
4. Хомченко А.Н. Синтетична модель гексагонального скінченного елемента // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип.4, Том 20. – С. 9 -13.
5. Хомченко А.Н., Цыбуленко О.В., Дембровская М.В. Баріцентричні оцінки електростатического поля в круге // Автоматика. Автоматизация. Електротехнічні комплекси і системи". - 2003. - № 1 (11). – С. 35-40.
6. Хомченко А.Н., Моисеенко С.В., Николаенко Ю.И. Управляющие параметры и моделирование гармонического базиса гексагона // Тези доповідей Міжнародної науково-практичної конференції „Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем” (MPZIS’2005). – Дніпропетровськ: ДНУ, 2005. – С. 183-184.
7. Цыбуленко О.В., Лур'є І.А. Комп'ютерні оцінки стаціонарної температури шестикутної пластини // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. - Вип.4, Т.20.- С.90-94.

Получено 12.03.2006 г.

О.В. Цыбуленко, И.А. Лурье, Н.В. Корниловская

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРА ВЕСОВЫХ
КОЭФФИЦИЕНТОВ КУБАТУР ТИПА ГАУССА -
ЛЕЖАНДРА НА ТРЕУГОЛЬНОМ ДИСКРЕТНОМ
ЭЛЕМЕНТЕ**

Постановка проблемы. Представление свойств, явлений, процессов, состояний через кратные интегралы очень распространено в научных исследованиях. Многие геометрические и механические величины, которые связаны с непрерывным распределением масс в пределах некоторой плоской фигуры или тела в пространстве, выражаются двойными или, соответственно, тройными интегралами, которые распространяются на эту фигуру или тело. Сюда включаются такие основные величины, как площадь, объем, масса, центр масс, статические моменты и моменты инерции.

При применении метода конечных элементов в инженерных расчетах возникает необходимость расчета матриц, которые определяют свойства элемента, таких как матрицы жесткости, матрицы масс и т.д. При вычислении элементов матриц возрастает сложность подынтегральных выражений, что делает алгебраические выкладки весьма громоздкими. В таких случаях приходится прибегать к численному интегрированию, при котором стандартный интеграл заменяется кубатурной суммой. Отметим, что с точки зрения метода дискретных элементов, как отмечал Зенкевич [1], даже лучше, что интегралы будут вычислены приближенно, а не точно. Избыточная жесткость, которая возникает как следствие аппроксимации дискретными элементами, может быть компенсирована приближенным интегрированием. Это в свою очередь сглаживает погрешность самого МКЭ как численного метода.

Формулы, в которых варьируются не только весовые коэффициенты, а и координаты узлов интегрирования (кубатуры типа Гаусса - Лежандра) дают наилучшую точность, поэтому представляют наибольший интерес для исследователей.

Алгебраический подход приводит к отрицательным весам в спектре. Такие модели не рекомендуют к практическому применению.

© О.В. Цыбуленко, И.А. Лурье, Н.В. Корниловская, 2006

Анализ предшествующих исследований. Вопросы приближенного интегрирования на дискретных элементах рассматривались в работах Зенкевича О. [1], Сегерлинда Л. [2], Бенерджи П. и Баттерфилда Р. [3]. Во всех этих работах, к сожалению, для треугольного дискретного элемента третьего порядка была допущена ошибка, которая вплоть до выхода в свет книги [4] тиражировалась другими авторами. Ошибка состоит в нарушении соответствия между барицентрическими координатами узлов интегрирования и весовыми коэффициентами кубатуры. Авторы указанных публикаций не рекомендуют пользоваться кубатурной формулой из-за отрицательного веса и ошибок округления. Между тем, главным источником погрешностей кубатуры является не отрицательный вес в центре шаблона, а неправильное расположение периферийных узлов. В работе [5] указанная кубатура была реабилитирована. Несоответствие было устранено. Однако, из-за наличия отрицательного весового коэффициента, нарушается физическое правдоподобие спектра весов.

Первые попытки статистически смоделировать весовые коэффициенты были описаны в работах [6,7,8], где рассматривались кубатуры типа Ньютона – Котеса. Для таких моделей оказалось удобно использовать схемы случайных блужданий с поглощениями в граничных узлах. Для моделей типа Гаусса – Лежандра такие схемы не пригодны. Необходимо использовать схемы блужданий с отражающими границами.

Постановка задачи. Задача состоит в статистическом нахождении весовых коэффициентов кубатур типа Гаусса – Лежандра на треугольном дискретном элементе с помощью моделирования случайных блужданий

Основная часть. Основываясь на результатах работы [5], для дискретного элемента третьего порядка (рис. 1), существуют следующие соответствия между барицентрическими координатами узлов интегрирования и кубатурами:

$$0\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), 1\left(\frac{3}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right), 2\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right), 3\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right); \quad (1)$$

$$\iint_D f \, dS \approx \text{mes } D \left(-\frac{27}{48} f_0 + \frac{25}{48} \sum_{i=1}^3 f_i \right) \quad (2)$$

$$0\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), 1\left(\frac{11}{15}; \frac{2}{15}; \frac{2}{15}\right), 2\left(\frac{2}{15}; \frac{11}{15}; \frac{2}{15}\right), 3\left(\frac{2}{15}; \frac{2}{15}; \frac{11}{15}\right); \quad (3)$$

$$\iint_D f dS \approx \text{mes } D \left(\frac{33}{108} f_0 + \frac{25}{108} \sum_{i=1}^3 f_i \right). \quad (4)$$

Для маршрутизации случайных блужданий на элемент накладывается сетка с треугольными ячейками (рис. 2).

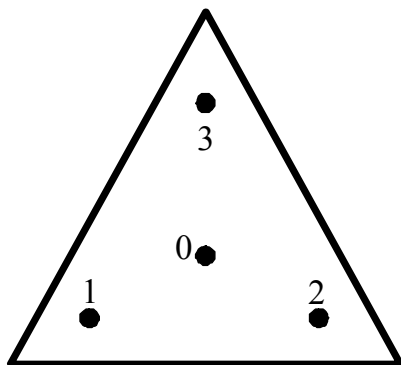


Рисунок 1 - Треугольный дискретный элемент третьего порядка

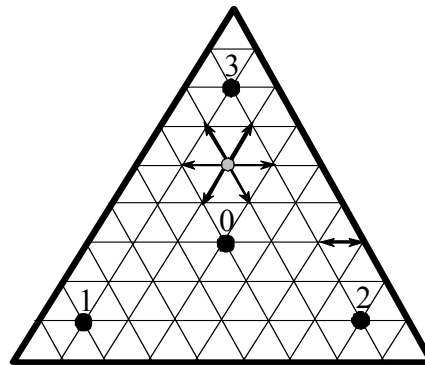


Рисунок 2 - Маршрутизация случайных блужданий

Сформулируем правила двумерных случайных блужданий в треугольном элементе с отражающими границами и поглощающими узлами. Точка старта выбирается случайным образом в одном из внутренних узлов решетки. Если этот узел не совпадает ни с одним из расчетных узлов кубатуры, то блуждающая частица имеет шесть маршрутов (рис. 2). При попадании частицы на границу области, она отражается от нее и возвращается в тот узел треугольной решетки, из которого вышла на границу. Частица поглощается только узлами интегрирования.

Компьютерные эксперименты для координат узлов (1) и (3) дали следующие результаты (табл. 1 и 2), количество выпущенных частиц – 1000000; количество отрезков, на которые разбивается каждая сторона треугольника – 30.

Таблица 1

Весовые коэффициенты для координат (1)

Координаты узла	Эксперимент	Точное значение
0(1/3,1/3,1/3)	0,229995	-27/48 ≈ -0,5625
1(3/5,1/5,1/5)	0,256893	25/48 ≈ 0,52083333
2(1/5,3/5,1/5)	0,256955	25/48 ≈ 0,52083333
3(1/5,1/5,3/5)	0,256157	25/48 ≈ 0,52083333

Таблица 2 подтверждает физическое правдоподобие спектра кубатуры (4).

Весовые коэффициенты для координат (3)

Координаты узла	Эксперимент	Точное значение
0(1/3,1/3,1/3)	0,296958	33/108≈0,30555556
1(11/15,2/15,2/15)	0,234313	25/108≈0,23148148
2(2/15,11/15,2/15)	0,234527	25/108≈0,23148148
3(2/15,2/15,11/15)	0,234202	25/108≈0,23148148

Естественно, что при статистическом моделировании получаем положительный спектр весов. Поэтому, полученные результаты дают альтернативную кубатуру для узлов (1). В связи с этим, представляет интерес сравнение «экспериментальной» кубатуры (ЭК) с кубатурой (2) на тестовых примерах.

Для тестирования были использованы следующие функции [9]:

$$f(x, y) = \sin(\pi(x^2 + y^2)); \quad (a)$$

$$f(x, y) = \exp(yx); \quad (б)$$

$$f(x, y) = \frac{\exp[\sin(x)] \cos(x)}{y^2 + 1}. \quad (в)$$

Для функции а) характерно быстрое изменение градиентов по области конечного элемента, где КЭ – это правильный треугольник, вписанный в окружность единичного радиуса, центр тяжести которого совпадает с началом координат (рис. 3). Функции б) и в) в пределах области интегрирования имеют медленно изменяющиеся градиенты (рис. 4, 5).

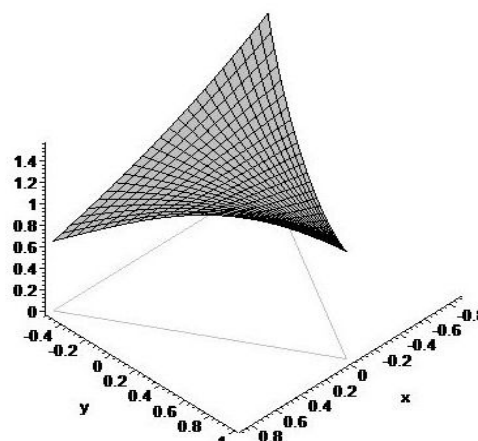
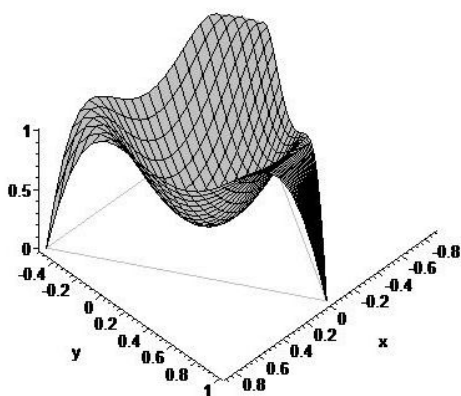


Рисунок 3 – График функции (а) Рисунок 4 – График функции (б)

Результаты тестирования сравниваются с результатами, полученными при вычислении интегралов с помощью вычислительного процессора Maple (таблица 3).

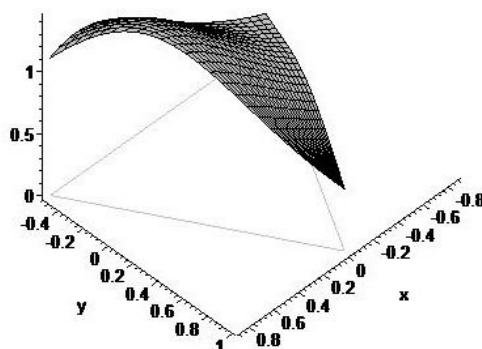


Рисунок 5 – График функции (в)

Таблица 3

Результаты тестирования ЭК и кубатуры (2)

Функция	Результат Maple	ЭК	Погрешность	Кубатура (2)	Погрешность
(а)	0,7344	0,4807	34,54	0,9780	33,19
(б)	1,307	1,301	0,46	1,302	0,38
(в)	1,158	1,224	5,69	1,148	0,86

Выводы. Экспериментальные спектры весовых коэффициентов для узлов (1) были получены, используя тот же алгоритм, что и для узлов (3). Однако, «экспериментально» полученная кубатура с казалась бы физически правдоподобным спектром весов «дает» худший результат. Таким образом, несмотря на отрицательный вес, кубатура (2) предпочтительнее для вычисления интегралов. Предостережения, которые существуют в литературе [1,2], не всегда оправданы. Представляет интерес рассмотрение кубатур Гаусса – Лежандра на трехмерных элементах и элементах других конфигураций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
5. Хомченко А.Н., Лурье И.А., Корниловская Н.В., Цыбуленко О.В. Об оценках кратных интегралов по Гауссу//Геометричне та

- комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2005. – Вип. 10. – С. 51-55.
6. Хомченко А., Зуб П., Цибуленко О. Геометрія випадкових блукань у центрованих дискретних елементах // Сучасні проблеми геометричного моделювання: Матеріали Міжнародної науково – практичної конференції. – Львів: НУ «Львівська політехніка», 2003. – С. 104 – 106.
7. Хомченко А.Н., Тулученко Г.Я. Стохастичні моделі для комп'ютерної діагностики вагових спектрів кубатур // Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2004. – Вип. 3, № 629. – С. 33 – 38.
8. Тулученко Г.Я., Хомченко А.Н. Моделі випадкових блукань на трикутних скінченних елементах вищих порядків // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Мелітополь: ТДАТА, 2004. – Вип. 4. - Том 28. – С. 32 – 36.
9. Тулученко Г.Я., Хомченко А.Н. Обчислювальні експерименти з ваговими коефіцієнтами кубатур на скінченних елементах вищих порядків // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2005. – Вип. 11. – С. 37-43.

Получено 15.03.2006 г.

УДК 515.2, 681.3

А.В. Черников

ПРИКЛАДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ФОРМООБРАЗОВАНИЙ

Постановка проблемы. Вопросы исследования технологических процессов в промышленности (например, добыча нефти и газа, фильтрование), природных процессов и явлений (в частности, эрозии почв, наступления пустынь) и т.д. часто требуют проведения виртуального эксперимента с построением компьютерных моделей изменения объектов во времени под действием внешних сил. Для использования всех возможностей компьютерной техники необходима разработка соответствующих геометрических моделей объектов, процессов и явлений.

© А.В. Черников, 2006

В частности, возникает задача описания формы объекта, которая меняется с течением времени под действием заданных факторов. Данная проблема возникла при исследовании геометрических аспектов процесса фильтрования суспензий в промышленности и коммунальном хозяйстве, но результаты и модели, полученные для этой задачи, можно распространить и на другие динамические процессы.

Анализ последних достижений и публикаций. Вопросам компьютерного моделирования различных физических процессов в последнее время уделяется все больше внимания. Ряд методов основан на использовании физических закономерностей [1], другие – возможностей фрактальной геометрии [2, 3], третьи – на использовании различных преобразований, в частности, конформных. Наибольший интерес представляет объединение этих подходов, например, исследование (моделирование) некоторого процесса в простейшей области (круге) а затем его распространение на заданную область.

Постановка задачи. Развитие компьютерного моделирования обуславливает актуальность геометрических исследований формообразования под действием различных факторов, в том числе и методов визуализации с возможностью интерактивного управления параметрами процесса [4]. Так как именно форма границы является индикатором изменений геометрии объекта, необходимо предложить методы моделирования границ 2-D и 3-D объектов, меняющихся с течением времени под влиянием заданных физических и/или технологических факторов.

Основной материал. После проведения ряда экспериментов [5, 6], было получено семейство кривых, как мгновенных границ некоторого объекта (слой осадка при фильтровании), для которого необходимо получить аналитические зависимости. Один из подходов к решению этой задачи может базироваться на понятии квази-эквидистантных нормально-смещенных кривых и поверхностей [7].

При создании модели принят ряд допущений: будем считать что частицы, взвешенные в жидкости, имеют одинаковый размер; скорость частицы при фильтровании складывается из двух компонент – оседание под действием силы тяжести и движение перпендикулярно текущей поверхности фильтрования за счет перепада давлений. Опишем уточненный алгоритм их построения (см. рис. 1).

