

УДК 539.386:622.647.2

Р.В. Кирия

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ИСТЕЧЕНИЯ СЫПУЧЕГО ГРУЗА ИЗ БУНКЕРА С ПОМОЩЬЮ СТРУКТУРНО-МЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Вопросом истечения сыпучих грузов из бункеров занимались многие исследователи [1-7]. Однако эта проблема в настоящее время остается еще не решенной. Это связано с недостаточной изученностью физических процессов истечения сыпучего груза из бункера на микроуровне, т.е. на уровне взаимодействия частиц.

Изучение процессов движения сыпучего груза, происходящих на микроуровне, позволяет установить структурно-механическое состояние, в котором находится дисперсная среда. И, следовательно, установить связь между процессами, происходящими на микроуровне, с процессами, происходящими на макроуровне. Другими словами, разработать математическую модель движения дисперсной (в частности, сыпучей) среды как модель механики сплошной среды [8-10].

В литературе такие модели механики сплошной среды называются реологическими моделями дисперсных сред (структурно-механические модели) [10].

Исследования показали, что при определенных условиях сыпучий груз при движении может находиться в трех структурно-механических состояниях: твердого тела, пластичного и свободнодисперсного [11,12].

При этом, если сыпучий груз находится в твердом состоянии, то его частицы связаны между собой, их взаимное перемещение отсутствует и для внутренних напряжений справедлив закон Гука; если насыпной груз находится в пластичном состоянии (медленное движение), то для внутренних напряжений справедливый закон Кулона; при свободнодисперсном состоянии (быстрое движение) частицы насыпного груза не связаны между собой, находятся в непрерывном хаотическом движении и взаимодействуют между собой

в результате столкновений (ударов). В последнем случае, согласно [11,12], внутренние касательные и нормальные напряжения определяются по формулам

$$\tau = \frac{1}{3} \rho_c k^2 d^2 \left(\frac{\partial v_c}{\partial y} \right)^2; \quad p = \frac{1}{3} \rho_c k' k^2 d^2 \left(\frac{\partial v_c}{\partial y} \right)^2, \quad (1)$$

где ρ_c – средняя плотность насыпного груза; k – кинетический коэффициент характеризующий потерю механической энергии потока сыпучего груза в результате столкновения частиц ($k = 10 \div 13$); k' – безразмерный коэффициент характеризующий потерю механической энергии частиц сыпучего груза в результате ударов частиц между собой ($k' = 0,3 \div 0,4$); d – средний диаметр частицы сыпучего груза; v_c – средняя скорость потока сыпучего груза в данной точке.

Следовательно, сыпучий груз, с точки зрения реологии дисперсных сред, представляет собой пластическое (твердообразное) дилатантное тело [10].

Твердое состояние насыпного груза описывается уравнениями теории упругости, пластичное состояние – уравнениями движения сыпучей среды, находящейся в предельном состоянии. Свободнодисперсное состояние насыпного груза описывается уравнением Навье-Стокса для вязкой жидкости. При этом вместо коэффициента молекулярной вязкости вводится коэффициент макровязкости, который характеризует перенесение количества движения в результате случайного столкновения частиц насыпного груза [1].

В представленной работе на основании анализа структурно-механического состояния сыпучего груза получены математические модели его истечения из бункера с различным расположением и формой выпускного отверстия. При этом рассматривались бункеры с горизонтальными днищем и со щелевым и круглым выпускным отверстием, расположенном на дне бункера, а также бункеры с боковым щелевым выпускным отверстием, расположенном на стенке бункера (рис. 1,а,б).

Рассмотрим истечение несвязного сыпучего груза из прямоугольного бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием с шириной a и длиной b ($b > a$) (рис. 1,а). Согласно

экспериментальным исследованиям [1,2,6,7], при истечении сыпучего груза из бункера можно выделить 5 зон (рис. 1,а).

В зоне А (см. рис. 1,а) частицы сыпучего груза связаны между собой и движутся с малой скоростью параллельно стенкам бункера. В зоне В (см. рис. 1,а) частицы насыпного груза скользят относительно друг друга, а их траектории искривляются в направлении к оси бункера. В этой зоне скорости частиц также малы и изменяются незначительно. В зоне динамического свода С (см. рис. 1,а) частицы сыпучего груза образуют подвижные своды, движущиеся вниз, скользя по стенкам канала, ширина которого приблизительно равна ширине выпускного отверстия. При этом скорости частиц сыпучего груза существенно увеличиваются, а их траектории приближаются к вертикальным линиям. В зоне обрушения (перемешивания) D связи между частицами сыпучего груза разрушаются, при этом они находятся в непрерывном хаотическом движении, сталкиваясь между собой. Траектории движения частиц в этой зоне совпадают с прямыми линиями, а их скорость увеличивается за счет силы тяжести. В зоне Е частицы сыпучего груза находятся в неподвижном состоянии.

Кроме того, нормальные напряжения p сыпучего груза в бункере в зоне А увеличиваются с глубиной бункера линейно. В зоне В нормальное напряжение достигает максимального значения op и не изменяется с глубиной бункера. А в зоне С нормальное напряжение уменьшается с глубиной бункера линейно и при приближении к выпускному отверстию уменьшается до нуля (см. рис. 1,а).

Опишем движение сыпучей среды в каждой зоне.

В зоне А сыпучий груз движется как твердое тело с неизменной малой скоростью. В этой зоне нормальное напряжение p увеличивается от нуля до максимального значения on (см. рис. 1,а).

В зоне В сыпучий груз движется также с малой скоростью, находясь в пластичном состоянии, и для его внутренних напряжений справедлив закон Кулона [4,13].

При этом, если высота сыпучего груза в бункере намного больше его ширины, то, согласно [4], внутренние напряжения в зоне В принимают максимальные значения и не изменяются с глубиной сыпучего груза (см. рис. 1,а). Это связано с тем, что с увеличением глубины сыпучего груза за счет его веса нормальные напряжения

увеличиваются и из-за бокового распора увеличиваются касательные напряжения, которые на определенной глубине бункера уравниваются силами веса сыпучего груза. Поэтому нормальные касательные напряжения, действующие на сыпучий груз, принимают максимальные значения и с увеличением глубины не изменяются.

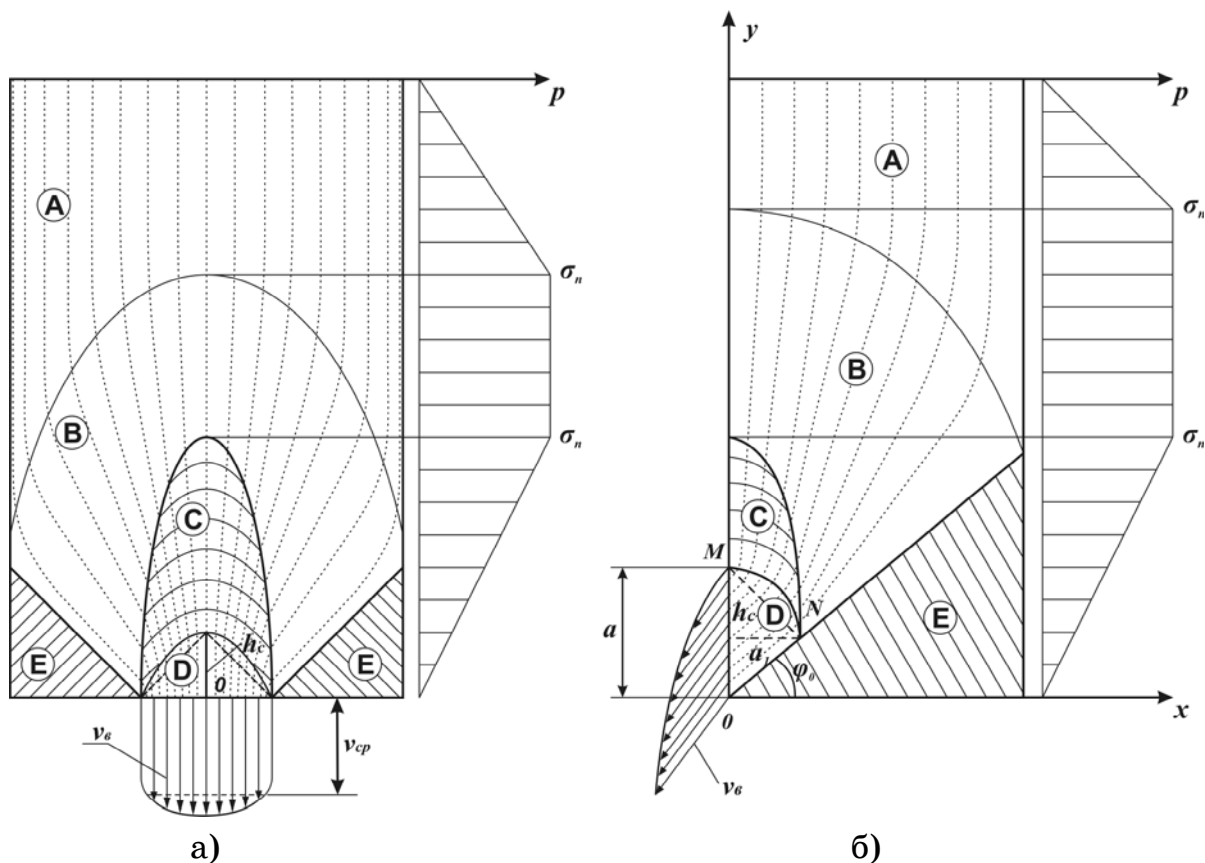


Рисунок 1 – Зоны структурно-механического состояния сыпучего груза при его истечении из бункера: а) горизонтальное щелевое выпускное отверстие; б) боковое щелевое выпускное отверстие

Определим максимальные напряжения в этой зоне. Выделим малый прямоугольный элемент сыпучей среды с шириной Δx и высотой Δy (рис. 2,а).

Так как в зоне В скорости частиц сыпучего груза малы, то условия равновесия выделенного элемента сыпучей среды имеют вид

$$\Delta G + F_c = 0, \quad (2)$$

где ΔG – вес элемента сыпучей среды; F_c – касательная сила, действующая на элемент сыпучей среды.

Вес элемента сыпучей среды равен

$$\Delta G = \Delta m g, \quad (3)$$

где Δm – масса выделенного элемента сыпучей среды, равная

$$\Delta m = \frac{\gamma}{g} \Delta x \Delta y b; \gamma - \text{удельный вес сыпучей среды.}$$

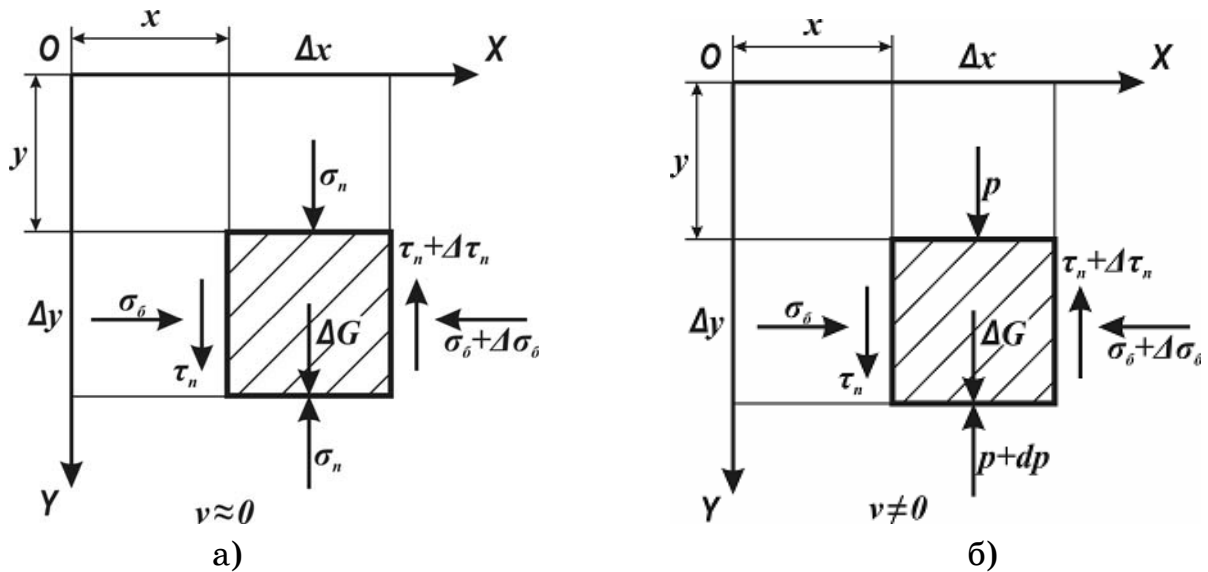


Рисунок 2 – Расчетная схема определения напряжений и скоростей:

а) в зоне В; б) в зоне С

Касательные силы, действующие на элемент сыпучей среды, определяются через касательные напряжения по формуле

$$F_c = [\tau_n - (\tau_n + \Delta \tau_n)] \Delta y b, \quad (4)$$

где τ_n – максимальные касательные напряжения.

Учитывая, что максимальные напряжения от y не зависят, подставляя (3) и (4) в (2), после преобразования, устремив Δx к нулю ($\Delta x \rightarrow 0$), получим

$$\frac{d\tau_n}{dx} = \gamma. \quad (5)$$

Решим уравнение (5) при условии: при $x=0$, $\tau_n=0$, получим

$$\tau_n = \gamma x. \quad (6)$$

Из круга Мора [4] с учетом (6) имеем

$$\sigma_\delta = \frac{\tau_n}{f} = \frac{\gamma}{f} x; \quad (7)$$

$$\sigma_n = \tau_n (1 + 2f^2) = \frac{\gamma}{f} x (1 + 2f^2); \quad (8)$$

$$f = \operatorname{tg} \varphi,$$

где φ – угол внутреннего трения сыпучего груза

Следовательно, максимальные касательные τ_n и нормальные напряжения σ_n , σ_b являются линейными функциями от координаты x .

Главные нормальные напряжения в этой зоне, согласно [4], определяются по формулам

$$\sigma_1 = \tau_n \left(\frac{1}{f} + f + \sqrt{1 + f^2} \right) = \gamma x \left(\frac{1}{f} + f + \sqrt{1 + f^2} \right); \quad (9)$$

$$\sigma_2 = \tau_n \left(\frac{1}{f} + f - \sqrt{1 + f^2} \right) = \gamma x \left(\frac{1}{f} + f - \sqrt{1 + f^2} \right). \quad (10)$$

Рассмотрим зону динамического свода С. В этой зоне сыпучий груз находится в пластичном состоянии. При этом на границе этой зоны напряжения принимают максимальные значения. Из-за близости этой зоны к выпускному отверстию нормальные напряжения σ_n уменьшаются и на выходе из нее принимают значения, равные нулю (см. рис. 1,а).

Для определения скорости частиц в зоне С, также как в зоне В, выделим малый элемент сыпучего груза (рис. 2,б) и применим к нему закон Ньютона. Тогда в проекциях на вертикальную ось получим

$$\Delta m \frac{dv}{dt} = [p - (p + \Delta p)] \Delta x b + \Delta G + [\tau_n - (\tau_n + \Delta \tau_n)] \Delta y b, \quad (11)$$

где p – нормальное давление, действующее на частицы сыпучего груза в зоне динамического свода и зависящее от x и y .

Подставив (3) в (11), после преобразования, устремив $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\gamma}{g} \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma - \frac{d\tau_n}{dx}. \quad (12)$$

Последнее уравнение с учетом (5) запишется в виде

$$\frac{\gamma}{g} \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}. \quad (13)$$

Предположим, что процесс истечения сыпучего груза из бункера стационарен. Тогда в зоне С имеем

$$v = v(x, y).$$

После дифференцирования по времени t предыдущего равенства имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Учитывая, что в зоне динамического свода С горизонтальная составляющая скорости частиц сыпучей среды малы, т.е. $\frac{dx}{dt} = 0$ и

$\frac{dy}{dt} = v$, то последнее равенство перепишем в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (14)$$

Подставив (14) в (13), получим

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (15)$$

Проинтегрируем последнее уравнение при начальных условиях $v=0$, $p=\sigma_n$, получим скорость в любой точке динамического свода, равную

$$v = \sqrt{2g \frac{\sigma_n - p}{\gamma}}, \quad (16)$$

где $p=p(x, y)$

Из (16) следует, что скорость частиц сыпучей среды в зоне динамического свода зависит только от распределения нормального давления p по высоте и сечению бункера.

Подставив в левую часть равенства (16) $p = 0$, определим скорость на выходе из динамического свода, равную

$$v_\partial = \sqrt{2g \frac{\sigma_n}{\gamma}}. \quad (17)$$

Из (17) и (8) следует, что скорость на выходе из динамического свода зависит только от максимального нормального давления и является функцией от координаты x .

Последняя формула совпадает с формулой Зенкова [4]. Однако, в отличие от формулы Зенкова, в формуле (17) скорость v_∂ является скоростью частиц сыпучего груза на выходе из зоны динамического свода С. В то же время в формуле Зенкова эта скорость является скоростью частиц сыпучего груза на выходе из бункера. Кроме того, у Зенкова вместо σ_n стоит некоторое среднее нормальное давление, равное

$$\sigma_{cp} = \frac{1}{2} \gamma a \chi, \quad (18)$$

где $\chi = \frac{1}{f} + 2f - \sqrt{1 + f^2}$.

Подставив в (17) вместо σ_n среднее значение σ_{cp} из (18), получим скорость на выходе из бункера по Зенкову

$$v_{\theta} = \sqrt{ga\chi}. \quad (19)$$

Согласно экспериментальным данным [6], в зоне динамического свода траектории частиц сыпучего груза приблизительно совпадают с прямолинейными лучами, идущими в некоторый центр, расположенный на оси бункера и находящийся ниже целевого отверстия.

В этом случае, согласно работе [13], меньшее главное напряжение σ_2 в любой точке движущегося груза совпадает с траекториями движения частиц. С другой стороны, так как траектории движения частиц сыпучего груза в зоне динамического свода мало отличаются от вертикальных линий, то нормальная составляющая приближенно совпадает с главным напряжением $\sigma_n \approx \sigma_2$.

Подставив в формулу (17) вместо σ_n главное нормальное напряжение σ_2 , получим скорость движения частиц сыпучего груза на выходе из зоны динамического свода

$$v_{\theta} = \sqrt{2g \frac{\sigma_2}{\gamma}}. \quad (20)$$

Как отмечалось выше, в зоне обрушения **D** частицы сыпучего груза находятся в непрерывном хаотическом движении в результате столкновений между собой. Следовательно, сыпучий груз в этой зоне находится в свободнодисперсном состоянии и, согласно [11,12], его движение описывается уравнениями Навье-Стокса для сыпучих грузов.

С помощью круга Мора можно показать, что для несвязного сыпучего груза граница между динамическим сводом **C** и зоной обрушения **D** представляет собой перевернутую параболу [4]

$$y = h_c \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right], \quad (21)$$

где h_c – высота параболы, определяемая по формуле

$$h_c = \frac{a(1 + \sin \varphi)}{4 \cos \varphi} = \frac{a}{4} \left(f + \sqrt{1 + f^2} \right). \quad (22)$$

Заменяем границу между зоной динамического свода и зоной обрушения прямолинейными отрезками, совпадающими с боковыми сторонами равнобедренного треугольника, основание которого совпадает со щелевым отверстием бункера, а высота совпадает с высотой параболы h_c (рис. 3,а). Уравнение этой границы можно записать в виде

$$y = h_c \left(1 - \frac{2|x|}{a} \right), \quad (23)$$

где $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$.

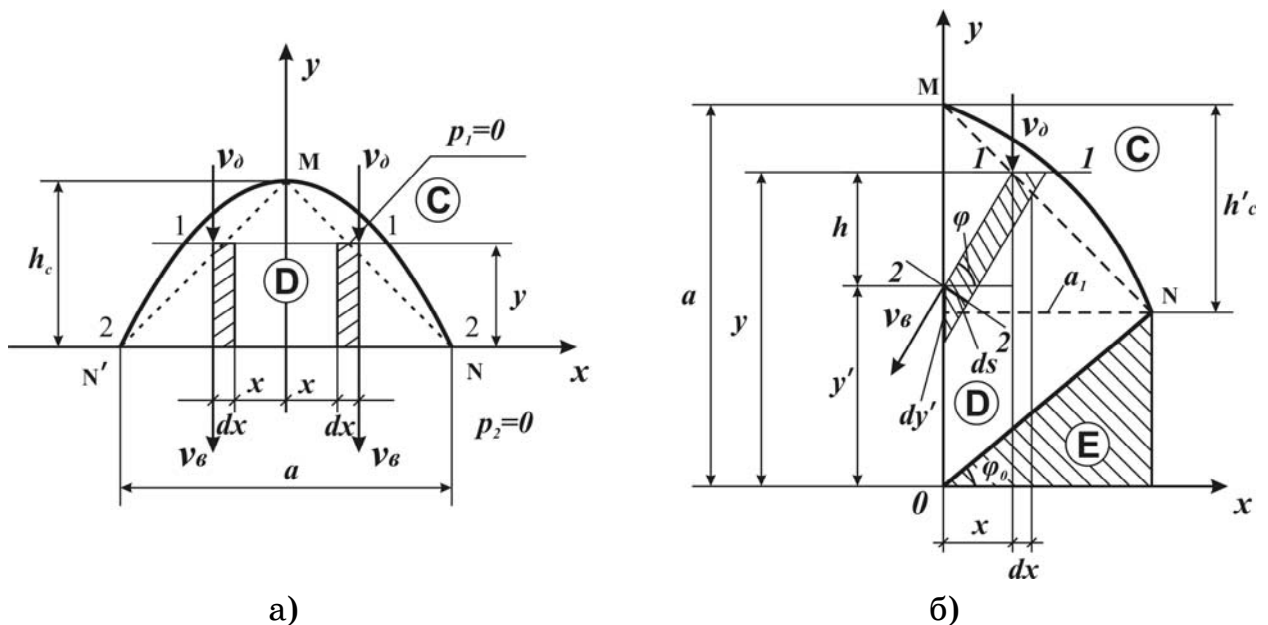


Рисунок 3 – Расчетные схемы определения скорости истечения сыпучего груза в зоне D: а) прямое выпускное щелевое отверстие; б) боковое выпускное щелевое отверстие

Применив уравнение Бернулли для сыпучих грузов к сечениям 1-1 и 2-2 рассмотренного треугольника (см. рис. 3,а), получим

$$y_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g}, \quad (24)$$

где y_1, y_2 – уровни сечений 1-1 и 2-2 относительно оси ox ; p_1, p_2 – нормальные напряжения сыпучего груза в точках пересечения сечения 1-1 с боковыми сторонами треугольника и соответствующих точках сечения на выходе из бункера; v_1, v_2 – скорости частиц

сыпучего груза в тех же точках сечений 1-1 и 2-2; ζ – коэффициент местных потерь Дарси-Вейсбаха при движении сыпучего груза в зоне обрушения, характеризующий потери механической энергии потока сыпучего груза при столкновении частиц между собой [14,15].

Подставим в (24) соответствующие значения $y_1=y$; $y_2=0$; $p_1=0$; $p_2=0$; $v_1=v_\partial$; $v_2=v_\epsilon$. После преобразований получим значение скорости частиц сыпучего груза на выходе из бункера

$$v_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2gy + v_\partial^2}. \quad (25)$$

Последнее равенство с учетом (20) примет вид

$$v_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g \left(y + \frac{\sigma_2}{\gamma} \right)}. \quad (26)$$

Объемный расход через щелевое отверстие определим по формуле

$$Q = \int_{-a/2}^{a/2} v_\epsilon b dx. \quad (27)$$

Подставив в последнее выражение (25), получим

$$Q = \frac{b}{\sqrt{1+\zeta}} \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{2g \left(y + \frac{\sigma_2}{\gamma} \right)} dx. \quad (28)$$

Подставив (10) и (23) в (28), после интегрирования получим

$$Q = \frac{2}{3} b a^{1.5} \sqrt{g} \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \frac{K_1^{1.5}}{(K_1 - \chi')} \left[1 - \left(\frac{\chi'}{K_1} \right)^{1.5} \right], \quad (29)$$

где $K_1 = \frac{1}{2} \left(f + \sqrt{1+f^2} \right)$, $\chi' = f + \frac{1}{f} - \sqrt{1+f^2}$.

Определим коэффициент местных потерь ζ при движении сыпучего материала в зоне обрушения.

Согласно работе [15], коэффициент ζ при движении сыпучего груза по прямолинейному каналу определяется по формуле

$$\zeta = K_2 \frac{k^2 d^2 l}{h^3}, \quad (30)$$

где K_2 – некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от условий истечения сыпучего груза из бункера (прямое или боковое

истечение сыпучего груза из бункера) и определяемый из эксперимента; l – длина канала, h – высота канала.

Подставив в выражение (30) $l=h_c$ и $h=a$, получим

$$\zeta = K_2 k^2 d^2 \frac{h_c}{a^3}. \quad (31)$$

Согласно (22), максимальную высоту границы динамического свода h_c можно записать в виде

$$h_c = K_1 \frac{a}{2}. \quad (32)$$

Подставив (32) в (31), получим

$$\zeta = K_1 K_2 \frac{k^2 d^2}{a^2}, \quad (33)$$

Коэффициент расхода при истечении сыпучего груза из бункера согласно [1] определяется по формуле

$$\eta = \frac{Q}{ba^{1,5}\sqrt{g}}. \quad (34)$$

Подставляя (29) в (34) с учетом (33), после преобразований получим

$$\eta = \frac{\delta \eta_0}{\sqrt{\delta^2 + k^2 K_1 K_2}}, \quad (35)$$

$$\text{где } \eta_0 = \frac{2}{3} \frac{K_1^{1,5}}{(K_1 - \chi')} \left[1 - \left(\frac{\chi'}{K_1} \right)^{1,5} \right]; \quad \delta = \frac{a}{d}.$$

В этом случае, согласно экспериментальным данным, $K_2 = 1$.

Из формулы (35) следует, что если $\delta \rightarrow \infty$, то $\eta \rightarrow \eta_0$.

Расчеты показали, что при $f = 0,58 \text{ч} 0,7$ ($\varphi = 30^\circ \text{ч} 35^\circ$) $\eta_0 \approx 1$. Это означает, что для мелких сыпучих грузов ($\delta > 100$) коэффициент расхода η мало зависит от коэффициента внутреннего трения, ширины щели и диаметра частиц.

Для сравнения определим коэффициент расхода η на основе теории Зенкова [4].

Подставив (19) в (27), имеем

$$Q = ba^{1,5}\sqrt{g\chi}. \quad (36)$$

Затем, подставив (36) в (34), получим

$$\eta = \sqrt{\chi}. \quad (37)$$

Расчеты показали, что при $f=0,7$ и $0,58$ ($\varphi=35^\circ$ и 30°) $\eta=1,27$ и $1,31$.

Из формулы (35) следует, что коэффициент расхода при истечении сыпучего груза из бункера зависит от его коэффициента внутреннего трения f и отношения ширины щели бункера к диаметру частиц. В то же время, по теории Зенкова (см. (37)) этот коэффициент зависит только от коэффициента f внутреннего трения и не зависит от ширины выпускного отверстия a бункера и диаметра частиц сыпучего груза d .

Рассмотрим истечение сыпучего груза из бункера с круглым горизонтальным отверстием.

В этом случае зоны структурно-механические состояния груза в бункере совпадают с такими же зонами в бункере с горизонтальным щелевым выпускным отверстием (см. рис. 1,а).

При этом касательные и нормальные напряжения в зоне В определяются по формулам:

$$\tau_n = \gamma \frac{r}{2}, \quad \sigma_n = \tau_n (1 + 2f^2) = \frac{\gamma}{f} \frac{r}{2} (1 + 2f^2), \quad (38)$$

а главные нормальные напряжения определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tau_n \left(\frac{1}{f} + f + \sqrt{1 + f^2} \right) = \gamma \frac{r}{2} \left(\frac{1}{f} + f + \sqrt{1 + f^2} \right), \\ \sigma_2 &= \tau_n \left(\frac{1}{f} + f - \sqrt{1 + f^2} \right) = \gamma \frac{r}{2} \left(\frac{1}{f} + f - \sqrt{1 + f^2} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

где r – радиальная координата, цилиндрической системы координат, в которой ось ou совпадает с осью бункера, а ось or совпадает с радиусом бункера.

Кроме того, для бункера с круглым выпускным отверстием имеет место формула Зенкова (17), а границей между зоной динамического свода В и зоной обрушения Д является параболоид вращения с высотой, определяемой по формуле (22), в которой a является диаметром выпускного отверстия.