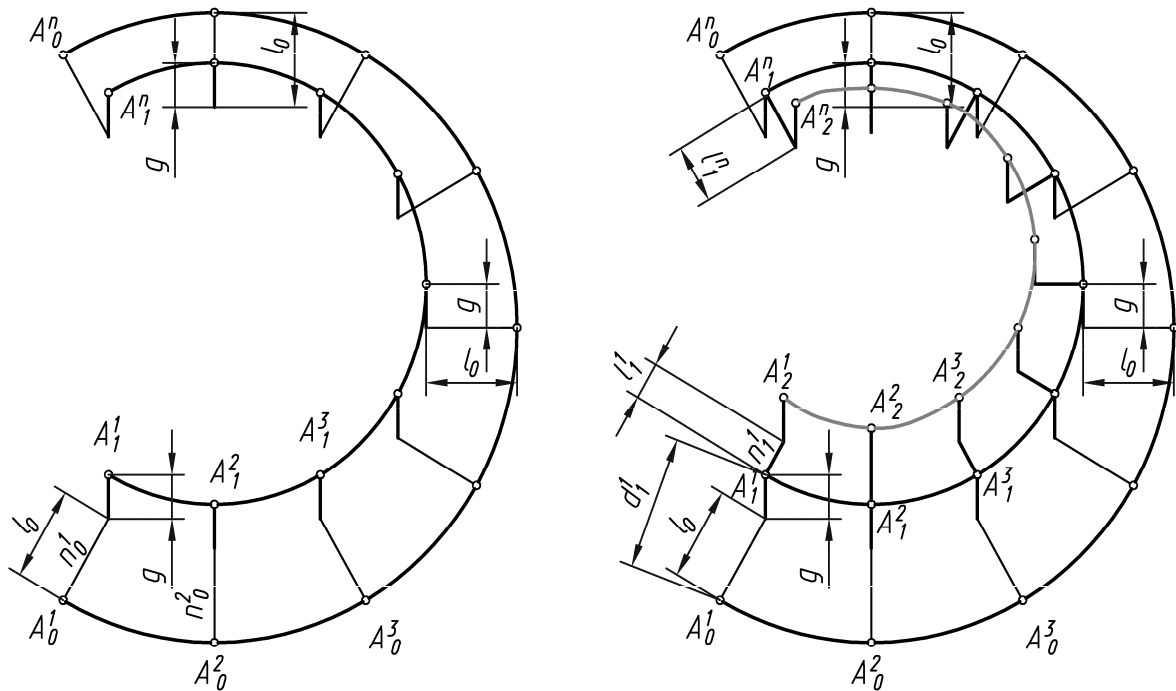


Рисунок 1 – Алгоритм построения семейства кривых

1. На исходной кривой выбираем ряд опорных точек $\{A_0^1, A_0^2, \dots, A_0^n\}$ и строим в каждой из них единичную нормаль $\{\bar{n}_0^i \mid i=1, \dots, n\}$;

2. Откладываем по каждой нормали величину l_0 (в случае фильтрования эта величина определяется опытным путем и зависит от свойств суспензии и фильтровальной перегородки, в других – задается исходя из закономерностей моделируемого процесса);

3. От концов полученных в каждой точке отрезков откладываем постоянный вектор длиной g (на рис. 1 он отложен вертикально вверх) и через полученные точки $\{A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^n \mid j=1\}$ проводим следующую кривую семейства;

4. В точках $\{A_j^1, A_j^2, \dots, A_j^n \mid j=1\}$ полученной кривой строим единичные нормали $\{\bar{n}_j^i \mid i=1, \dots, n\}$. По каждой такой нормали откладываем величину l_j^i , зависящую от расстояния до исходной кривой d_j^i . Эта зависимость (например, для процессов фильтрования) может определяться по схемам, показанным на рис. 2. Здесь величина H соответствует толщине осадка, при которой суспензия уже не может проходить через образовавшийся слой осадка.

5. Принимаем последовательно $j=2, 3, \dots, m$ и повторяем шаги 3 и 4, пока $\max_{i=1 \dots n} \{l_j^i\} > g$. Получаем семейство кривых, описывающее процесс изменения объекта (его границы) с течением времени.

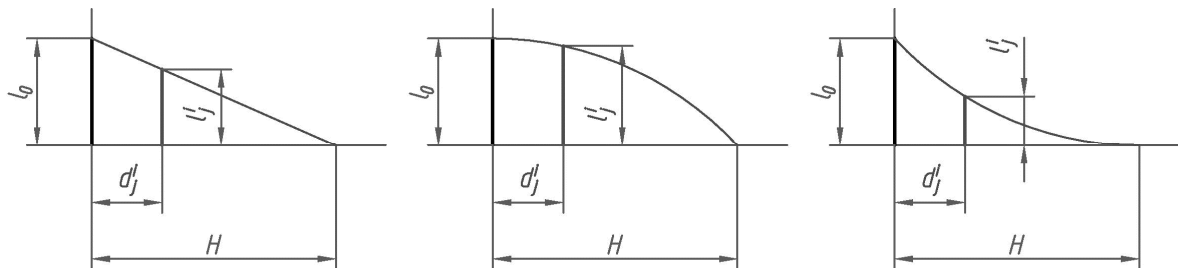
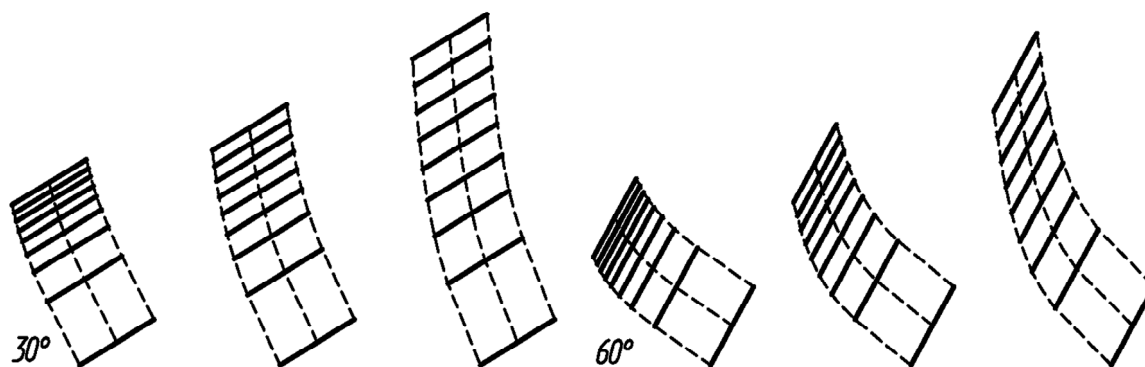


Рисунок 2 – Варианты определения длины нормали

На рис. 3 показаны примеры работы алгоритма для фрагмента кривой при различных начальных условиях (углы наклона отрезка 30° и 60°) и свойствах моделируемого объекта (параметры l_0 и g).



$l_0=30, g=2; l_0=30, g=5; l_0=30, g=10; l_0=30, g=2; l_0=30, g=5; l_0=30, g=10;$

Рисунок 3 – Последовательное изменение фрагмента границы объекта и линии тока при различных начальных условиях

На рис. 4 показан результат работы алгоритма для исходной кривой в виде эллипса, вытянутого вдоль вертикальной оси.

Предлагаемый алгоритм апробирован и для многоугольных областей. Однако, здесь возникает необходимость в дополнительной обработке каждого контура, связанная с самопересечением составляющих его отрезков (см. рис. 5).

В табл. 1 приведены коэффициенты уравнения кривых, по которым перемещаются углы ромба и трапеций.

Таблица 1

Коэффициенты уравнения кривой $y=(a+cx+ex^2)/(1+bx+dx^2)$

	a	b	c	d	e
Ромб	0.00002	-0.02042	0.33522	0.00013	0.00046
Трапеция 1	0.00018	0.00803	2.02065	-0.00195	0.02898
Трапеция 2	0.00000	-0.00453	0.66700	-0.00013	-0.00067

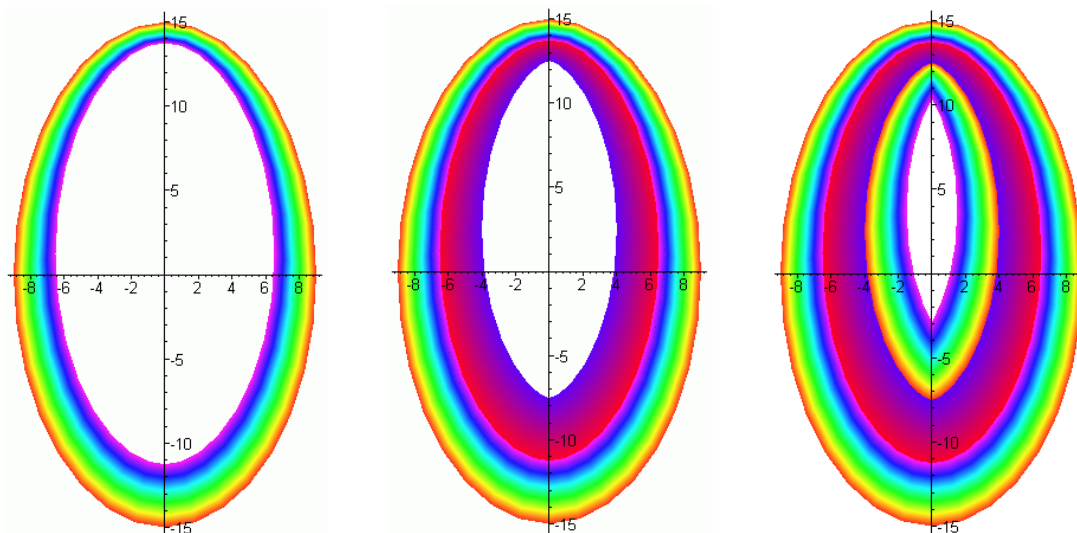


Рисунок 4 – Последовательное изменение границы объекта

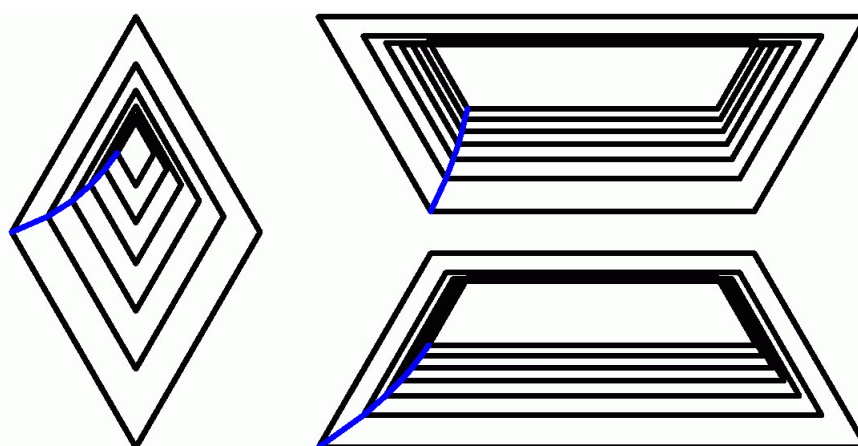


Рисунок 5 – Последовательное изменение границ многоугольника

Аналогичный алгоритм может быть применен для моделирования квази-эквидистантных поверхностей. Для этого поверхность следует триангулировать и описанные действия применить к каждой треугольной площадке.

Выводы и перспективы. В работе продемонстрировано соотношение между реальным, динамически изменяющимся объектом и его имитационной компьютерной моделью. Разработанные методы моделирования обязательно должны подтверждаться экспериментами –

иначе практическое использование таких моделей невозможно. По результатам наблюдений за реальными объектами модель должна корректироваться для уточнения сделанных допущений. Создание моделей – сложная междисциплинарная задача, в которой вопросы геометрии, математики, информатики, физики и биологии тесно взаимосвязаны. Формальное описание процесса вместе с последующей моделью (возможно, не учитывающей некоторые условия) может привести к интересным геометрическим результатам, даже если модель самого процесса окажется не совсем точной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайленко В.Є., Черніков О.В. Сучасний стан методів геометричного та комп'ютерного моделювання та напрямки їх розвитку. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2000. – Вип. 68. – С. 3-6.
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
3. Kaandorp, J.A., Fractal modelling: growth and form in biology. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994. – 208 p.
4. Foster N., Fedkiw R. Practical Animation of Liquids // ACM SIGGRAPH-2001. – 12 - 17 August 2001. - Los Angeles, CA, USA, 2001. - P. 23-30.
5. Черніков О.В. Моделювання кривих в перерізах поточної поверхні фільтрування. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. - С. 72-77.
6. Черніков О.В. Про одну сім'ю квазі-еквідистантних кривих // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків, ХДУХТ, 2005. – Вип. 10. – С. 70-73.
7. Черников А.В. Моделирование границ 3-D объектов, меняющихся во времени под действием заданных условий (на примере фильтрации) // Геометричне та комп'ютерне моделювання: Збірник наук. праць – Харків: ХДУХТ, 2005. – Вип. 11. – С. 81-84.

Получено 13.03.2006 г.

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ ПОЛІКООРДИНАТНИХ В – СПЛАЙНІВ

Постановка проблеми. Однією з кінцевих цілей теоретичних досліджень у прикладній геометрії є конструювання або моделювання кривих поверхонь, які відносять до найбільш важливих та найскладніших задач. При деформації поверхонь виникають проблеми щодо збереження адекватного перетворення, особливо це стосується перетворень, які відбуваються при переході з опуклої форми в неопуклу і навпаки.

Аналіз останніх досліджень. Різні методи конструювання поверхонь широко застосовують у геометрії, зокрема, у техніці, де поверхні слугують об'єктом інженерних досліджень, в моделюванні динамічних процесів та явищ.

Найбільше застосування при моделюванні поверхонь отримав кінематичний спосіб утворення поверхонь. Поверхні, які утворюються цим методом, називають кінематичним [1].

При застосуванні полікоординатного методу [2, 4] виникають неадекватні перетворення, особливо коли це стосується переходу з опуклої форми в неопуклу і навпаки. У [3] запропонований метод полікоординатних В-сплайнів, який, однак, остаточно не запобігає останньої вади.

У роботах [4, 5] опрацьовані методологічні засади й створені практичні способи (різного ступеня завершеності) конструювання і геометричного моделювання каркасно-кінематичних поверхонь (на основі методу політканинних перетворень) різного функціонального призначення. Але в цих роботах не розглянуто адекватність політканинного перетворення при переході від опуклої форми об'єкта в неопуклу і навпаки.

Формулювання цілей статті. Моделювання поверхонь вимагає застосування таких методів, які б уможливили здійснювати адекватне перетворення, відстежувати зміни форми та місця положення об'єкта, що досліджується, з урахуванням параметрів, які впливають на нього. Особливо це стосується поверхонь, які підлягають деформації.

© Л.С.Чорна, 2006

Метою цієї роботи є розробка методу моделювання криволінійних поверхонь на основі векторно-параметричного полікоординатного методу.

Основна частина. Визначимо кінематичну поверхню за допомогою просторових кривих (твірних), що рухаються за просторовими кривими (направляючими) із використанням полікоординатних параметричних В-сплайнів.

Припустимо, щотвірна задається параметрично у вигляді:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u), \quad (1)$$

де u - параметр твірної. Направляючу визначимо параметрично у вигляді:

$$x = x(v), \quad y = y(v), \quad z = z(v), \quad (2)$$

де v - параметр направляючої.

Прямі базису політканини твірної відтворюються параметрично:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{i-1} \cdot (1 - u) + x_i \cdot u; \\ y &= y_{i-1} \cdot (1 - u) + y_i \cdot u; \\ z &= z_{i-1} \cdot (1 - u) + z_i \cdot u, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Прямі базису направляючої сформуємо також параметрично згідно залежностей:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_{j-1} \cdot (1 - v) + x_j \cdot v; \\ y &= y_{j-1} \cdot (1 - v) + y_j \cdot v; \\ z &= z_{j-1} \cdot (1 - v) + z_j \cdot v, \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Таким чином визначаються два первинних базиси, один із яких відноситься до твірної кінематичної поверхні, а другий – до направляючої кривої. Базис політканини як твірної, так і направляючої формується за допомогою точок перетину відповідних базисних прямих (базис твірної – точки $T_{00}, T_{10}, \dots, T_{i0}$, базис направляючої – точки $T_{i0}, T_{i1}, \dots, T_{ij}$) (рис. 1).