Проведя выкладки, такие, как и для бункера со щелевым выпускным отверстием, был получен коэффициент расхода сыпучего груза из бункера с круглым выпускным отверстием, определяемый по формуле (35), в которой η_0 определяется из равенства

$$\eta_0 = \frac{\pi}{6} K_1^{0,5} \left[\left(1 + \frac{\chi''}{K_1} \right)^{1,5} - \left(\frac{\chi''}{K_1} \right)^{1,5} \right], \quad (40)$$

где $\delta = \frac{a}{d}$; $\chi'' = \frac{1}{4} \left(f + \frac{1}{f} - \sqrt{1 + f^2} \right)$.

В этом случае, согласно экспериментальным данным, $K_2 = 3$.

Из уравнений (35) и (40) следует, что если $\delta \rightarrow \infty$, то $\eta \rightarrow \eta_0$. Расчеты показали, что при $f = 0,58 \div 0,7$ ($\varphi = 30 \div 35^\circ$) $\eta_0 = 0,64 \div 0,66$.

Рассмотрим истечение сыпучего груза из прямоугольного бункера с боковым щелевым выпускным отверстием шириной a и длиной b ($b > a$) (рис. 1,б).

На основе визуальных исследований процесса истечения сыпучего груза из бункера с боковым щелевым отверстием, так же, как и для бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием, можно выделить такие же 5 зон: А, В, С, D, Е, отличающихся друг от друга структурно-механическим состоянием (см. рис. 1,б).

Сыпучий груз в зонах А, В, С, Е движется так же, как и в бункере с горизонтальным щелевым выпускным отверстием. Поэтому все уравнения, описывающие состояние груза в этих зонах для бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием, совпадают и для бункера с боковым щелевым выпускным отверстием.

В зоне обрушения (перемешивания) D, в отличие от истечения сыпучего груза из бункера с горизонтальным щелевым отверстием, траектории движения частиц совпадают с прямыми наклонными линиями, составляющими угол наклона к горизонту φ . При этом угол φ изменяется с изменением координаты y в пределах $\varphi_0 < \varphi < 90^\circ$. Угол φ_0 равен углу наклона границы, разделяющей область подвижного и область неподвижного состояния Е сыпучего груза в бункере (см. рис. 1,б).

Кроме того, в этом случае нормальные напряжения p сыпучего груза в бункере изменяются по высоте бункера так же, как и в случае истечения сыпучего груза из бункера с прямым щелевым выпускным отверстием (см. рис. 1,б).

Так же, как и для бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием, применим уравнение Бернулли для сыпучих грузов [14] к сечениям 1-1 и 2-2 элементарной трубки (заштрихованы на рис. 3,б), вдоль которой движутся частицы сыпучего груза в зоне D. В результате согласно (24) и (20), получим

$$v_e = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g \left(h + \frac{\sigma_2}{\gamma} \right)}. \quad (41)$$

Так же, как и в случае истечения сыпучего груза из бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием, граница между зоной динамического свода **С** и зоной обрушения **Д** совпадает с параболой MN уравнение которой имеет вид (см. рис. 3,б)

$$y = h'_c \left[1 - \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 \right] + a_1 \operatorname{tg} \varphi_0, \quad (42)$$

где $a_1 = \frac{a}{K_1 + \operatorname{tg} \varphi_0}$; $h'_c = \frac{aK_1}{K_1 + \operatorname{tg} \varphi_0}$; $K_1 = \frac{1}{2} \left(f + \sqrt{1+f^2} \right)$.

Заменив параболу MN приближенно на прямую (см. рис. 3,б), получим

$$y \approx h'_c \left(1 - \frac{x}{a_1} \right) + a_1 \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (43)$$

Объемный расход сыпучего груза через боковое щелевое выпускное отверстие бункера определим по формуле

$$Q = \int v_e ds, \quad (44)$$

где ds – площадь нормального сечения элементарной трубки (см. рис. 3,б).

Из рис. 3,б имеем

$$ds = \cos \varphi dy'.$$

Подставив последнее равенство в (44), получим

$$Q = \int_0^a v_e \cos \varphi dy'. \quad (45)$$

Из рис. 3,б имеем

$$h = x \operatorname{tg} \varphi; \quad y' = y - x \operatorname{tg} \varphi. \quad (46)$$

Положим в (45) и (46) $\varphi = \varphi_c = \operatorname{const}$, где φ_c – некоторое среднее значение φ .

Подставив (41) в (45), с учетом (43) и (46), после интегрирования получим

$$Q = \frac{2}{3} b a^{1,5} \sqrt{2g} \frac{\cos \varphi_c}{\sqrt{1+\zeta}} (K_1 + \operatorname{tg} \varphi_c) \sqrt{\chi' + \operatorname{tg} \varphi_c} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{1 + K_1 \operatorname{tg} \varphi_0} \right)^{3/2}, \quad (47)$$

где $\chi' = f + \frac{1}{f} - \sqrt{1 + f^2}$.

Коэффициент местных потерь ζ при движении сыпучего груза в зоне обрушения [1] определяется также по формуле (33).

Для определения коэффициента расхода подставим (47) в (34), с учетом (33) после преобразования приходим к формуле (35), в которой η_0 определяется из выражения

$$\eta_0 = \frac{2}{3} \cos \varphi_c (K_1 + \operatorname{tg} \varphi_c) \sqrt{2(\chi' + \operatorname{tg} \varphi_c)} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{1 + K_1 \operatorname{tg} \varphi_0} \right)^{3/2}, \quad (48)$$

где $\delta = \frac{a}{d}$.

В этом случае, согласно экспериментальным данным, $K_2 = 0,5$.

Из формул (35) и (48) следует, что при $\delta \rightarrow \infty$ $\eta \rightarrow \eta_0$.

Расчеты показали, что при $f = 0,58$ и $0,7$ $\eta_0 = 0,3$ и $0,38$.

Из формул (35) и (48) следует, что коэффициент расхода сыпучего груза из бункера с боковым щелевым выпускным отверстием зависит от δ , т.е. от отношения ширины отверстия a и диаметра частицы сыпучего груза d , его коэффициента внутреннего трения f и углов φ_c , φ_0 . Как показали экспериментальные исследования, углы φ_c и φ_0 не зависят от угла внутреннего трения и в зависимости от диаметра частиц изменяются в пределах $\varphi_c = 67$ и 72° , $\varphi_0 = 35$ и 45° . При этом с увеличением диаметра частиц d углы φ_c и φ_0 увеличиваются.

На рис. 4 показаны графики зависимости коэффициента расхода η сыпучего груза из бункера с горизонтальным щелевым, круглым и боковым щелевым выпускными отверстиями от безразмерной величины δ (кривые 2, 3, 4 соответственно).

Кривая 1 на рис. 4 построена согласно формуле (37) и соответствует теории Зенкова; кривая 2 соответствует формуле (35); кривая 3 соответствует формулам (35) и (40); кривая 4 соответствует формулам (35) и (48). При этом параметры бункера и груза принимали значения $b = 0,09$ м; $f = 0,64$ ($\varphi = 32,6^\circ$); $k = 12$; $5 \leq a \leq 50$ мм и $0,35 \leq d \leq 7$ мм, $\varphi_c = 72^\circ$, $\varphi_0 = 45^\circ$.

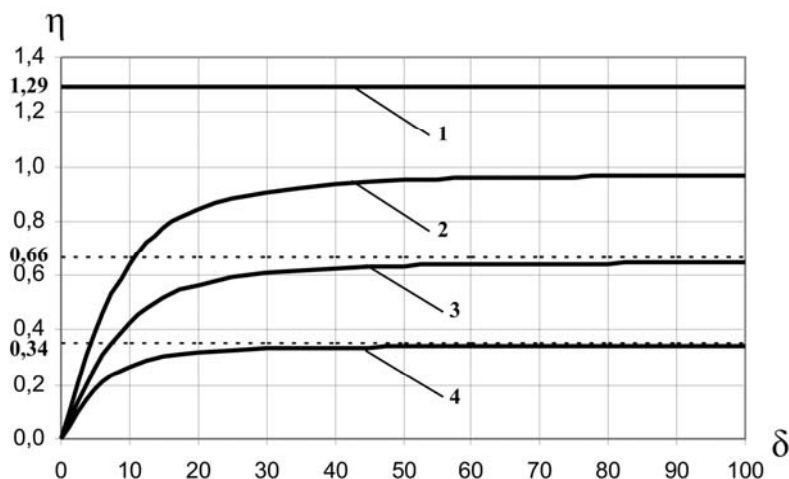


Рисунок 4 – Графики зависимости коэффициента расхода при истечении сыпучего груза из бункера

Из рисунка 4 видно, что для небольших δ ($0 < \delta < 100$) коэффициенты расхода (кривые 2,3,4) с увеличением δ увеличиваются. При больших δ ($\delta > 100$) коэффициенты расхода практически не изменяются, принимая постоянные значения $\eta \approx 1$ (кривая 2), $\eta \approx 0,66$ (кривая 3) и $\eta \approx 0,34$ (кривая 4). В то же время прямая 1 принимает постоянное значение $\eta = 1,29$ при любых δ .

Следовательно, коэффициент расхода при истечении сыпучего груза из бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием по теории Зенкова на 30% больше коэффициента расхода, рассчитанного по нашей теории (см. кривые 1 и 2 на рис. 4).

Кроме того, коэффициент расхода при истечении сыпучего груза из бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием больше на 34%, чем коэффициент расхода из бункера с круглым щелевым выпускным отверстием и практически в три раза больше коэффициента расхода из бункера с боковым щелевым выпускным отверстием.

Следовательно, согласно формулам (35), (40) и (48), расход сыпучего груза из бункера зависит от диаметра отверстия и размера частиц сыпучего груза и для наиболее распространенных грузов практически не зависит от коэффициента внутреннего трения. При этом для сыпучих грузов, для которых $\delta \geq 100$ (т.е. в случае, когда размер частиц значительно меньше размеров выпускного отверстия) объемный расход Q и средняя скорость на выходе из бункера $v_{ср}$, согласно (34), определяются по формулам

$$Q = \eta_0 b a^{1,5} \sqrt{g}, \quad (49)$$

$$v_{cp} = \eta_0 \sqrt{ga}. \quad (50)$$

При этом для бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием $\eta_0 \approx 1$, для бункера с круглым выпускным отверстием $\eta_0 \approx 0,66$, а для бункера с боковым щелевым выпускным отверстием в зависимости от d принимает значения $\eta_0 \approx 0,3 \div 0,38$.

Полученные результаты достаточно хорошо совпадают с экспериментом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кенеман Ф.Е. О свободном истечении сыпучих тел // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. - 1960. - №2. - С. 70-77.
2. Квапил Р. Движение сыпучих материалов в бункерах. - М.: Госгортехиздат, 1961. - 80 с.
3. Лукьянов П.И. Аппараты с движущимся зернистым слоем. Теория и расчет. - М.: Машиностроение, 1974. - 184 с.
4. Зенков Р.Л. Механика насыпных грузов. - М.: Машиностроение, 1964. - 251 с.
5. Платонов Н.П. Некоторые вопросы механики потока сыпучих сред // Инженерно-физический журнал. - 1967. - Т. 12. - №6. - С. 806-812.
6. Кочанова И.И. О видах движения при гравитационном истечении сыпучих материалов // Инженерно-физический журнал. - 1971. - Т. 10. - №5. - С. 815-821.
7. Сэвидж С.Г. Гравитационное течение несвязных гранулированных материалов в лотках и каналах // Сб. Механика гранулированных сред. Под. ред. А.Ю. Ишлинского - М.: Мир, 1985. - Вып. 36. - С. 86-146.
8. Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. - М.: Наука, 1989. - 240 с.
9. Кайзер Джон. Статистическая термодинамика неравновесных систем. - М.: Мир, 1990. - 608 с.
10. Овчинников П.Ф. Виброреология. - Киев: Наук. думка, 1983. - 272 с.
11. Кирия Р.В. Кинетический подход к выводу уравнений движения сыпучих сред // Вісник Дніпропетровського Державного Університету: Механика: - Днепропетровск: ДГУ. - 1999. - Вып. 2. - С. 143-150.
12. Механика гранулированных сред // Теория быстрых движений: Сб. №36. Под. ред. А.Ю. Ишлинского. - М.: Мир, 1985. - 279 с.
13. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. - М.: Мир, 1969. - Т.2. - 864 с.
14. Штернлихт Д.В. Гидравлика. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 639 с.
15. Кирия Р.В. О коэффициенте внутренних потерь при движении сыпучей среды по элементам перегрузочных узлов ленточных конвейеров // Сб. науч. тр. "Геотехническая механика". - Днепропетровск: ИГТМ НАНУ. - 2003. - Вып. № 41. - С. 159-167.

Получено 05.01.2009г.

УДК 622.28.044:622.831

Г.І. Ларіонов

**ВИБІР КРОКУ ГВИНТОВОЇ НАВИВКИ АНКЕРНИХ ШТАНГ ДЛЯ
МЕТАЛОПОЛІМЕРНИХ АНКЕРІВ**

Актуальність. Долаючи енергетичну залежність України виникає потреба у розширенні джерел і пошуку нових технологій для забезпечення потреб промисловості і населення як теплом так газом. Поряд з пошуком нових родовищ і відновлення старих, особлива увага приділяється збільшенню видобутку власного вугілля. Донецький вугільний басейн містить великі запаси якісного вугілля, але його потрібно видобувати на великих глибинах.

Видобуток вугілля при застосуванні рамного кріплення гірських виробок на великих глибинах, як свідчить практика, став економічно недоцільним і таким, що не забезпечує необхідний рівень безпеки. Сучасний вид кріплення гірських виробок - анкерне кріплення в змозі ефективно вирішити перелічені проблеми і забезпечити значно більші темпи видобутку[1]. Але ефективність його протидії гірському тиску у великій мірі залежить від забезпечення, як технології його спорудження, так і якості його комплектуючих: міцності фіксуючої суміші, параметрів міцності анкерних штанг, наявності періодичних виступів на їх поверхнях, жорсткості підхоплень, характеристик шайб тощо. Нормативними документами, що діють на Україні, регламентовано, як правила виконання робіт по спорудженню анкерного кріплення в гірських виробках вугільних шахт, так і вимоги до його комплектуючих. Згідно з вимогами до анкерних штанг регламентовано крок гвинтової навивки та геометрія її поперечного перетину. Так згідно[1], крок гвинтової навивки для анкерної штанги номінального діаметру 25мм складає 16,5мм. Напрямо гвинтової навивки обрано виходячи з умов досилання фіксуючої суміші у донну частину шпура, за умов обертання бурової штанги проти годинникової стрілки.

У будівництві, як ніде більше, використовують властивість арматури з періодичними виступами на поверхні арматури зафіксованої у бетоні протидіяти переміщенням будь-якої природи.

© Ларіонов Г.І., 2009

Міцність зчеплення арматурних стрижнів з бетоном дозволяє створювати широкий спектр будівельних споруд різного призначення і архітектури.

Величезна кількість дослідів проведених у будівельній галузі над з'ясуванням, як параметрів міцності зразків бетону, так і механізмів їх руйнування довела схожість їх з гірськими породами[2].

Міцність зчеплення арматурних стрижнів з бетоном залежить, як від зчеплення виступів на поверхні арматури періодичного профілю, так і від сил тертя, що виникають на контактній поверхні арматури. Як встановлено [3-4], найбільший вплив на міцність зчеплення здійснює перший фактор, він забезпечує 3/4 загального опору зчеплення ковзання арматури в бетоні.

Схожість процесів, що виникають при висмикуванні арматурного стрижня з бетону [4] і анкеру з гірської породи дає підстави для їх порівняння і дослідження, як якісних, так і кількісних результатів. Окрім того, актуальності набирає проблема вибору такої розрахункової моделі, яка б дозволила визначити крок гвинтової навивки для анкерних штанг метало полімерних анкерів.

Оскільки над вирішенням сформульованої вище задачі працювали і постійно працюють у будівельній галузі, то необхідно віддати їм належне і розглянути уважно моделі та методики вибору параметрів періодичних виступів на поверхні будівельної арматури. Для аналізу і обґрунтування вибору моделі, розглянемо більш детально модель, яку використовують для розрахунку напружено – деформованого стану залізобетонних конструкцій.

Задача вибору висоти та кроку профілю набула актуальності з переходом до використання арматури періодичного профілю . Для з'ясування механізму зчеплення арматури періодичного профілю проводилась тривала дослідницька робота. Стосовно стрижневої арматури було встановлено, що попри велике різноманіття періодичних профілів, вирішальне значення має питома площа зсуву [4].

$$\alpha_{sb} = \frac{n_r A_r \sin \beta_r}{\pi d_s s_r}$$

де: s_r - крок періодичних виступів; d_s - номінальний діаметр арматури; n_r - кількість виступів по периметру; A_r - площа проекції

одного виступу на його серединну поверхню; β_r - кут нахилу періодичних виступів до осі стрижня.

Досліди довели, що у достатньо широких межах податливість зчеплення однозначно визначається значенням α_{sb} . При цьому є не суттєвим і нахил виступів до осі арматури і форма виступів. Опосередкованим шляхом встановлено, що адгезійний опір і тертя гладкої поверхні мають другорядне значення. Головне і вирішальне значення має зачеплення виступів арматури.

Геометричне зображення схеми навантаження моделі, яка є найпоширенішою при розрахунках та дослідженні необхідної кількості та параметрів будівельної арматури, представлено на рис. 1.

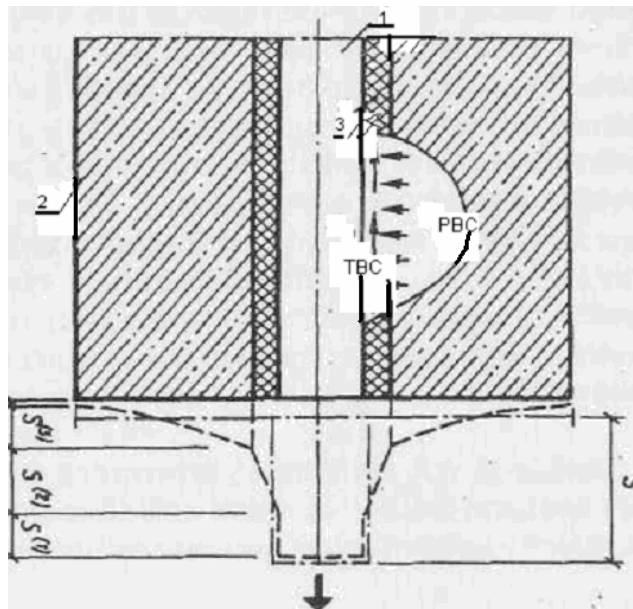


Рисунок 1 – Основна схема для розрахунку напружено-деформованого стану у околі зафіксованої у бетоні будівельної арматури

Складові цієї моделі такі: умовно гладка арматура періодичного профілю діаметру рівному її номінальному діаметру (1), оболонка з бетону (2), контактний шар (3), у якому знаходяться зони тріщиноутворення, пластичних деформацій та локальних руйнувань. На рис.1 взаємні зміщення арматурного стрижня відносно оболонки з бетону позначено літерою S . Зв'язок між умовними та дійсними зміщеннями зображено на рис. 1. Дійсні зміщення позначено пунктиром. Вони складаються зі зміщень на гладких ділянках арматури $s^{(1)}$, зміщень від деформацій контактного шару $s^{(2)}$ та зміщень від депланації оболонки із бетону $s^{(3)}$. Умовні взаємні

зміщення розглядаються як головна характеристика деформації контакту.

Деформації оболонки вважаються пружними, і відповідають гіпотезі плоских поперечних перетинів. Це припущення є надто грубе, якщо не враховувати контактний шар, але забезпечує задовільну точність розрахунків.

Таке уявлення базується на тому, що контактні тріщини утворюються у межах шару невеликої товщини близької до s_r . Окремі тріщини, які мають великий розвиток - або наскрізні повинні враховуватися за використання технічної теорії зчеплення (ТТЗ) спеціально.

Основні положення технічної теорії зчеплення можуть бути представлені наступним чином: розглядаються призматичні елементи, центрально армовані одним стрижнем; приймається модель "оболонка із бетону - контактний шар - арматура"; деформації поза зоною контакту і арматури вважаються пружними; пропонується наявність єдиного зв'язку між τ_{bc} і s . За звичай, у розрахунковій практиці стосовно бетону і арматури рахують, що зчеплення – це опір бетону повздовжнім переміщенням арматури.

Незважаючи на вищенаведені припущення, приймаючи розрахункову модель, арматурний стрижень вважають умовно гладким. А це означає, що будь-які переміщення, в тому числі і взаємні зміщення, спричинені осьовим навантаженням гладкого арматурного стрижня, визначаються опосередковано тобто без врахування основного чинника впливу у передачі навантаження - періодичних виступів на його поверхні. Крім того, штучне виділення проміжного між арматурою і оболонкою із бетону шару з особливими властивостями робить методику розрахунку функції зчеплення досить складною.

Зрозуміло, що більш адекватна розрахункова модель повинна враховувати наявність механізму передачі навантаження періодичними виступами на поверхні арматурного стрижня.

Постановка задачі полягає у виборі моделі та дослідженні на її основі впливу кроку гвинтової навивки анкерної штанги на параметри контактних зусиль, дотичних напружень на поверхні анкерного шпура та інтенсивності дотичних напружень у його околі.

Розв'язок задачі про визначення напружено – деформованого

стану у околі анкерного шпура і впливу на нього кроку гвинтової лінії на поверхні анкерної штанги полягає у послідовному рішенні двох задач.

Перша задача полягає у визначенні залежності зусиль, переміщень і дотичних напружень на поверхні шпура від кроку гвинтової навивки. Для цього використаємо розв'язок узагальненої задачі Н.М. Жуковського, який доводить свою ефективність при визначенні силових параметрів для системи гірський масив – оболонка фіксуючої суміші – анкерна штанга[5].

Схема навантаження системи представлені на рис.2, а розрахункова схема на рис.3.

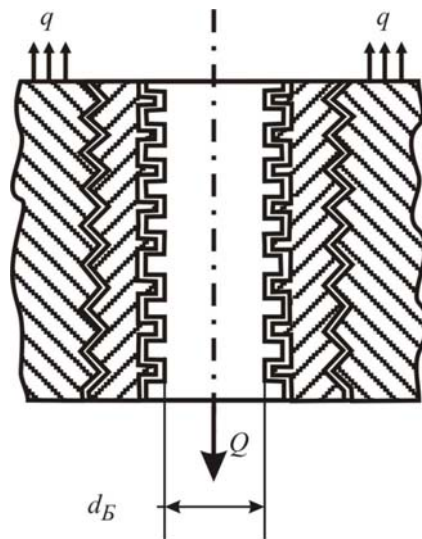


Рисунок 2 - Схема навантаження системи гірський масив – оболонка фіксуючої суміші – анкерна штанга

Основні елементи навантаження видно з наведеного вище рисунка.

Основними параметрами представленими на рис.2 є:

Q – осьове навантаження анкерної штанги; p_i - сили взаємодії, що виникають на контакті анкерна штанга – фіксуюча суміш; t_i - сили взаємодії, що виникають на контакті фіксуюча суміш – гірський масив; S_i - зусилля, що виникають у поперечних перетинах анкерної штанги; σ_i - зусилля, що виникають у поперечних перетинах оболонки із фіксуючої суміші.

Друга задача полягає у визначенні інтенсивності дотичних напружень у околі анкерного шпура від кроку гвинтової навивки. Для вирішення цієї задачі скористаємось підходом, викладеним у [6].

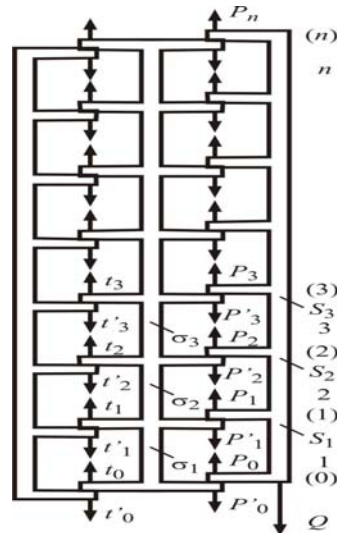


Рисунок 3 - Розрахункова схема узагальненої задачі

М. Є. Жуковського

Умовно схема закріплення зображена на Рис. 4а. В гірській породі 1 виконується свердловина радіусом r_0 , на деякій частині якої анкер 2 кріпиться за допомогою спеціальної фіксуєчої суміші 3. Довжина ділянки, на якій фіксується анкер – $2l$. Анкер навантажують осьовим зусиллям P .

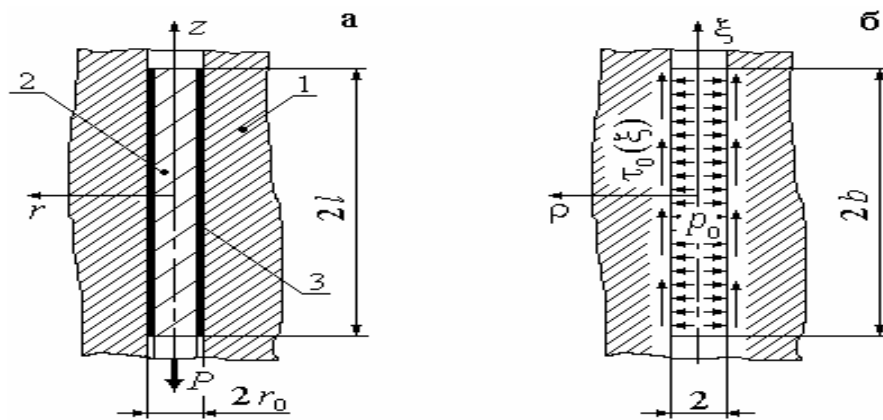


Рисунок 4 - До постановки задачі про навантаження свердловини вантажним анкером

Середовище є однорідним та ізотропним, а закріплення анкера здійснюється у глибині шпура на відстані, що значно перевищує його діаметр. Ці спрощення дають змогу розглядати модель середовища як пружний простір з достатньо довгим циліндричним отвором. З боку анкеру на породу діє нормальне напруження, яке є рівним реакції від дії на анкер гірського тиску.

Розв'язок задачі має вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{2\mu}{r_0} \left[\left((3-2\nu) \beta K_0(\beta\rho) + \left(4(1-\nu) \frac{1}{\rho} + \beta^2 \rho \right) K_1(\beta\rho) \right) C + \right. \\
&\quad \left. + \beta \left(\beta K_0(\beta\rho) + \frac{1}{\rho} K_1(\beta\rho) \right) D \right] \cdot (f \cos \beta\xi + g \sin \beta\xi) ; \\
\sigma_\varphi &= \frac{2\mu}{r_0} \left[\left((1-2\nu) \rho K_0(\beta\rho) + 4(1-\nu) \frac{1}{\rho} K_1(\beta\rho) \right) C + \frac{\beta}{\rho} K_1(\beta\rho) D \right] \cdot \\
&\quad (f \cos \beta\xi + g \sin \beta\xi) ; \\
\sigma_z &= \frac{2\mu}{r_0} \left[\left(\beta^2 \rho K_1(\beta\rho) - 2\nu \beta K_0(\beta\rho) \right) C + \beta^2 K_0(\beta\rho) D \right] \cdot \\
&\quad (f \cos \beta\xi + g \sin \beta\xi) ; \\
\tau_{rz} &= \frac{2\mu}{r_0} \left[\left(\beta \rho K_0(\beta\rho) + 2(1-\nu) K_1(\beta\rho) \right) C + \beta K_1(\beta\rho) D \right] \cdot \\
&\quad \beta (g \cos \beta\xi - f \sin \beta\xi),
\end{aligned}$$

де $K_0(\beta\rho)$, $K_1(\beta\rho)$ – модифіковані функції Ганкеля, а C , D , f , g – довільні сталі; σ_r , σ_φ , σ_z , τ_{rz} – радіальний, окружний, осьовий та дотичний компоненти тензору напружень; ν – коефіцієнт поперечної деформації r, φ, z – циліндричні координати; r_0 – радіус шпура; $\rho = r/r_0$, $\xi = z/r_0$; $P = k \lambda \gamma H$; $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}$; Визначивши компоненти тензору

напружень, знаходимо величину інтенсивності дотичних напружень за формулою:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

Таким чином, методика визначення напружено – деформованого стану у околі анкерного шпура та аналізу впливу на нього кроку гвинтової навивки полягає у послідовному вирішенню двох задач. З рішення узагальненої задачі М.Є. Жуковського визначається розподіл дотичних напружень вздовж поверхні анкерного шпура. Використовуючи отримані дотичні напруження у якості граничних умов для просторової задачі пружності у переміщеннях, знаходимо розподіл параметрів тензору напружень, а відповідно і інтенсивності дотичних напружень у околі анкерного шпура.

Для вибору кроку гвинтової навивки було сформульовано задачу умовної оптимізації. У якості функції цілі було обрано інтеграл по

довжині анкерної штанги від суми сил на контактних поверхнях системи „анкерна штанга - фіксуєча суміш – гірська порода”.

$$f = \int_a^b (p + t) d\xi,$$

У якості обмежень задачі виступали двосторонні обмеження на параметр оптимізації. Результатом пошуків екстремуму ставала точка, що лежить на нижній межі накладених обмежень на змінну. Цей факт може вказувати лише на тенденцію у виборі кроку гвинтової навивки. Його вибір може бути обмеженим конструктивними або технологічними параметрами за його виготовлення, або умовою здійснення попереднього навантаження за умов використання періодичних виступів у якості силової різьби. Для здійснення вибору і дослідження впливу кроку гвинтової навивки, вирішено побудувати їх графічні залежності за умов зменшення та збільшення кроку гвинтової навивки з фіксованим кроком зміни. Вплив гравітаційних сил на напружено – деформований стан у околі анкерного шпура моделювався введенням тиску на стінки шпура, який є реакцією анкерної штанги на дію гірського тиску.

Результати розв’язку поставленої задачі отримано за наступних даних:

$$L_a = 2,25 \text{ м}; \quad Q = 5 \cdot 10^4 \text{ Н}; \quad d_a = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad d_{vt} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \\ h_a = 1,65 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad h_r = 0,65 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad E_a = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; \quad E_{vt} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \\ E_k = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2.$$

Слід зазначити, що зміна кроку періодичних виступів у вигляді гвинтової лінії h_a відбувалась з кроком $\pm 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ від початкового значення. Причому, для зручності у порівнянні характеристик, зліва, на наведених нижче рисунках, позначених літерою а), наведені характеристики за умов збільшення кроку гвинтової лінії h_a , а позначених літерою б) - зменшення кроку гвинтової лінії h_a . Причому, цифрою 1 позначено графіки за початкового значення кроку гвинтової лінії h_a , а цифрою 6 – графіки для максимального його значення (див. рис а)), або для мінімального (див. рис б)).

На рис. 11. наведено графіки розподілу інтенсивності дотичних напружень вздовж анкера, на глибині занурення у масив гірських порід рівному $10 r_{vt}$. Одиницею вимірювання довжини, у цьому випадку, обрано для зручності відносні одиниці (у долях радіусу

шпура r_{vt}). Для порівняння впливу зміни гвинтової лінії періодичних виступів наведено графіки для мінімального, початкового та максимального значення з діапазону змін кроку гвинтової лінії h_a . За прийнятою процедурою зміни кроку гвинтової лінії анкерної штанги крок зміни складав $0,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ і виконувалось по 7 кроків на його збільшення і зменшення. Таким чином, збільшення кроку h_a відбувалось від $1,75 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ до $2,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, а зменшення кроку h_a від $1,55 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ до $0,85 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. У подальшому діапазони збільшення і зменшення кроку гвинтової лінії будемо розуміти такими, що відбуваються у наведених вище межах.

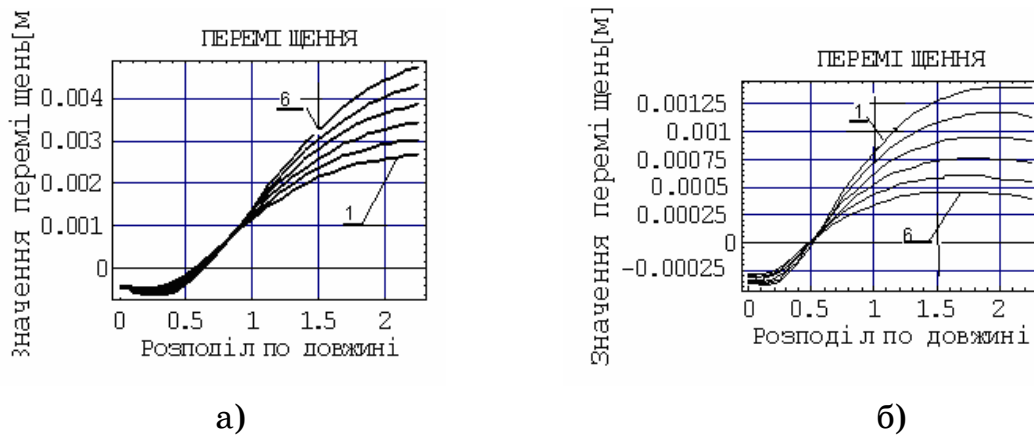


Рисунок 5- Графік переміщень при а)збільшенні h_a
б)при зменшенні h_a

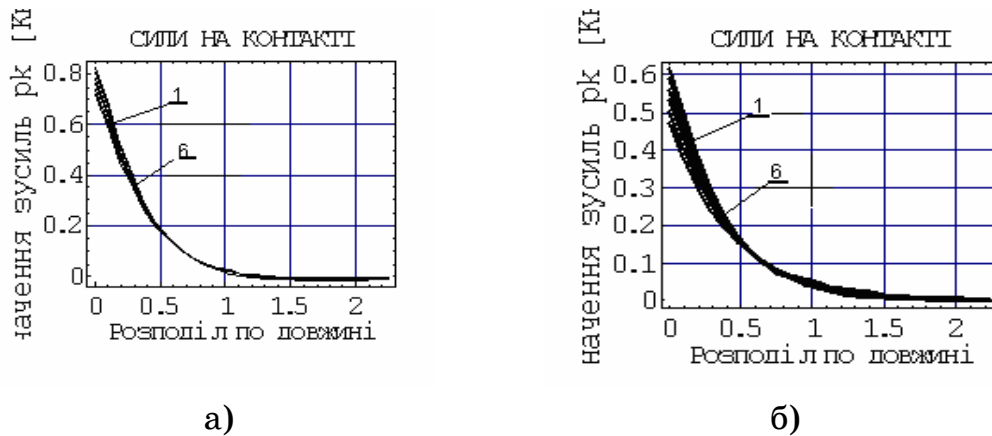
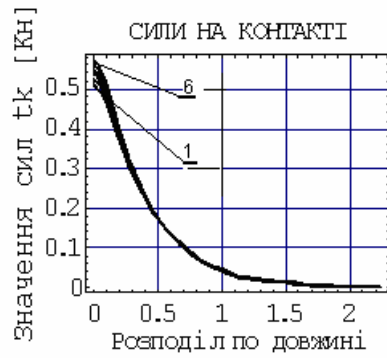
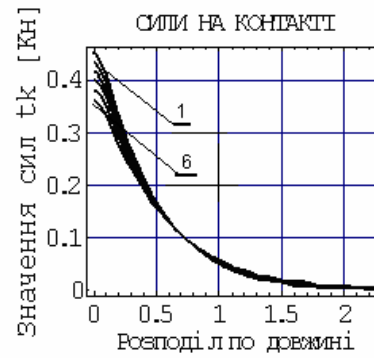


Рисунок 6- Графік сил на контакті анкерна штанга – фіксуюча суміш
при а)збільшенні h_a б)при зменшенні h_a

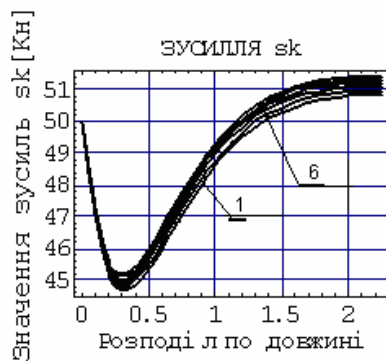


а)

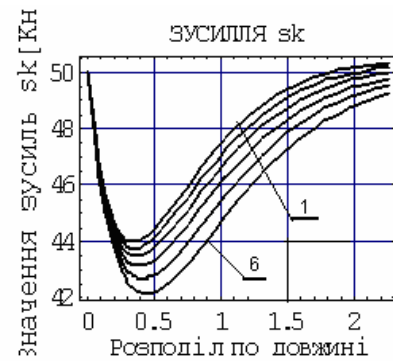


б)

Рисунок 7- Графік сил на контакті анкерна фіксуюча суміш – порода при а)збільшенні h_a б)при зменшенні h_a

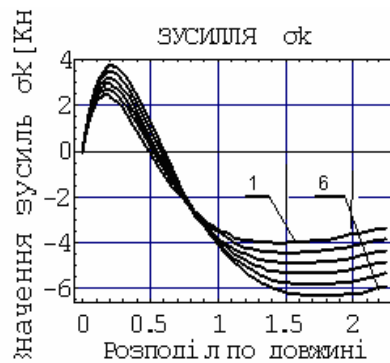


а)

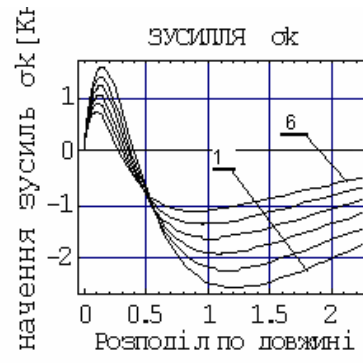


б)

Рисунок 8- Графік зусиль у анкері при а)збільшенні h_a б)при зменшенні h_a



а)



б)

Рисунок 9- Графік зусиль у оболонці із фіксуючої суміші при а)збільшенні h_a б)при зменшенні h_a

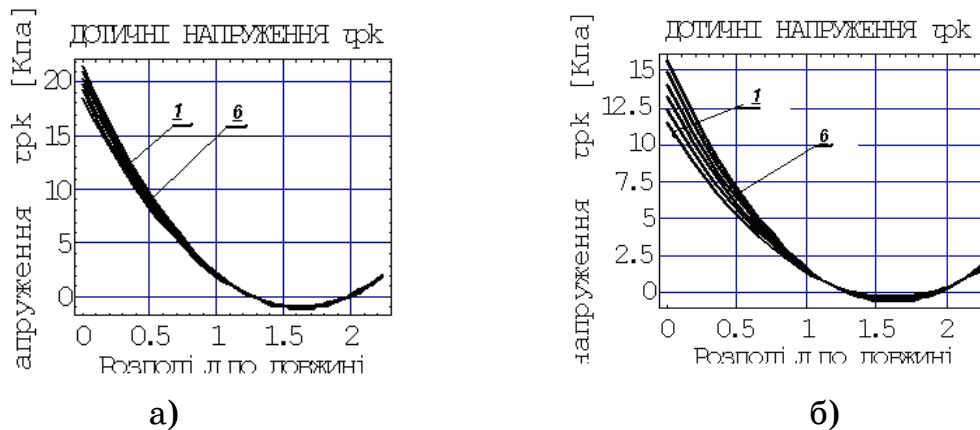


Рисунок 10- Графік дотичних напружень на поверхні анкерної штанги при а)збільшенні h_a б)при зменшенні h_a

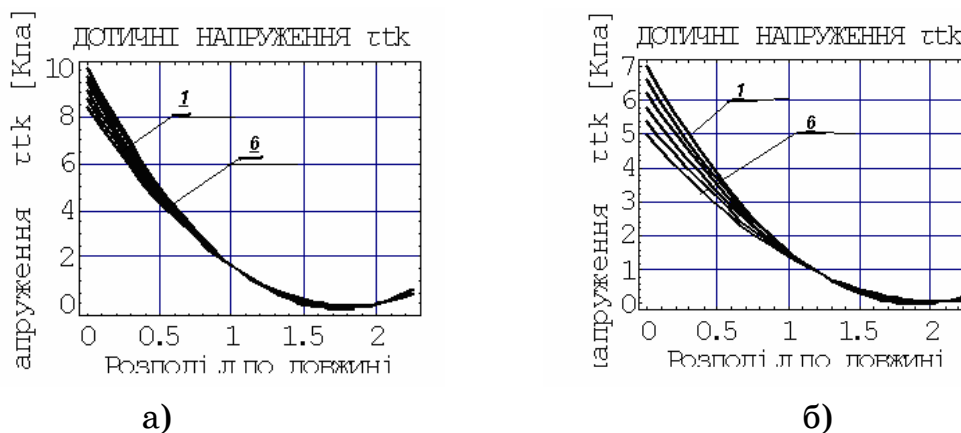


Рисунок 11- Графік дотичних напружень на поверхні гірської породи при а)збільшенні h_a б)при зменшенні h_a

Для порівняння впливу зміни кроку гвинтової лінії періодичних виступів на інтенсивність дотичних напружень у околі анкерного шпура наведено графіки для послідовності значень кроку гвинтової лінії (див. рис. 12). Графіки отримано для осевого навантаження $Q=1 \cdot 10^4$ н та $\kappa \lambda = 0.01$.

Аналіз залежностей параметрів на контактних поверхнях від кроку гвинтової лінії, зображених на рис. 5 – 12 дає підґрунтя для наступних висновків:

зі збільшенням кроку h_a

1. переміщення втулки із фіксуючої суміші збільшуються майже у два рази (див. рис. 5а).

2. сили на контактних поверхнях анкерна штанга – фіксуюча суміш збільшуються у незначній степені і у гирла анкерного шпура (див. рис.6а).

3. сили на контактних поверхнях фіксуюча суміш – гірська порода збільшуються, але не більше ніж 12% (див. рис.7а).

4. дотичні напруження на контактній поверхні фіксуюча суміш – гірська порода збільшуються(збільшення не перевищує 2%)(див. рис.11а).

5. зусилля у поперечних перетинах анкерної штанги збільшуються, у при забійній зоні шпура, на 2% (див. рис.8а).

6. зусилля у поперечних перетинах втулки із фіксуючої суміші збільшуються майже на 20% (див. рис.9а).

7. дотичні напруження на контактній поверхні анкерна штанга – фіксуюча суміш зменшуються (зменшення не перевищує 5%)(див. рис.10а).

дотичні напруження на контактній поверхні фіксуюча – порода суміш зменшуються(зменшення не перевищує 5%)(див. рис.11а).

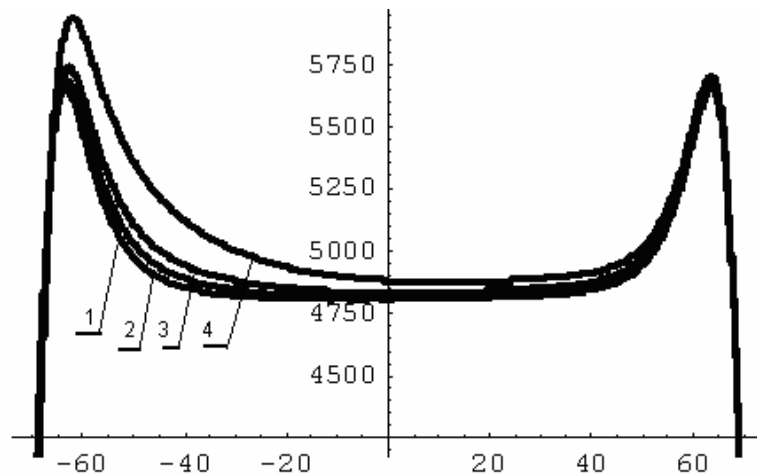


Рисунок 12 –Графік інтенсивності дотичних напружень при 1) $h_a = 10,5\text{мм}$; 2) $h_a = 13,5\text{мм}$; 3) $h_a = 16,5\text{мм}$, 4) $h_a = 22,5\text{мм}$;

Зі зменшенням кроку:

8. переміщення втулки із фіксуючої суміші зменшуються майже у п'ять разів (див. рис. 5б);

9. сили зменшуються за величиною, аж до 40%, але тільки у гирла(див. рис. 6б);

10. сили на контактних поверхнях зменшуються майже на 20% (див. рис.7б);

11. зусилля зменшуються, у при забійній зоні шпура, майже на 10% (див. рис.8б);

12. зусилля зменшуються майже на 40% (див. рис.9б);

13. збільшується на величину до 20% (див. рис.10б);

14. зменшується на величину до 20% (див. рис.116);

15. за менших значень кроку гвинтової лінії інтенсивність дотичних напружень є меншою і більш рівномірною (див. рис.12 крива 1), ніж для більших його значень. Так різниця у величинах інтенсивності дотичних напружень, у гирловій частині шпура, для кроків $h_a = 10,5$ і $22,5 \cdot 10^{-2}$ м, складає майже 10%.

Висновки:

1. крок гвинтової лінії виступів на поверхні анкерної штанги істотно впливає на параметри системи «анкерна штанга – фіксує суміш – гірська порода»;

2. збільшення кроку гвинтової лінії призводить до збільшення переміщень, як анкерної штанги, так і втулки із фіксує суміші, і не призводить до істотних змін у розподілі параметрів системи «анкерна штанга – фіксує суміш – гірська порода»;

3. зменшення кроку гвинтової лінії призводить до істотного (у п'ять разів) зменшення переміщень, як анкерної штанги, так і втулки із фіксує суміші і до перерозподілу дотичних напружень на контактних поверхнях системи - збільшенню їх на контактній поверхні «анкерна штанга - фіксує суміш», і зменшенню на контактній поверхні «фіксує суміш – гірська порода»;

4. для істотного обмеження переміщень, у чому виникає потреба для слабких порід, рекомендовано використовувати анкерні штанги з меншими за величиною кроками гвинтових виступів (для анкерних штанг номінального діаметру 25мм крок гвинтової лінії лежить у діапазоні $h_a = 0,4 - 0,6 d_a$);

5. для забезпечення надійної роботи анкерного кріплення в умовах міцних оточуючих порід для забезпечення меншої жорсткості закріплення анкерів рекомендовано використовувати анкерні штанги з відносно більшими за величиною кроками гвинтових виступів (для анкерних штанг номінального діаметру 25мм крок гвинтової лінії лежить у діапазоні $h_a = 0,6 - 0,8 d_a$);

Діапазони зміни кроку гвинтової лінії на анкерних штангах рекомендовані виходячи із аналізу силових параметрів в системі «анкерна штанга – фіксує суміш – гірська порода» і представлено у [7]. До уваги не брались такі параметри як: наявність шнекового

ефекту, викликаного гвинтовою лінією виступів, густина фіксуючої суміші, висота виступів гвинтової лінії.

ЛІТЕРАТУРА

1. Булат А.Ф., Виноградов В.В. Опорно-анкерне кріплення гірничих виробок вугільних шахт/ Ін-т геотехнічної механіки НАН України. – Дніпропетровськ, 2002. – С. 372.
2. М.М. Холмянский К механизму сопротивления трещиноватых горных пород и бетона однородному сжатию//Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. – 1979. - №5 с.12 – 23.
3. Байков В.Н., Сигалов Э.Е Железобетонные конструкции. Общий курс / М., Стройиздат, 1991. — 767 с.
4. Холмянский М.М. Бетон и железобетон (Деформативность и прочность). –М.:Стройиздат,1997.-576с.
5. Ларионов Г.И. О применении решения обобщенной задачи Н.Е. Жуковского к исследованию качества закрепления металлополимерного анкера. Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць/ Ін-т геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України.- Дніпропетровськ, 2007.-вип.68, с.90-98.
6. Ларіонов Г.І., Павлишин С.М., Головка С.А., Буліч Ю.Ю. Про деформований стан масиву гірських порід у околі навантаженого по осі анкера// Зб. наук. праць НГУ № 22 – Дніпропетровськ: РВК НГУ, 2005. – с.48 – 55.
7. СОУ 10.1.05411357.010:2008 „Система забезпечення надійного та безпечного функціонування гірничих виробок із анкерним кріпленням. Загальні технічні вимоги”.

Одержано 15.01.2009р.

УДК 539.3

П.З. Луговой, Н.Я. Прокопенко

КОЛЕБАНИЯ ПОЛОГИХ РЕБРИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ПЛАНOM

Изучению колебаний ребристых пологих оболочек с прямоугольным планом посвящено достаточно большое число работ [1–3]. В отличие от известных работ здесь основное внимание уделено исследованию влияния упругого основания на собственные частоты колебаний таких оболочек. Исследование проведено на основе теории пологих ребристых оболочек [1], учитывающей дискретное размещение ребер. Упругое основание характеризуется коэффициентами постели Винклера и Пастернака [4,5].

1. Исходные соотношения. Рассматриваются пологие цилиндрические

оболочки с шарнирно опертыми краями, подкрепленные продольными и кольцевыми ребрами. Уравнения движения изотропных пологих ребристых оболочек с прямоугольным планом, полученные в рамках классической теории оболочек [3] с учетом воздействия упругого основания, могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} & \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u_1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] - \rho_0 h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \\ & + F_1 \sum_{j_1=1}^{k_1} \delta(x_2 - x_{2j_1}) \left[E_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - h_1 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \right) - \rho_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - h_1 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial t^2} \right) \right] \Bigg|_{x_2=x_{2j_1}} = 0, \\ & \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u_2 - \frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right] - \rho_0 h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \\ & + F_2 \sum_{j_2=1}^{k_2} \delta(x_1 - x_{1j_2}) \left[E_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - h_2 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^3} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) - \right. \\ & \left. \rho_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - h_2 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2 \partial t^2} \right) \right] \Bigg|_{x_1=x_{1j_2}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[-\frac{\nu}{R} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{R^2} u_3 \right] + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \Delta \Delta u_3 + \rho_0 h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \\
& C_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - C_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + C_1 u_3 + \sum_{j_1=1}^{k_1} \left\{ \delta(x_2 - x_{2j_1}) \left[E_1 (F_1 h_1^2 + I_{x_{21}}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - E_1 F_1 h_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} + -\rho_1 F_1 \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial t^2} - h_1 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial t^2} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. \frac{d\delta(x_2 - x_{2j_1})}{dx_2} G_1 I_{kp1} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right\} \bigg|_{x_2=x_{2j_1}} + \\
& + \sum_{j_2=1}^{k_2} \left\{ \delta(x_1 - x_{1j_2}) \left[-\frac{E_2 F_2}{R} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{u_3}{R} \right) + E_2 (F_2 h_2^2 + I_{x_{12}}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} + \right. \right. \\
& + 2 \frac{E_2 F_2 h_2}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - E_2 F_2 h_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2^3} - \\
& \quad \left. \left. - \rho_2 F_2 \left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial t^2} - h_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^2 \partial t^2} \right) \right] + \frac{d\delta(x_1 - x_{1j_2})}{dx_1} G_2 I_{kp2} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^2 \partial x_1} \right\} \bigg|_{x_1=x_{1j_2}} = 0, (1)
\end{aligned}$$

где x_1, x_2 – декартовы координаты точки на срединной поверхности обшивки, u_1, u_2, u_3 – компоненты вектора перемещений этой точки, t – время, h – толщина обшивки, E, ν, ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала, из которого изготовлена обшивка; $F_1, I_1, I_{z1}, I_{kp1}$ – площадь поперечного сечения стрингеров и соответственно его моменты инерции при изгибе в плоскости, нормальной к срединной поверхности обшивки, при изгибе в плоскости, касательной к срединной поверхности обшивки, и при кручении, h_1 – расстояние от оси стрингера до срединной плоскости обшивки ($h_1 > 0$, если ребро размещено в направлении внешней нормали к обшивке), E_1, G_1, ρ_1 – модуль упругости и модуль сдвига, а также плотность материала, из которого изготовлены стрингеры, k_1 – число стрингеров; $F_2, I_2, I_{z2}, I_{kp2}, h_2, E_2, \rho_2, k_2$ – аналогичные величины для шпангоутов; $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, x_{2j_1}, x_{1j_2} – координаты осей j_1, j_2 ребер соответственно первого и второго направления.

Решение системы уравнений движения (1) разыскивается в виде двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos \omega t \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} \cos \frac{\pi m x_1}{a_1} \sin \frac{\pi n x_2}{a_2}, \\ u_2 &= \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_{mn} \sin \frac{\pi m x_1}{a_1} \cos \frac{\pi n x_2}{a_2}, \\ u_3 &= \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{\pi m x_1}{a_1} \sin \frac{\pi n x_2}{a_2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где ω - круговая частота.

После подстановки (2) в (1) задача определения собственных частот колебаний сводится к нахождению корней редуцированных систем алгебраических уравнений, а определение собственных форм колебаний - к решению указанных систем.

2. Влияние упругого основания на собственные частоты и формы колебаний. Исследование влияния упругого основания на собственные частоты и формы колебаний проведено на примере квадратной в плане полой цилиндрической оболочки, подкрепленной шпангоутом и стрингером по центральным сечениям.

Расчеты производились для полой ребристой оболочки, имеющей следующие геометрические и механические характеристики:

$$\begin{aligned} \nu &= 0,3; \quad \frac{h}{a} = 0,01; \quad \frac{a}{R} = 0,1; \quad \frac{E_1}{E} = \frac{E_2}{E} = 1; \quad \frac{G_1}{E} = \frac{G_2}{E} = \frac{1}{2(1+\nu)}; \quad \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\rho_2}{\rho} = 1; \\ k_1 &= k_2 = 1; \quad \frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{a} = 0,055; \quad \frac{F_1}{ah} = \frac{F_2}{ah} = 0,2; \quad \frac{I_1}{a^3 h} = \frac{I_2}{a^3 h} = 0,1667 \cdot 10^{-3}; \\ \frac{I_{z1}}{a^3 h} &= \frac{I_{z2}}{a^3 h} = 0,6667 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{I_{kp1}}{a^3 h} = \frac{I_{kp2}}{a^3 h} = 0,2328 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

В табл.1 приведены результаты вычисления первых пяти собственных частот в зависимости от значений параметра постели

$$\text{Винклера } \bar{C}_1 \left(\bar{C}_1 = \frac{C_1(1-\nu^2)a^2}{Eh} \right).$$

Значения первых пяти собственных частот в зависимости от изменения параметров постели Пастернака $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ ($\bar{C}_2 = C_2 / Eh$) приведены в табл.2.

Таблица 1

$\bar{C}_1$	$\omega_1^2 \cdot 10$				
0	0,816	0,831	0,903	0,914	1,818
0,002	0,836	0,849	0,923	0,934	1,830
0,004	0,856	0,867	0,943	0,954	1,842
0,006	0,876	0,885	0,963	0,974	1,855
0,008	0,896	0,903	0,983	0,994	1,867
0,010	0,916	0,922	1,003	1,014	1,879
0,012	0,936	0,940	1,023	1,034	1,892
0,014	0,966	0,967	1,053	1,064	1,910
0,016	0,975	0,976	1,063	1,074	1,917

Таблица 2

$\bar{C}_1; \bar{C}_2$	$\omega_1^2 \cdot 10$				
0; 0	0,816	0,831	0,903	0,914	1,818
0,01; 0,0001	0,925	0,927	1,011	1,022	1,886
0,01; 0,0002	0,932	0,933	1,020	1,031	1,893
0,01; 0,0003	0,937	0,941	1,029	1,040	1,900
0,01; 0,0004	0,942	0,950	1,037	1,048	1,908
0,01; 0,0005	0,947	0,958	1,046	1,057	1,915

На рис.1 показаны кривые изменения параметра $\omega_1^2 = \omega^2 a^2 \rho / E$ минимальной частоты колебаний в зависимости от параметров постели Винклера (сплошная кривая) и Пастернака (пунктирная кривая). Как видно из графиков, влияние коэффициентов постели Пастернака сказывается больше на величине минимальных частот колебаний, $\bar{u}_2 \bar{u}_3 \frac{x_1}{a_1} \frac{x_1}{a_1}$ чем коэффициента постели Винклера.