Базис просторової кінематичної поверхні утворюється переміщенням базису твірної за базисом направляючої. Таким чином формується політканина кінематичної поверхні просторовим каркасним базисом із визначеними точками перетину. Направляюча просторової кінематичної поверхні формується ортогонально до твірної у залежності від параметра v за тією ж методикою, яка зазначена для визначення твірної.

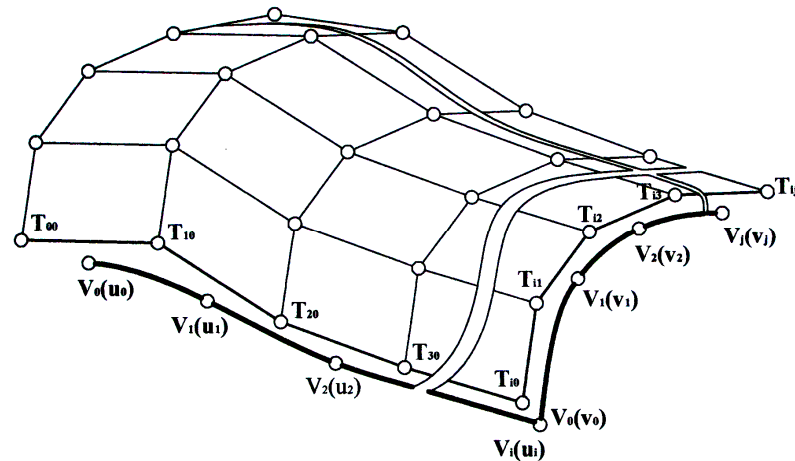


Рис. 1. Формування просторового каркаса кінематичної поверхні

Визначимо кінематичну поверхню за допомогою політканинного векторно-параметричного перетворення на основі В-сплайнів (NURBS) із використанням наступного функціонала:

$$\left. \begin{aligned} S_{xuv} &= \sum_{i=1}^n K_i(u) \left[\frac{(X_{i-1} + X(v)) \cdot (1-u) + (X_i + X(v)) \cdot u - X_r(u, v)}{x_{i-1}(v) \cdot (1-u) + x_i(v) \cdot u - x_r(u)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min; \\ S_{yuv} &= \sum_{i=1}^n K_i(u) \left[\frac{(Y_{i-1} + Y(v)) \cdot (1-u) + (Y_i + Y(v)) \cdot u - Y_r(u, v)}{y_{i-1}(v) \cdot (1-u) + y_i(v) \cdot u - y_r(u)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min; \\ S_{zuv} &= \sum_{i=1}^n K_i(u) \left[\frac{(Z_{i-1} + Z(v)) \cdot (1-u) + (Z_i + Z(v)) \cdot u - Z_r(u, v)}{z_{i-1}(v) \cdot (1-u) + z_i(v) \cdot u - z_r(u)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

де $x_{i-1}, x_i, y_{i-1}, y_i, z_{i-1}, z_i$ – координати базових ліній первинного базису політканини твірної відповідно в системах координат ux, uy, uz ; $X_{i-1}, X_i, Y_{i-1}, Y_i, Z_{i-1}, Z_i$ – координати базових ліній перетвореного базису політканини твірної відповідно в системах координат ux, uy, uz ; $X(v) = X_T(v) - X_n$; $Y(v) = Y_T(v) - Y_n$; $Z(v) = Z_T(v) - Z_n$,

Тут $X_r(v)$, $Y_r(v)$, $Z_r(v)$ - координати направляючої кривої, що визначається в залежності від параметра v ; X_n, Y_n, Z_n - координати останньої точки базису твірної; $X_m(u, v)$, $Y_m(u, v)$, $Z_m(u, v)$ - координати точок кінематичної поверхні; $x_m(u)$, $y_m(u)$, $z_m(u)$ - координати точок твірної; $K_i(u)$ - спеціальний ваговий коефіцієнт, зміст якого визначено у статті Бадаєва Ю.І. [3].

Диференціюючи функціонал (5) за X , Y і Z , та прирівнюючи їх до нуля, отримаємо систему рівнянь, розв'язком якої є координати точок поверхні:

$$\left. \begin{aligned}
X_r(u, v) &= \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u) \cdot ((X_{i-1} + X(v)) \cdot (1-u) + (X_i + X(v)) \cdot u)}{x_{i-1}(1-u) + x_i u - x_r(u)} - \sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{(x_{i-1}(1-u) + x_i u - x_r(u))^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{x_{i-1}(1-u) + x_i u - x_r(u)}}; \\
Y_r(u, v) &= \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u) \cdot ((Y_{i-1} + Y(v)) \cdot (1-u) + (Y_i + Y(v)) \cdot u)}{y_{i-1}(1-u) + y_i u - y_r(u)} - \sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{(y_{i-1}(1-u) + y_i u - y_r(u))^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{y_{i-1}(1-u) + y_i u - y_r(u)}}; \\
Z_r(u, v) &= \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u) \cdot ((Z_{i-1} + Z(v)) \cdot (1-u) + (Z_i + Z(v)) \cdot u)}{z_{i-1}(1-u) + z_i u - z_r(u)} - \sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{(z_{i-1}(1-u) + z_i u - z_r(u))^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{K_i(u)}{z_{i-1}(1-u) + z_i u - z_r(u)}}.
\end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для визначення координат точок направляючої здійснимо параметричне полікоординатне перетворення з використанням наступного функціонала:

$$\left. \begin{aligned}
S_{xv} &= \sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{X_{j-1} \cdot (1-v) + X_j \cdot v - X_r(v)}{x_{j-1} \cdot (1-v) + x_j \cdot v - x_r(v)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min; \\
S_{yv} &= \sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{Y_{j-1} \cdot (1-v) + Y_j \cdot v - Y_r(v)}{y_{j-1} \cdot (1-v) + y_j \cdot v - y_r(v)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min; \\
S_{zv} &= \sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{Z_{j-1} \cdot (1-v) + Z_j \cdot v - Z_r(v)}{z_{j-1} \cdot (1-v) + z_j \cdot v - z_r(v)} - 1 \right]^2 \Rightarrow \min.
\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

де $x_{j-1}, x_j, y_{j-1}, y_j, z_{j-1}, z_j$ - координати базових ліній первинного базису політканини направляючої кривої відповідно в системах координат vx, vy, vz ; $X_{j-1}, X_j, Y_{j-1}, Y_j, Z_{j-1}, Z_j$ - координати базових ліній перетвореного базису політканини направляючої кривої відповідно в системах координат vx, vy, vz ; $X_r(v), Y_r(v), Z_r(v), x_r(v), y_r(v), z_r(v)$ - координати точок відповідно первинної і перетвореної направляючої кінематичної поверхні; $K_i(v)$ - спеціальний ваговий коефіцієнт.

Після диференціювання функціонала (7), прирівнюючи його до нуля отримаємо систему рівнянь, розв'язком якої будуть координати направляючої:

$$\left. \begin{aligned}
 X_r(v) &= \frac{\sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{X_{j-1}(1-v) + X_j v}{x_{j-1}(1-v) + x_j v - x_r(v)} \right] - \sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{(x_{j-1}(1-v) + x_j v - x_r(v))^2}}{\sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{x_{j-1}(1-v) + x_j v - x_r(v)}}; \\
 Y_r(v) &= \frac{\sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{Y_{j-1}(1-v) + Y_j v}{y_{j-1}(1-v) + y_j v - y_r(v)} \right] - \sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{(y_{j-1}(1-v) + y_j v - y_r(v))^2}}{\sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{y_{j-1}(1-v) + y_j v - y_r(v)}}; \\
 Z_r(v) &= \frac{\sum_{j=1}^p K_j(v) \left[\frac{Z_{j-1}(1-v) + Z_j v}{z_{j-1}(1-v) + z_j v - z_r(v)} \right] - \sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{(z_{j-1}(1-v) + z_j v - z_r(v))^2}}{\sum_{j=1}^p \frac{K_j(v)}{z_{j-1}(1-v) + z_j v - z_r(v)}}.
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Гвинтові поверхні, і, зокрема, прямий гелікоїд, широко застосовуються в техніці. Тому, як приклад, на рис. 2 представлена сформована (з використанням залежностей (6) з урахуванням формул (8)) параметрична гвинтова поверхня у вигляді точкового каркасу. Необхідно відмітити, що біля поверхні визначено базис політканини (на рис. 2 не представлено у зв'язку зі складністю відображення), таким чином, гвинтова поверхня занурена в політканину.

Для необхідного перетворення гвинтової поверхні достатньо деформувати базис політканини (рис. 3).

Відповідно до зміни базису відбувається адекватне перетворення гвинтової поверхні. Таким чином, формується геометричний об'єкт необхідної форми.

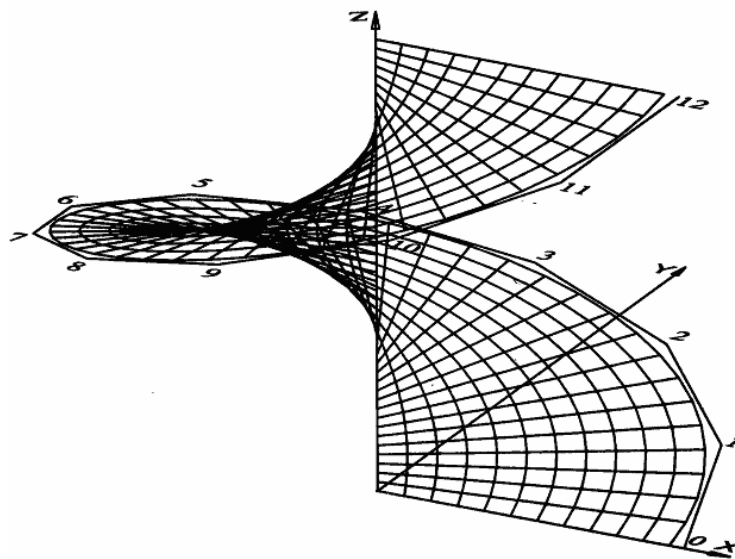


Рис. 2. Параметрична гвинтова поверхня у вигляді точкового каркасу

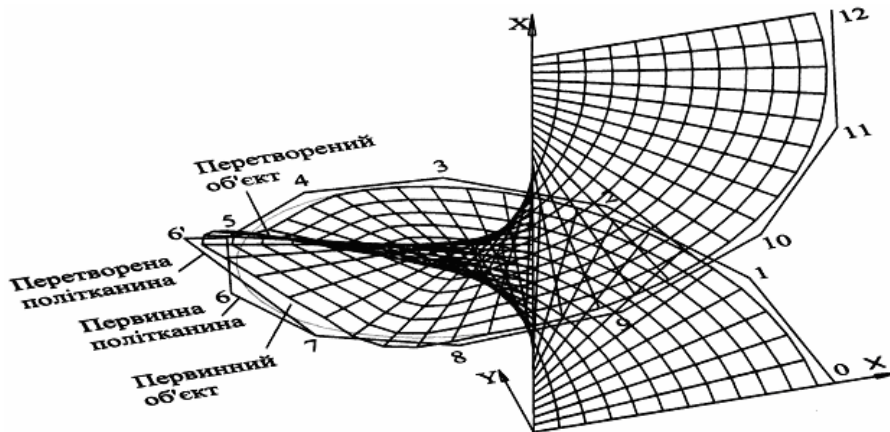


Рис. 3. Перетворення векторно-параметричної гвинтової каркасної поверхні із неопуклого в опукле

Висновок. Задання поверхонь полікоординатним векторно-параметричним методом дає можливість більш адекватного перетворення поверхні при моделюванні. Цей метод має переваги перед відомими методами за рахунок того, що надає можливість здійснення адекватного перетворення поверхні, зокрема при переході від неопуклої форми об'єкта в опуклу і навпаки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Громов М.Я. Начертательная геометрия. Пространственные кривые линии. – М.: ВЗПИ, 1954. – 280 с.
2. Бадаєв Ю.І. Дорошенко Ю.О. Політканинні перетворення тривимірного простору у деформативному конструюванні ГО // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 1997. – Вип. 62. – С. 33-39.
3. Бадаєв Ю.І. Криві на основі політканинних В-сплайнів // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Праці Таврійської Державної агротехнічної академії – Мелітополь: ТДАТА, 2004. – Вип. 4. – Том 28. – С. 16 – 20.
4. Дорошенко Ю.О. Політканинні перетворення у деформативному конструюванні геометричних об'єктів. – К. Педагогічна думка, 2001. – 380 с.
5. Дорошенко Ю.О. Варіанти конструювання кінематичних поверхонь із застосуванням політканинних перетворень// Прикладная геометрия и инженерная графика: Труды Таврической государственной агротехнической академии, 1998. – Вып. 4. – Том 3.. – С. 55-58.

Получено 18.03.2006 г.

ЗНАХОДЖЕННЯ В ПЛОЩИНІ ДІЙСНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ПЕРЕТИНУ УЯВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Постановка проблеми. При побудові різних геометричних елементів часто за умову ставлять необхідність проходження цих елементів через точки, координати яких є дійсними числами. Розв'язуючи рівняння або системи рівнянь для знаходження точок перетину певних геометричних елементів, як правило відкидають розв'язки, які містять комплексні числа. Тим самим відкидаються певні елементи як дійсних, так і уявних геометричних елементів.

Аналіз останніх досліджень. Проблемою застосування функцій комплексних змінних для геометричних побудов займалися Курек Г.К., Черніков О.В., Куценко Л.М., Шоман О.В. та інші [1-2].

Постановка завдання. Побудувати дотичні до параболи та кола в точках їх перетину з прямими у випадках, коли координати цих точок є як дійсними, так і комплексними числами.

Основна частина. Розглянемо параболу на площині, задану рівнянням:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (1)$$

де a, b, c – дійсні числа. Знайдемо точки перетину параболи з віссю Ox , прирівнявши рівняння (1) до нуля. Побудуємо в цих точках дотичні до параболи за формулою $y - y_0 = y'|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$:

$$y = -\sqrt{b^2 - 4ac}x - \frac{b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2}{2a} + 2c, \quad (2)$$

$$y = \sqrt{b^2 - 4ac}x + \frac{b\sqrt{b^2 - 4ac} - b^2}{2a} + 2c. \quad (2')$$

За умови, що підкореневий вираз в (2) і (2') $b^2 - 4ac < 0$, дотичні до параболи будуть проходити через уявні точки. Це означає, що рівняння (2) і (2') на площині задають уявні прямі. Знайдемо точку перетину дотичних (2) і (2'), прирівнявши праві частини:

$$-\sqrt{b^2 - 4ac}x - \frac{b\sqrt{b^2 - 4ac} + b^2}{2a} + 2c = \sqrt{b^2 - 4ac}x + \frac{b\sqrt{b^2 - 4ac} - b^2}{2a} + 2c.$$

Звідси $x = -\frac{b}{2a}$, відповідно $y = 2c - \frac{b^2}{2a}$. Таким чином точка перетину дотичних (як дійсних, так і уявних) є дійсною точкою. Слід зазначити, що у тому випадку, коли маємо дійсні дотичні, точка їх перетину знаходиться ззовні параболи, а точка перетину уявних дотичних знаходиться в області, обмеженій параболою.

Нехай маємо параболу (1) і довільну точку Р (d, e). Проведемо через точку Р довільну пряму:

$$y = k(x - d) + e, \quad (3)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$. Знайдемо точки перетину прямої (3) та параболи (1), порівнявши праві частини (1) і (3). Після розв'язку одержаного квадратного рівняння маємо:

$$x_1 = \frac{k - b - \sqrt{(b - k)^2 - 4a(c - e + dk)}}{2a}, \quad (4)$$

$$y_1 = e + \frac{k[-b - 2ad + k - \sqrt{(b - k)^2 - 4a(c - e + dk)}]}{2a}$$

$$x_2 = \frac{k - b + \sqrt{(b - k)^2 - 4a(c - e + dk)}}{2a}, \quad (4')$$

$$y_2 = e + \frac{k[-b - 2ad + k + \sqrt{(b - k)^2 - 4a(c - e + dk)}]}{2a}.$$

Проведемо дотичні до параболи в точках (4) та (4') аналогічно першому випадку:

$$y = 2c - e + dk - \frac{(b - k)[b - k + \sqrt{(b - k)^2 - 4a(c - e + dk)}]}{2a} + [k - \sqrt{(b - k)^2 - 4a(c - e + dk)}]x, \quad (5)$$

$$y = 2c - e + dk + \frac{(b - k)[k - b + \sqrt{(b - k)^2 - 4a(c - e + dk)}]}{2a} + [k + \sqrt{(b - k)^2 - 4a(c - e + dk)}]x. \quad (5')$$

Координати точки перетину дотичних мають вигляд:

$$x = \frac{k - b}{2a}, \quad y = \frac{bk - b^2 + 2a(2c - e + dk)}{2a}. \quad (6)$$

При зміні кута нахилу α в межах $\alpha = [0, \pi]$, рівняння (6) будуть параметричними рівняннями прямої з параметром k . При цьому пря-

ма може проходити через точки як ззовні параболи, так і в області, обмеженій параболою, – в залежності від значень коефіцієнтів a, b, c, d, e .

Розглянемо приклад. Нехай $a=0,5$; $b=2$; $c=4$; $d=-6$; $e=1$ (рис. 1). Парабола (1) має вигляд:

$$y = 0,5x^2 + 2x + 4.$$

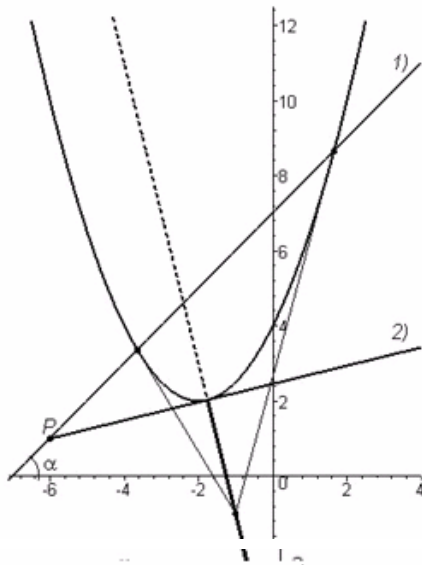


Рис. 1 – Прямая, утворена рівняннями (6):
1) $-k=1$ (при $(b-k)^2 - 4a(c-e+dk) > 0$)
2) $k=0,24$ (при $(b-k)^2 - 4a(c-e+dk) = 0$)

Надамо параметру k значення $k=1$ і проведемо пряму (3) через точку $P(-6, 1)$: $y = x + 7$ (на рис. 1 пряма 1). Знайдемо точки перетину параболи (1) та прямої (3), підставивши в рівняння значення коефіцієнтів. Оскільки

$(b-k)^2 - 4a(c-e+dk) > 0$, маємо дві дійсні точки перетину з координатами:

$$x_1 = 3,65; \quad y_1 = 3,35; \quad \text{та} \\ x_2 = 1,65; \quad y_2 = 8,65.$$

Проведемо в цих точках за формулами (5), (5') дотичні до параболи:

$$y = -2,65 - 1,65x \quad \text{і} \quad y = 2,65 + 3,65x.$$

Прирівнявши праві частини рівнянь дотичних, знайдемо точку їх перетину $x = -1$, $y = -1$. Надамо параметру k значення $k=0,24$ так, щоб $(b-k)^2 - 4a(c-e+dk) = 0$ і пряма (3) стала дотичною до параболи (на рис. 1 пряма 2). Тоді рівняння прямої (3) запишеться: $y = 0,24x + 2,44$. В цьому випадку дві точки перетину параболи (1) та прямої (3) збігаються в одну точку: $x_1 = x_2 = 1,76$; $y_1 = y_2 = 2,0176$.

При заданих коефіцієнтах a, b, c, d, e рівняння (6) запишеться:

$$x = k - 2; \quad y = 3 - 4k \quad \text{або} \quad y = -4x - 5.$$

Ділянка прямої, показана на рис.1 штриховою лінією, є результатом перетину дотичних до параболи, проведених в точках, координати яких є комплексними числами (тобто для яких $(b-k)^2 - 4a(c-e+dk) < 0$).

Візьмемо тепер замість параболи коло радіуса R :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (7)$$

Проведемо через довільну точку $P(c, d)$ пряму, яка при перетині кола в дійсних точках є для нього полярою:

$$y = k(x - c) + d. \quad (8)$$

В загальному випадку точки перетину прямої (8) з колом (7) визначаються із розв'язку квадратного рівняння аналогічно знаходженню (4), (4'):

$$x_1 = \frac{a + k(b - d + ck) - \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2}}{1 + k^2},$$

$$y_1 = \frac{d + k(a - c + bk - \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2})}{1 + k^2}, \quad (9)$$

$$x_2 = \frac{a + k(b - d + ck) + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2}}{1 + k^2},$$

$$y_2 = \frac{d + k(a - c + bk + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2})}{1 + k^2}, \quad (9')$$

У залежності від сталих величин a, b, c, d, k, R ці точки можуть бути дійсними, уявними, або ж збігатимуться в тому випадку, коли підкореневий вираз дорівнює нулю.

Через точки (9) та (9') проведемо відповідно дотичні до кола, рівняння яких в загальному випадку запишуться:

$$y = \frac{b^2 + a^2k^2 - (1 + k^2)R^2 + a(kd - ck^2 + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2})}{b - d + k(c - a + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2})} +$$

$$+ \frac{b(-d + k(c - 2a + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2}))}{b - d + k(c - a + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2})} - \quad (10)$$

$$- x \frac{k(d - b + (a - c)k) + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2}}{b - d + k(c - a + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2})}$$

$$y = \frac{b^2 + a^2k^2 - (1 + k^2)R^2 - a(-kd + ck^2 + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2})}{b - d - k(a - c + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2})} -$$

$$- \frac{b(d + k(2a - c + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2}))}{b - d - k(a - c + \sqrt{R^2(1 + k^2) - (b - d - ak + ck)^2})} -$$

$$-x \frac{k(b-d+(c-a)k) + \sqrt{R^2(1+k^2) - (b-d-ak+ck)^2}}{d-b+k(a-c+\sqrt{R^2(1+k^2) - (b-d-ak+ck)^2})} \quad (10')$$

Рівняння (10) і (10') охоплюють як дійсні дотичні, що проходять через дійсні точки дотику, так і уявні, які проходять через уявні точки дотику, які в загальному випадку визначаються рівняннями (9), (9'). Цікаво те, що перетином як дійсних, так і уявних прямих завжди будуть дійсні точки:

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{kR^2}{b-d-ak+ck}, \\ y &= b - \frac{R^2}{b-d-ak+ck} \end{aligned} \quad (11)$$

Якщо точки перетину кола (7) та прямої (8) (поляри) мають дійсні координати, то точка перетину дотичних (10) і (10') (полюс) знаходиться ззовні заданого кола. Якщо ж точки перетину кола (7) та прямої (8) мають комплексні координати, то точка перетину дотичних (10) і (10') знаходиться в області, обмеженій колом.

Надаючи куту нахилу α значень від 0 до π , рівняння (11) будуть задавати параметричні рівняння прямої – геометричного місця полюсів (рис. 2). Ділянка прямої, показана штриховою лінією, отримана як результат перетину уявних дотичних. Таким чином, нехтування уявними точками дотику і уявними дотичними до кола дало б обмежений розв'язок в дійсній області. Проміжні результати можуть бути уявними, але в кінцевому підсумку вони дають реальний результат.

Надаючи куту нахилу α значень від 0 до π , рівняння (11) будуть задавати параметричні рівняння прямої – геометричного місця полюсів (рис. 2). Ділянка прямої, показана штриховою лінією, отримана як результат перетину уявних дотичних. Таким чином, нехтування уявними точками дотику і уявними дотичними до кола дало б обмежений розв'язок в дійсній області. Проміжні результати можуть бути уявними, але в кінцевому підсумку вони дають реальний результат.

Після зроблених побудов ми можемо розглядати точку P як полюс, а одержану пряму – як полярну.

За умови розміщення точки P (c, d) на колі (7) пряма (11) буде дотикатися до кола в точці P (рис. 3, а). Якщо точка P знаходиться всередині кола (7), пряма (11) буде знаходитися повністю ззовні цього кола (рис. 3, б).

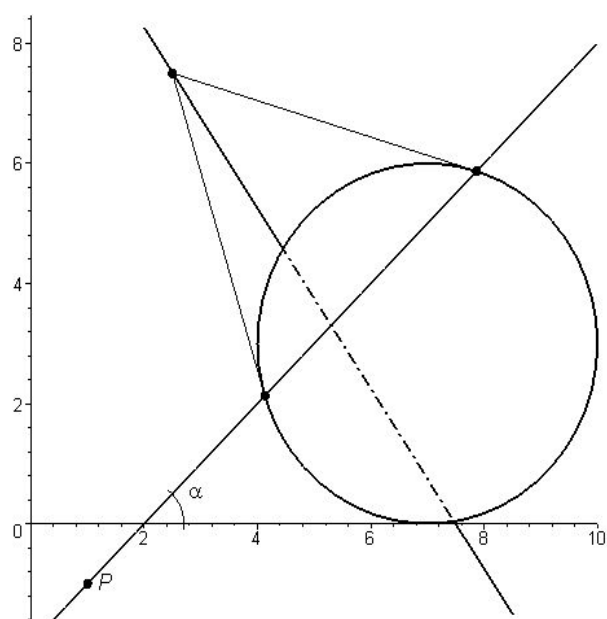


Рис. 2 – Точка P знаходиться ззовні кола при наступних значеннях коефіцієнтів: $R=3$, $a=7$, $b=3$, $c=1$

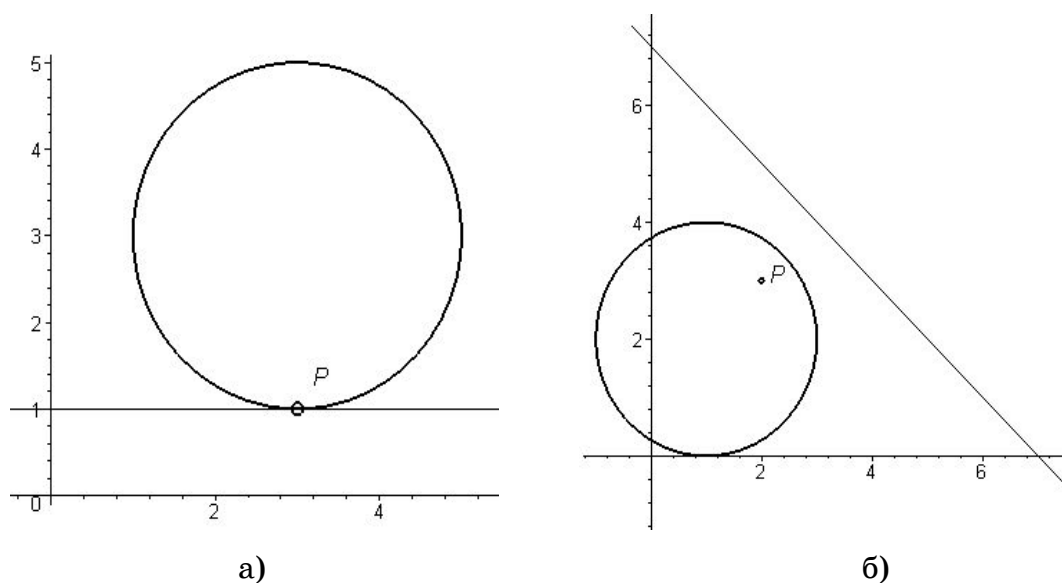


Рис. 3. Взаємне розміщення полюса і поляри: а) полюс P розташований на колі; б) полюс P розташований всередині кола

Висновки. В статті розглянуто побудову дотичних до параболи та кола, що проходять через точки, координати яких є як дійсними, так і комплексними числами. Знайдено точки перетину побудованих дотичних, які завжди є дійсними числами. Показано, що нехтування уявними геометричними елементами дає неповний розв'язок в дійс-

ній області: проміжні уявні результати в кінцевому підсумку дають реальні геометричні елементи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курек Г.К. Формообразование некоторых алгебраических минимальных поверхностей линейным каркасом специальных линий // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1975. – Вып. 20. – С. 99 – 102.
2. Шоман О.В. Геометрична інтерпретація комплексних потенціалів аналітичних функцій // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С. 210 – 215.

Получено 14.03.2006 г.

УДК 515.2

О.В. Шоман

МЕТОД АНАЛІТИЧНОГО ОПИСУ ПАРИ ПОВЕРХОНЬ, ЯКІ ПАРАЛЕЛЬНІ ГІПЕРБОЛІЧНОМУ ПАРАБОЛОЇДУ

Постановка проблеми. При дослідженні розвитку у часі гетерогенної системи речовин вважають, що геометрична форма активної поверхні розділу змінюється у просторі за певним законом (наприклад, за „геометричним” законом горіння [1]). Графічна ілюстрація динаміки розвитку системи полягає у зображенні поверхонь розділу для певних фаз процесу. Такі поверхні можна ототожнювати з *еквіфазними поверхнями* хвильового процесу, або, у тривіальному випадку, з паралельними поверхнями. Тому є актуальним описи паралельних поверхонь як графічного прояву активної поверхні розділу речовин.

Аналіз останніх досліджень. Паралельні поверхні можна описувати в результаті розв’язання диференціального рівняння в частинних похідних виду ейконал [2], або за допомогою нормальних рівнянь [3]. Другий підхід вважається більш універсальним, адже він спирається на графічне пояснення зв’язку між функцією-описом f і об’єктом-оригіналом L , яке полягає у виконанні умови

$$f(P) = \inf_G \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}; \quad (G = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in L).$$

© В О.В. Шоман, 2006

В цьому випадку маємо нормальне рівняння $f(P) = 0$ об'єкта $L \in E^n$ [3]. Але можливість реалізувати нормальні рівняння на практиці з'явилася тільки з появою математичних процесорів, наприклад, пакету Maple [4, 5]. В процесі досліджень відкритим залишилося питання про універсальний метод побудови нормальних рівнянь у просторовому випадку, у тому числі і для поверхонь з сідлоподібною точкою.

Постановка завдання. Розробити метод опису та побудови поверхонь, які б задовольняли умові паралельності відносно сідлоподібною поверхні (як приклад - гіперболічного параболоїда) у випадку, коли у прямокутній системі координат $Oxyz$ ця початкова поверхня задана параметричними рівняннями $x = \varphi(u, v)$; $y = \psi(u, v)$ і $z = \eta(u, v)$, де u, v – параметри.

Основна частина. Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ маємо „початкову” поверхню $x = \varphi(u, v)$; $y = \psi(u, v)$ і $z = \eta(u, v)$, де u, v – параметри. Оберемо у просторі довільну точку $T(x, y, z)$ і розглянемо функцію

$$f(x, y, z) = \sqrt{(x - \varphi(u, v))^2 + (y - \psi(u, v))^2 + (z - \eta(u, v))^2}. \quad (1)$$

Значення функції (1) в точці T дорівнює відстані між T і точкою M на поверхні, яка відповідає конкретному значенню параметрів u і v . Визначимо значення параметрів u і v , при яких функція (1) досягає екстремуму. Тобто визначимо значення параметрів, які б „забезпечили” мінімальну відстань $\inf(\rho(T, M))$.