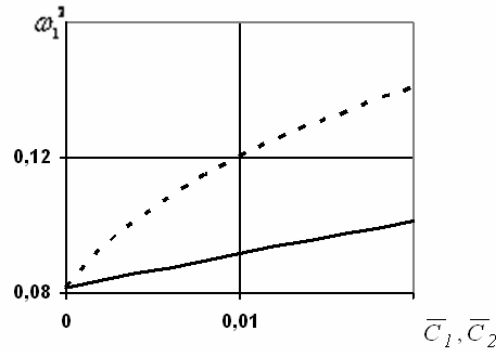


Рисунок 1

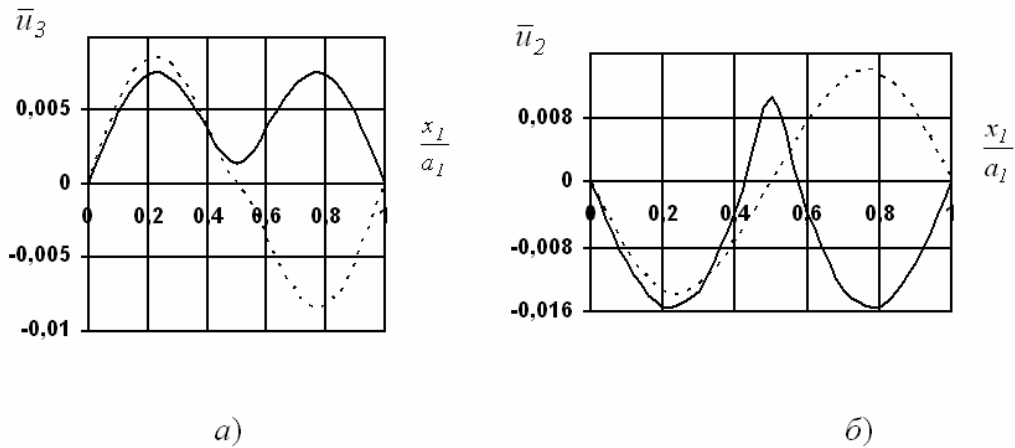


Рисунок 2

На рис.2а,б показаны соответственно формы изменения прогиба $\bar{u}_3$ и перемещения в окружном направлении $\bar{u}_2$ по длине оболочки, полученные для минимальных частот $\omega_1^2 = 0,093$ (сплошная линия) и $\omega_1^2 = 0,092$ (пунктирная линия) соответственно для $\bar{C}_1 = 0,01$; $\bar{C}_2 = 0,0002$ и $\bar{C}_1 = 0,01$; $\bar{C}_2 = 0,0001$. Хотя незначительное изменение коэффициентов постели C_1 и C_2 приводит к несущественному изменению значений минимальной частоты, но при этом происходит изменение формы колебаний. Как видно из рис.2а, пунктирная кривая, соответствующая случаю, когда $\bar{C}_1 = 0,01$; $\bar{C}_2 = 0,0001$, свидетельствует о том, что при реализации этой формы колебаний ребра работают только на кручение и изгиб в плоскости, касательной к срединной поверхности обшивки, а сплошная кривая, соответствующая случаю, когда $\bar{C}_1 = 0,01$; $\bar{C}_2 = 0,0002$, показывает, что при такой форме колебаний ребра практически не деформируются.

Результаты анализа полученных данных показывают, что с изменением величины коэффициентов постели упругого основания происходит не только изменение величины собственных частот колебаний, но при этом происходит и изменение формы колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. – К.: Наук. Думка, 1980. – 386 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.2).
- 2.Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Статика, динамика и устойчивость ребристых оболочек // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНТИ,1990. – Т.21. – С.132–191.
- 3.Заруцкий В.А., Прокопенко Н.Я. Колебания и устойчивость пологих ребристых оболочек с прямоугольным планом // Прикл. механика. – 2002. – 38, №6, с. 84–90.
- 4.Луговий П.З., Подільчук І.Ю., Головки К.Г. Про вплив пружної основи на поширення гармонічних хвиль в ортотропній циліндричній оболонці // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – 50, №1. – С. 98–106.
- 5.Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Кондаков Г.С., Оглобля А.И. Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями. К.: Вища школа. 1989. – 399 с.

Получено 17.01.2009г.

УДК 539.3

В.Ф. Мейш, Н.В. Арнаута

**ДО РОЗРАХУНКУ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАННЯ
ТРИШАРОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ВРАХУВАННЯМ
ДИСКРЕТНОСТІ РОЗМІЩЕННЯ РЕБЕР ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ
НАВАНТАЖЕННЯХ**

Вступ. Багат шарові підкріплені оболонки з врахуванням дискретності розміщення ребер при нестационарних навантаженнях знаходять широкого використання в різних галузях сучасної техніки таких як: авіаційна та ракетна, машинобудування, суднобудування, будівництво. Складність процесів, що виникають при цьому, обумовлюють необхідність застосування сучасних чисельних методів розв'язку динамічних задач поведінки багат шарових оболонкових структур. Однією з особливостей вказаної тематики є врахування дискретності розміщення при постановці вихідних задач.

В даній роботі розглядається постановка задачі нестационарної поведінки тришарових дискретно підкріплених циліндричних оболонок, побудова чисельного алгоритму із застосуванням апроксимацій типу Річардсона та розв'язування вказаних задач і аналіз отриманих результатів.

Постановка задачі. Тришарова пружна підкріплена оболонкова структура складається із зовнішньої та внутрішньої гладких оболонок, які з'єднані між собою наповнювачем, і дискретних підкріплюючих кільцевих елементів. Покладається, що для розрахунку напружено – деформованого стану (НДС) пружної структури використовується варіант геометрично нелінійної теорії стержнів і оболонок типу Тимошенка з використанням гіпотез для всього пакету в цілому. Підкріплюючі елементи розглядаються як набір криволінійних стержнів, які жорстко з'єднані з оболонкою. Для розрахунку приймається варіант теорії криволінійних стержнів типу Тимошенка.

За допомогою варіаційного принципу Рейсснера для динамічних процесів [1] отримано наступні системи рівнянь:

© Мейш В.Ф., Арнаута Н.В., 2009

1) рівняння коливань власно багатопарової оболонки в гладкій області між відповідними дискретними ребрами

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + P_1 = I_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial x} + \frac{T_{22}}{R} + P_3 = I_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}^*}{\partial x} - T_{13} + m_1 = I_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\bar{T}_{13} = T_{13} + T_{11} \Theta_1, \quad M_{11}^* = M_{11} \pm h_{cm} T_{11};$$

2) рівняння коливань j – го кільцевого ребра в точках розривів $x = x_j$ (точки проектування центрів ваги поперечного перерізу на приведену серединну поверхню гладкої багатопарової оболонки)

$$\begin{aligned} [T_{11}]_j &= \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ej} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \\ [\bar{T}_{13}]_j - \frac{T_{22j}}{R_j} &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$[M_{11}]_j = \rho_j F_j \left[\pm h_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ej} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) + \frac{I_{kpj}}{F_j} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right],$$

де

$$(T_{11}, T_{22}, T_{13}) = \sum_k \int_z (\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}) dz, \quad (M_{11}) = \sum_k \int_z (z \sigma_{11}^{kz}) dz,$$

$$I_1 = \sum_k \rho_k h_k, \quad I_2 = \sum_k \pm \rho_k h_k h_{ck}, \quad I_3 = \sum_k \rho_k \frac{h_k}{12}.$$

В рівняннях (1) – (2) введено наступні позначення: x, t – просторова та часова координати відповідно, R – радіус приведеної серединної поверхні багатопарової оболонки; ρ_k, ρ_j – щільності матеріалів відповідно k – го шару оболонки та j – го ребра; h_k – товщини відповідних шарів оболонки, h_{ck} – відстань від вихідної серединної поверхні до серединної поверхні k – го шару; h_{ej} – відстань від вихідної серединної поверхні до лінії центру ваги поперечного перерізу j -го ребра; x_j – координата лінії контакту j -го ребра з багатопаровою оболонкою; R_j, F_j, I_{kpj} – геометричні параметри j – го ребра. В позначеннях для величин зусиль і

моментів покладається, що $\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}$ — напруження по товщині відповідно k — го шару при $-\frac{h_k}{2} \leq z \leq \frac{h_k}{2}$, $k = \overline{1, n}$.

Чисельний алгоритм. Для побудови чисельного алгоритму розв'язку нестационарних задач теорії неоднорідних багатошарових оболонок використовується інтегро – інтерполяційний метод побудови різницевих схем [2] для гіперболічних рівнянь. В силу вихідної постановки задач чисельний розв'язок шукається в гладкій області пружної структури (для багатошарової оболонки між ребрами) та на лініях розташування відповідних ребер.

Для побудови більш ефективних алгоритмів застосовується підхід, що базується на знаходженні наближених розв'язків по Річардсону [3]. Причому, при фіксованому різницевому кроку по часовій координаті, використовується послідовність наближених апроксимацій по просторовій координаті. При цьому, процедура екстраполяції формується згідно формул

$$\tilde{U}_{l(\Delta s)}^n = \frac{4}{3} \bar{U}_{l(\Delta s/2)}^n - \frac{1}{3} \bar{U}_{l(\Delta s)}^n, \quad (4)$$

де $\bar{U}_{l(\Delta s/2)}^n$ і $\bar{U}_{l(\Delta s)}^n$ - чисельні розв'язки рівнянь коливань відповідно з дискретними кроками по просторовій координаті $\Delta s/2$ і Δs , $s = A_1 \alpha_1$.

Неважко показати, що різницеві рівняння (4) апроксимують вихідні рівняння коливань (2) в гладкій області з четвертим порядком точності по координаті x .

Результати розрахунків. Як числовий приклад, розглядається задача визначення НДС тришарової підкріпленої циліндричної оболонки з врахуванням дискретності елементів, які представляють собою набір дискретних кільцевих ребер, при внутрішньому нормальному осесиметричному імпульсному навантаженні. Покладалося, що краї оболонок жорстко зацемлені. Початкові умови нульові.

Осесиметричні коливання тришарових циліндричних підкріплених оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер розглядалися при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах

$$h = h_1 + h_2 + h_3; \quad h_1 = h_3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad h_2/h_1 = 3;$$

$$R/h = 20; \quad L/h = 80; \quad L/R = 4; \quad h_j/h = 2; \quad F_j = h_j h;$$

$$E_1^1 = E_1^3 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad E_1^1 / E^{zan} = 10 \div 1000;$$

$$\nu_1^1 = \nu_1^3 = 0.3; \quad \nu_1^{zan} = 0.4; \quad \rho_1 / \rho_{zan} = 7; \quad \rho_1 = \rho_3 = \rho_j = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Нормальне імпульсне навантаження задавалося у вигляді

$$P_3 = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

де A – амплітуда навантаження; T – тривалість навантаження. В розрахунках покладалося $A = 10^6 \text{ Па}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. Підкріплюючі елементи розташовано в точках $x_j = 0,25Lj$, $j = \overline{1,3}$. Отримані чисельні результати дозволяють характеризувати напружено – деформований стан тришарової пружної структури циліндричного типу в будь-який момент часу на досліджуваному часовому інтервалі згідно вищевказаних постановок.

На рис. 1 представлено залежності величини прогину U_3 по координаті x в залежності від фізико – механічних параметрів заповнювача. Крива 1 відповідає випадку $E_1^1 / E_1^{zan} = 10$; 2 - крива – випадку $E_1^1 / E_1^{zan} = 100$; 3 - крива – випадку $E_1^1 / E_1^{zan} = 1000$.

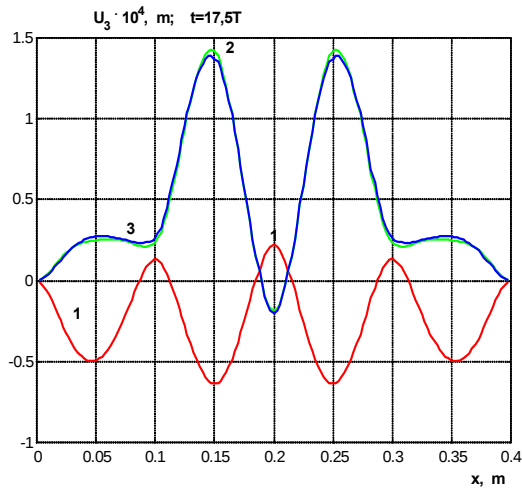


Рисунок 1 - Залежність величини U_3 від просторової координати x в момент часу $t=17,5T$

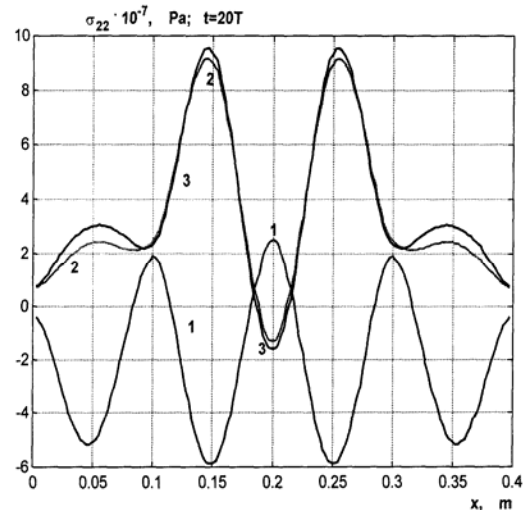


Рисунок 2 - Залежність величини σ_{22} від просторової координати x в момент часу $t = 20T$.

Розрахунки проводилися в інтервалі часу $0 \leq t \leq 40T$, причому приведенні залежності на рисунку відповідають часу досягнення

максимальних значень вказаних величин. Приведенні залежності дозволяють досліджувати вплив величин $E_1^1/E_1^{\text{зап}}$ і підкріплюючих ребер на напружено – деформований стан багатопарової неоднорідної структури. Відзначимо, що криві 2 і 3 на представлених рисунках практично співпадають, це свідчить, що починаючи із значення $E_1^1/E_1^{\text{зап}}=100$ чисельні результати вказують на незначний вплив деформаційних властивостей заповнювача на напружено – деформований стан розглянутої неоднорідної структури.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мейш В.Ф., Кравченко Н.В. До розрахунку напружено – деформованого стану багатопарових оболонок з дискретними неоднорідностями при нестационарних навантаженнях\\ Вісник Київського університету. Серія: фіз.– мат. науки. - 2002. – Вип. №3. – С. 210 – 216.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем.- М.:Наука, 1977. - 656 с.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 454с.

Одержано 12.01.2009р.

УДК 539.3

А.В. Кошлак

РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ДИНАМИКЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТОЙ СТРУКТУРЫ

Введение. Согласно разработанным технологиям получения нового пористого материала [1,2] процесс порообразования реализуется путем испарения воды при нагреве гелеобразной смеси в термокамере. Продолжительность нагрева и плотность теплового потока определяют интенсивность испарения и количество выделившегося пара.

Сложность наблюдаемых явлений, а также их понимание, вызывают наибольший интерес, так как путем изучения кинетики фазовых переходов можно создать теоретическую базу для разработки новых высокоинтенсивных технологий в различных областях промышленности, в частности технологию производства мелкопористых теплоизоляционных материалов. И поскольку средний размер пор, пористость в основном и определяют теплопроводность и прочность материала, можно предположить, что, варьируя термическими режимами обработки сырьевого материала и рецептурным составом смеси, можно прогнозировать изменение теплофизических свойств полученной теплоизоляции.

Цель работы. На основании результатов исследований, разработать математическую модель равновесного состояния пористой структуры в момент ее формирования.

Материалы и результаты исследований. В качестве динамической характеристики, определяющей направленность изменений размеров паровой поры примем разность напряжений, вызванных давлением в паровой области и сопротивлением граничной поверхности поры.

Уравнение Релея – Плессета характеризует динамику роста или уменьшения парового пузырька. Запишем уравнение в следующем виде

$$\frac{dw}{d\tau} = -\frac{1,5\rho w^2 + P_z - P_n(T)}{\rho_z R} = -\frac{1,5\rho w^2}{\rho_z R} + \frac{P_n(T) - P_z}{\rho_z R}. \quad (1)$$

После преобразований получим:

$$\frac{dw}{w^2 - \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho_z}} = -\frac{1,5\rho d\tau}{\rho_z R}, \quad (2)$$

где w – скорость роста парового пузырька; τ – время роста пузырька; ρ – плотность; P_n – давление внутри паровой полости; P_z – давление в окружающей жидкости; T – температура; R – радиус парового пузырька.

Увеличение, уменьшение или стабилизация размеров пузырька могут быть представлены, соответственно, тремя случаями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} > 0, \quad \frac{\sqrt{1,5\rho}}{2\sqrt{P_n(T) - P_z}} \ln \left| \frac{w - \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}}}{w + \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}}} \right| = -\frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R} + C, \\ \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} < 0, \quad \sqrt{\left| \frac{1,5\rho}{P_n(T) - P_z} \right|} \operatorname{arctg} \sqrt{\left| \frac{1,5\rho}{P_n(T) - P_z} \right|} w = -\frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R} + C, \\ \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} = 0, \quad \frac{1}{w} = -\frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R} + C. \end{array} \right. \quad (3)$$

При $P_n(T) - P > 0$ – паровой пузырек увеличивается, $P_n(T) - P < 0$ – уменьшается; в случае $P_n(T) - P = 0$ – его размер стабилизирован. Как видно из уравнений, $P_n(T)$ зависит от величины внешнего теплового потока (температуры). Следовательно, процесс порообразования может быть управляем.

Преобразуем систему уравнений (3) к виду

$$\left\{ \begin{aligned} \ln \frac{w - \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}}}{w + \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}}} &= \left(-\frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R} + C \right) \frac{2\sqrt{P_n(T) - P}}{\sqrt{1,5\rho}}; & \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} \succ 0, \\ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1,5\rho}{P_n(T) - P_z}} w &= \left(-\frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R} + C \right) \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}}; & \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} \prec 0, \\ w &= \frac{\rho_z R}{1,5\rho\tau - C\rho_z R}; & P_n(T) - P = 0. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{w - \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}}}{w + \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}}} &= \exp \frac{2\sqrt{P_n(T) - P}}{\sqrt{1,5\rho}} \left(C - \frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R} \right); & \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} \succ 0, \\ w &= \sqrt{\left| \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} \right|} \operatorname{tg} \sqrt{\left| \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} \right|} \left(C - \frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R} \right); & \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} \prec 0, \\ w &= \frac{\rho_z R}{1,5\rho\tau - C\rho_z R}; & P_n(T) - P = 0. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\text{Обозначим } k(\tau) = \exp \frac{2\sqrt{P_n(T) - P}}{\sqrt{1,5\rho}} \left(C - \frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R} \right); \quad (6)$$

$$w - \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}} = \left(w + \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}} \right) k(\tau); \quad (7)$$

$$w(1 - k(\tau)) = \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}} (1 + k(\tau));$$

$$w = \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}} \frac{1 + k(\tau)}{1 - k(\tau)}. \quad (8)$$

Таким образом, скорость изменения размеров парового пузырька может быть определена по уравнениям:

$$w(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}} \frac{1 + k(\tau)}{1 - k(\tau)} & ; \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} > 0, \\ \sqrt{\left| \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} \right|} \operatorname{tg} \sqrt{\left| \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} \right|} \left(C - \frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R} \right) & ; \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} < 0, \\ \frac{\rho_z R}{1,5\rho\tau - C\rho_z R} & ; P_n(T) - P = 0. \end{cases} \quad (9)$$

После преобразований с учетом равенства

$$\frac{(w - \alpha)(w_0 + \alpha)}{(w + \alpha)(w_0 - \alpha)} = e^{\frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R}}$$

окончательно получим

$$\left\{ \begin{aligned} w &= \frac{\alpha \left[(w_0 - \alpha) e^{\frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R}} + w_0 + \alpha \right]}{w_0 + \alpha - (w_0 - \alpha) e^{\frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R}}} & ; \alpha = \sqrt{\frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho}} & ; \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} > 0, \\ w &= \frac{\sqrt{\left| \frac{1,5\rho}{P_n(T) - P_z} \right|} w_0 - \operatorname{tg} \sqrt{\left| \frac{1,5\rho}{P_n(T) - P_z} \right|} \frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R}}{\sqrt{\left| \frac{1,5\rho}{P_n(T) - P_z} \right|} + \left| \frac{1,5\rho}{P_n(T) - P_z} \right| w_0 \operatorname{tg} \sqrt{\left| \frac{1,5\rho}{P_n(T) - P_z} \right|} \frac{1,5\rho\tau}{\rho_z R}} & ; \frac{P_n(T) - P_z}{1,5\rho} < 0, \\ w &= \frac{w_0 \rho_z R}{1,5\rho w_0 \tau - \rho_z R} & ; P_n(T) - P_z = 0. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Рассмотрим последний случай, когда $P_n(T) - P_z = 0$. Учитывая, что это условие

Когда разность давлений $P_n(T) - P_z$ становится небольшой, скорость граничной поверхности, вычисленная по первому уравнению, приближается к начальному значению, в частном случае – к нулю. Если $w_0 \neq 0$, последнее выражение теряет физический смысл, поскольку для этого случая $w = 0$.

Уравнение можно записать в виде

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{w_0 \rho_z R}{1,5\rho w_0 \tau - \rho_z R}.$$

Тогда после интегрирования, получим

$$R(\tau) = \frac{R}{1,5} \ln |1,5w_0\tau + \rho_s R|. \quad (11)$$

Последнее выражение позволяет определить продолжительность процесса вспучивания до достижения определенных размеров поры.

Выводы. Анализ литературных данных, посвященных исследованиям развития парового пузырька (поры) при нагреве показал, что подробную и достоверную информацию о закономерностях протекания тепломассообменных процессов и о роли различных факторов в этих процессах, можно получить только совмещая методы физического и математического моделирования изучаемых явлений.

Предложенные, физически обоснованные и апробированные уравнения математической модели динамики паровой фазы, возникающей и развивающейся в объеме гелеобразной сырьевой массы при нагреве, дает возможность детально изучить данные процессы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошлак А.В., Павленко А.М. Сировинна суміш для пористого матеріалу/ Патент України № 25862. Бюл. №13, 2007
2. Кошлак А.В., Павленко А.М. Спосіб одержання пористого теплоізоляційного матеріалу/ Патент України № 25527. Бюл. №12, 2007.

Получено 20.01.2009г.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦЫ С ПОТОКОМ ГАЗА В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ

Введение. Во многих отраслях техники применяют различные массообменные устройства для сушки материала различного назначения. В целом методики проектирования таких аппаратов известны, и если технологический процесс реализуется без каких либо особенностей, то методы расчета себя оправдывают. В случаях, когда свойства материала в процессе термообработки изменяются, традиционные методы расчета дают существенные погрешности. Тогда возникает необходимость математического моделирования основных технологических процессов.

Цель работы. Разработать математическую модель движения и массообмена частицы в вертикальном канале.

Материалы и результаты исследований. Движение частицы в вертикальном газовом потоке является следствием действия на нее массовой силы, динамического напора теплоносителя и гидродинамического сопротивления потоку газа [1-3].

Коэффициент гидродинамического сопротивления зависит от величины скорости обтекания, и его величина обусловлена разностью статических давлений в набегающей области и тыльной части частицы.

Установившаяся скорость движения частицы в таких условиях определяется зависимостью:

$$V_{\text{ч}} = V_{\text{г}} - V_{\text{в}}, \quad (1)$$

где $V_{\text{ч}}$ – скорость движения частицы, $V_{\text{г}}$ – скорость движения газа, $V_{\text{в}}$ – скорость витания.

Скорость витания определяется по формуле:

$$V_{\text{в}} = \sqrt{\frac{4 \cdot d_{\text{ч}} \cdot (\rho_{\text{гв}} - \rho) \cdot g}{3 \cdot \xi \cdot \rho}}, \text{ где } d_{\text{ч}} - \text{ диаметр частицы.}$$

Известно [2,3], что с ростом отношения $d_{\text{ч}}/\sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot S}$ влияние стенок на величину скорости падения в стесненных условиях увеличивается, и его учитывают с помощью коэффициента k :

$$V_{\text{с}} = k \cdot V_{\text{в}}, \quad (2)$$

При рассмотрении движения некоторого объема частиц в потоке, ограниченном стенками канала, этот объем будем рассматривать как местное сопротивление, на котором возникает некоторый перепад давлений, который обусловит различие плотностей газовой фазы за и перед ним, а также соответствующее изменение местных скоростей газа при его неизменном массовом расходе. Чем тяжелее слой частиц и выше отношение $r_{\text{ч}}\sqrt{\frac{\pi}{S}}$ ($r_{\text{ч}}$ – радиус частицы), тем значительнее разница в давлениях, плотностях и линейных скоростях газа.

Для теоретического анализа взаимодействия частицы с восходящим потоком газа, при учете зависимости его плотности от давления, предложена упрощенная расчетная модель системы, в которой газ постоянного давления $P_{\text{с}}$ и плотностью $\rho_{\text{с}}$ поступает в аппарат (вертикальный канал).

Движение объема частиц в потоке сплошной среды можно представить следующим образом:

$$M_{\text{ч}} \frac{d^2 z}{d\tau^2} = (P - P_{\text{а}}) \cdot S - Mg, \quad (3)$$

где $P - P_{\text{а}}$ – разность давлений под и над объемом частиц.

Зависимость (3) представляет собой балансовое уравнение сил, действующих на частицу.

Изменение массы газа под объемом частиц

$$\frac{dM}{d\tau} = D \frac{d(\rho \cdot z)}{d\tau} = G_{\text{вх}} - G_{\text{с}}, \quad (4)$$

где: $G_{\text{вх}}$ – массовый расход несущего газа на входе в канал; $G_{\text{с}}$ – массовый расход несущего газа в сечении канала

$$G_{\text{с}} = D_0 \sqrt{\frac{2k}{k-1}} \rho_{\text{с}} P_{\text{с}} \left[\left(\frac{P}{P_{\text{с}}} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P}{P_{\text{с}}} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right] \quad (5)$$

$$G_s = (D - S) \sqrt{\frac{2k}{k-1} \rho P \left[\left(\frac{P_a}{P} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P_a}{P} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \quad (6)$$

Зависимости (4, 5) отражают изменение массы газа под частицами в рабочем участке за счет изменения значений давления в этом объеме, а также величины объема под частицами при их перемещении.

На основании вышеизложенного сформулирована математическая модель движения частиц в вертикальном канале, которая решена методом Рунге-Кутты на языке Turbo Pascal 6.0.

$$\left\{ \begin{array}{l} M \left[\frac{d^2 z}{d\tau^2} + g \right] = (P - P_a) S \\ G_{Bx} - G_s = S \left[z \frac{d\rho}{d\tau} + \rho \frac{dz}{d\tau} \right] \\ G_s = (D - S) \sqrt{\frac{2k}{k-1} \rho P \left[\left(\frac{Pa}{P} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{Pa}{P} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \\ G_{Bx} \Big|_{P < P_c} = D_o \sqrt{\frac{2k}{k-1} \rho_c P_c \left[\left(\frac{P}{P_c} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P}{P_c} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \\ G_{Bx} \Big|_{P \geq P_c} = D_o \sqrt{\frac{2k}{k-1} \rho P \left[\left(\frac{P_c}{P} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{P_c}{P} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \\ P = P_a \left(\frac{P}{P_a} \right)^{\frac{1}{k}} \end{array} \right. \quad (7)$$

Из уравнения (4) при $\frac{dM}{d\tau} = 0$, получим

$$\frac{G_{Bx}}{(D - S) \rho} - \frac{G_s}{(D - S) \rho} = \frac{dz}{d\tau} \cdot \frac{D}{(D - S)}, \quad (8)$$

тогда

$$V_r - V = V_c \frac{D}{D - S} \quad (9)$$

Запишем систему уравнений (7) в безразмерном виде. Для этого представим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{z} = \frac{z}{z_0} \\ \bar{\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{2z_0}{g}}} \\ \bar{P} = \frac{P}{P_a} \\ \frac{P_c}{P_a} = a \\ \frac{D_0}{D} = b \\ \frac{S}{D} = \beta \end{array} \right. \quad (10)$$

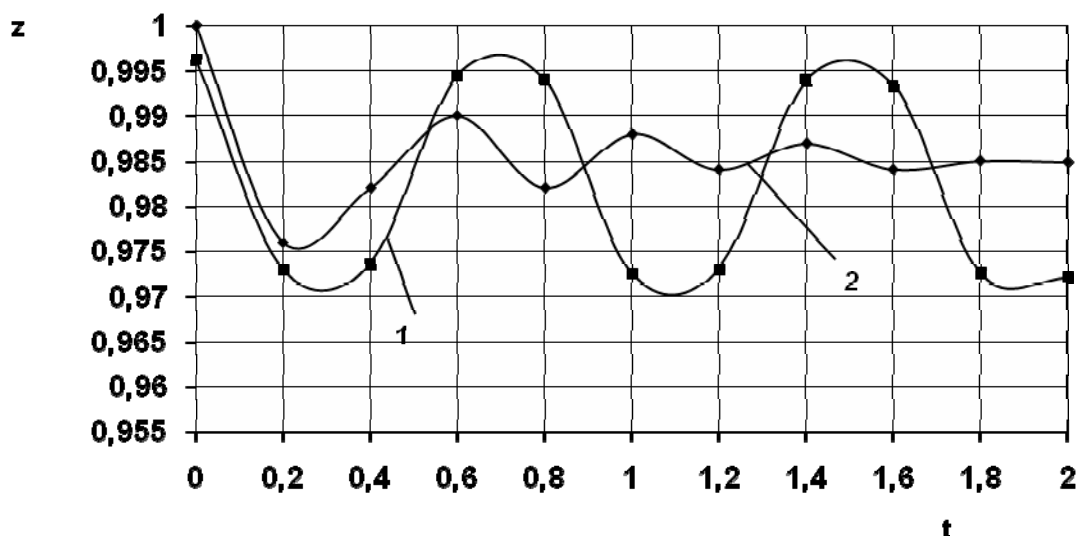
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \bar{z}}{d\bar{\tau}^2} = 2\beta L \left(\bar{P} - 1 \right) - 2 \\ \bar{z} \frac{d\bar{P}}{d\bar{\tau}} + k \bar{P} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\tau}} = 2 \sqrt{\frac{k^3}{k-1}} M \bar{P}^{\frac{k-1}{k}} \cdot [bA + (\beta - 1)B] \\ \rho = P_a \left(\bar{P} \right)^{\frac{1}{k}} \\ L = \frac{P_a D}{Mg} \\ M = \frac{P_a}{z_0 g \rho_a} \end{array} \right. \quad (11)$$

система уравнений (11) решена методом Рунге-Кутты на языке Turbo Pascal 6.0

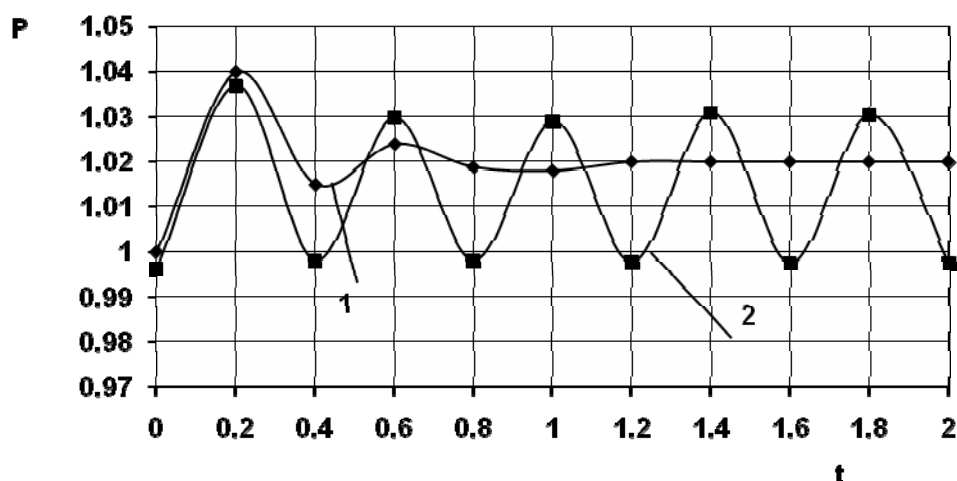
На рисунке 1 представлены расчетные зависимости $P=f(\tau)$, $z=f(\tau)$. Характерным для этих величин является наличие колебательного процесса, который может быть неустойчивым, или затухающим, и устойчивым в зависимости от внешних гидродинамических условий. Аналогичный характер имеют функции $G_{\text{вх}}=f(\tau)$, $G_{\text{а}}=f(\tau)$ и $\Delta G = f(\tau)$.