Для цього спочатку обчислюємо частинні похідні

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u} &= -\frac{(x - \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + (y - \psi) \frac{\partial \psi}{\partial u} + (z - \eta) \frac{\partial \eta}{\partial u}}{\sqrt{(x - \varphi)^2 + (y - \psi)^2 + (z - \eta)^2}}; \\ \frac{\partial f}{\partial v} &= -\frac{(x - \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial v} + (y - \psi) \frac{\partial \psi}{\partial v} + (z - \eta) \frac{\partial \eta}{\partial v}}{\sqrt{(x - \varphi)^2 + (y - \psi)^2 + (z - \eta)^2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

і розв'язуємо відносно u і v систему рівнянь, одержану з цих виразів:

$$\begin{aligned} (x - \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial u} + (y - \psi) \frac{\partial \psi}{\partial u} + (z - \eta) \frac{\partial \eta}{\partial u} &= 0; \\ (x - \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial v} + (y - \psi) \frac{\partial \psi}{\partial v} + (z - \eta) \frac{\partial \eta}{\partial v} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Знайдені (дійсні) значення u_0 і v_0 підставляємо у вираз (2). Одержана функція

$$f_N = \sqrt{(x - \varphi(u_0, v_0))^2 + (y - \psi(u_0, v_0))^2 + (z - \eta(u_0, v_0))^2} \quad (4)$$

матиме властивості нормальної функції [4]. Тобто рівнянням

$$f_N(x, y, z) = \text{const} \quad (5)$$

буде описано сім'ю поверхонь з елементами, паралельними (або еквіфазними) відносно початкової поверхні $x = \varphi(u, v)$; $y = \psi(u, v)$ і $z = \eta(u, v)$. В чотиривимірному просторі $Oxyz\xi$ рівнянням $\xi = f_N(x, y, z)$ буде описано лінійчасту гіперповерхню „рівного нахилу”. Тобто буде описано абстрактну поверхню, у якій всі твірні з простором $Oxyz$ „утворюють кути 45° ”. Звідси зрозуміло, що рівнянням $f_N(x, y, z) = \text{const}$ буде описано сім'ю поверхонь з елементами, паралельними відносно початкової поверхні. Було складено Maple-програму опису нормальної функції, яку покладено в основу визначення та візуалізації як „початкової” поверхні, так і паралельних поверхонь, описаних одержаними параметричними рівняннями.

Для гіперболічного параболоїда $x = u \operatorname{ch} v$; $y = u \operatorname{sh} v$ і $z = u^2 / 2$ система рівнянь (3) має вигляд

$$\begin{aligned} u^3 + 2(1 - z)u - 2(x \operatorname{ch} v + y \operatorname{sh} v) + 4u \operatorname{ch}^2 v &= 0; \\ u(x \operatorname{sh} v + y \operatorname{ch} v - 2u \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Розв'язок системи рівнянь (6) знаходимо в *maple*-кодах

$$\begin{aligned} u0 &:= \text{RootOf}((2x + 2zx + 2zy - 2y) _Z^{10} \\ &+ (-3xy^2 - 2x - y^3 - 2y - 3x^2y - 2zx - x^3 + 2zy) _Z^8 \\ &+ (-3xy^2 + 3x^2y + 4y - 4zy + 3x^3 - 3y^3 - 4x - 4zx) _Z^6 \\ &+ (3x^2y + 3xy^2 + 4y - 3y^3 + 4x - 3x^3 - 4zy + 4zx) _Z^4 \\ &+ (2x - 3x^2y + x^3 - 2y + 3xy^2 - y^3 + 2zy + 2zx) _Z^2 - \\ &2x - 2y - 2zx + 2zy) \\ &(x \text{RootOf}((2x + 2zx + 2zy - 2y) _Z^{10} \\ &+ (-3xy^2 - 2x - y^3 - 2y - 3x^2y - 2zx - x^3 + 2zy) _Z^8 \\ &+ (-3xy^2 + 3x^2y + 4y - 4zy + 3x^3 - 3y^3 - 4x - 4zx) _Z^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (3x^2y + 3xy^2 + 4y - 3y^3 + 4x - 3x^3 - 4zy + 4zx) _Z^4 \\
& + (2x - 3x^2y + x^3 - 2y + 3xy^2 - y^3 + 2zy + 2zx) _Z^2 - \\
& \quad 2x - 2y - 2zx + 2zy)^2 \\
& - x + y \text{RootOf}((2x + 2zx + 2zy - 2y) _Z^{10} \\
& + (-3xy^2 - 2x - y^3 - 2y - 3x^2y - 2zx - x^3 + 2zy) _Z^8 \\
& + (-3xy^2 + 3x^2y + 4y - 4zy + 3x^3 - 3y^3 - 4x - 4zx) _Z^6 \\
& + (3x^2y + 3xy^2 + 4y - 3y^3 + 4x - 3x^3 - 4zy + 4zx) _Z^4 \\
& + (2x - 3x^2y + x^3 - 2y + 3xy^2 - y^3 + 2zy + 2zx) _Z^2 - \\
& \quad 2x - 2y - 2zx + 2zy)^2 \\
& + y) / (\text{RootOf}((2x + 2zx + 2zy - 2y) _Z^{10} \\
& + (-3xy^2 - 2x - y^3 - 2y - 3x^2y - 2zx - x^3 + 2zy) _Z^8 \\
& + (-3xy^2 + 3x^2y + 4y - 4zy + 3x^3 - 3y^3 - 4x - 4zx) _Z^6 \\
& + (3x^2y + 3xy^2 + 4y - 3y^3 + 4x - 3x^3 - 4zy + 4zx) _Z^4 \\
& + (2x - 3x^2y + x^3 - 2y + 3xy^2 - y^3 + 2zy + 2zx) _Z^2 - \\
& \quad 2x - 2y - 2zx + 2zy)^4 - 1) \\
v_0 := & \ln(\text{RootOf}((2x + 2zx + 2zy - 2y) _Z^{10} \\
& + (-3xy^2 - 2x - y^3 - 2y - 3x^2y - 2zx - x^3 + 2zy) _Z^8 \\
& + (-3xy^2 + 3x^2y + 4y - 4zy + 3x^3 - 3y^3 - 4x - 4zx) _Z^6 \\
& + (3x^2y + 3xy^2 + 4y - 3y^3 + 4x - 3x^3 - 4zy + 4zx) _Z^4 \\
& + (2x - 3x^2y + x^3 - 2y + 3xy^2 - y^3 + 2zy + 2zx) _Z^2 \\
& - 2x - 2y - 2zx + 2zy))
\end{aligned}$$

З урахуванням одержаних значень u_0 і v_0 , маємо нормальне рівняння гіперболічного параболоїда:

$$f_N = \sqrt{(x - 2\sin u_0 \cos v_0)^2 + (y - 2\sin u_0 \sin v_0)^2 + (z - \cos u_0)^2} \quad (7)$$

На рис. 1 наведено пару поверхонь, паралельних гіперболічному параболоїду. Вони одержані шляхом проектування на простір $Oxyz$ перерізів графіка одержаної нормальної функції $\xi = f_N(x, y, z)$ гіперплощинами рівня $\xi = \text{const}$. Доцільність використання maple-кодів в розв'язку системи рівнянь (6) можна пояснити наступним чином. Паралельні поверхні, як правило, є багатолистими графічними образами, тому для їх опису доцільно застосовувати багатозначні функції в смислі Коші (на відміну від однозначних функцій за означенням Діріхле - Лобачевського). Багатозначні ж функції в компактному вигляді можна описати переважно за допомогою комплексних функцій.

А застосування maple-кодів забезпечує наявність у розв'язку комплексних функцій.

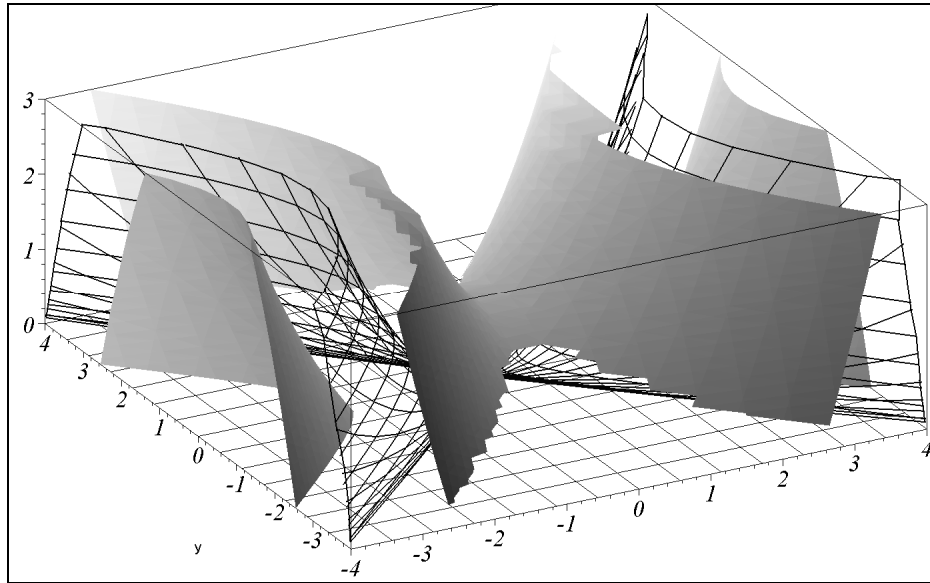


Рисунок 2 - Дві поверхні, паралельні гіперболічному параболоїду
 $\{x = 2\sin u \cos v; y = 2\sin u \sin v; z = \cos u\}$ для $\xi = 0,5$

Зазначимо, що при необхідності, для опису розв'язку за допомогою радикалів до програми слід внести оператор **_EnvExplicit := true:**. Але досвід роботи з виразами, які містять радикали, показує, що при цьому необхідно перед радикалами коректувати знаки; контролювати правильність вибору яких можна за адекватністю побудованого зображення.

Висновки. Для аналітичного опису нормальних рівнянь поверхонь у випадку, коли початкова поверхня задана параметричними рівняннями, доцільно використовувати вирази, складені за допомогою maple-кодів. До цих позначень необхідно звикнути, як це відбулося, наприклад, з символами $\ln$, $\sin$, $\arccos$, тощо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фахрутдинов И.Х. Ракетные двигатели твердого топлива. - М.: Машиностроение, 1981. - 218 с.
2. Гончарюк И.В., Рвачев В.Л. Нормальное уравнение чертежа.- В сб.: Вопросы теоретической кибернетики. - Киев: ИК АН УССР, 1965. - С. 200-210.
3. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. - Киев: Техніка, 1967. - 212 с.

4. Куценко Л.М. Визначення паралельних кривих як розв'язку диференціального рівняння ейконал // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. - Вип. 72. – С. 37-42.
5. Шоман О.В. Геометрическое моделирование поверхностей раздела двухфазных гетерогенных смесей // Вестник Херсонского государственного техн. Университета, 2002. - Том 15. - № 2. - С. 509-512.
6. Куценко Л.М., Шоман О.В. Метод опису паралельних поверхонь за допомогою нормальних функцій // Геометричне та комп'ютерне моделювання. - Харків: ХДУХТ, 2004. - Вип. 5. - С. 12-19.
7. Шоман О.В. Метод опису еквіфазних поверхонь гетерогенного процесу // Геометричне та комп'ютерне моделювання. - Харків: ХДУХТ, 2004. - Вип. 4. - С. 107-114.
8. Шоман О.В. Метод опису паралельних поверхонь як графічних проявів гетерогенних процесів // Геометричне та комп'ютерне моделювання. - Харків: ХДУХТ, 2005. - Вип. 13. - С. 105-114.

Получено 17.03.2006 г.

УДК 528.71

О.В.Реута

СТИСНЕННЯ БЕЗ ВТРАТ ПРОЕКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ДВУВИМІРНОГО КОДУВАННЯ

Постановка проблеми

Процеси отримання проекційних зображень у сучасних системах дистанційного зондування земної поверхні здебільшого орієнтовані на збереження і передачу таких зображень у растровому форматі безвідносно до особливостей їх проекційної природи, що вносить значну інформаційну збитковість і знижує ефективність відповідних автоматизованих систем. Між тим в теперешній час мається значна кількість алгоритмів, методів і методик усунення такої збитковості, але в них також не враховуються особливості проекційних зображень зазначеного типу. Розв'язання зазначеної проблеми вбачається, з одного боку, у розробці таких форм подання растрових проекційних зображень, які б забезпечували можливість ефективного застосування сучасних алгоритмів стиснення, а з іншого — відповідна адаптація обраних алгоритмів.

© О.В.Реута, 2006

Аналіз останніх досліджень

Серед алгоритмів без втрат широке застосування знайшли RLE — алгоритм групового кодування за рахунок ланцюжків однакових байтів, LWZ (Lempel, Ziv, Welch) — стиснення за рахунок ланцюжків байт, що повторюються, CCITT Group 3 — заміна послідовностей однакових бітів їх кількостями з подальшим кодуванням за Хаффманом з фіксованою таблицею, CCITT Group 4 — модифікація попереднього методу, в якій виконується стиснення різниці двох послідовних рядків растру (в тепершній час ці алгоритми мають назви ITU-T T4 і ITU-T T6, відповідно) [1 – 2], JBIG (Joint Bi-level Experts Group) — стиснення шляхом виділення бітових площин [3] та Lossless JPEG (Joint Photographic Expert Group) — із застосуванням дискретного косинусного перетворення та кодування за Хаффманом. Недоліком усіх зазначених алгоритмів є невисокий ступінь стиснення (в середньому 1.5–5 разів), який у більшості випадків для сучасних інформаційних систем є недостатнім.

Формулювання цілей статті (постановка завдання)

Ціллю статті є розробка способу стиснення растрових проекційних зображень без втрат, який би враховував особливості їх формоутворення в автоматизованих системах дистанційного збору інформації, зокрема, фотограмметричних.

Основна частина

Дана робота є розвитком підходу, запропонованого в [4 – 5] для розв’язання проблеми реконструкції растрових зображень. Процедура стиснення такого зображення, що пропонується, виконується за наступною схемою: вихідне зображення → оптимальне дискретне (растрове) подання → послідовність бінарних образів (основних компонент) + деталізуючий образ (допоміжна компонента) → послідовність стиснутих бінарних образів + стиснутий допоміжний образ.

Вихідне зображення подається функцією розподілу яскравості $f(\mathbf{r})$, де $\mathbf{r} = (x, y)$ — радіус-вектор точки зображення в картинній площині. Оптимальне дискретне кодування здійснюється на основі нерівномірного квантування за рівнем яскравості за методикою, запропонованою в [6]. Отримане таким чином растрове зображення має значно вищу сигнальну ентропію (інформативність) в порівнянні з

растровим відповідним зображенням, одержаним при рівномірному квантуванні.

Наступним етапом є подання растрового зображення послідовністю його бінарних і деталізуючого образів:

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^P Z_k \cdot \bar{f}_k(\mathbf{r}) + \tilde{f}_P(\mathbf{r}), \quad (1)$$

де $\bar{f}_k(\mathbf{r})$ — бінарний образ вихідного зображення, отриманий на k -ому кроці деталізації; Z_k — поріг яскравості виділення бінарного образу на k -ому кроці деталізації; P — кількість виділених бінарних образів; $\tilde{f}_P(\mathbf{r})$ — деталізуючий образ, виділений на P -ому кроці деталізації.

Виділення бінарного образу на k -ому кроці деталізації здійснюється за формулою:

$$\bar{f}_k(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \tilde{f}_{k-1}(\mathbf{r}) \geq Z_k; \\ 0, & \tilde{f}_{k-1}(\mathbf{r}) < Z_k, \end{cases} \quad (2)$$

а деталізуючого образу:

$$\tilde{f}_k(\mathbf{r}) = \tilde{f}_{k-1}(\mathbf{r}) - Z_k \cdot \bar{f}_k(\mathbf{r}). \quad (3)$$

В результаті при фіксованому значенні рівня деталізації P вихідне зображення подається у вигляді послідовності:

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_P, \bar{f}_1(\mathbf{r}), \bar{f}_2(\mathbf{r}), \dots, \bar{f}_P(\mathbf{r}), \tilde{f}_P(\mathbf{r}), \quad (5)$$

якої достатньо, щоб на основі виразу (1) відновити вихідне зображення $f(\mathbf{r})$ без втрат якості.

Ряд (5) може бути продовжено до того моменту, коли подання деталізуючої компоненти стане можливим з використанням одного біта на піксел. Тобто, коли вона сама перетвореться на бінарний образ.

Для стиснення бінарних образів в теперешній час найбільш ефективними є алгоритми, запропоновані підрозділом Міжнародного Союзу Телекомунікацій ITU-T, T4 (Group 3) та T6 (Group 4). Останній алгоритм впроваджує двовимірне кодування і є модифікацією одно-

вимірної схеми (Т4), яка, в свою чергу є модифікацією оригінального метода Хаффмана.

Нижче, як приклад, наведені вихідне зображення $f(\mathbf{r})$, його основна $f_0(\mathbf{r})$ і допоміжна $\tilde{f}_0(\mathbf{r})$ компоненти (рис. 1 а,б,в, відповідно).

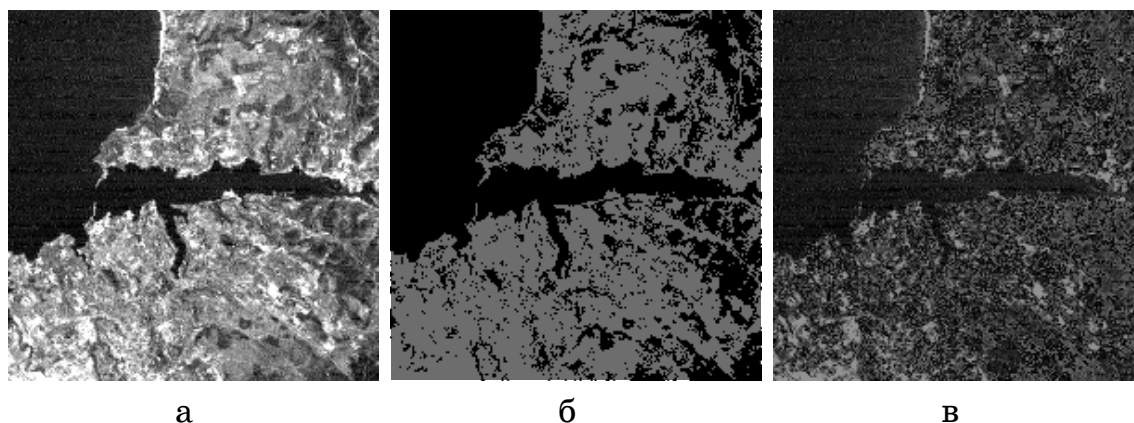


Рис. 1

Процедуру виділення основної компоненти (5) можна продовжити. При цьому k -ій ітерації за вихідне зображення приймається $\tilde{f}_{k-1}(\mathbf{r})$. В результаті розподіл яскравості вихідного зображення $f(\mathbf{r})$ може бути поданий у вигляді суми ряду:

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\mathbf{r}) \approx \sum_{k=0}^P f_k(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Точність подання визначається кількістю елементів ряду P . Оцінюючи її значенням середньоквадратичної помилки E_P , для зображення, поданого на рис. 1, а, маємо: $E_0 \approx 4016$, $E_1 \approx 1286$, $E_2 \approx 436$, $E_3 \approx 163$. Таким чином, збільшення кількості елементів ряду (6) на один зменшує значення середньоквадратичної помилки подання зображення приблизно на $32 + (P-1) \cdot 1.8$ відсотки.

Перевагою застосування ряду (6) є можливість заміни багатотонного зображення послідовністю його бінарних образів, які забезпечують більший коефіцієнт стиснення. Так, для зображення, наведеного на рис. 1, а, послідовність з чотирьох ($P=3$, $E_3 \approx 163$) образів поданих в форматі BMP на основі алгоритму RAR стискається до 22320 байтів, в той час як відомий алгоритм JPEG для середньоквад-

ратичної помилки $E \approx 161$ дозволяє отримати файл того ж зображення обсягом 21804 байтів. При цьому в останньому випадку на зображенні стають суттєво помітними притаманні цьому алгоритму артефакти у вигляді структурованих зон розмиття. При застосуванні запропонованого алгоритму відновлене зображення характеризується зниженням контрастності, яку, однак, можна скорегувати на наступних етапах обробки.

Висновки та перспективи подальших досліджень

Розвинуто підхід до стиснення растрових напівтонових зображень, запропонований в [5], який може бути поширений на мультиспектральні зображення. Проведення подальших досліджень буде пов'язано з визначенням оптимального значення рівня деталізації P , який би забезпечив максимальне стиснення зображень різної природи: фотограмметричних, рентгенівських, ультразвукових та інших.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сэлмон Д. Сжатие данных, изображений и звука. — М.: Техносфера, 2004. — 368 с.
2. Ватолин Д.С. Алгоритмы сжатия изображений. — М.: Диалог-МГУ, 1999. — 384 с.
3. Progressive Bi-level Image Compression, Revision 4.1 // ISO/IEC JTC1/SC2/WG9, CD 11544, September 16, 1991.
4. Гнатушенко В.В., Реута О.В. Реконструкція растрових зображень на основі їх інваріантної геометричної моделі // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. — Мелітополь: ТДАТА, 2004. — Вип. 4, т. 24. — С. 99 – 103.
5. Гнатушенко В.В., Реута О.В. Стиснення растрових проекційних зображень на основі їх бінарних образів // Прикладна геометрія та інженерна графіка. - К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С. 146-152.
6. Корчинський В.М. До питання про оптимальне дискретне подання напівтонових проекційних зображень // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. — Мелітополь: ТДАТА, 2004. — Вип. 4, т. 24. — С. 22 – 26.

Получено 13.03.2006 г.

СОДЕРЖАНИЕ

В.Є. Михайленко, О.В.Кащенко

БІОДЕЗАЙН ЯК ОСНОВА СУЧАСНОГО ДИЗАЙНУ 3

В.Є. Михайленко, В.О. Плоский

ЗАДАЧІ ПОДАЛЬШОГО РОЗВИТКУ УКРАЇНСЬКОЇ
АСОЦІАЦІЇ З ПРИКЛАДНОЇ ГЕОМЕТРІЇ 11

В.М. Кочинський, Д.М. Свинаренко

ІНФОРМАЦІЙНІ ОЗНАКИ ПРОСТОРОВИХ ФОРМ РОЗПОДІЛІВ
ЯСКРАВОСТЕЙ БАГАТОТОНОВИХ РАСТРОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ,
ІНВАРІАНТНІ ДО МАСШТАБНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ 17

В.В Гнатушенко.

МОДЕЛЬ ОРІЄНТУВАННЯ ПАРИ ЗНІМКІВ, ЩО НАЛЕЖАТЬ
ОДНІЙ ПЛОЩИНІ 22

А.И.Михалев, А.И. Деревянко

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО
ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА 27

А.И. Михалев, В.В. Помулев

ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
СТРУКТУР МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ
ПЕРКОЛЯЦИОННЫХ КЛАСТЕРОВ 31

Д.Ф. Кучкарова

СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ
ПОВЕРХНОСТЕЙ НА РЕГУЛЯРНОЙ СЕТИ ИСХОДНЫХ
ДАННЫХ 35

А.Ф. Кириченко, А.И. Павлов, В.В.Немцев

ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРИВЕДЕННОГО
РАДИУСА КРИВИЗНЫ В ЗАЦЕПЛЕНИИ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ 41

А.В. Найдиш, В.М. Малкіна

ОСНОВНІ РИСИ НОВОГО НАПРЯМКУ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮ-
ВАННЯ – ЧИСЛЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ТРИВЕКТОРІВ 46

В.М.Найдиш, В.В.Спірінцев

АДАПТИВНА СХЕМА ЛОКАЛЬНОГО ЗГУЩЕННЯ ТОЧКОВОГО
РЯДУ З ЗАДАНИМИ У ВУЗЛАХ ДОТИЧНИМИ 49

М. П. Осипов, С. И. Ротков

ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ АЛГОРИТМА ПРЯМОГО
ПОСТРОЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИИ ДЕЛОНЕ 56

М. Petryk, D. Mykhalyk

MATHEMATICAL MODELING OF CONCENTRATION
PROFILES IN HETEROGENEOUS AND NANOPORES MEDIA 62

С.Ф.Пилипака, В.М.Несвідомін, Т.С.Пилипака

ПАРАМЕТРИЧНІ ТА НАТУРАЛЬНІ РІВНЯННЯ
КРИВИХ ІЗ ЗАДАНИМИ КІНЕМАТИЧНИМИ
ХАРАКТЕРИСТИКАМИ 69

О.Л. Підгорний

ПРИКЛАДНУ ГЕОМЕТРІЮ У НАВЧАЛЬНИЙ
ПРОЦЕС 75

Є.В. Пугачов, Т.М. Кундрат

МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЦИЛІНДРИЧНИХ
СВІТЛОВИХ ШАХТ З ДИФУЗНИМ ВІДБИВАННЯМ СВІТЛА 82

А.Г. Ренкас

ВІДОБРАЖЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПРОСТОРУ K^4 88

О.В.Сергейчук

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛУЧИСТОГО
ТЕПЛООБМЕНА В АТМОСФЕРЕ ПРИ ЯСНОМ НЕБЕ 93

О.С.Сидоренко

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ
ОБ'ЄКТАМИ З НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ 98

В.И. Слюсаренко, С.А. Недодатко, Т.П. Яровая

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕКОНСТРУИРОВАНИЕ ПАМЯТНИКОВ
АРХИТЕКТУРЫ, СОДЕРЖАЩИХ СООСНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ
ВРАЩЕНИЯ, ПО ИХ ОДИНОЧНЫМ СНИМКАМ 103

П.А.Стеблянко

ПРИМЕНЕНИЕ ДВУХМЕРНОГО КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА
ДЛЯ ОПИСАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ 107

Р.І.Таранова, І.П.Тарас

ДОСВІД ПРОВЕДЕННЯ ЕКЗАМЕНАЦІЙНОГО ТЕСТУВАННЯ
НА КАФЕДРІ ІНЖЕНЕРНОЇ ТА КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ
ІФНТУНГ 111

Ю.М. Терентьев

ВЫРОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ФЛОКЕ ДЛЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПРОСТРАНСТВЕННО-
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ 116

Д.И.Ткач, А.Б.Нифанин

ГЕОМЕТРИЯ ТРЕЩИНОУСТОЙЧИВЫХ И
САМОЗАМЫКАЮЩИХСЯ СТРУКТУР ДОРОЖНЫХ
ПОКРЫТИЙ 121

Ю.М. Тормосов, Р.Б. Слободской

ОПЫТ ПРЕПОДАВАНИЯ ГРАФИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МУЛЬТИМЕДИЙНЫХ СРЕДСТВ 128

С.К.Тукаев, Д.Ш.Нурмаганбетов, К.А.Дауренбек

АНАЛИЗ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ ОТОБРАЖЕНИЯ
МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ 133

Г.Я.Тулученко, А.Н. Хомченко, І.О. Астіоненко

ЙМОВІРНІСНІ ВЛАСТИВОСТІ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ
СИМПЛЕКСІВ РІЗНИХ ВИМІРНОСТЕЙ 139

Л.В.Ушаков

ПРОЕКТУВАННЯ ПОВЕРХНІ ВІДБИВАЧА
ОСВІТЛЮВАЛЬНОГО ПРИЛАДУ ЩІЛИННОГО ТИПУ 145

А.Н.Хомченко, С.В.Моисеенко

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА БАЗИСА ЛИНЕЙНОЙ 3D –
ИНТЕРПОЛЯЦИИ 150

О.В. Цыбуленко, Е.И. Литвиненко, Ю.И. Николаенко

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МОДЕЛИ ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ
БАЗИСОВ 155

О.В. Цыбуленко, И.А. Лурье, Н.В. Корниловская

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРА ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ
КУБАТУР ТИПА ГАУССА - ЛЕЖАНДРА НА ТРЕУГОЛЬНОМ
ДИСКРЕТНОМ ЭЛЕМЕНТЕ 162

А.В. Черников

ПРИКЛАДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ
ФОРМООБРАЗОВАНИЙ 167

Л.С.Чорна

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ
ПОЛІКООРДИНАТНИХ В – СПЛАЙНІВ 173

Е.О. Чернишова

ЗНАХОДЖЕННЯ В ПЛОЩИНІ ДІЙСНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ
ПЕРЕТИНУ УЯВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ 179

О.В. Шоман

МЕТОД АНАЛІТИЧНОГО ОПИСУ ПАРИ ПОВЕРХОНЬ,
ЯКІ ПАРАЛЕЛЬНІ ГІПЕРБОЛІЧНОМУ ПАРАБОЛОЇДУ 185

В.Реута

СТИСНЕННЯ БЕЗ ВТРАТ ПРОЕКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ З
ВИКОРИСТАННЯМ ДВУВИМІРНОГО КОДУВАННЯ 190

РЕФЕРАТЫ

УДК 76: 515.2

Михайленко В.Є., Кащенко О.В. **Біодизайн як основа сучасного дизайну** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). - Дніпропетровськ, 2006. - С. 3-10.

Показано суттєву роль відтворення просторових форм біологічних об'єктів у конструктивному, художньо-композиційному та системному моделюванні природних і технічних об'єктів. Виявлені перспективні напрямки досліджень в області біодизайну.

Бібл. 4, табл. 4.

УДК 515.2

Михайленко В.Є., Плоский В.О. **Задачі подальшого розвитку української асоціації з прикладної геометрії** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). - Дніпропетровськ, 2006. - С. 11-16.

Узагальнено результати роботи Української асоціації з прикладної геометрії та графіки (UAGG) протягом семи років її існування в організаційному, науковому та науково-методичному аспектах. Виявлені проблемні питання, намічені шляхи їхнього подолання.

Бібл. 6.

УДК 514.18

Корчинський В.М., Свиначенко Д.М. **Інформаційні ознаки просторових форм розподілів яскравостей багатотонових растрових зображень, інваріантні до масштабних перетворень** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). - Дніпропетровськ, 2006. - С. 17-22.

Запропоновано систему інформаційних ознак багатотонових растрових зображень, інваріантну до перетворень групи подібностей, на основі геометричної моделі таких зображень у тривимірному просторі «площина проєкціювання – рівень яскравості». Наведені оцінки дефектів інваріантності для різних значень параметрів перетворень.

Бібл. 3, іл. 9.

УДК 528.71

Гнатушенко В.В. **Модель орієнтування пари знімків, що належать одній площині** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). - Дніпропетровськ, 2006. - С. - 22-26.

В роботі запропонована модель, яка адекватно описує процеси формоутворення фотограмметричних даних стереозйомки. Особливу увагу приділено питанню визначення параметрів орієнтування аерокосмічних знімків.

Бібл. 6, іл. 2.

УДК 539.3.01

Михалев А.И., Деревянко А.И. **Моделирование динамики геометрического фазового перехода** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. - Випуск 3 (44). - Днепропетровск, 2006. - С.-27-31.

В работе рассмотрена задача моделирования динамики формирования устойчивых пространственных структур в распределенных хаотических системах и исследовано влияние характеристик условий формирования на параметры кластерных образований, как результат геометрического фазового перехода.

Библ.9, ил. 3

УДК 004.9268:539:621

Михалев А.И., Помулев В.В. **Вопросы геометрического моделирования структур металлических материалов на основе перколяционных кластеров** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. - Випуск 3 (44). - Днепропетровск, 2006. - С. 31-34.

В работе рассматривается вопрос моделирования структурообразований металлов на основе пространственных перколяционных кластеров.

Библ.12, ил. 2

УДК 515.1

Кучкарова Д.Ф. **Структурные модели топографических поверхностей на регулярной сети исходных данных** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных трудов. - Выпуск 3(44).-Днепропетровск, 2006 – С. 35-40.

В статье рассмотрен способ построения модели топографической поверхности на основе анализа исходных данных и определения типа вершин поверхности.

Библ.5, ил.6.

УДК 621.83

Кириченко А.Ф., Павлов А.И., Немцев В.В. **Графическое изображение приведенного радиуса кривизны в зацеплении зубчатых передач** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44).- Дніпропетровськ, 2006. –С. 41-45.

Рассмотрены методы графического изображения приведенного радиуса кривизны в зацеплении зубчатых передач с различными системами зацеплений. Подтверждено, что в полюсе передачи приведенный радиус кривизны не зависит от системы зацепления.

Библ. 2, ил. 4.