В зависимости от выбранных соотношений размеров частиц (их объема) и их массы, плотности, порозности объема частиц (соотношения $\frac{D_0}{D}$), размеров частиц и сечения канала можно реализовать один из трех гидродинамических режимов движения

частиц: пневмотранспорта, витания или падения. Этот режим характеризуется соотношением давлений на набегающей и тыльной частях частиц.



а)



б)

Рисунок 1 - Координаты частицы (а) и давление газа под объемом частиц (б): 1 – при циклическом изменении давления и устойчивом режиме псевдооживления частиц; 2 – затухающий неустойчивый режим

Если отношение давлений на набегающей и тыльной частях частиц больше либо меньше единицы, сырьевые частицы будут перемещаться с потоком или оседать. На практике очень важно найти эффективные управляющие факторы, с помощью которых этими режимами можно управлять. Как установлено нами ранее интенсивность массообменных процессов с поверхности сырьевой

частицы зависит не только от режимов омывания частиц газом и его температуры, но и от времени пребывания частицы в рабочих условиях и частоты колебаний.

Выводы. Таким образом, на основании анализа результатов численного расчета установлено, что изменение массы частицы и ее размеров приводит к соответственному изменению амплитуды колебаний. В технологии пиролиза биогаза из растительных отходов, апробированной в лабораторных условиях, наблюдалось изменение массы и размеров частиц. Поэтому в данной работе эта особенность учтена при разработке методики управления массообменными процессами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боднер В.А. Автоколебания в системе с компрессором и методы их устранения//Изв. АН СССР, 1957, №8, С. 3-12.
2. Бутенин Н.В. Теория колебаний. – М.: Высшая школа, 1963, 187 с.
3. Казакевич В.В. Автоколебания в компрессорах. – М.: 1974, 264 с.
4. Малкин Г.И. Теория устойчивости движения. – М.:Атомиздат, 1971, 276 с.
5. Фомичев В.М. Термоакустические колебания в ламинарном потоке// Теплофизика высоких температур, 1977, с. 103-108.

Получено 23.01.2009г.

УДК 534-21:537.226.86

М.О. Шульга, Л.О. Григор'єва

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО ШАРУ ПРИ ЕЛЕКТРИЧНИХ ЗБУРЕННЯХ

Пропонується розв'язок задачі про нестационарні коливання п'єзоелектричного плоского шару при електричному збуренні методом послідовних наближень.

Для розв'язання задач електропружності, які мають малий параметр, викликаний слабкою електромеханічною зв'язаністю (малістю п'єзоелектричних модулів e_{ij}) зручно застосовувати метод послідовних наближень. В цьому методі електричні та механічні величини знаходяться в різних наближеннях через відомі з попереднього наближення значення механічних або електричних величин відповідно.

Розглядається поляризований по товщині п'єзоелектричний шар, коливання якого описуються системою рівнянь електропружності [3]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$\sigma_x = c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad D_x = e_{33} \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2)$$

На зовнішніх електродованих вільних від механічних навантажень поверхнях $x = \pm h$ шару задається різниця потенціалів $2V(t)$:

$$\varphi(\pm h, t) = \pm V(t); \quad \sigma_x(\pm h, t) = 0. \quad (3)$$

Початкові умови приймаємо нульовими:

$$u(x, 0) = 0; \quad \dot{u}(x, 0) = 0. \quad (4)$$

В отриманій початково-крайовій задачі (1)-(4) вводяться безрозмірні величини [3]:

$$\bar{x} = x / h, \quad \bar{t} = t / (h \sqrt{\rho_{00} / c_{00}}), \quad \bar{u} = u / h, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / c_{00}, \quad \bar{\rho} = \rho / \rho_{00},$$

© Шульга М.О., Григор'єва Л.О., 2009

$$\bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00} h^2}}, \quad \bar{D}_x = \frac{D_x}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}^S}{\varepsilon_{00}}.$$

Надалі знаки безрозмірності опущені, всі результати представлені в безрозмірному вигляді, параметр h залишено для загальності розв'язку.

Інтегруючи рівняння для електричної індукції, визначаємо електричний потенціал через переміщення

$$\varphi(x, t) = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}} \left(u(x, t) - \frac{x}{h} u(h, t) \right) + \frac{x}{h} V(t). \quad (5)$$

Рівняння руху представляється в вигляді хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6)$$

при початкових умовах (4) та граничних умовах

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pm h, t) = -\frac{e_{33}}{c_{33}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\pm h, t), \quad (7)$$

де $c_1 = \sqrt{(c_{33} + e_{33}^2 / \varepsilon_{33}) / \rho}$ – швидкість поширення хвилі в електропружному середовищі в напрямку поляризації.

В нульовому наближенні маємо задачу про розподіл потенціалу в діелектричному плоскому шарі, розв'язок якої має вигляд $\varphi^{(0)} = xV(t) / h$.

Наближення для механічних змінних антисиметричні по переміщеннях і симетричні по напруженнях відносно серединної площини шару. Таким чином, в першому наближенні маємо задачу, яка описується хвильовим рівнянням (6) при нульових початкових умовах та граничних умовах

$$u^{(1)}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}(h, t) = -\frac{e_{33}}{hc_{33}} V(t). \quad (8)$$

Розв'язок отриманої задачі шукається за допомогою методу характеристик [2].

В другому та наступних наближеннях, де n – парне, електричний потенціал визначається за формулою, що впливає з (5):

$$\varphi^{(n)}(x, t) = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}} \left(u^{(n-1)}(x, t) - \frac{x}{h} u^{(n-1)}(h, t) \right) + \frac{x}{h} V(t). \quad (9)$$

Переміщення в непарних наближеннях $n = 3, 5, 7 \dots$ знаходяться з рівняння (6) при нульових початкових умовах та граничних умовах (7), що враховують (9):

$$u^{(n)}(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}(h, t) = -\frac{e_{33}^2}{c_{33}\varepsilon_{33}} \left(\frac{\partial u^{(n-2)}}{\partial x}(h, t) - \frac{1}{h} u^{(n-2)}(h, t) \right) - \frac{e_{33}}{c_{33}} \frac{V(t)}{h}. \quad (10)$$

Механічні напруження знаходяться за допомогою виразу

$$\sigma_x^{(n)} = c_{33}^E \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial \varphi^{(n-1)}}{\partial x}.$$

Кількість необхідних наближень методу послідовних наближень залежить від величини п'єзоелектричних модулів та часового інтервалу.

Проведемо аналіз електромеханічного стану п'єзоелектричного шару при безрозмірних сталих $e_{33} = 0.3$, $c_{33} = 1$, $\rho = 1$, $\varepsilon_{33} = 1$. Аналогічно до [1] розглянемо раптово прикладену постійну електричну напругу $V(t) = V_0 H(t)$, $V_0 = 1$, де $H(t)$ – функція Хевісайда.

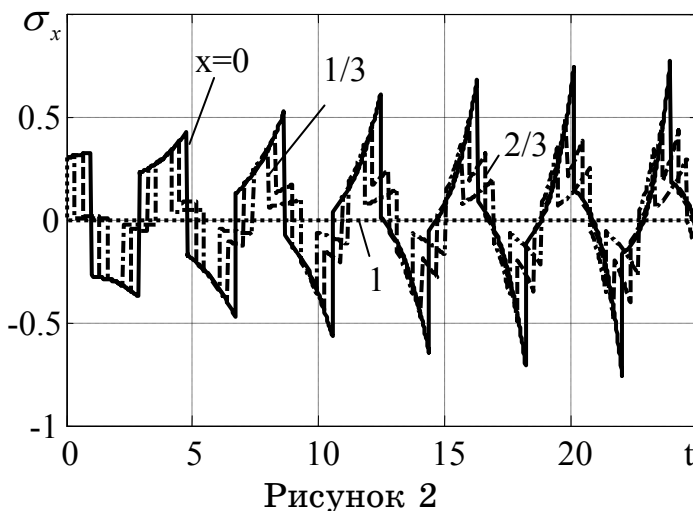
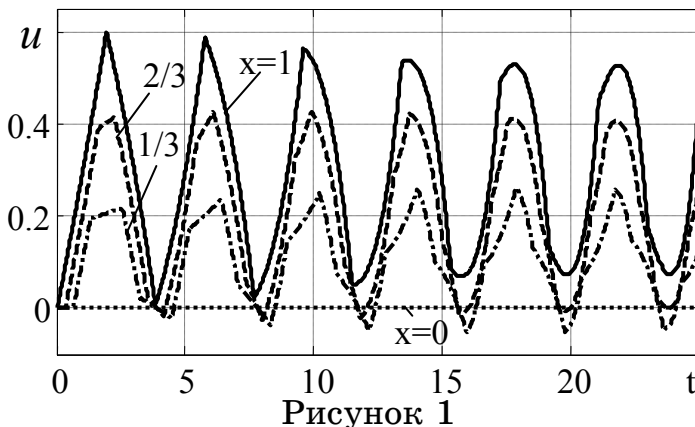


Рис. 1 та рис. 2 ілюструють зміну механічних переміщень та напружень в різних точках перерізу відповідно, отримані в сьомому наближенні методу.

З моменту прикладання навантаження від вільних поверхонь починають поширюватися хвилі переміщень зі швидкістю c_1 . Електромеханічний стан тіла змінюється періодично. Максимальні переміщення $u_{\max} = 0.6$ виникають на першому інтервалі, надалі чіткість

зломів та амплітуда коливань кривих переміщень зменшується. Потрібно відмітити, що напруження в перерізі шару виникають миттєво, і до моменту приходу в цю точку переміщень з вільних поверхонь повністю визначаються електричним потенціалом. На кривих механічних напружень та переміщень в околі кількох перших стрибків спостерігаються горизонтальні ділянки, які надалі стають похилими. Екстремуми кривих переміщень з часом зменшуються, тоді як напруження зростають.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В.М., Улитко А.Ф. Исследование динамического поведения пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении // Прикл. механика. –1975. – 11, №1– С. 22–27.
2. Положий Г.М. Рівняння математичної фізики.– К.: Радянська школа, 1959. – 480 с.
3. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел.– К: Наук. думка, 1990.– 228 с.

Получено 23.01.2009г.

СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ, СЖАТЫХ ОСЕВОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

Введение. Тонкостенные трубчатые валы являются одним из основных конструктивных элементов современного авиа- и энергомашиностроения. В процессе функционирования угловая скорость их вращения может достигать 30000 об/мин. Генерируемые этим вращением центробежные силы инерции приводят не только к возникновению интенсивных полей напряжений в этих валах, но могут быть также и причиной их бифуркационного квазистатического выпучивания. Проблемами исследования устойчивости вращающихся валов при различных схемах их опирания посвящена обширная литература. Постановки задач об их устойчивости, методика исследования и обзор научной литературы по этим вопросам можно найти в публикациях [1-6]. В работах [1,2] рассматриваются задачи бифуркационного выпучивания валов с учетом их сжатия или растяжения осевой силой. При этом предполагается, что эти силы являются “мертвыми” (неследящими) (рис.1,а) и поэтому в валах реализуется эйлерова потеря устойчивости.

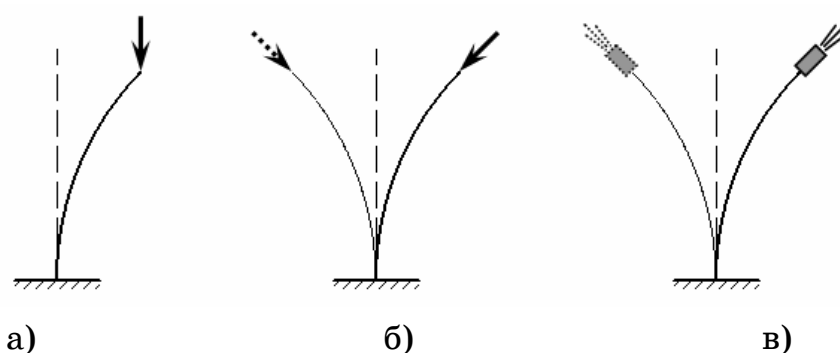


Рисунок 1

В работах [3-6] обращено внимание на характер действия осевых сил на стержневые системы. В них показано, что если сила, приложенная к свободному концу консольного стержня, является

следящей (рис.1,б,в), то его потеря устойчивости может быть реализована только посредством перехода в неустойчивое колебательное движение. Системы такого вида относятся к классу неконсервативных.

Задача исследования поведения тонкостенного вала существенно усложняется, если он вращается и подвергается действию следящих осевых нагрузок одновременно. В этом случае в зависимости от соотношения между силами инерции вращения и осевыми нагрузками могут быть реализованы как статическая, так и динамическая формы потери устойчивости. При этом важным остается вопрос выбора модели вращающегося тонкостенного вала. В зависимости от диаметра, толщины и длины вала моделирование его поведения может быть осуществлено как с помощью теории стержней, так и теории тонких оболочек.

Целью данной работы является численное исследование статических и динамических критических состояний тонкостенных консольных вращающихся валов, нагруженных осевой следящей силой. Поставленная задача решается с помощью моделей теории стержней и теории тонких оболочек.

Модель теории вращающихся балок. Пусть упругий стержень, напряженный продольной силой T , вращается с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$ вокруг своей продольной оси. Сформулируем уравнения его движения. Для этого введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в некоторой точке стержня и вращающуюся вместе с ним систему координат $Oxyz$ с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. В исходном недеформированном состоянии оси OZ, Oz совпадают с продольной осью стержня. Будем исследовать колебания стержня во вращающейся системе координат $Oxyz$. Примем, что упругие перемещения его элементов вдоль осей Ox и Oy составляют u и v , перемещениями вдоль оси Oz будем пренебрегать.

Для описания динамического равновесия стержня используем принцип Даламбера в форме уравнений изгиба в плоскостях xOz и yOz .

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x, \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q_y. \quad (1)$$

Здесь M_x, M_y – внутренние моменты в рассматриваемом сечении стержня, действующие относительно осей, проходящих через центр

сечения параллельно осям Ox и Oy ; q_x и q_y – интенсивности сил инерции, направленных параллельно соответствующим осям.

Поскольку стержень преднапряжен продольной силой T , вызывающей в нём дополнительные изгибающие моменты при его деформировании, для внутренних изгибающих моментов используются формулы

$$M_x = EI \frac{d^2 v}{dz^2} - Tv, \quad M_y = EI \frac{d^2 u}{dz^2} - Tu. \quad (2)$$

Здесь вторые слагаемые в правых частях определяют дополнительные изгибающие моменты, обусловленные эксцентриситетом продольной растягивающей силы T при деформировании стержня.

Для вычисления составляющих q_x и q_y поперечной распределенной нагрузки на стержень необходимо учитывать, что ее роль играют силы инерции, вызванные вращением стержня и его упругими колебаниями. Потому вектор $\vec{q}$ этой нагрузки находится с помощью равенства

$$\vec{q} = -\rho F \vec{a}, \quad (3)$$

где ρ – плотность материала стержня, F – площадь его поперечного сечения, $\vec{a}$ – абсолютное ускорение рассматриваемого элемента. При подсчете вектора $\vec{q}$ учтем, что механическое поведение стержня рассматривается во вращающейся системе координат $Oxyz$, в связи с этим движение каждого его элемента является сложным. В этом случае его абсолютное ускорение $\vec{a}$ подсчитывается по формуле Кориолиса

$$\vec{a} = \vec{a}^e + \vec{a}^r + \vec{a}^c, \quad (4)$$

где $\vec{a}^e$, $\vec{a}^r$, $\vec{a}^c$ – векторы переносного, относительного и кориолисова ускорения.

Выполнив соответствующие векторные операции, получим составляющие вектора сил инерции

$$\begin{aligned} q_x &= -\rho F \left(-\omega^2 u - 2\omega \frac{dv}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} \right), \\ q_y &= -\rho F \left(-\omega^2 v + 2\omega \frac{du}{dt} + \frac{d^2 v}{dt^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

После перехода от обыкновенных производных к частным на основе соотношений (1), (2), (5) строятся уравнения колебаний

вращающегося стержня, напряженного продольной силой T

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \rho F \omega^2 u - 2\rho F \omega \frac{\partial v}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \rho F \omega^2 v + 2\rho F \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

С помощью этой системы можно исследовать динамическую потерю устойчивости во вращающемся стержне. Отметим, что, несмотря на ее линейность, она обладает довольно сложной структурой, обусловленной наличием слагаемых вида $-2\rho F \omega \partial v / \partial t$, $+2\rho F \omega \partial u / \partial t$ в первом и втором уравнениях. Отмеченное усложнение системы (6) указанными членами связано с тем, что они содержат нечетные производные по t , а коэффициенты перед этими слагаемыми образуют кососимметричные матрицы.

При консольном опирании балки на краях $Z = 0$ и $Z = L$ реализуются краевые условия

$$\begin{aligned} u(0) = v(0) &= 0, & \left. \frac{du}{dz} \right|_{z=0} &= \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z=0} = 0, \\ \left. \frac{d^2 u}{dz^2} \right|_{z=L} &= \left. \frac{d^2 v}{dz^2} \right|_{z=L} = 0, & \left. \frac{d^3 u}{dz^3} \right|_{z=L} &= \left. \frac{d^3 v}{dz^3} \right|_{z=L} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Заменой $u = U_s(z) \sin ct$, $v = V_c(z) \cos ct$ система дифференциальных уравнений (6) с частными производными преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 U_s}{dz^4} - T \frac{d^2 U_s}{dz^2} - \rho F \omega^2 U_s + 2\rho F \omega c V_c - \rho F c^2 U_s &= 0, \\ EI \frac{d^4 V_c}{dz^4} - T \frac{d^2 V_c}{dz^2} - \rho F \omega^2 V_c + 2\rho F \omega c U_s - \rho F c^2 V_c &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

которая решается методом Рунге-Кутты с применением процедуры ортогонализации по Годунову.

Модель теории вращающихся тонких оболочек. Будем считать, что тонкостенная труба представляет собой цилиндрическую оболочку, жестко связанную с носителем, который вращается с постоянной по модулю угловой скоростью $\vec{\omega}$ вместе с системой координат $Oxyz$ относительно оси симметрии Oz (рис.2). Введем правые системы координат: $OX^*Y^*Z^*$ – инерционная система координат с началом в центре опорного контура оболочки, ось OZ^*

совпадает с осью Oz . На срединной поверхности оболочки введем ортогональную криволинейную систему координат $Ox^1x^2x^3$, у которой координатная линия x^1 лежит в образующем сечении, x^2 направленная в круговом направлении, x^3 – вдоль направления внутренней нормали к поверхности оболочки.

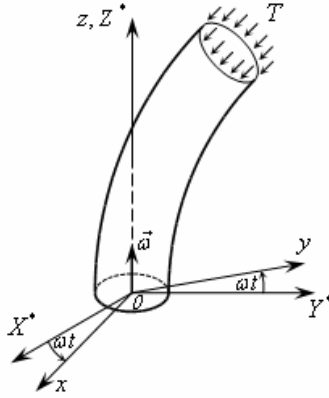


Рисунок 2

Уравнения динамического равновесия элемента оболочки, записанные в криволинейной ортогональной системе координат $Ox^1x^2x^3$ с базисными векторами $\vec{e}_\alpha$ на поверхности, имеют вид [7,8]

$$\nabla_\alpha \vec{T}^\alpha + \vec{p} = 0, \quad \nabla_\alpha \vec{M}^\alpha + (e_\alpha \times \vec{T}^\alpha) \sqrt{a_{11}a_{22}} = 0, \quad (\alpha = 1, 2). \quad (9)$$

Здесь $\vec{T}^\alpha$ – вектор внутренних сил в оболочке, $\vec{M}^\alpha$ – вектор внутренних моментов, a_{11} , a_{22} – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности, $\vec{p}$ – вектор интенсивности внешней распределенной нагрузки.

Используя соотношение связи между контравариантными компонентами функций внутренних сил T^{ij} и моментов M^{ij} и ковариантными составляющими функций деформации ε_{ij} и изменения кривизн μ_{ij}

$$\begin{aligned} T^{ij} &= Eh\varepsilon_{\alpha\beta} (a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta}) / (1-\nu^2), \\ M^{ij} &= Eh^3\mu_{\alpha\beta} (a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta}) / 12(1-\nu^2), \end{aligned} \quad (10)$$

выразив эти функции через ковариантные компоненты u_1 , u_2 , u_3 вектора перемещений $\vec{u}$ и угла поворота ϑ_i сечения, получаем расчетные уравнения устойчивости.

В данной работе изучаются критические состояния вала, реализуемые по первой гармонике окружной координаты, являющейся наименее энергоемкой. Поэтому будем

аппроксимировать искомые переменные базисными функциями $\sin(ct+x^2)$, $\cos(ct+x^2)$ с фазовой координатой $ct+x^2$, где c – частота свободных колебаний [7]. Тогда с учетом этого упрощения из (9), (10) можно получить уравнения свободных колебаний

$$\begin{aligned} dT^{(11)}/dx^1 - T^{(12)} + (2\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2)T^{(11)} + \Gamma_{22}^1 T^{(22)} - b_1^1 T^{(13)} - \\ - \gamma h[-\omega^2 \mathcal{G}_{(1)} r/a_{11} - c^2 u_{(1)}/a_{11}] = 0; \\ dT^{(12)}/dx^1 + T^{(22)} + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(12)} + T_0^{(11)} d^2 u_{(2)}/(dx^1)^2 - b_2^2 T^{(23)} - \\ - \gamma h[-\omega^2 \mathcal{G}_{(2)} r/a_{22} - 2\omega c u_{(3)}/\sqrt{a_{22}} - c^2 u_{(2)}/a_{22} - \omega^2 u_{(2)}/a_{22}] = 0; \quad (11) \\ dT^{(13)}/dx^1 - T^{(23)} + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(13)} + b_{11}\Delta T^{(11)} - \mu_{(11)}T_0^{(11)} + b_{(22)}T^{(22)} - \\ - \mu_{(22)}T_0^{(22)} - \gamma h[-2\omega c u_{(2)}/\sqrt{a_{22}} - \omega^2 u_{(3)} - c^2 u_{(3)}] = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что свободные колебания, описанные этой системой, имеют вид гармонической волны, бегущей в направлении вращения с угловой скоростью c . Причем, если при $\omega=0$ частоты являются кратными, а волны стоячими, то при $\omega \neq 0$ кратные частоты расщепляются на две и их моды начинают прецессировать в разных направлениях. Отрицательной частоте c отвечает прецессия в направлении вращения оболочки (прямая регулярная прецессия), положительной частоте c – прецессия в противоположном направлении (обратная регулярная прецессия).

Постановка задачи Штурма-Лиувилля и методика ее решения. Приведем системы (8) и (11) к системе восьми уравнений первого порядка

$$\frac{d\vec{y}}{dz} = Q_1 \vec{y} + T Q_2 \vec{y} + \omega^2 Q_3 \vec{y}. \quad (12)$$

Здесь $\vec{y}(z)$ – восьмимерная искомая вектор-функция с компонентами $y_1 = u$, $y_2 = \frac{du}{dz}$, $y_3 = \frac{d^2 u}{dz^2}$, $y_4 = \frac{d^3 u}{dz^3}$, $y_5 = v$, $y_6 = \frac{dv}{dz}$, $y_7 = \frac{d^2 v}{dz^2}$, $y_8 = \frac{d^3 v}{dz^3}$ для теории балок и $y_1 = u_{(1)}$, $y_2 = u_{(2)}$, $y_3 = u_{(3)}$, $y_4 = \mathcal{G}_{(1)}$, $y_5 = \varepsilon_{(11)}$, $y_6 = \varepsilon_{(12)}$, $y_7 = \mu_{(11)}$, $y_8 = T^{(13)}$ для теории оболочек; Q_1 , Q_2 , Q_3 – постоянные матрицы коэффициентов размера 8×8 .

Вектор-функция $\vec{y}(z)$ должна удовлетворять граничным условиям, которые можно представить в виде

$$A_1 \vec{y}(0) = 0, \quad A_2 \vec{y}(L) = 0, \quad (13)$$

где A_1, A_2 – постоянные матрицы размера 4×8 .

Общее решение системы (12) при заданных T, ω представляется в форме Коши

$$\vec{y}(z) = Y(z) \vec{C}, \quad (14)$$

где $Y(z)$ – матрица Коши размера 8×8 решений системы (18) с начальными условиями $Y(0)=E$, E – единичная матрица; $\vec{C}$ – искомый постоянный восьмимерный вектор.

При использовании такого подхода вначале при заданных T и ω путем интегрирования системы (12) методом Рунге-Кутты строится матрица $Y(z)$ на отрезке $0 \leq z \leq L$. Затем путем подстановки сформированного с ее помощью решения (14) в условия (13) строится однородная система линейных алгебраических уравнений

$$D\vec{C} = 0. \quad (15)$$

Состояния, в которых матрица D вырождается, являются критическими, поскольку в них система (12), (13) имеет как тривиальное, так и нетривиальные решения. Для определения нетривиального решения, определяющего форму потери устойчивости, одна из компонент вектора $\vec{C}$ задается произвольно, а семь других вычисляются из соответствующим образом усеченной системы (15). В математической физике поставленная краевая задача носит название задачи на собственные значения или задачи Штурма-Лиувилля.

Результаты численного исследования. С помощью разработанного подхода выполнено исследование динамического поведения тонкостенного упругого вала, к свободному концу которого приложена осевая сжимающая следящая сила (рис. 1,б,в). Было принято, что его длина $L=1$ м, толщиной $h=10^{-3}$ м, диаметр срединной поверхности составил $d=0,1$ м. Модуль упругости материала трубы $E=2,1 \times 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu=0,3$, плотность $\rho=7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. Исследования трубы выполнялись с помощью моделей теории балок и теории оболочек.

Отметим, что если консольная тонкостенная труба совершает только вращательные движения и не подвергается действию осевой силы, то с увеличением ее угловой скорости ω может быть

реализована только квазистатическая форма потери устойчивости, при которой происходит ее эйлерово выпучивание во вращающейся системе координат [6,7]. В случае, когда труба подвергается действию только продольной сжимающей следящей силы, возможна только динамическая потеря устойчивости, сопровождаемая ее переходом в режим колебательных движений [6]. Однако если оба вида возмущений консольной трубы реализуются одновременно, то в зависимости от соотношения между их величинами может быть реализовано как первое, так и второе критические состояния. Чтобы установить какое из них наступает раньше, вначале была решена задача о квазистатическом поведении вращающейся трубы, сжатой силой T . При ее решении в уравнениях (8), (11) считалось $c=0$ и при различных значениях ω и T подсчитывался определитель уравнения (15). Значения параметров ω и T , при которых детерминант матрицы D обращался в нуль, считались критическими.

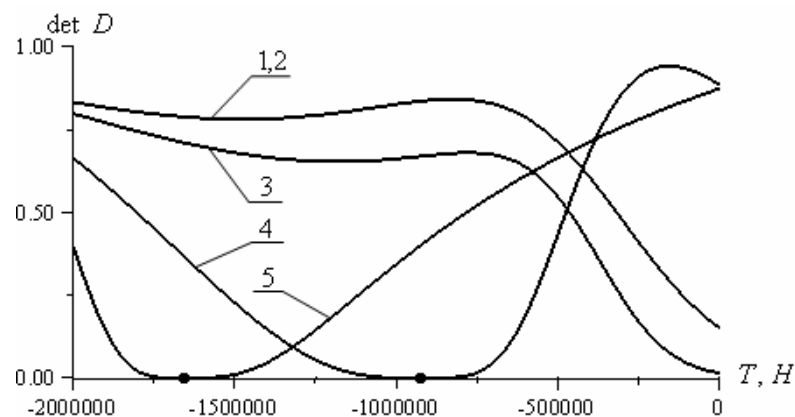


Рисунок 3

Диаграммы изменения величины $\det D$, построенные на основе теории стержней, приведены на рис. 3. Представленные на нем кривые 1-5 соответствуют следующим значениям угловой скорости ω : 1-0; 2-50; 3-500; 4-1000; 5- $\omega=2000$ рад/с. Как следует из приведенных результатов, при $\omega \leq 500$ рад/с определитель матрицы D в нуль не обращается, поэтому статическая потеря устойчивости системы не может быть реализована. Однако с увеличением угловой скорости до $\omega=1000$ рад/с факторы статического выпучивания стержня начинают преобладать над факторами его динамической потери устойчивости и при $\omega=1000$ рад/с, $T=920000$ Н реализуется его дивергентная потеря устойчивости (кривая 4). Если $\omega=2000$ рад/с

(кривая 5), то бифуркационное выпучивание стержня происходит при $T=1660000 \text{ Н}$.

Динамическая потеря устойчивости рассматриваемой системы при действии следящих сил сопровождается переходом в режим колебаний с увеличивающейся амплитудой. В этом случае частоты собственных колебаний становятся комплексными. Мнимые части этих значений соответствуют частоте колебательной потере устойчивости, а действительные части – скорости увеличения их амплитуды. Поэтому в критических состояниях частоты собственных колебаний перестают быть чисто мнимыми. В этом случае на графике зависимости частот от осевой силы T кривые первой и второй частот сливаются. Этот факт является критерием наступления динамической неустойчивости системы [6].

С помощью изложенного подхода с применением моделей трубчатых балок и цилиндрических оболочек выполнен анализ динамического поведения тонкостенных вращающихся консольных валов при значениях угловой скорости ω , рассмотренных выше. Расчеты показали, что найденные по теории балок значения следящей силы T , при которых наступает динамическая потеря устойчивости, не зависят от величины ω . В тоже время эти значения следящей силы T , подсчитанные на основе теории цилиндрических оболочек, отличаются, хотя и незначительно, друг от друга. Поэтому можно отметить, что применение теории оболочек для расчета трубчатых стержней позволяет несколько уточнить критические значения T . Так, при применении модели теории балок критическое значение продольной силы составило $T_{кр}=1,65 \cdot 10^6 \text{ Н}$, для модели теории оболочек оно оказалось равным $T_{кр}=1,40 \cdot 10^6 \text{ Н}$.

На рис.4 показаны зависимости первой и второй собственных частот c_1, c_2 от значения следящей силы T при разных значениях угловой скорости ω . Жирные сплошные линии соответствуют теории оболочек для случая $\omega=0$. При этом $c_1^+ = -c_1^-$, $c_2^+ = -c_2^-$ и кривые оказались симметричными относительно прямой $c=0$. Это свидетельствует о том, что собственные частоты невращающейся оболочки кратны. Как видно из рисунка, эти кривые не пересекают ось абсцисс, значит квазистатическая потеря устойчивости в исследуемом диапазоне изменения T не наступает, однако поскольку

кривые первой и второй частот соединяются, то можно сделать вывод, в точке их соединения (при $T_{кр}=1,40 \cdot 10^6 \text{ Н}$) наступает динамическая потеря устойчивости. Жирными точками на рис.4 показаны результаты вычислений, выполненных по теории балок при $\omega=0 \text{ с}^{-1}$. В этом случае $c_1^+ = c_1^-$, $c_2^+ = c_2^-$.

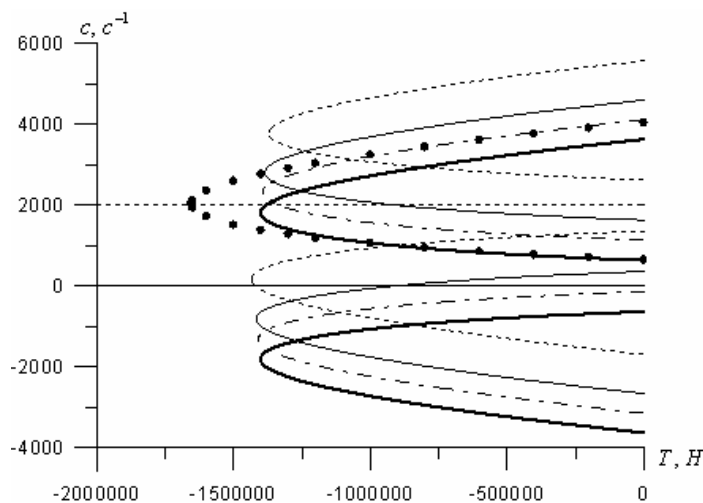


Рисунок 4

С увеличением угловой скорости вращения ω зависимости $c_i(T)$ теряют симметрию относительно оси абсцисс, поскольку кратные частоты расщепляются. Для этого случая кривые, расположенные ниже прямой $c=0$, соответствуют прямой прецессии, кривые, проходящие выше этой оси – обратной прецессии. Штрихпунктирные линии соответствуют $\omega=500 \text{ с}^{-1}$, тонкие сплошные – $\omega=1000 \text{ с}^{-1}$, тонкие пунктирные – $\omega=2000 \text{ с}^{-1}$. При $\omega=1000 \text{ с}^{-1}$ кривая пересекает ось абсцисс при значении $T=910000 \text{ Н}$. Этот случай соответствует квазистатической потере устойчивости трубы. Аналогично, при $\omega=2000 \text{ с}^{-1}$ выпучивание трубы происходит при $T=1420000 \text{ Н}$.

Как известно [5], резонансные режимы движения вращающейся цилиндрической оболочки наступают тогда, когда значение собственной частоты обратной прецессии совпадает со значением угловой скорости вращения ω . Из рис.4 видно, что в рассмотренном диапазоне изменения угловой скорости вращения и следящей силы T резонансные режимы движения не реализуются, поскольку при заданном значении ω прямая $c=\omega$ не пересекает соответствующие кривые $c_i(T)$.

Аналогичные исследования были выполнены для валов с другими длинами L . Как показали расчеты, с увеличением L разница

между значениями $T_{кр}$, найденных по теориям балок и оболочек, становится менее заметной, с уменьшением L реализуется обратный эффект.

Заключение. Полученные результаты свидетельствуют, что если на тонкостенный вращающийся вал действует продольная сжимающая следящая сила, то в зависимости от соотношения между величинами угловой скорости вращения и продольной нагрузки может быть реализовано как квазистатическая, так и динамическая потери устойчивости. Для сравнительно длинных трубчатых стержней значения критических нагрузок незначительно зависят от выбора модели стержней или теории тонких оболочек, с уменьшением длины расхождение между этими расчетными величинами становится более заметным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
2. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 388 с.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
4. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600 с.
5. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – С. 192.
6. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с.
7. Гуляев В.И., Соловьев И.Л., Белова М.А. О связи критических состояний конических оболочек при простом и сложном вращениях с частотами собственных прецессионных колебаний // Пробл. прочн. – 2004. – № 2. – С. 52 – 66.
8. Соловьев И.Л. О вращении жестких и упругих цилиндрических оболочек, упруго связанных с основанием // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 2. – С. 107 – 115.

Получено 29.01.2009г.

УДК 539.3

К.І. Шнеренко, В.Ф. Годзула

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ІЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ З ОТВОРОМ ПІД ДІЄЮ КОМБІНОВАНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

1. Постановка задачі. Розглянемо напружено - деформований стан циліндричної оболонки із композитного матеріалу радіуса R , товщини h . Оболонка послаблена круговим отвором радіуса r_0 і навантажена внутрішнім тиском інтенсивності p_0 та осьовим навантаженням інтенсивності q . Вважаємо, що в оболонці виникають пружні деформації, а композитний матеріал ортотропний. Для всього пакету оболонки можуть бути знайдені приведені жорсткісні характеристики відносно розтягу – стиску, згину, кручення і міжшарового зсуву.

Віднесемо серединну поверхню оболонки до полярної напівгеодезичної системи координат (ρ, θ) з початком в центрі отвору. При цьому параметри Ламе і кривизни оболонки запишемо в вигляді

$$A = 1, B = \rho, k_1 = \frac{1 - \cos 2\theta}{2R}, k_2 = \frac{1 + \cos 2\theta}{2R}, k_{12} = -\frac{\sin 2\theta}{2R}. \quad (1)$$

Однорідна система рівнянь рівноваги непологої оболонки в зусиллях в обраній системі координат і з врахуванням (1) запишеться у вигляді [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial S_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} (T_\rho - T_\theta) + \frac{\sin^2 \theta}{R} Q_\rho + \frac{\sin 2\theta}{2R} Q_\theta &= 0, \\ \frac{\partial S_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{\rho} S_{\rho\theta} + \frac{\sin 2\theta}{2R} Q_\rho + \frac{\cos^2 \theta}{R} Q_\theta &= 0, \\ -\frac{\sin^2 \theta}{R} T_\rho - \frac{\sin 2\theta}{R} S_{\rho\theta} - \frac{\cos^2 \theta}{R} T_\theta + \frac{\partial Q_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} Q_\rho &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} (G_\rho - G_\theta) - Q_\rho &= 0, \quad \frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{\rho} H_{\rho\theta} - Q_\theta = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Геометричні співвідношення між деформаціями, змінами кривизн і узагальненими переміщеннями будуть

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\sin^2 \theta}{R} w, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho} + \frac{\cos^2 \theta}{R} w, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\rho} + \frac{\sin 2\theta}{R} w, \\ \varepsilon_{13} &= \gamma_\rho + \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{23} = \gamma_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \chi_1 = \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho}, \quad \chi_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\gamma_\rho}{\rho}, \\ 2\chi_{12} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \rho} - \frac{\gamma_\theta}{\rho}.\end{aligned}\quad (3)$$

Співвідношення пружності для ортотропного матеріалу оболонки подамо в вигляді [1]

$$\begin{aligned}T_i &= B_{1i}\varepsilon_1 + B_{2i}\varepsilon_2 + B_{3i}\varepsilon_{12}, \quad G_i = D_{1i}\chi_1 + D_{2i}\chi_2 + D_{3i}2\chi_{12}, \quad (i = 1, 2, 3) \\ Q_i &= K_i\varepsilon_{13} \quad (i = 1, 2),\end{aligned}\quad (4)$$

де B_{ji}, D_{ji}, K_i узагальнені жорсткості матеріалу оболонки.

Основний напружений стан, що виникає в непослаблений отвором оболонці, визначається за безмоментною теорією [1].

Збурений напружений стан для непологої оболонки, що породжується наявністю отвору, знаходиться з рівнянь загальної теорії оболонок [1].

Граничні умови на контурі отвору при $\rho = \rho_0$ мають вигляд

$$\begin{aligned}T_\rho &= -p_0 R + \left(\frac{1}{4} p_0 R \mp \frac{q}{4\pi R} \right) (1 + \cos 2\theta), \quad S_{\rho\theta} = - \left(\frac{1}{4} p_0 R \mp \frac{q}{4\pi R} \right) \sin 2\theta, \quad (5) \\ G_\rho &= 0, \quad H_{\rho\theta} = 0, \quad Q_\rho = \frac{p_0 r_0}{2}.\end{aligned}$$

У випадку $p_0 = 0$ отримуємо задачу для оболонки, навантаженої осьовим розтягом – стиском; при $q=0$ – відповідно для оболонки під дією внутрішнього тиску.

2. Метод розв'язку задачі. Будемо виходити з застосування варіаційно-різницевого методу [2, 5, 6]. Згідно принципу можливих переміщень Лагранжа достовірні переміщення перетворюють функцію Лагранжа Π в відносний мінімум

$$\delta \Pi = 0, \quad (6)$$

що еквівалентно рівності нулю всіх частинних похідних по незалежних змінних. Тут $\Pi = V - A$, V - потенціальна енергія деформації, A - сума робіт зовнішніх сил на незалежних переміщеннях оболонки.

Потенційну енергію запишемо через пружний потенціал Φ [3]

$$V = \int_G \Phi dG, \quad (7)$$

де G - область, яку займає серединна поверхня оболонки.

Геометричні співвідношення (3) подамо в компактному вигляді

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{15} N_{ik} U_k, \quad (8)$$

де $U_k (k = \overline{1, 15})$ - деякі узагальнені переміщення, а компоненти матриці $N_{ik} (i = \overline{1, 8}; k = \overline{1, 15})$ знаходяться з (3). Тут незалежних узагальнених переміщень лише п'ять:

$$U_l (l = 1, 4, 7, 10, 13); \quad (U_1 = u, U_4 = v, U_7 = w, \quad U_{10} = \gamma_\rho, \quad U_{13} = \gamma_\theta),$$

а решта пов'язані з ними залежностями:

$$U_{l+1} = \frac{\partial U_l}{\partial \alpha}; \quad U_{l+2} = \frac{\partial U_l}{\partial \beta} \quad (l = 1, 4, 7, 10, 13).$$

Після підстановки (8) в вираз для пружного потенціалу Φ [4] отримаємо

$$\Phi = \sum_{k=1}^{15} \left(\sum_{r=1}^{15} P_{kr} U_r - R_k \right) U_k, \quad (9)$$

де P_{kr} і R_k залежать від N_{jk} [2].

Варіаційну задачу для відносних зміщень замінимо варіаційною задачею для дискретних їх значень у вузлах основної та допоміжної сіток однакової розмірності. Вузли основної сітки позначаються цілими індексами (s, t) , а допоміжної, що лежать посередині між вузлами основної, - дробовими індексами $(s + \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2})$. Вузли перетину обох сіток позначаються змішаними індексами $(s + \frac{1}{2}, t)$ і $(s, t + \frac{1}{2})$. Основна сітка по координаті ρ має крок $\lambda_\rho(s) \quad (s = \overline{1, m})$, а по координаті θ - $\lambda_\theta(t) \quad (t = \overline{1, n})$. Тут m - кількість вузлів сітки по координаті ρ , n - по координаті θ .

Таким чином, отримуємо дискретний аналог функції Лагранжа Π . Поверхневий інтеграл в (7) поданий в вигляді подвійної суми [4]

$$V = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^n \Phi^{st} G^{st}, \quad (10)$$

де $\Phi^{st} = \Phi(\rho_s, \theta_t)$ – значення пружного потенціалу в точці (ρ_s, θ_t) ; G^{st} – вагова функція, що являє собою частину площі чотирикутної ячейки з центром в точці (ρ_s, θ_t) і сторонами

$$\frac{1}{2}[\lambda_\rho(s-1) + \lambda_\rho(s)]; \quad \frac{1}{2}[\lambda_\theta(t-1) + \lambda_\theta(t)],$$

які належать області S .

З умов (6) отримуємо систему лінійних рівнянь відносно дискретних значень переміщень серединної поверхні і функцій зсуву U_l ($l = 1, 4, 7, 10, 13$) [4]

$$\sum_{a=i-1}^{i+1} \sum_{b=j-1}^{j+1} \sum_{k=1}^{13} P_{kl}^{ab} U_k^{ab} = Q_l^{ij} \quad (l, k = 1, 4, 7, 10, 13; \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (11)$$

Тут P_{kl}^{ab} – значення коефіцієнтів в вузлі a, b при відомій величині U_k^{ab} в рівнянні для U_l^{ij} , який є функцією геометричних і механічних параметрів оболонки; Q_l^{ij} – значення в вузлі (i, j) l -х компонент силового навантаження[2]. Матриця системи рівнянь (11) симетрична, додатньо визначена, і має стрічкову структуру, що дозволяє скоротити обсяг використаної пам'яті при розрахунках на ЕОМ.

3. Числові результати. Розглянемо рівновагу циліндричної оболонки з круговим отвором. При розрахунках розглядались такі параметри оболонки і матеріалу:

$$\begin{aligned} R/h = 100; \quad r_0/r = 11; \quad E_2/E_1 = 0,23; \quad \nu_1 = 0,27; \\ G_{12}/E_1 = 0,09; \quad G_{13}/E_1 = G_{23}/E_1 = 0,07. \end{aligned}$$

В таблицях 1, 2 наведені значення коефіцієнтів концентрації напружень $k_{1\theta} = T_\theta/p$, $k_{2\theta} = 6G_\theta/ph$ ($p = p_0 R \pm q/2\pi R$) по контуру невідкріпленого отвору.

В таблиці 1 представлені результати для оболонки, навантаженої внутрішнім тиском ($q=0$), а в таблиці 2 – відповідно для випадку осевого розтягу ($p_0 = 0$).

Зауважимо, що наведена методика дозволяє розглядати сумісну дію внутрішнього тиску і розтягу, або стиску по осі оболонки при різних значеннях p_0 та q .

Таблиця 1

θ К	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/2$
K_θ^T	7,64	6,31	4,72	2,21	-1,84
K_θ^G	-2,41	-1,27	0,87	3,01	5,34

Таблиця 2

θ К	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/4$	$\pi/2$
K_θ^T	-0,62	-0,24	0,62	2,23	5,04
K_θ^G	0,22	0,16	0,49	0,03	-0,23

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов ВАЛ.Н., Чехов Вик.Н., Шнеренко К.И. Методы расчета оболочек. Т.1: Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями..-Киев.:Наук.думка, 1980.-636 с.
2. Годзула В.Ф., Гузь А.Н., Шнеренко К.И. К задачам статики непологих анизотропных оболочек с отверстиями // Прикл.механика.-1988.-Т.24, №9.-С.22-30.
3. Godzula V.F., Shnerenko K.I. The stress-strain State of a Composite Spherical Shell with Two Polar Openings// Int.Appl. Mech.-2002.-38, №3.-P.341-344.
4. Shnerenko K.I., Godzula V.F. Stress state of a Composite Cylindrical Shell with Sizeable Circular Hole// Int.Appl.Mech.-2003.-39, №11.-P.1323-1327.
5. Шнеренко К.И., Годзула В.Ф., Богатирчук А.С. Визначення концентрації напружень навколо отвору в циліндричній панелі із композитного матеріалу // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 5 (46). Дніпропетровськ, 2006, с. 121 – 123.
6. Шнеренко К.И., Годзула В.Ф. Дослідження впливу зміни міжшарового зсуву на напружений стан композитної циліндричної оболонки з отвором // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4 (57). Дніпропетровськ, 2008, с. 111 – 115.

Одержано 02.02.2009р.

УДК 539.3

Г.И. Щурук

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН В ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЕ ОБОЛОЧКА-ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

Введение. Задачам гидроупругости для идеальной жидкости посвящено большое число публикаций. Однако расчеты, проведенные в рамках модели идеальной жидкости, часто не удовлетворяют все возрастающим требованиям точности. При выборе конкретной модели, адекватно описывающей реальные жидкостные наполнители, необходимо рассматривать модель вязкой сжимаемой и несжимаемой жидкости. В связи с этим в данной работе проводится анализ закономерностей волнового процесса в ортотропной оболочке с жидкостью в рамках модели линеаризованных уравнений гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости. Ведь замена линеаризованных уравнений Навье-Стокса на линейные уравнения Эйлера настолько изменяет структуру дифференциальных уравнений, что делает невозможным качественное и количественное исследование ряда явлений, присущих реальным жидкостям. В случае высокочастотных волновых процессов в оболочке из композитных материалов с пониженной сдвиговой жесткостью целесообразно использовать теорию оболочек типа С.П.Тимошенко. Необходимость применения этой модели обусловлена также тем, что получающиеся в ее рамках уравнения движения являются уравнениями гиперболического типа, позволяющие в полной мере исследовать волновые процессы.

В настоящей статье рассматривается общая неосесимметричная задача о распространении волн в ортотропной оболочке, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью. При исследовании применяются представления общих решений линеаризованных уравнений Навье-Стокса для покоящейся вязкой сжимаемой жидкости. Движение оболочки описано линейными уравнениями теории оболочек типа С.П.Тимошенко.

Метод решения. Рассмотрим процесс распространения неосесимметричных гармонических волн в бесконечной ортотропной цилиндрической оболочке радиуса R и толщины $2h$, заполненной покоящейся вязкой сжимаемой жидкостью. Воспользуемся круговой цилиндрической системой координат (z, r, θ) , совместив ось z с осью оболочки. Используем линейные уравнения теории оболочек типа С.П.Тимошенко [1] и линеаризированные уравнения Навье-Стокса для покоящейся вязкой сжимаемой жидкости [2]. В рамках этих моделей система уравнений, описывающая совместные колебания гидроупругой системы, в цилиндрической системе координат будет иметь вид:

$$L\vec{u} = \vec{q}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho_0^*} \text{grad } p - \frac{\nu^*}{3} \text{grad div } \vec{v} = 0;$$

$$\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \text{div } \vec{v} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2, \quad a_0 = \text{const};$$

$$\dot{u}_z = v_z; \quad \dot{u}_r = v_r; \quad \dot{u}_\theta = v_\theta; \quad q_z = -p_{rz}; \quad q_r = -p_{rr}; \quad q_\theta = -p_{r\theta}; \quad (3)$$

$$p_{rz} = \mu^* \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right); \quad p_{rr} = -p + \lambda^* \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) + 2\mu^* \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$p_{r\theta} = \mu^* \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right). \quad (4)$$

Здесь в уравнениях (1): L – матрица дифференциальных операторов теории оболочек типа С.П.Тимошенко [1]; $\vec{u} = \vec{u}(u_z, u_r, u_\theta)$ – вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки; $\vec{q}$ – вектор усилия внешней нагрузки, приведенный к срединной поверхности оболочки. В уравнениях (2-4): $\vec{v}$ – вектор скорости частиц жидкости; ρ^* и p – возмущения плотности и давления в жидкости; ρ_0^* и a_0 – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; ν^*, μ^* – кинематический и динамический коэффициенты вязкости; для второго коэффициента вязкости λ^* принято соотношение $\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^*$; $p_{rz}, p_{rr}, p_{r\theta}$ – составляющие тензора

напряжений в жидкости. Уравнения (3) – соответственно кинематические и динамические граничные условия, которые, в силу тонкостенности оболочки, будем удовлетворять на срединной поверхности ($r = R$). Соотношения (1)–(4) представляют замкнутую систему соотношений гидроупругости для ортотропной цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость.

Для решения этой системы соотношений используем представления общих решений линеаризированных уравнений Навье-Стокса в цилиндрической системе координат через скалярные потенциалы ψ, χ_1 и χ_2 , которые определяются из трех независимых уравнений [2]

$$\left[\left(1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi = 0; \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \Delta \right) \chi_i = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (5)$$

Т.е. в случае цилиндрических координат система пяти уравнений (2) сводится к решению трех скалярных независимых уравнений второго порядка (5), определяющих потенциалы скорости ψ, χ_1 и χ_2 . При этом задача гидроупругости для ортотропной оболочки типа С.П.Тимошенко, содержащей покоящуюся вязкую сжимаемую жидкость, сводится к решению системы уравнений (1), (5) с учетом кинематических и динамических граничных условий на срединной поверхности (3), где составляющие тензора напряжений в жидкости p_{ri} также выражаются через потенциалы.

Рассмотрим гармоническую синусоидальную волну, распространяющуюся вдоль оси оболочки вида

$$\{u_r, u_z, \varphi_z, \psi, \chi_2\} = \{u_1^0, u_3^0, u_5^0, f_1(r), f_3(r)\} \exp[i(kz - \Omega t)] \cos n\theta, \\ \{u_\theta, \varphi_\theta, \chi_1\} = \{u_2^0, u_4^0, f_2(r)\} \exp[i(kz - \Omega t)] \sin n\theta, \quad (6)$$

где $u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0, u_5^0, f_1, f_2, f_3$ – амплитуды волн; $\varphi_z, \varphi_\theta$ – углы поворота нормали; n – количество волн по окружности поперечного сечения оболочки; $k = k_1 + ik_2$ – волновое число; Ω – частота.

На первом этапе решения задачи определяем составляющие внешней нагрузки q_z, q_θ, q_r , действующей со стороны жидкости на оболочку, через амплитудные постоянные u_j^0 . При этом $f_j(r)$ в выражениях (6) определяются из соответствующих обыкновенных

дифференциальных уравнений и выражаются через функции Бесселя от комплексного аргумента $f_j(r) = A_j J_n(\eta_j r)$, $(j = \overline{1, 3})$, где

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\Omega^2}{a_0^2} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\nu^*}{a_0^2} i \Omega \right)^{-1} - k^2}; \quad \eta_2 = \eta_3 = \sqrt{i \frac{\Omega}{\nu^*} - k^2}, \text{ а } A_j \text{ определяются из}$$

кинематических условий через амплитудные постоянные u_j^0 .

На втором этапе с помощью представлений решений (6) в результате обычной процедуры получаем трансцендентное дисперсионное уравнение

$$\det = \|\alpha_{ij}\| = 0; \quad (i, j = \overline{1, 5}), \quad (7)$$

$$\text{где } \alpha_{11} = \frac{b_1 \Omega^2}{\varepsilon_1 c^2} + b_2 + \frac{b_2 n^2}{\varepsilon_2} - b_1 \Omega^2 - \frac{b_1}{k_0} i \Omega \beta_{1m} \gamma_{m1}$$

$$\alpha_{12} = b_2 n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) - \frac{b_1}{k_0} i \Omega \beta_{1m} \gamma_{m2}; \quad \alpha_{13} = b_{12} i \frac{\Omega}{c} - \frac{b_1}{k_0} i \Omega \beta_{1m} \gamma_{m3}; \quad \alpha_{14} = -\frac{b_2 n}{\varepsilon_2};$$

$$\alpha_{15} = -\frac{i b_1 \Omega}{c \varepsilon_1}; \quad \alpha_{21} = -b_2 n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + \frac{b_1}{k_0} i \Omega \beta_{2m} \gamma_{m1};$$

$$\alpha_{22} = b_1 \Omega^2 - \frac{b_2}{\varepsilon_2} - b_2 n^2 - \frac{\Omega^2}{c^2} + \frac{b_1}{k_0} i \Omega \beta_{2m} \gamma_{m2}; \quad \alpha_{23} = -\frac{i \Omega n}{c} (1 + b_{12}) + \frac{b_1}{k_0} i \Omega \beta_{2m} \gamma_{m3};$$

$$\alpha_{24} = \frac{b_2}{\varepsilon_2}; \quad \alpha_{25} = \alpha_{34} = \alpha_{35} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = \alpha_{53} = 0; \quad \alpha_{31} = b_{12} i \frac{\Omega}{c} - \frac{b_1}{k_0} i \Omega \beta_{3m} \gamma_{m1};$$

$$\alpha_{32} = -\frac{i \Omega n}{c} (1 + b_{12}) + \frac{b_1}{k_0} i \Omega \beta_{3m} \gamma_{m2}; \quad \alpha_{33} = b_1 \Omega^2 - n^2 - b_1 \frac{\Omega^2}{c^2} + \frac{b_1}{k_0} i \Omega \beta_{3m} \gamma_{m3};$$

$$\alpha_{41} = -\frac{i b_1 \Omega}{c \varepsilon_1}; \quad \alpha_{44} = -\frac{i \Omega n k_0^2}{12 c} (1 + b_{12}); \quad (8)$$

$$\alpha_{45} = \frac{k_0^2}{12} \left(b_1 \Omega^2 - n^2 - b_1 \frac{\Omega^2}{c^2} \right) - \frac{b_1}{\varepsilon_1}; \quad \alpha_{51} = \frac{b_2 n}{\varepsilon_2}; \quad \alpha_{52} = \frac{b_2}{\varepsilon_2};$$

$$\alpha_{54} = \frac{k_0^2}{12} \left(b_1 \Omega^2 - b_2 n^2 - \frac{\Omega^2}{c^2} \right) - \frac{b_2}{\varepsilon_2}; \quad \alpha_{55} = -\frac{i \Omega n k_0^2}{12 c} (1 + b_{12}) \quad (m = \overline{1, 3});$$

$$b_l = \frac{E_l}{G_{12} (1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad \varepsilon_l = \frac{E_l}{k' G_{13} (1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad (l = \overline{1, 2}); \quad b_{12} = b_1 \nu_{21} = b_2 \nu_{12};$$

$$k_0 = \frac{2h}{R}.$$

Здесь c – фазовая скорость; E_i, G_{ik} – модули упругости при растяжении и сдвиге; ν_{il} – коэффициенты Пуассона; k' – коэффициент сдвига. Величины $\beta_{im}\gamma_{mj}$, входящие в дисперсионное уравнение (7), (8), характеризуют влияние вязкой жидкости на распространение упругих волн в оболочке. Они содержат все жидкостные параметры (плотность, вязкость, ...), а также функции Бесселя n -го порядка первого рода от комплексного аргумента и приведены в работе [3].