УДК 514.18

Найдиш А.В., Малкіна В.М. **Основні риси нового напрямку геометричного моделювання – числення узагальнених тривекторів** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 46-49.

Сформульовано основні риси, особливості і методологічні принципи формування нового напрямку геометричного моделювання скалярних і векторних полів на базі числення узагальнених тривекторів, що забезпечує розробку нових геометричних алгоритмів і методів.

Бібл. 6.

УДК 514.18

Найдиш В.М., Спірінцев В.В. **Адаптивна схема локального згущення точкового ряду з заданими у вузлах дотичними** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 49-56.

Пропонується розв'язання задачі дискретної інтерполяції ДПК довільної конфігурації з заданими у вузлах дотичними з урахуванням кутових параметрів за умові відсутності осциляції.

Бібл. 2, іл. 4.

УДК 681. 327.1

Осипов М.П., Ротков С.И. **Оптимизация работы алгоритма прямого построения триангуляции Делоне** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44).- Дніпропетровськ, 2006.- С. 56-62.

Предложен модифицированный алгоритм прямого построения триангуляции Делоне. Проведено сравнение сложности предложенного алгоритма с классическими алгоритмами.

Библ. 5, ил. 1.

УДК 515.2

Петрик М.Р., Михалик Д.М. **Математичне моделювання концентраційних профілів в неоднорідному і нанопористому середовищі** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукови праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ. 2006. - С. 62-68.

Представлений аналітичний розв'язок рівняння дифузії бензену у неоднорідному мультикомпонентному нанопористому середовищі з урахуванням системи механізмів інтерфейсних взаємодій між елементами переносу. Шляхом розв'язання зворотної задачі з використанням експериментальних даних одержані профілі коефіцієнтів дифузії для бензену в

міжчастинковому і внутрічастинковому просторі середовища. Змодельовано профілі розподілів концентрації для міжчастинкового та внутрічастинкового просторів.

Бібл. 2, іл. 4.

УДК 514.18

Пилипака С.Ф., Несвідомін В.Н., Пилипака Т.С. **Параметричні та натуральні рівняння кривих із заданими кінематичними характеристиками** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. - С. 69-75.

Запропоновані параметричні та натуральні рівняння плоских кривих за заданими кінематичними параметрами руху матеріальної точки по них.

Бібл. 4, іл. 3.

УДК 515.2

Підгорний О.Л. **Прикладну геометрію в навчальний процес** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ. 2006. – С. 75-81.

Розглянуті питання впровадження досліджень з прикладної геометрії в навчальний процес як найбільш ефективного, що носить галузевий рівень і може через підготовлені кадри вплинути на вдосконалення проектних рішень та технологій. Наводиться приклад діяльності в цьому плані кафедри архітектурних конструкцій Київського національного університету будівництва і архітектури.

Бібл. 10.

515.2:628.92

Пугачов Є.В., Кундрат Т.М. **Моделювання ефективності циліндричних світлових шахт з дифузним відбиванням світла** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 82-87.

Запропоновано метод визначення ефективності циліндричних світлових шахт з дифузним відбиванням світла для моделі хмарного неба за Муном-Спенсер. Ефективність розраховується як відношення потоку світлового вектора, що виходить з шахти, до потоку, що в неї входить. Показано залежність ефективності світлової шахти від співвідношення її радіусу і висоти, а також – коефіцієнта дифузного відбивання стінок шахти.

Бібл. 5, іл. 7.

УДК 514.18

Ренкас А.Г. **Відображення тригонометричних функцій комплексного простору K^4** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. - С. 88-92.

Робота присвячена розв'язанню однієї з задач формування багатовидів комплексного простору - графоаналітичній інтерпретації тригонометричних функцій комплексного аргументу на прикладі функцій синуса і косинуса. Показана доцільність графоаналітичного відображення таких функцій у чотиривимірному комплексному просторі з використанням частинних графіків комплексних функцій дійсної змінної, що реалізуються за допомогою тригонометричних функцій дійсного аргументу.

Бібл. 3, іл. 3.

УДК 515.2+551.51

Сергейчук О.В. **Геометрическое моделирование лучистого теплообмена в атмосфере при ясном небе** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Вип. 3 (44) – Дніпропетровськ, 2006. – С. 93-97.

Предложена геометрическая модель теплового излучения системы “атмосфера-земля” при ясном небе, ориентированная на применение исходных параметров (температуры, относительной влажности, давления воздуха на высоте 2 м от поверхности Земли, температуры и коэффициента поглощения земной поверхности) в задачах оптимизации формы зданий. Модель сопровож-

дается компьютерной реализацией и позволяет получать в автоматическом режиме значения энергетической яркости природного окружения зданий как функции от высоты расчетной точки и направления излучения.

Библ. 3, ил. 1, табл. 1.

УДК 515.2

Сидоренко О.С. **Геометричне моделювання систем керування об'єктами з нечіткими параметрами** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 98-102.

Запропоновано методику побудови системи керування об'єктами з нечіткими параметрами методами теорії нечітких множин та геометричного моделювання.

Бібл. 4, іл. 10.

УДК 515.2

Слюсаренко В.И., Недодатко С.А., Яровая Т.П. **Геометрическое реконструирование памятников архитектуры, содержащих соосные поверхности вращения, по их одиночным снимкам** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 103-107.

Предложен метод геометрического реконструирования объектов, содержащих соосные поверхности вращения, по их одиночному фотоснимку. По известным радиусам двух поверхностей и координатам их очерков от изображения оси на снимке определяются: фокусное расстояние снимка, расстояние от точки съёмки до оси, радиус утраченной поверхности вращения по координате её очерка от изображения оси.

Библ. 5, ил. 1.

УДК 539.3

Стеблянюк П.А. **Применение двумерного кубического сплайна для описания геометрических объектов** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 107-111.

Получено выражение для двумерного кубического В-сплайна, которое может применяться как для аппроксимации дифференциальных операторов полной системы уравнений в частных производных, так и использоваться для получения значений искомых функций с четвертым порядком точности по координатам между узлами пространственной сетки.

Библ. 3, ил. 4.

УДК 515.2

Таранова Р.І., Тарас І.П. **Досвід проведення екзаменаційного тестування на кафедрі інженерної та комп'ютерної графіки ІФНТУНГ** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 111-115.

Розглянуто досвід проведення підсумкових тестових випробувань з нарисної геометрії та інженерної графіки. Проаналізовано переваги та недоліки такого виду перевірки знань студента.

Бібл. 2.

УДК 538...539

Терентьев Ю.М. **Вырождение решений задачи Флоке для электромагнитных волн в пространственно периодической среде** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 116-120.

Рассмотрено вырождение решений Флоке для модели Мейснера в задаче о распространении волн в периодических структурах. Получены характеристические уравнения для границ областей селективного отражения.

Библ. 11.

УДК 515.2

Ткач Д.И., Нифанин А.Б. **Геометрия трещиностойчивых и самозамыкающихся структур дорожных покрытий** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 121-127.

Предложен метод геометрического моделирования самозамыкающихся структур на основе их интерпретации в терминах фрактальной геометрии применительно к проблеме трещинообразования дорожных покрытий. Описанный в работе процесс фрактального расширения исходной фигуры является эффективным аппаратом комбинаторного конструирования различных трещиностойчивых покрытий.

Библ. 6, илл. 7, табл. 1.

УДК 515.2

Тормосов Ю.М., Слободской Р.Б. **Опыт преподавания графических дисциплин с использованием мультимедийных средств** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 128-132.

Предложена методика повышения эффективности изучения графических дисциплин на основе применения мультимедийных средств. Показано, что динамическая визуализация процессов пооперационного построения изображений и этапов решения графических задач содействует повышению усваиваемости основных положений курса, что особенно важно при самостоятельной работе и в условиях дистанционного обучения.

Библ. 3, ил. 1.

УДК 515.91

Тукаев С.К. Нурмаганбетов Д.Ш., Дауренбек К.А. **Анализ координатных систем отображения многомерных поверхностей** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 133-139.

Рассмотрены координатные системы для отображения многомерных поверхностей и возможности их совершенствования.

Библ. 12, ил. 5.

УДК 519.2

Тулученко Г.Я., Хомченко А.Н., Астіоненко І.О. **Ймовірнісні властивості базисних функцій симплексів різних вимірностей** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 139-145.

На підставі ймовірнісних властивостей базисних функцій симплексів різних вимірностей обґрунтована прискорена схема випадкових блукань з багатьма стартами по цим скінченим елементам.

Бібл. 7, іл. 2

УДК 515.2

Ушаков Л.В. **Проектування поверхні відбивача освітлювального приладу щілинного типу** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 145-150.

Запропоновано координатний опис поверхні відбивача, здатного зосередити відбиті промені у прошарку об'єму простору, обмеженого двома паралельними площинами.

Бібл. 4, іл. 2.

УДК 515.2:517.2

Хомченко А.Н., Моисеенко С.В. **Вероятностные свойства базиса линейной 3D-интерполяции** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. – 150-155.

Исследованы вероятностные свойства базиса линейной интерполяции в трехмерном пространстве. Установлена связь метода конечных элементов (МКЭ) с методом Монте-Карло.

Библ. 9, ил. 1.

УДК 514.18:519.6

Цыбуленко О.В., Литвиненко Е.И., Николаенко Ю.И. **Альтернативные модели гексагональных базисов** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). - Дніпропетровськ, 2006. - С. 155-161.

Установлены альтернативные полиномиальные базисы гексагонального дискретного элемента с шестью узлами в вершинах для задач восстановления потенциальных полей. Проведено тестирование базисов на примерах, даны рекомендации к использованию.

Библ. 7, ил. 4, табл. 2.

УДК 515.2:518.1

Цыбуленко О.В., Лурье И.А., Корниловская Н.В. **Моделирование спектра весовых коэффициентов кубатур типа Гаусса - Лежандра на треугольном дискретном элементе** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). - Дніпропетровськ, 2006. - С. 162-167.

Исследованы возможности экспериментального получения спектров весовых коэффициентов кубатур типа Гаусса - Лежандра на треугольном дискретном элементе с помощью геометрической схемы случайных блужданий.

Библ. 9, ил. 5, табл. 3.

УДК 515.2 + 681.3

Черников А.В. **Прикладная геометрия динамических формообразований** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). - Дніпропетровськ, 2006. - С. 167-172.

Рассмотрены вопросы геометрического и компьютерного моделирования формообразования кривых и поверхностей, изменяющихся под действием заданных физических факторов. Предложен алгоритм построения семейств квази-эквидистантных, нормально-смещенных кривых и поверхностей, с помощью которых возможно моделирование и исследование некоторых технологических и природных процессов.

Библ. 7, илл. 5, табл. 1.

УДК 515.2

Чорна Л.С. **Моделювання поверхонь на основі полікоординатних В-сплайнів** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 3 (44) - Дніпропетровськ, 2006. - С. 173-178.

Розглянуто застосування полікоординатних векторно-параметричних перетворень для моделювання поверхонь. Показано, що застосування полікоординатних В-сплайнів при моделюванні поверхонь дає позитивні результати щодо адекватності перетворень, зокрема при переході від опуклої форми об'єкту до неопуклої і навпаки.

Бібл. 5, іл. 3.

УДК 514.18

Чернишова Е.О. **Знаходження в площині дійсних результатів перетину уявних геометричних елементів** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). - Дніпропетровськ, 2006. - С. 179-185.

Розглянуто побудову дотичних до параболи та кола, що проходять через точки, координати яких є як дійсними, так і комплексними числами. Показано, що нехтування уявними геометричними елементами дає неповний розв'язок у дійсній області.

Бібл. 2, іл. 3.

УДК 515.2

Шоман О.В. **Метод аналітичного опису пари поверхонь, які паралельні гіперболічному параболоїду** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 3 (44). - Дніпропетровськ, 2006. - С. 185-190.

Запропоновано метод визначення координатного подання поверхонь, паралельних гіперболічному параболоїду.

Библ. 8, ил. 1.

УДК 528.71

Реута О.В. **Стиснення без втрат проекційних зображень з використанням двовимірного кодування** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 3 (44). – Дніпропетровськ, 2006. – С. 190-194.

Робота присвячена опису алгоритма стиснення растрових зображень проекційної природи, що базується на поданні вихідного зображення послідовністю його бінарних образів з подальшим їх стисненням на основі двовимірного кодування.

Библ. 6, ил. 1.

UDC 76 : 515.2

Mihajlenko V.E., Kashchenko O.V. **Biodesign as a basis of modern design** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 3-10.

The essential role of reproduction of spatial forms of biological objects in constructive, art - composite and system modelling natural and technical objects is shown. The revealed perspective directions of researches in the field of biodesign.

Bibl. 4.

UDC 515.2

Mikhailenko V.E., Plosky V.O. **Problems of the further development of the Ukrainian association on applied geometry** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 11-16.

Results in the activity of the Ukrainian association on applied geometry and graphics (UAGG) are generalized on an extent of seventh years of its existence in organizational, scientific and scientific - methodical aspects. The problem matters, the planned ways of their overcoming are revealed.

Bibl. 6.

UDC 514.18

Korchinsky V.M., Svinarenko D.M. **Inrmativе features of spatial brightness distributions of raster images invariant to scaling** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 17-22.

The system of scale-invariant informative features of raster images with multileveled brightness distributions is proposed. The offered system is based on three-dimensional geometrical model of such images in space "projection plane – brightness level".

Bibl. 3, il. 9.

UDC 539.3.01

Mikhalev A., Derevyanko A. **Design of dynamics of geometrical phase transition** // System technologies. - № 3 (44).-Dnipropetrovssk, 2006. – P. 22-26.

The task of design of dynamics of forming of steady spatial structures is in-process considered in the distributed chaotic systems and influence of descriptions of forming terms is investigational on the parameters of cluster educations, as a result of geometrical phase transition

Bibl. 9, ill. 3.

UDC 004.9268:539:621

Mikhalyov A.I., Pomulev V.V. **Metallic materials structures' geometrical models based on percolation clusters** // System technologies. № 3 (44).- Dnepropetrovsk, 2006. –P. 27-31.

The work describes usage of 3D percolation cluster as metals structural formation's models.

Bibl. 12, ill. 2.

УДК 515.1

Kuchkarova D.F. **Structural models of topographical surfaces on a regular network of the initial data** // System technologies. № 3 (44).- Dnepropetrovsk, 2006. –P. 31-34.

In article is considered the way of construction of model of a topographical surface on the basis of the analysis of the initial data and definition such as tops of a surface.

Bibl. 5, ill. 6.

UDC 621.83

Kirichenko A.F, Pavlov A.I., Nemtsev V.V. **Graphic representation of the given radius of curvature in gear** // System technologies. – N 3 (44).- Dnepropetrovsk.-2006. – P. 35-40.

The methods of graphic representation of the given radius of curvature in gearing tooth gearings with various systems of gearings are considered. It was confirmed, that in a pole of transfer the given radius of curvature does not depend on system of gearing.

Bibl. 2, ill. 4.

UDK 528.71

Gnatushenko V.V. **Model of orientation of image pair, lyings in one plane** // System technologies. № 3 (44).- Dnepropetrovsk, 2006. –P. 41-45.

A model which describes the fixing processes of photogrammetric stereoimages adequately is offered in work. The special attention is spared the question of determination of parameters of aerospace scenes orientation.

Bibl. 6, ill. 2.

UDC 514.18

Najdysh A.V., Malkina V.M. **The basics of a new direction in geometrical modelling – calculations of generalized 3-vectors** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. – P. 46-49.

The basics and methodological principles of a new direction in geometrical modelling of scalar and vector fields are formulated on the basis of generalized 3-vectors, that provides development of new geometrical algorithms and methods.

Bibl. 6.

UDC 514.182.7:519.651

Najdysh V.M., Spirintzev V.V. **Adaptive algorithmic diagram of a local extensions of dot series with the tangents given in units** // System technologies. - N 3 (44) - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 49-56.

The decision is proposed for a problem of discrete interpolation of discretely represented curves with arbitrary configurations with the tangents given in nodes in view of angular parameters under condition of oscillation absence.

Bibl. 2, ill. 4.