Дисперсионное уравнение (7) является многопараметрическим трансцендентным уравнением и описывает процесс распространения неосесимметричных волн в исследуемой гидроупругой системе.

Анализ результатов. Уравнение (7) позволяет исследовать влияние многих параметров оболочки и характеристик жидкости на фазовые скорости и коэффициенты затухания волн в системе. Ограничимся исследованием влияния на дисперсионные кривые такой характеристики жидкой среды, как ее вязкость.

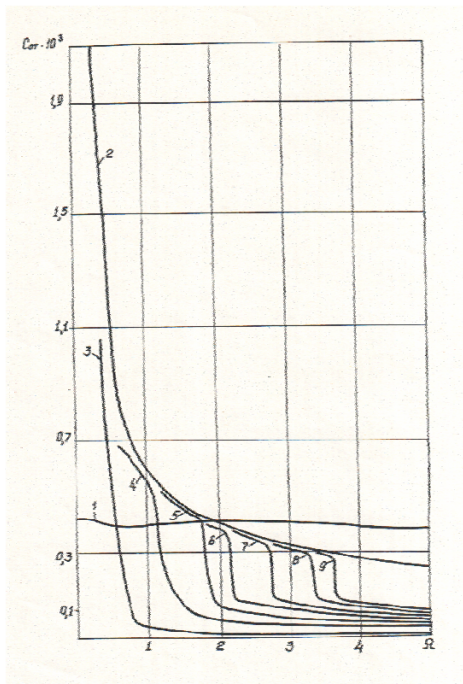


Рисунок 1

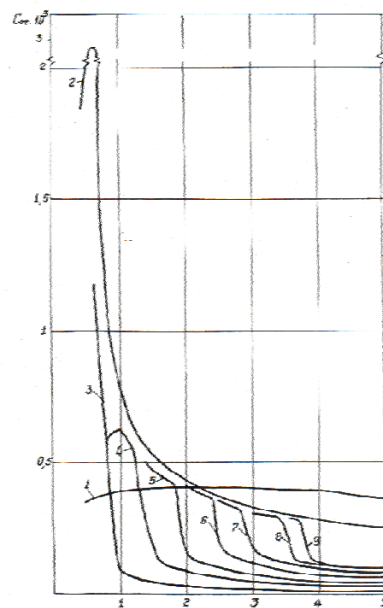


Рисунок 2

На рис.1,2 представлены результаты численного исследования влияния вязкости жидкости на фазовые скорости системы в случае $n=1$ и $n=2$ соответственно. Эти графики отображают зависимость относительного изменения фазовой скорости $c_{от} = \frac{c_u - c_v}{c_u}$ (c_u – значения фазовой скорости волн, распространяющихся в оболочке с

идеальной жидкостью, c_e – соответствующие значения фазовой скорости волн, распространяющихся в системе оболочка-вязкая жидкость) от частоты Ω для системы боропластиковая оболочка-глицерин. Из рисунков видно, что вязкость жидкости понижает значения фазовых скоростей всех мод, а также влияет на критические частоты этих мод. Также ее влияние существенно в областях низких частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шве́ц Р.К., Марчук Р.А. Колебания ортотропной цилиндрической оболочки типа Тимошенко, соприкасающейся со слоем жидкости // Мат. методы и физ.-мех. поля. – Киев: Наук. думка. – 1975. – Вып. I. – С.135-140.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.2. Закономерности распространения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 536с.
3. Гузь А.Н. . Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью // Прикл. механика. – 1980. – 16, №10. – С.10-20.

Получено 05.02.2009г.

УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Е.Н. Борисов, А.Б. Кулик, В.Ф. Лазар

**К ТЕОРИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО
НАПРЯЖЕННОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ЖЕСТКОМ
ОСНОВАНИИ БЕЗ УЧЕТА СИЛ ТРЕНИЯ**

В настоящее время для плоской контактной задачи для упругой полосы без начальных напряжений получены результаты по широкому кругу вопросов, которые достаточно полно отражены в [1, 2].

В работе [3] рассмотрена плоская контактная задача для жесткого штампа, действующего без трения на упругую предварительно напряженную полосу, лежащую на жестком основании. При этом использовались общие решения плоских статических линеаризированных задач, построенных в работах академика НАН Украины А.Н. Гузя для равных и неравных корней определяющего (характеристического) уравнения. Здесь же исследования для полосы выполнены в общей форме для сжимаемых и несжимаемых материалов при произвольной структуре упругого потенциала. В результате контактная задача для полосы с начальными напряжениями сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма с непрерывным ядром, если начальные напряжения не достигают значений, соответствующих потери устойчивости полосы.

В работе [3] получено явное выражение для функции $g(\alpha, \lambda_i)$, которая зависит от начальных напряжений и входит в ядро интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Как следует из [3], функция $g(\alpha, \lambda_i)$ стремится к бесконечности соответственно для равных и неравных корней характеристического (определяющего) уравнения при выполнении условий

$$(1 + m_1)l_1 \lambda_2 \omega_1 + (1 + m_2)(l_1 - l_2)\sqrt{n_1} \sinh \frac{\lambda_2 \omega_1}{\sqrt{n_1}} \cosh \frac{\lambda_2 \omega_1}{\sqrt{n_1}} = 0, \quad (1)$$

$$l_1 \sqrt{n_1} \cosh \frac{\lambda_2 \omega_1}{\sqrt{n_1}} \sinh \frac{\lambda_2 \omega_1}{\sqrt{n_2}} - l_2 \sqrt{n_2} \cosh \frac{\lambda_2 \omega_1}{\sqrt{n_2}} \sinh \frac{\lambda_2 \omega_1}{\sqrt{n_1}} = 0; \quad \omega_1 = \alpha h. \quad (2)$$

Здесь и далее все обозначения совпадают с обозначениями [3].

Можно показать, что если в (1) и (2) ввести обозначения, принятые в работах [4, 5], то уравнения (1) и (2) совпадают с характеристическими уравнениями [4, 5], соответствующими задаче об устойчивости полосы при рассматриваемом виде нагружения ($s_{11}^0 \neq 0$; $s_{22}^0 = 0$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $s_{33}^0 \neq 0$).

Таким образом, для ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода необходимо определить критические значения параметров предварительного нагружения в зависимости от коэффициентов удлинений (λ_i) при которых ядро терпит разрыв.

В связи с последним в данной работе определим критические параметры нагружения полосы (полуплоскости). Для этого рассмотрим вспомогательную задачу о поверхностной неустойчивости полуплоскости ($y_2 < 0$) с начальными напряжениями при сжатии вдоль оси Oy_1 ($s_{22}^0 = 0$) в случае равных и неравных корней определяющего уравнения.

Поскольку граница полуплоскости $y_2 = 0$ ($z_1 \equiv z_2 = 0$) не нагружена, то

$$\tilde{Q}_{21} \Big|_{z_1=0} = 0; \quad \tilde{Q}_{22} \Big|_{z_1=0} = 0. \quad (3)$$

Решение уравнений Лапласа выбираем в форме

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) e^{-\alpha(z_1 + iy_1)} d\alpha; \\ \varphi_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\alpha) e^{-\alpha(z_1 + iy_1)} d\alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

Удовлетворяя граничным условиям и учитывая соотношения (1) и (2), после преобразований получаем уравнение, соответствующее поверхностной неустойчивости полуплоскости с начальными напряжениями в виде

$$l_1 - l_2 = 0. \quad (5)$$

Аналогичное уравнение для полуплоскости с начальными напряжениями в случае неравных корней определяющего уравнения получаем в форме

$$l_1 \sqrt{n_1} - l_2 \sqrt{n_2} = 0 \quad (6)$$

Уравнения (5), (6) получаются из (1) и (2), если в соответствующие выражения устремить $\omega_1 = \alpha h$ к бесконечности, т.е. рассмотреть случай сколько угодно толстой полосы. Рассмотрим пример для несжимаемой полосы (полуплоскости) с потенциалом Трелоара (тело неогукковского типа) и Бартенева–Хазановича. Для потенциала Трелоара $n_1 \neq n_2$, а для потенциала Бартенева–Хазановича $n_1 = n_2$. Для постоянных n_i, m_i, l_i ($i = 1, 2$) в рамках плоской деформации с учетом того, что в начальном состоянии имеет место также плоская деформация, т.е. $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ ($\lambda_3 = 1$), для равных и неравных корней соответственно имеем выражения

$$\begin{aligned} n_1 = n_2 = \lambda_1^{-2}; \quad m_1 = \lambda_1^{-2}; \quad m_2 = 1; \\ l_1 = \lambda_1^2; \quad l_2 = \frac{1}{2}(1 - \lambda_1^2); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} n_1 = 1; \quad n_2 = \lambda_1^{-4}; \quad m_1 = 1; \quad m_2 = \lambda_1^{-4}; \\ l_1 = \frac{1}{2}(1 + \lambda_1^4); \quad l_2 = 2\lambda_1^4(1 + \lambda_1^4)^{-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (7), (8) в уравнение (1) и (2), после ряда преобразований получим

$$(1 + \lambda_1^2) \omega_1 + (3\lambda_1^2 - 1) \sinh \omega_1 \cosh \omega_1 = 0, \quad (9)$$

$$(1 + \lambda_1^4)^2 \cosh(\lambda_1^{-1} \omega_1) \sinh(\lambda_1 \omega_1) - 4\lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 \omega_1) \sinh(\lambda_1^{-1} \omega_1) = 0. \quad (10)$$

Если в (10) ввести обозначения [4], то последнее уравнение совпадает с характеристическим уравнением [4, с.177, ф-ла (VIII.6)]. Подстановки (7) и (8) в (5), (6) приводят к уравнениям

$$3\lambda_1^2 - 1 = 0, \quad (11)$$

$$\lambda_1^8 + 2\lambda_1^4 - 4\lambda_1^2 + 1 \equiv (\lambda_1^2 - 1)(\lambda_1^6 + \lambda_1^4 + 3\lambda_1^2 - 1) = 0. \quad (12)$$

Уравнения (11), (12) имеют корни соответственно $\lambda_1^{kp} \approx 0,58$ и $\lambda_1^{kp} \approx 0,54$.

Таким образом, для несжимаемого тела в условиях плоской деформации явление поверхностной неустойчивости полуплоскости с начальными напряжениями наступает для потенциала Трелоара при $\lambda_1^{kp} \approx 0,54$ и для потенциала Бартенева–Хазановича при $\lambda_1^{kp} \approx 0,58$.

Не трудно показать, что уравнение (9) при $0,58 < \lambda_1 < \infty$ и уравнение (10) при $0,54 < \lambda_1 < \infty$ не имеют действительных корней, кроме корня $\alpha = 0$. Следовательно, как и в случае [6-8], контактную задачу для полосы с начальными напряжениями можно свести к интегральному уравнению Фредгольма с непрерывным ядром, если начальные напряжения не достигают значений, соответствующих потери устойчивости полосы.

Для получения численной информации о влиянии начальных напряжений на распределение контактного давления в случае потенциалов Трелоара (неравные корни) и Бартенева–Хазановича (равные корни) необходимо иметь приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма.

Таким образом, имеет смысл рассматривать только такие начальные напряжения, которые не вызывают появление поверхностной неустойчивости полосы (полуплоскости), так как вблизи значений начального состояния, отвечающего поверхностной неустойчивости полосы (полуплоскости), происходит неограниченный рост напряжений и перемещений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 455с.
2. Развитие теории контактных задач в СССР. – М.: Наука, 1976. – 493с.
3. Бабич С.Ю. О контактной задаче для упругой полосы с начальными напряжениями // Прикладная механика. – 1984. – 20, №12. – с.34-38.
4. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наукова думка, 1973. – 272с.
5. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. – К.: Наукова думка, 1979. – 144с.
6. Бабич С.Ю. Контактная задача теории упругости для слоя с начальными напряжениями // Прикладная механика. – 1984. – 20, №6. – с.34-40
7. Бабич С.Ю., Борисов Е.Н., Овсиенко В.Г. К теории контактной задачи кручения упругого сжимаемого слоя с начальными напряжениями. // Системні технології: Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4 (57). Дніпропетровськ, 2008. – с.106-110
8. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. – 403с.

Получено 09.02.2009г.

УДК 539.3

И.И.Аникьев, М.И. Михайлова, Е.А. Сущенко

**ПОВЕДЕНИЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С БОКОВЫМ РАЗРЕЗОМ ПРИ
ДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ**

Введение. В современной технике широко используются конструкции из тонкостенных элементов, в которых могут иметь место конструктивные, технологические, эксплуатационные и другие особенности в виде отверстий, вырезов, разрезов и трещин. Изучению влияния перечисленных выше особенностей на деформированное состояние, потерю устойчивости и разрушение элементов конструкций посвящено большое число публикаций, например [1 - 5].

В данной работе приведены экспериментальные исследования тонкой упругой пластины с боковым разрезом, защемленной по двум противоположным сторонам, при нормальном падении на нее ударной волны ступенчатой формы.

1.Методика исследования. Опыты проводились по методике, приведенной в [1]. Ударноволновая нагрузка создавалась в ударной трубе диафрагменного типа. Испытывалась прямоугольная пластина из стеклотекстолита СФ-1-150 (ГОСТ 10316-78). Плотность материала пластины $\rho = 1,7 \text{ г/см}^3$, модуль упругости $E = 2,6 \cdot 10^{10} \text{ Па}$.

Пластина толщиной 2,5 мм предварительно зажималась по двум коротким сторонам между массивными стальными рамками, а затем пакет в сборе располагался на торце измерительной секции ударной трубы. Рабочий размер пластины составлял 210x140 мм и совпадал с размером внутреннего сечения канала ударной трубы.

При испытании пластина подвергалась действию одинаковых по амплитуде и ступенчатых по форме волн, при которых давление, действующее на поверхность объекта, равнялось давлению в отраженной ударной волне и составляло $0,1 \cdot 10^5 \text{ Па} \pm 10 \%$ при длительности $8 \cdot 10^{-3} \text{ с}$.

Вначале испытывалась пластина без разреза. В дальнейшем поэтапно производился боковой разрез пластины, начиная от середины одной из длинных (свободных) сторон, параллельно

защемленным сторонам. Ширина разреза равнялась примерно 0,5 мм. Отношение длины разреза L к ширине пластины a в трех сериях опытов составляло 0,14; 0,26; 0,37.

Регистрация деформаций пластины велась фольговыми тензорезисторами с базой 1 мм и 3 мм. Тензорезисторы располагались по линиям, ориентированным вдоль свободных (ось x) и защемленных (ось y) сторон (рис. 1, а, б). Каждой линии присваивался номер от 1 до XIII, а также указывалось на каком расстоянии l/a от оси x она находилась. Начало координат располагалось в середине свободной стороны, где брал начало разрез. На рис. 1, а схематично показан вариант разреза длиной $L_2/a = 0,26$; на рис. 1, б – $L_3/a = 0,37$. Составляющие деформаций в направлении оси x регистрировались вдоль линий 1 - VII и IX (рис. 1, а); в направлении оси y – вдоль линий VIII, X – XIII (рис. 1, б). Линии VII – X располагались вдоль оси y на минимально возможном расстоянии от краев разреза и далее от оси y . Вдоль указанных линий тензорезисторы наклеивались на обе поверхности пластины друг под другом, что позволяло регистрировать изменение деформаций во времени на нагружаемой (ε_x^+ , ε_y^+) и свободной (ε_x^- , ε_y^-) поверхностях пластины. Определение изгибных и мембранных деформаций проводилось по известным формулам:

$$\varepsilon^M = (\varepsilon^+ + \varepsilon^-) / 2; \varepsilon^u = (\varepsilon^+ - \varepsilon^-) / 2. \quad (1)$$

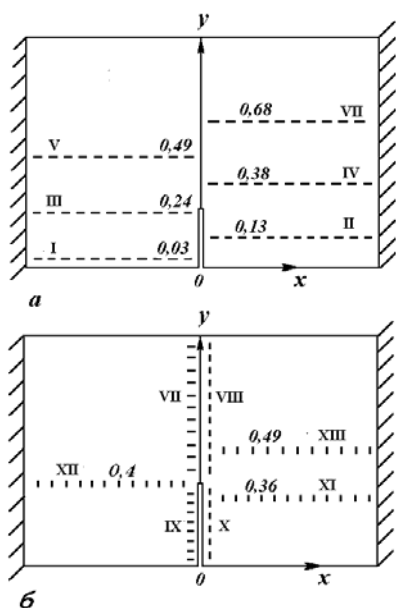


Рисунок 1

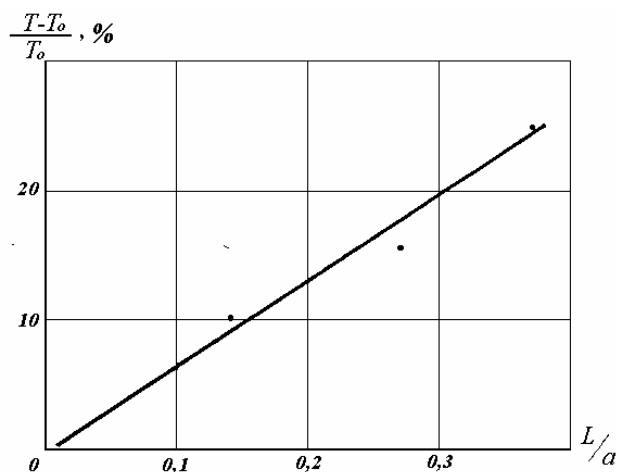


Рисунок 2

Сигналы тензорезисторов регистрировались на экране персонального компьютера с помощью быстродействующего устройства ввода – вывода и обработки аналоговой и цифровой информации L1250, работающей в четырехканальном режиме в полосе частот 0 – 25 кГц.

2.Результаты исследования. Анализ осциллограмм показал, что все элементы пластины с боковым разрезом (исключая зоны вблизи краев разреза) после падения ударной волны совершали затухающие квазигармонические колебания. При этом они, как и колебания сплошных пластин и пластин с центральным разрезом [1], происходили не относительно нуля, а относительно некоторого постоянного уровня, соответствующего значению давления в ступенчатой ударноволновой нагрузке.

Из полученных осциллограмм следовало также, что по мере увеличения длины разреза происходило возрастание периода колебаний T . Период колебаний линейно возрастал с ростом L / a (рис. 2). Разрез длиной, равной 0,37 ширины a , приводил к увеличению периода колебаний в сравнении со сплошной пластиной на ~25%.

Деформации вдоль обеих осей на линиях 1X и X вблизи краев разреза представляли собой нерегулярные высокочастотные колебания с амплитудами, составляющими не более 10% деформаций элементов пластины вблизи защемления.

Деформированное состояние пластины определялось по осциллограммам в момент развития первого максимума колебаний. Известно [1], что сплошная упругая пластина с аналогичными граничными условиями, прогибаясь в направлении распространения волны, испытывала вдоль оси x преимущественно изгиб и слабое растяжение, одинаковое вдоль всей длины пластины, исключая небольшие участки вблизи защемления, где оно падало до нуля. При этом деформация растяжения срединной поверхности пластины составляла около 10% значения изгибной деформации в её середине.

С появлением бокового разреза в деформированном состоянии пластины возникали существенные изменения. Картина деформирования оставалась симметричной относительно прямой, проходящей через начало координат, линию разреза и его продолжение, т.е. относительно оси y . В связи с этим на графиках

представлены деформации половины пластины справа или слева от оси симметрии.

На рисунках. 3 - 5 изображены типичные эпюры деформаций элементов пластины с ненагружаемой стороны ε_x^- вдоль линий 1, III, V (рис. 1, а). Номера линий указаны в правом верхнем углу. Сплошная кривая на каждом из рисунков иллюстрирует изменение вдоль соответствующей линии деформации ε_x^- пластины без разреза. Пунктирная линия, проведенная длинными штрихами, показывает результаты измерений при длине разреза $L_1/a = 0,14$; штрих-пунктирная линия – при $L_2/a = 0,26$; пунктирная линия с короткими штрихами – при $L_3/a = 0,37$.

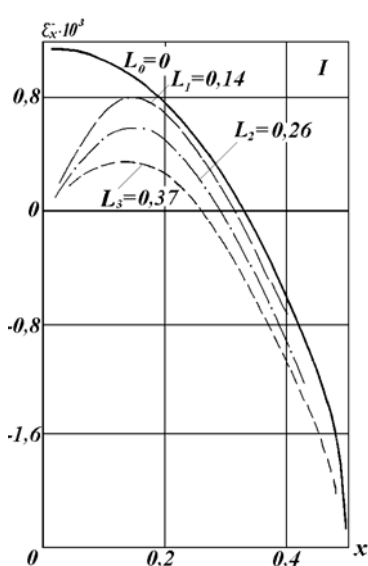


Рисунок 3

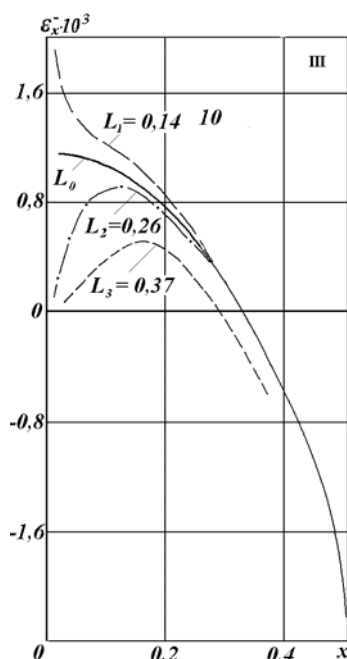


Рисунок 4

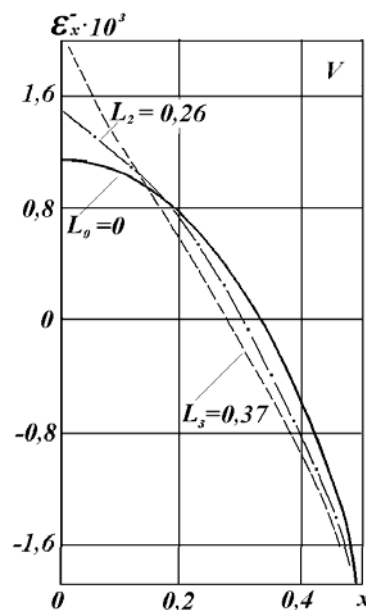


Рисунок 5

На рисунках видно, что на линиях, параллельных свободным сторонам пластины, закон изменения деформаций пластины ε_x^- зависит от того, где расположена линия относительно конца разреза. Так на линиях $y = const$, когда $l/a < L/a$ (рис.3, где $l_1/a = 0,03$), деформации достигают наивысшего положительного значения не в середине, как это наблюдалось при испытаниях сплошной пластины, а с обеих сторон разреза. При этом максимумы смещены в стороны заземленных краев. Значения деформаций в указанных максимумах не превышают значений деформаций сплошной пластины. Вблизи краев разреза деформации падают, стремясь к нулевому значению.

Наблюдалось также смещение точек перегиба (точки изменения знака деформаций) к её середине. Начиная от точки перегиба к

защемленному краю ненагруженная сторона пластины сжималась, при этом кривые $\varepsilon_x^-(x)$ не совпадали с аналогичными зависимостями для сплошной пластины. В некоторой области этого интервала деформации элементов пластины с боковым разрезом могут вдвое превышать деформации целой пластины.

На рисунке 4 показаны эпюры деформаций вдоль линии III, параллельной оси x и расположенной на расстоянии $l_{III}/a = 0,24$ от начала координат. Эта линия лежит ниже конца разреза при его длине, равной L_2 или L_3 и выше при разрезе длиной $L_1/a = 0,14$. В этом случае, начиная от точки перегиба, кривая деформаций проходит выше сплошной линии, характерной для пластины без разреза. Линия $l_V/a = 0,49$ (рис.5) проходила выше кончика разреза длиной $L_3/a = 0,37$. В элементах пластины, расположенных справа и слева от оси y выше кончика разреза наблюдалось значительное (близкое к двукратному) возрастание деформаций в сравнении с целой пластиной.

На рисунке.6 в прежних обозначениях приведены зависимости деформаций вдоль линии VII, являющейся продолжением разреза и совпадающей с осью y . Для сопоставления на оси ординат коротким штрихом показано значение ε_x^- (при $x = 0; 0 \leq y \leq a$) под действием такой же волны на целую пластину.

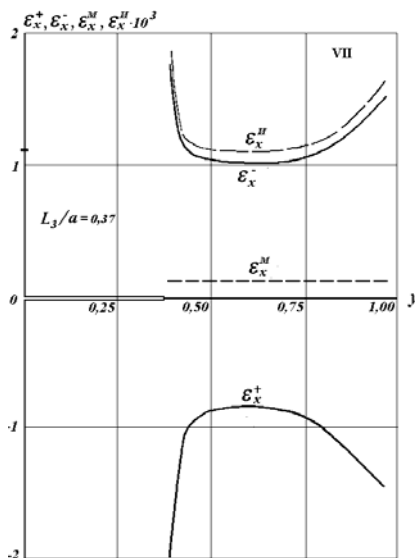


Рисунок 6

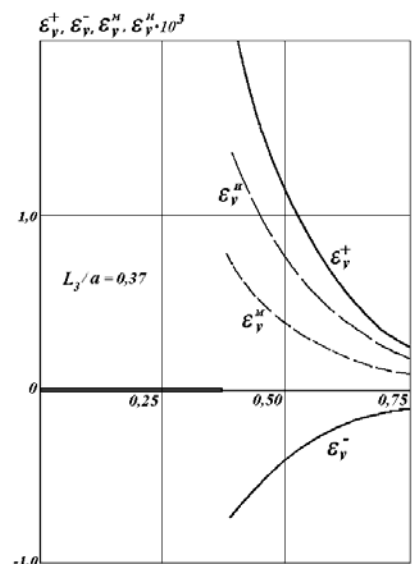


Рисунок 7

Неразрезанная часть пластины также как и целая пластина в направлении координаты x испытывает равномерное слабое растяжение. Однако деформации поверхностных элементов пластины и её изгибные деформации существенно возрастают с приближением

к кончику разреза, а также к неразрезанному свободному краю. Примерно треть неразрезанной части пластины, находящаяся в её середине, испытывает деформации, близкие по своим значениям к деформациям целой пластины.

Изменение ε_y^+ , ε_y^- , ε_y^m , ε_y^u вдоль линии VIII, являющейся продолжением разреза при $L_3/a = 0,37$, представлено на рисунке 7. Со стороны падения волны неразрезанная часть пластины испытывает сжатие (в отличие от деформаций в направлении оси x), а нагруженная сторона претерпевает растяжение. Изгибные и мембранные деформации сравнимы по своим значениям и существенно возрастают по мере приближения к кончику разреза.