UDC 681. 327.1

Osipov M.P., Rotkov S.I. **Optimization of direct building of Delaunay triangulation** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 56-62.

Modified algorithm of direct searching Delaunay triangulation is proposed. Comparison of complexity of its work with work of classical algorithms is given.

Bibl. 5, ill. 1.

UDC 515.2

Petryk M.R., Mykhalyk D.M **Mathematical modeling of concentration profiles in heterogeneous and nanopores media** // System technologies. - N 3 (44). – Dnepropetrovsk, 2006. – P. 62-68.

The analytical solution of benzene diffusion equations in the heterogeneous multi compound nanopores zeolite medias with consider of interface interaction systems between elements of mass transfer are presented. By solving the inverse problem and using the benzene experimental data, the benzene diffusion coefficient profiles in inter- and intra- crystallites, have been calculated. Concentration profiles, concentration gradients profiles and other parameters profiles inside of micro- and macropores of heterogeneous crystallite beds of zeolite have been modelled.

Bibl. 2, ill. 4.

UDC 515.2

Pylypaka S.F, Nesvidomin V.M, Pylypaka T.S **The parametrical and natural equations of curves with the set kinematic characteristics** // System technologies. - N 3 (44). – Dnepropetrovsk, 2006. – P. 69-75.

The parametrical and natural equations of flat curves on the set kinematic parameters of movement of a mass point on them are found.

Bibl. 4, ill. 3.

UDC 515.2

Pidgorny O.L. **Applied geometry in educational process** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk. 2006. - P. 75-81.

The problems of introduction of researches on applied geometry in educational process as most effective is considered which carries a branch level and can through prepared the staff to affect improvement of the design decisions and technologies. The example of activities in this field is presented.

Bibl. 10.

UDC 515.2:628.92

Pugachov E.V., Kundrat T.N. **Modeling of efficiency of cylindrical light shafts with diffuse reflection of light** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 82-87.

The method of definition the efficiency of cylindrical light shafts with diffuse reflection of light for model of the cloudy sky on Moon-Spenser is offered. Efficiency pays off as the relation of a stream of a light vector leaving shaft to an entering stream. Dependence of efficiency of light shaft on parities of its radius and heights, and also – factor diffuse reflections of walls of shaft is shown.

Bibl. 5, ill. 7.

UDC 515.2

Renkas A.G. **Representation of trigonometrical functions in complex space K^4** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk. 2006. - P. 88-92.

The decision of the problem of variety generation in complex space - graph-analytic interpretation of trigonometrical functions of complex argument by the example of sine and cosine functions is proposed. The expediency of graph-analytic representation of such functions in four-dimensional complex space is shown with use of partial diagrams of complex functions of the real variables realized by means of trigonometrical functions of real argument is shown.

Bibl. 3, ill. 3.

UDC 515.2+551.51

Sergeychuk O.V. **Geometrical modeling of radiant heat exchange in atmosphere at clear sky** // System technologies. - N 3(44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 93-97.

The model of thermal radiation in system “atmosphere - ground”, which can be applied to problems of optimization of the form of buildings. The corresponding computer program is constructed; it provides evaluation the dependence of atmospheric radiance from point height and direction of radiation at given air temperature, relative humidity, atmospheric pressure at the height of 2 meters over the ground surface, and both temperature and absorption factor of ground surface.

Bibl. 3, il. 1, tabl. 1.

UDC 515.2

Sydorenko E.S. **Control system geometric simulation for objects with fuzzy parameters** // System technologies. - N 3 (44). -Dnepropetrovsk, 2006. - P. 98-102.

Control system building for objects with fuzzy parameters by fuzzy sets theory and geometric simulation methods is considered.

Bibl. 4, ill. 10.

UDC 515.2

Slusarenko V.I, Nedodatko S.O, Yarovaya T.P. **Geometrical reconstruction of monuments of architecture, containing co-axial surfaces of rotation by their single photo** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk. 2006. - P. 103-107.

The method of geometrical reconstruction of objects, containing co-axial surfaces of rotation by their single photo is proposed. The focal distance of the photo, the distance from the point of survey to the axis are defined by the certain radia of two surfaces and co-ordinates of their outlines from the axis

image on the photo. The radius of the lost rotation surface is defined by the coordinates of its outline from the axis image.

Bibl.5, ill.1.

UDC 539.3

Steblyanko P.A. **Application of the two-dimensional cubic B-spline for the description of geometrical objects** // System technologies. - № 3 (44) . - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 107-111.

Expression for two-dimensional cubic B-spline which can be applied as to approximation of differential operators of full system of the equations in derivatives, and to be used for reception of values of required functions with the fourth order of accuracy on coordinates between units of a spatial grid it is received.

Bibl. 3. ill. 4.

UDC 515.2

Taranova R.I., Taras I.P. **Experience of testing realization on Engineering and Computer Graphics Department of Ivano-Frankovsk national technical university of oil and gas** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 111-115.

Experience of testing of descriptive geometry and engineering graphic is considered. It is analysed of merits and demerits of such kind of the student examination.

Bibl. 2.

UDC 538..539

Terentev Y.M. **Degeneration of the problem Floquet solutions for the electromagnetic waves in the spatially periodic medium** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 116-120.

As to propagation and diffraction of waves in the periodic structures, the degeneration of Floquet problem solutions for the model Meissner has been determined for the first time, the characteristic equations have been obtained for the scopes of selective reflection regions.

Bibl. 11.

УДК 515.2

Tkach D.I. Nifanin A.B. **Geometry of crack growth resistant and self-closing structures of the road carpet** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 121-127.

The work is devoted to geometry & graphic simulation of combined decision of prefabricated road carpet, which ensures the crack growth resistance and endurance. These results are achieved due to the design of the seams figures between elements that provide attenuation of the cracks while expanding.

Bibl. 6 or 7, tabl. 1.

UDC 515.2

Tormosov Yu.M. **Experience of teaching the graphic disciplines with use of multimedia** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 128-132.

The technique of increase the studying efficiency of graphic disciplines is offered on the basis of multimedia. It is shown, that dynamic visualization of operation breakdown as applied to constructions of images and stages of the decision of graphic problems enhances the mastering of substantive provisions of a course, that it is especially important at independent job and in conditions of remote training.

Bibl. 3.

UDK 515.91

Tukaev S.K., Nurmaganbetov D.Sh, Daurenbek K.A. **Analysis of the coordinate systems of the image of the multivariate surfaces** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 133-139.

The coordinate systems are considered for images of the multivariate surfaces and possibilities of their improvement.

Bibl. 12, ill. 5.

UDK 519.2

Tuluchenko G.Ya., Khomchenko A.N., Astionenko I.A. **Probabilistic properties of the simplexes basic functions of different dimensions** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 139-145.

Basing on probabilistic properties of the simplexes basic functions of different dimensions, the accelerated scheme of random walks with many starts on this finite elements is proved.

Bibl. 7, il. 2.

UDC 515.2

Ushakov L.V. **Planning of surface of reflector of lighting device of crack type** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 145-150.

Coordinate description of reflector surfaces, allowing concentration the reflected rays in the layer of space volume, bounded by two parallel planes, is considered.

Bibl. 4, ill. 2.

UDC 515.2:517.2

Khomchenko A.N., Moiseenko S.V. **Probabilistic properties of the linear 3D-interpolation basis** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 150-155.

Probabilistic properties of the base of linear interpolation in three-dimensional space are investigated. The restraint between finite-element method (FEM) and Monte-Carlo method is shown.

Bibl. 9, ill. 1.

UDC 514.18:519.6

Tsybulenko O.V., Litvinenko E.I., Nikolaenko Y.I. **Alternative models of hexagonal bases** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 155-161.

Alternative polynomial bases of hexagonal for a discrete element with six nodes in apexes for the problems of restoring potential fields is presented. The testing of bases for examples is done, recommendations to use is given.

Bibl. 7, ill. 4, tabl. 2.

UDC 515.2:518.1

Tsybulenko O.V., Lurie I.A., Kornilovskaya N.V. **Modelling the spectrum of weight factors for cubatures of Gauss - Legendre typed on a triangular discrete element** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 162-167.

The opportunity of experimental receiving a spectrum of weight factors for cubatures of Gauss - Legendre type on a triangular discrete element on the base of the geometrical model of stochastic walk is investigated.

Bibl. 9, ill. 5, tabl. 3.

UDC 515.2 : 681.3

Chernikov A.V. **Applied geometry of dynamic forming** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 167-172.

Problems of geometrical and computer simulation of curves and the surfaces forming, varying under an operation of given physical factors are considered. The algorithm is proposed for construction and simulation the families of quasi-equidistant, normally-displaced curves and surfaces as the models of some technological and natural processes.

Bibl. 7, ill. 5, tabl. 1.

UDC 515.2

Chorna L.S. **Simulation analysis of surfaces on the basis of polycoordinate B - splines** // System technologies. - 3 (44) - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 173-178.

The applications of polycoordinate vector-parametric conversions for simulation analysis of surfaces are considered. the application of polycoordinate B - splines at simulation analysis of surfaces pro-

vides beneficial effect in respect of adequacy of conversions, in particular at passage from the convex form of plant to nonconvex and on the contrary.

Bibl. 5, ill. 3.

UDK 514.18

Chernyshova E.O. **Finding in plane the real results of crossing of imaginary geometrical elements** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 179-185.

Construction of tangents to the parabola and circle is considered, passing through points with real and complex coordinates. It is shown that neglecting the imaginary geometrical elements leads to incomplete decisions in an real area.

Bibl. 2, ill. 3.

UDK 515.2

Shoman O.V. **Method of analytical description of pair of surfaces, parallel of the hyperbolical paraboloid** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 185-190.

The method of drafting of equalization surfaces, parallel a hyperbolical paraboloid is proposed.

Bibl. 8, ill. 1.

UDK 528.71

Reuta O.V. **Lossless compression of the projective images using twodimensional coding** // System technologies. - N 3 (44). - Dnepropetrovsk, 2006. - P. 190-194.

Work is devoted proposition of the lossless compression method for raster projection images on base of their presentation as binary image set and their compression with twodimensional coding.

Bibl. 6, ill. 1.

АВТОРИ ВПУСКУ

Дауренбек Канат Амирулы — к.т.н., и.о.доцента кафедры информатики и вычислительной техники Таразского института Международного казахско-турецкого университета имени Х.А.Ясауи

Деревянко Александр Иванович - к.т.н., доцент кафедры информационных технологий и систем Национальной металлургической академии Украины.

Гнатушенко Владимир Владимирович — к.т.н., доцент кафедры электронных средств телекоммуникаций Днепропетровского национального университета.

Кириченко Анатолий Федорович — д.т.н., профессор кафедры начертательной геометрии и графики Национального технического университета «Харьковский политехнический институт».

Корчинский Владимир Михайлович — д.т.н., заведующий кафедрой электронных средств телекоммуникаций Днепропетровского национального университета.

Кундрат Тарас Миколайович — стажист-дослідник Національного університету водного господарства та природокористування.

Лурье Ирина Анатольевна — к.т.н., доцент кафедры информатики и компьютерных технологий Херсонского национального технического университета.

Малкина Вера Михайловна — д.т.н., профессор кафедры прикладной математики и вычислительной техники Таврической государственной агротехнической академии.

Михайленко Всеволод Евдокимович — д.т.н., профессор кафедры инженерной и машинной графики Киевского национального университета строительства и архитектуры, председатель УАПГ.

Михалев Александр Ильич - д.т.н., профессор, зав. кафедрой информационных технологий и систем Национальной металлургической академии Украины.

Моисеенко Светлана Викторовна — аспирант кафедры прикладной математики и математического моделирования Харьковского национального технического университета.

Найдыш Андрей Владимирович — д.т.н., заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительной техники Таврической государственной агротехнической академии.

Найдыш Владимир Михайлович — д.т.н., заведующий кафедрой прикладной геометрии та информационных технологий проектирования

Таврической государственной агротехнической академии.

Недодатко Сергей Александрович — к.т.н., доцент Приднепровской государственной академии строительства и архитектуры.

Немцев Владимир Владимирович — студент автомобильного факультета Харьковского национального автомобильно-дорожного университета

Несвидомин Виктор Николаевич — к.т.н., доцент кафедры начертательной геометрии, компьютерной графики и дизайна Национального аграрного университета

Николаенко Юрий Иванович — старший преподаватель физико-технического лица при Херсонском национальном техническом университете

Нурмаганбетов Демесин Шералиевич — к.т.н., докторант Таразского государственного университета имени М.Х.Дулати.

Орехов Вячеслав Валентинович — студент Таганрогского государственного радиотехнического университета

Павлов Анатолий Иванович — к.т.н., доцент кафедры инженерной и компьютерной графики Харьковского национального автомобильно-дорожного университета

Петрик Михайло Романович — к.т.н., керівник лабораторії математичного моделювання і дослідження масопереносу в неоднорідних і нанопористих середовищах Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя

Подгорный Алексей Леонтьевич — д.т.н., заведующий кафедрой архитектурных конструкций Киевского национального университета строительства и архитектуры.

Помулев Валерий Валерьевич, к.т.н., доцент. каф. информационных технологий и систем НМетАУ

Пугачев Евгений Валентинович — д.т.н., профессор кафедры архитектуры Национального университета водного хозяйства и природопользования.

Ренкас Андрей Игнатьевич — к.т.н., начальник кафедры пожарной и аварийно-спасательной техники Львовского государственного университета безопасности жизнедеятельности.

Реута Александр Васильевич — к.т.н., доцент кафедры электронных средств телекоммуникаций Днепропетровского национального университета.

Сергейчук Олег Васильевич — к.т.н., доцент кафедры архитектурных конструкций Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Сидоренко Елена Сергеевна — аспирант кафедры начертательной геометрии и графики Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»

Слюсаренко Вадим Иванович — к.т.н., доцент Днепропетровского государственного аграрного университета

Стеблянюк Павел Алексеевич — д.ф.-м.н., заведующий кафедрой прикладной математики Днепропетровского государственного технического университета.

Таранова Римма Ивановна — к.т.н., доцент кафедры инженерной и компьютерной графики Ивано-Франковского национального технического университета нефти и газа

Тарас Ирина Павловна — к.т.н., доцент кафедры инженерной и компьютерной графики Ивано-Франковского национального технического университета нефти и газа

Терентьев Юрий Михайлович — к.т.н., доцент кафедры электронных средств телекоммуникаций Днепропетровского национального университета

Тормосов Юрий Михайлович — д.т.н., заведующий кафедрой механики и графики Харьковского государственного университета питания и торговли

Тукаев Салимгерей Касенович — к.т.н., профессор Таразского государственного университета имени М.Х.Дулати

Ушаков Леонид Васильевич — проректор Академии гражданской защиты

Хомченко Анатолий Никифорович — д.ф.-м.н., заведующий кафедрой прикладной математики и математического моделирования Харьковского национального технического университета

Цыбуленко Ольга Владимировна — к.т.н., доцент кафедры высшей математики Херсонского национального технического университета

Чаплинская Татьяна Николаевна — ассистент кафедры начертательной геометрии и графики Восточноукраинского национального университета им. В.Даля

Черная Любовь Степановна — старший преподаватель кафедры информационных технологий Киевской академии водного транспорта им. П.К.Сагайдачного

Черников Александр Викторович — к.т.н., заведующий кафедрой инженерной и компьютерной графики Харьковского национального автомобильно-дорожного университета

Шоман Ольга Викторовна — к.т.н., докторант кафедры начертательной геометрии и графики Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»

Яровая Татьяна Петровна — старший преподаватель Приднепровской государственной академии строительства и архитектуры

Системні технології

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

Випуск 3 (44)

Комп'ютерна верстка та коректура В.В. Гнатушенко

Підписано до друку 10.04.2006

Формат 60×84 1/16. Друк – різнограф. Папір типогр.

Умов. друк. арк. 15,14. Обл.-видавн.- 13,25. Тираж 300 прим.

Замовлення № 12/06

ДНВП «Системні технології»

49635, Дніпропетровськ, пр. Гагаріна, 4, кімн. 503

Е-mail: st@dmety.dp.ua

Свідectво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:

Серія KB № 8684