Выводы. Показано, что пластина с боковым разрезом, как пластины без разреза и с центральным разрезом, под действием ударноволновой нагрузки совершает затухающие близкие к гармоническим колебания относительно некоторого уровня, соответствующего значению действующей нагрузки.

Установлено, что при боковом разрезе длиной около 0,4 длины заземленной стороны пластины период колебаний возрастает примерно на 25%.

Боковой разрез вносит качественные изменения в деформированное состояние пластины. Если сплошная пластина испытывает преимущественно изгибные деформации и слабое растяжение вдоль линий, соединяющих заземленные стороны, то боковой разрез изменяет изгибные деформации в указанном направлении как с обеих сторон разреза, так и в неразрезанной части пластины. Кроме того в неразрезанной части пластины возникают существенные изгибные и мембранные деформации в поперечном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анік'єв І.І., Микхайлова М.І., Сущенко Е.А. Nonstationary deformation of an elastic Plate with a Notch under Action of a Shock Wave // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, №11. – Р. 1264. – 1269.
2. Аникъев И.И., Михайлова М.И., Сущенко Е.А. Действие импульсного давления на тонкую упругую пластину с разрезом // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4(51). – Дніпропетровськ, 2007.- С.83 – 87.

3. Дышель М.Ш. Разрушение растягиваемых пластин с наклонной краевой трещиной с учетом предварительной локальной потери устойчивости // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 3(32) – Дніпропетровськ, 2004. – С.142 – 146.
4. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. Киев: Изд. полиграф. центр “Киевский университет”, 2005.- 536 с.
5. Malezhik M.P. Malezhik O. P., Zirka A.I., Chernyshenko I.S. Dynamic Photoelastic Study of Wave Fields in Elastic Plates with Stress Concentrations // Int. Appl. Mech. - 2005. - 41. - №12.- P. 1399 – 1406.

Получено 17.02.2009г.

УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Ю.П. Глухов

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Введение. В данной статье в рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена постановка плоской установившейся задачи о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузки двухслойного предварительно напряженного полупространства. С помощью метода интегральных преобразований Фурье получено в общем виде фундаментальное решение задачи при различных условиях контакта и скоростях движения нагрузки.

§1. Рассмотрим слой толщиной h , лежащий на полупространстве. Слой и полупространство состоят из сжимаемых или несжимаемых предварительно напряженных изотропных материалов с произвольной формой упругого потенциала.

Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние полупространства является однородным. К свободной границе слоя приложена движущаяся с постоянной скоростью v нагрузка, вызывающая в рассматриваемой слоистой среде плоское деформированное состояние. Для решения задачи воспользуемся соотношениями линеаризированной теории упругости тел с начальными напряжениями [1]. Предполагая, что картина деформаций инвариантна относительно времени в движущейся вместе с нагрузкой системе координат (y_1, y_2) , где $y_1 = \xi_1 - vt$; $y_2 = \xi_2$, уравнение установившегося движения слоя и полупространства через функцию $\chi(y_1, y_2)$ можно записать в виде

$$\left(\eta_1^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{\{s\}(j)} = 0; \quad s, j = 1, 2. \quad (1.1)$$

Индекс $s = 1$ соответствует слою, а $s = 2$ - полупространству. Корни $\eta_1^{\{s\}}$ и $\eta_2^{\{s\}}$ определяются из уравнения

© Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., 2009

$$\eta^{\{s\}4} + 2A^{\{s\}}\eta^{\{s\}2} + A_1^{\{s\}} = 0, \quad (1.2)$$

где для сжимаемого тела

$$2A^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}v^2\right) + \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}v^2\right) - \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}}\right)^2;$$

$$A_1^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}v^2\right)\left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}v^2\right); \quad \tilde{\rho}^{\{s\}}\lambda_1^{\{s\}}\lambda_2^{\{s\}}\lambda_3^{\{s\}} = \rho^{\{s\}};$$

а для несжимаемого

$$2A^{\{s\}}\tilde{q}_{22}^{\{s\}2}\tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}2}\tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{q}_{22}^{\{s\}2}\left(\tilde{\kappa}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}v^2\right) - 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}}\tilde{q}_{22}^{\{s\}}\left(\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}}\right);$$

$$A_1^{\{s\}}\tilde{q}_{22}^{\{s\}2}\tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}2}\left(\tilde{\kappa}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}v^2\right); \quad \tilde{q}_{tj}^{\{s\}} = \delta_{tj}\lambda_t^{\{s\}}q_t^{\{s\}}; \quad \tilde{\rho}^{\{s\}} = \rho^{\{s\}};$$

$\rho^{\{s\}}$ — плотность материала полосы (полуплоскости) в естественном состоянии.

Рассмотрим следующие граничные условия:

при $y_2 = 0$

$$\tilde{Q}_{21}^{\{1\}}|_{y_2=0} = P_1\delta(y_1); \quad \tilde{Q}_{22}^{\{1\}}|_{y_2=0} = P_2\delta(y_1); \quad (1.3)$$

и при $y_2 = -h$

$$u_2^{\{1\}}|_{y_2=-h} = u_2^{\{2\}}|_{y_2=-h}; \quad \tilde{Q}_{22}^{\{1\}}|_{y_2=-h} = \tilde{Q}_{22}^{\{2\}}|_{y_2=-h}; \quad \tilde{Q}_{21}^{\{1\}}|_{y_2=-h} = \delta_1\tilde{Q}_{21}^{\{2\}}|_{y_2=-h};$$

$$(1 - \delta_1)\tilde{Q}_{21}^{\{2\}}|_{y_2=-h} = \delta_1\left(u_1^{\{2\}}|_{y_2=-h} - u_1^{\{2\}}|_{y_2=-h}\right). \quad (1.4)$$

Здесь параметр $\delta_1 = 1$ соответствует случаю жесткого контакта между слоем и полупространством, а $\delta_1 = 0$ - случаю нежесткого (скользящего) контакта.

Перемещения и напряжения в формулах (1.3) и (1.4) через функции $\chi^{\{s\}(j)}$ ($s, j = 1, 2$) можно представить в виде

$$u_i^{\{s\}} = -\beta_{i1}^{\{i\}\{s\}}\frac{\partial^2\chi^{\{i\}\{s\}}}{\partial y_1\partial y_2} + \left(\beta_{i1}^{\{j\}\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{i2}^{\{j\}\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\chi^{\{j\}\{s\}}; \quad i, j, s = 1, 2; \quad i \neq j;$$

$$\tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} = \left(\alpha_{ij}^{\{12\}\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{ij}^{\{22\}\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\frac{\partial\chi^{\{2\}\{s\}}}{\partial y_{2-\delta_{ij}}} + \left(\alpha_{ij}^{\{11\}\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{ij}^{\{21\}\{s\}}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\frac{\partial\chi^{\{1\}\{s\}}}{\partial y_{1+\delta_{ij}}}; \quad (1.5)$$

$$i, j, s = 1, 2;$$

где в случае сжимаемых тел

$$\alpha_{jj}^{\{22\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}}\right); \quad \alpha_{jj}^{\{12\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}v^2\right);$$

$$\alpha_{mj}^{\{21\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}}\tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}}\right); \quad \alpha_{mj}^{\{11\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}}\left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}}v^2\right);$$

$$\begin{aligned}\alpha_{jj}^{(21)\{s\}} &= \tilde{\omega}_{jj22}^{(s)} \tilde{\omega}_{2112}^{(s)}; \quad \alpha_{jj}^{(11)\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj22}^{(s)} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2 \right) - \tilde{\omega}_{jj11}^{(s)} \left(\tilde{\omega}_{1212}^{(s)} + \tilde{\omega}_{2211}^{(s)} \right); \\ \alpha_{mj}^{(22)\{s\}} &= \tilde{\omega}_{mj12}^{(s)} \tilde{\omega}_{2222}^{(s)}; \quad \alpha_{mj}^{(12)\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj12}^{(s)} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2 \right) - \tilde{\omega}_{mj21}^{(s)} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{(s)} + \tilde{\omega}_{2121}^{(s)} \right); \\ \beta_{11}^{(1)\{s\}} &= \beta_{21}^{(2)\{s\}} = \beta^{(s)} = \tilde{\omega}_{1212}^{(s)} + \tilde{\omega}_{2211}^{(s)}; \quad \beta_{12}^{(2)\{s\}} = \tilde{\omega}_{2222}^{(s)}; \quad \beta_{22}^{(1)\{s\}} = \tilde{\omega}_{2112}^{(s)}; \\ \beta_{11}^{(2)\{s\}} &= \tilde{\omega}_{1221}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2; \quad \beta_{21}^{(1)\{s\}} = \tilde{\omega}_{1111}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2; \quad m, j = 1, 2;\end{aligned}$$

а в случае несжимаемых тел

$$\begin{aligned}\alpha_{22}^{(12)\{s\}} &= \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \left(\tilde{\chi}_{1221}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2 \right); \quad \alpha_{11}^{(12)\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \alpha_{22}^{(12)\{s\}}; \quad \alpha_{mj}^{(12)\{s\}} = -\tilde{\chi}_{mj21}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}; \\ \alpha_{11}^{(22)\{s\}} &= \tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-2} \tilde{\chi}_{2222}^{(s)} + \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} - \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \left(2\tilde{\chi}_{1122}^{(s)} + \tilde{\chi}_{1212}^{(s)} \right); \quad \alpha_{22}^{(22)\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \tilde{\chi}_{1212}^{(s)}; \\ \alpha_{22}^{(11)\{s\}} &= \tilde{q}_{22}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-2} \left(\tilde{\chi}_{1111}^{(s)} - \tilde{\rho}^{(s)} v^2 \right) + \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} - \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \left(2\tilde{\chi}_{1122}^{(s)} + \tilde{\chi}_{1212}^{(s)} \right); \\ \alpha_{11}^{(11)\{s\}} &= -\left(\tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \tilde{\chi}_{1212}^{(s)} + \tilde{\rho}^{(s)} v^2 \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \right); \quad \alpha_{11}^{(21)\{s\}} = \tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad \alpha_{22}^{(21)\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \alpha_{11}^{(21)\{s\}}; \\ \alpha_{mj}^{(22)\{s\}} &= \tilde{\chi}_{mj12}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad \alpha_{mj}^{(11)\{s\}} = \tilde{\chi}_{mj21}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}; \quad \alpha_{mj}^{(21)\{s\}} = -\tilde{\chi}_{mj12}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad m, j = 1, 2; \\ \beta_{11}^{(1)\{s\}} &= \beta_{12}^{(2)\{s\}} = \beta^{(s)} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad \beta_{21}^{(2)\{s\}} = \beta_{21}^{(1)\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}; \quad \beta_{11}^{(2)\{s\}} = \beta_{22}^{(1)\{s\}} = 0.\end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче об установившейся реакции перемещения определяются с точностью до произвольной постоянной, поэтому будем в дальнейшем оперировать не с перемещениями, а со скоростями перемещений.

Таким образом, задача об установившейся реакции двухслойного сжимаемого полупространства при воздействии движущейся с постоянной скоростью нагрузки сводится к определению функций $\chi^{(j)}$ с помощью уравнений (1.1) при граничных условиях (1.3) и (1.4). Компоненты напряженно деформированного состояния двухслойного сжимаемого полупространства определяются по формулам (1.5).

§2. Решение задачи найдем с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной y_1 . Определим решение задачи в общем виде для случаев неравных и равных корней, для различных условий сопряжения слоя и полупространства и для любой скорости движения нагрузки. Решение преобразованных уравнений (1.1) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде

$$\begin{aligned}\chi^{\{s\}F(j)} &= \left[1 - \delta_{j2}^{\{s\}} (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}) \right] \left\{ C_1^{\{s\}(j)} e^{k_1 k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + \delta_{2s} h)} + \delta_{1s} C_3^{\{s\}(j)} e^{-k_2 k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + \delta_{2s} h)} + \right. \\ &+ \left. \left[1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + \delta_{2s} h) \right] \left(C_2^{\{s\}(j)} e^{k_2 k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + \delta_{2s} h)} + \delta_{1s} C_4^{\{s\}(j)} e^{-k_1 k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + \delta_{2s} h)} \right) \right\};\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $C_m^{\{s\}(j)}$ ($j, m, s = 1, 2$; $m = \overline{1, 4}$) – постоянные интегрирования,

$$\delta_{\eta_1\eta_2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & \eta_1 \neq \eta_2; \\ 1, & \eta_1 = \eta_2 \end{cases}; \quad \delta_{j2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ 1, & j = 2 \end{cases}.$$

Введем постоянные интегрирования

$$C_m^{\{s\}(1)} = C_m^{\{s\}}; \quad C_m^{\{s\}(2)} = i\gamma_m^{\{s\}} C_m^{\{s\}}; \quad C_{m+2}^{\{1\}(2)} = i\gamma_{3-m}^{\{1\}} C_{m+2}^{\{1\}}; \quad s, m = 1, 2. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в преобразованную систему уравнений (1.3) и (1.4), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_m^{\{s\}}$ ($m = \overline{1, 4}; s = 1, 2$). Решение данной системы можно записать следующим образом

$$C_j^{\{s\}} = \frac{iP_1^F U_{j1}^{\{s\}} + P_2^F U_{j2}^{\{s\}}}{k^2 \Delta(k)}; \quad j = \overline{1, 4}; \quad s = 1, 2; \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} U_{1m}^{\{1\}} &= (-1)^n (a_{n2} D_{3456} - a_{n3} D_{2456} + a_{n4} D_{2356}); \quad U_{2m}^{\{1\}} = (-1)^m (a_{n1} D_{3456} - a_{n3} D_{1456} + \\ &+ a_{n4} D_{1356}); \quad U_{3m}^{\{1\}} = (-1)^n (a_{n1} D_{2456} - a_{n2} D_{1456} + a_{n4} D_{1256}); \quad U_{4m}^{\{1\}} = (-1)^m (a_{n1} D_{2356} - \\ &- a_{n2} D_{1356} + a_{n3} D_{1256}); \quad U_{1m}^{\{2\}} = (-1)^n (a_{n1} D_{2346} - a_{n2} D_{1346} + a_{n3} D_{1246} - a_{n4} D_{1236}); \\ U_{2m}^{\{2\}} &= (-1)^m (a_{n1} D_{2345} - a_{n2} D_{1345} + a_{n3} D_{1245} - a_{n4} D_{1235}); \quad m, n = 1, 2; \quad m \neq n; \\ \Delta(k) &= K_{12} D_{3456} - K_{13} D_{2456} + K_{14} D_{2356} + K_{23} D_{1456} - K_{14} D_{1356} + K_{34} D_{1256}; \\ D_{ij\alpha\beta} &= N_{ij} M_{\alpha\beta} - N_{i\alpha} M_{j\beta} + N_{i\beta} M_{j\alpha} + N_{j\alpha} M_{i\beta} - N_{j\beta} M_{i\alpha} + N_{\alpha\beta} M_{ij}; \\ K_{ij} &= a_{1i} a_{2j} - a_{1j} a_{2i}; \quad N_{ij} = a_{3i} a_{4j} - a_{3j} a_{4i}; \quad M_{ij} = a_{5i} a_{6j} - a_{5j} a_{6i}; \quad i, j, \alpha, \beta = \overline{1, 6}; \\ a_{15} &= a_{16} = a_{25} = a_{26} = 0; \quad a_{11} = f_{21}^{\{1\}}; \quad a_{12} = g_{21}^{\{1\}-}; \quad a_{13} = f_{22}^{\{1\}}; \quad a_{14} = g_{22}^{\{1\}-}; \quad a_{21} = -f_{11}^{\{1\}}; \\ a_{22} &= -g_{11}^{\{1\}-}; \quad a_{23} = f_{12}^{\{1\}}; \quad a_{24} = g_{12}^{\{1\}+}; \quad a_{31} = -f_{31}^{\{1\}} e_1^{-\{1\}}; \quad a_{32} = (w_{31}^{\{1\}} - g_{31}^{\{1\}-}) e_2^{-\{1\}}; \quad a_{33} = -f_{32}^{\{1\}} e_2^{\{1\}}; \\ a_{34} &= (w_{32}^{\{1\}} - g_{32}^{\{1\}-}) e_1^{\{1\}}; \quad a_{35} = f_{31}^{\{2\}}; \quad a_{36} = g_{31}^{\{2\}-}; \quad a_{41} = a_{21} e_1^{-\{1\}}; \quad a_{42} = -(g_{11}^{\{1\}-} + w_{11}^{\{1\}}) e_2^{-\{1\}}; \\ a_{43} &= a_{23} e_2^{\{1\}}; \quad a_{44} = (g_{12}^{\{1\}+} - w_{12}^{\{1\}}) e_1^{\{1\}}; \quad a_{45} = f_{11}^{\{2\}}; \quad a_{46} = g_{11}^{\{2\}-}; \quad a_{51} = -a_{11} e_1^{-\{1\}}; \quad a_{53} = -a_{13} e_2^{\{1\}}; \\ a_{52} &= (w_{21}^{\{1\}} - g_{21}^{\{1\}-}) e_2^{-\{1\}}; \quad a_{54} = -(g_{22}^{\{1\}-} + w_{22}^{\{1\}}) e_1^{\{1\}}; \quad a_{55} = \delta_1 f_{21}^{\{2\}}; \quad a_{56} = \delta_1 g_{21}^{\{2\}-}; \\ a_{61} &= -\delta_1 f_{41}^{\{1\}} e_1^{-\{1\}}; \quad a_{62} = \delta_1 (w_{41}^{\{1\}} - g_{41}^{\{1\}+}) e_2^{-\{1\}}; \quad a_{63} = \delta_1 f_{42}^{\{1\}} e_2^{\{1\}}; \quad a_{64} = \delta_1 (g_{42}^{\{1\}-} - w_{42}^{\{1\}}) e_1^{\{1\}}; \\ a_{65} &= \delta_1 f_{41}^{\{2\}} - k(1 - \delta_1) f_{21}^{\{2\}}; \quad a_{66} = \{ \delta_1 b_{41}^{\{2\}} + k[(1 - \delta_1) b_{21}^{\{2\}} + \delta_1 c_{41}^{\{2\}}] - k^2(1 - \delta_1) c_{21}^{\{2\}} \}; \\ g_{mj}^{\{s\}-} &= k c_{mj}^{\{s\}} - b_{mj}^{\{s\}}; \quad g_{mj}^{\{s\}+} = k c_{mj}^{\{s\}} + b_{mj}^{\{s\}}; \quad f_{mj}^{\{s\}} = k a_{mj}^{\{s\}}; \quad w_{mj}^{\{s\}} = k d_{mj}^{\{s\}}; \quad m, j = \overline{1, 6}; \\ a_{1m}^{\{s\}} &= \gamma_m^{\{s\}} \left(\gamma_{22}^{\{s\}(1m)} + (-1)^m \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \gamma_{22}^{\{s\}(2m)} \right); \quad a_{2m}^{\{s\}} = \gamma_{21}^{\{s\}(1m)} - (-1)^m \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \gamma_m^{\{s\}2} \gamma_{21}^{\{s\}(2m)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{3m}^{\{s\}} &= \theta_2^{\{s\}(1m)} + (-1)^m \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \varsigma_{21}^{(2m)\{s\}} \gamma_m^{\{s\}}; \quad a_{4m}^{\{s\}} = \varsigma_{11}^{(1m)\{s\}} - (-1)^m \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \theta_1^{\{s\}(2m)} \gamma_m^{\{s\}}; \\
 b_{3m}^{\{s\}} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left(\varsigma_{21}^{(2m)\{s\}} + (-1)^m 2\varsigma_{22}^{(1m)\{s\}} \right); \quad b_{4m}^{\{s\}} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left(\beta_{11}^{(1)\{s\}} - 2(-1)^m \varsigma_{12}^{(22)\{s\}} \gamma_m^{\{s\}} \right); \\
 b_{1m}^{\{s\}} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left[\gamma_m^{\{s\}} \left(\tau_{22}^{(1m)\{s\}} - (-1)^m \tau_{22}^{(2m)\{s\}} \right) - \gamma_{22}^{\{s\}(1m)} \right]; \quad c_{1m}^{\{s\}} = (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \gamma_m^{\{s\}} \gamma_{22}^{\{s\}(1m)}; \\
 b_{2m}^{\{s\}} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} \left(\tau_{21}^{(2m)\{s\}} \gamma_m^{\{s\}2} + (-1)^m \tau_{21}^{(1m)\{s\}} - \gamma_m^{\{s\}} \gamma_{21}^{\{s\}(2m)} \right); \quad c_{2m}^{\{s\}} = (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \gamma_{21}^{\{s\}(1m)}; \\
 d_{1m}^{\{s\}} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} h \gamma_m^{\{s\}} \left(\gamma_{22}^{\{s\}(1m)} - (-1)^m \gamma_{22}^{\{s\}(2m)} \right); \quad d_{2m}^{\{s\}} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} h \left(\gamma_m^{\{s\}2} \gamma_{21}^{\{s\}(2m)} + (-1)^m \gamma_{21}^{\{s\}(1m)} \right); \\
 d_{3m}^{\{s\}} &= \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} h \left(\theta_2^{\{s\}(1m)} - (-1)^m \gamma_m^{\{s\}} \varsigma_{21}^{(2m)\{s\}} \right); \quad d_{4m}^{\{s\}} = \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}} h \left(\varsigma_{11}^{(1m)\{s\}} + (-1)^m \gamma_m^{\{s\}} \theta_1^{\{s\}(2m)} \right); \\
 c_{3m}^{\{s\}} &= (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \theta_2^{\{s\}(1m)}; \quad c_{4m}^{\{s\}} = (1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{s\}}) \varsigma_{11}^{(1m)\{s\}}; \quad \tau_{ij}^{(nm)\{s\}} = 2\alpha_{ij}^{(2n)\{s\}} \gamma_m^{\{s\}}; \\
 \varsigma_{ij}^{(nm)\{s\}} &= \beta_{ij}^{(n)\{s\}} \gamma_m^{\{s\}}; \quad \gamma_{ij}^{\{s\}(nm)} = \alpha_{ij}^{\{s\}(1n)} - \alpha_{ij}^{\{s\}(2n)} \gamma_m^{\{s\}2}; \quad \theta_j^{\{s\}(nm)} = \beta_{j1}^{\{s\}(n)} - \beta_{j2}^{\{s\}(n)} \gamma_m^{\{s\}2}; \\
 e_j^{-\{s\}} &= e^{-k\gamma_j^{\{s\}}\Delta h_s}; \quad e_j^{\{s\}} = e^{k\gamma_j^{\{s\}}\Delta h_s}; \quad \gamma_j^{\{s\}} = k_j \eta_j^{\{s\}}; \quad i, j, n, m, s = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Трансформанты характеристик напряженно-деформированного состояния слоя и полупространства (1.5) с учетом (2.3) можно представить в виде

$$\tilde{Q}_{mj}^{F\{s\}} = i^{1-\delta_{mj}} \frac{iP_1^F \Gamma_{mj}^{\{s\}(1)} + P_2^F \Gamma_{mj}^{\{s\}(1)}}{\Delta(k)}; \quad \dot{u}_j^{F\{s\}} = v i^{1-\delta_{1j}} \frac{v(iP_1^F \Gamma_j^{\{s\}(1)} + P_2^F \Gamma_j^{\{s\}(2)})}{\Delta(k)}; \quad (2.4)$$

$m, j, s = 1, 2;$

где

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{jj}^{\{1\}(1)} &= -k\gamma_1^{\{1\}} U_{11}^{\{1\}} \left(\gamma_{jj}^{\{1\}(11)} - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_{jj}^{\{1\}(21)} \right) e^{k\gamma_1^{\{1\}} y_2} + U_{21}^{\{1\}} \left\{ -\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_{jj}^{\{1\}(12)} + \tau_{jj}^{\{22\}\{1\}} \gamma_2^{\{1\}} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \tau_{jj}^{\{12\}\{1\}} \gamma_2^{\{1\}} \right) + k\gamma_2^{\{1\}} \left[-\left(\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} y_2 + 1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \right) \gamma_{jj}^{\{1\}(12)} + y_2 \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_{jj}^{\{1\}(22)} \right] \right\} e^{k\gamma_2^{\{1\}} y_2} + \\
 &\quad + k\gamma_2^{\{1\}} U_{31}^{\{1\}} \left(\gamma_{jj}^{\{1\}(12)} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_{jj}^{\{1\}(22)} \right) e^{-k\gamma_2^{\{1\}} y_2} + U_{41}^{\{1\}} \left\{ -\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_{jj}^{\{1\}(11)} - \tau_{jj}^{\{21\}\{1\}} \gamma_1^{\{1\}} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \tau_{jj}^{\{11\}\{1\}} \gamma_1^{\{1\}} \right) + k\gamma_1^{\{1\}} \left[\left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \right) \gamma_{jj}^{\{1\}(11)} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} y_2 \left(\gamma_{jj}^{\{1\}(11)} - \gamma_{jj}^{\{1\}(21)} \right) \right] \right\} e^{-k\gamma_1^{\{1\}} y_2}; \\
 \Gamma_{mj}^{\{1\}(n)} &= -kU_{1n}^{\{1\}} \left(\gamma_{mj}^{\{1\}(11)} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_1^{\{1\}2} \gamma_{mj}^{\{1\}(21)} \right) e^{k\gamma_1^{\{1\}} y_2} - U_{2n}^{\{1\}} \left\{ \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_2^{\{1\}} \gamma_{mj}^{\{1\}(22)} - \tau_{mj}^{\{12\}\{1\}} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \tau_{mj}^{\{22\}\{1\}} \gamma_2^{\{1\}2} \right) + k \left[y_2 \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_{mj}^{\{1\}(12)} + \gamma_2^{\{1\}2} \gamma_{mj}^{\{1\}(22)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \right) \gamma_{mj}^{\{1\}(12)} \right] \right\} e^{k\gamma_2^{\{1\}} y_2} - \\
 &\quad - kU_{3n}^{\{1\}} \left(\gamma_{mj}^{\{1\}(12)} - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_2^{\{1\}2} \gamma_{mj}^{\{1\}(22)} \right) e^{-k\gamma_2^{\{1\}} y_2} + U_{4n}^{\{1\}} \left\{ -\delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_1^{\{1\}} \gamma_{mj}^{\{1\}(21)} + \tau_{mj}^{\{11\}\{1\}} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \tau_{mj}^{\{21\}\{1\}} \gamma_1^{\{1\}2} \right) + k \left[y_2 \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\gamma_1^{\{1\}2} \gamma_{mj}^{\{1\}(21)} - \gamma_{mj}^{\{1\}(11)} \right) - \left(1 - \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \right) \gamma_{mj}^{\{1\}(11)} \right] \right\} e^{-k\gamma_1^{\{1\}} y_2}; \\
 \Gamma_1^{\{1\}(n)} &= -kU_{1n}^{\{1\}} \left(\varsigma_{11}^{\{1\}(1)} + \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \gamma_1^{\{1\}} \theta_1^{\{1\}(21)} \right) e^{k\gamma_1^{\{1\}} y_2} - U_{2n}^{\{1\}} \left\{ \delta_{\mu_1\mu_2}^{\{1\}} \left(\beta_{11}^{\{1\}(1)} - 2\varsigma_{12}^{\{22\}\{1\}} \gamma_2^{\{1\}} \right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} y_2 \left(\gamma_2^{(1)} \theta_1^{(1)(22)} + \varsigma_{11}^{(12)(1)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} \right) \varsigma_{11}^{(12)(1)} \right] e^{k\gamma_2^{(1)} y_2} + k U_{3n}^{(1)} \left(\varsigma_{11}^{(12)(1)} - \right. \\
& \quad \left. - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} \gamma_2^{(1)} \theta_1^{(1)(22)} \right) e^{-k\gamma_2^{(1)} y_2} - U_{4n}^{(1)} \left\{ \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} \left(\beta_{11}^{(1)(1)} + 2\varsigma_{12}^{(21)(1)} \gamma_1^{(1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + k \left[y_2 \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} \left(\gamma_1^{(1)} \theta_1^{(1)(21)} - \varsigma_{11}^{(11)(1)} \right) - \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} \right) \varsigma_{11}^{(11)(1)} \right] \right\} e^{-k\gamma_1^{(1)} y_2}; \\
& \Gamma_1^{(2)(n)} = -k U_{1n}^{(2)} \left(\varsigma_{11}^{(11)(2)} + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \gamma_1^{(1)} \theta_1^{(2)(21)} \right) e^{k\gamma_1^{(1)} (y_2+h)} - U_{2n}^{(2)} \left\{ \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \left(\beta_{11}^{(1)(2)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2\varsigma_{12}^{(22)(2)} \gamma_2^{(1)} \right) + k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} (y_2 + h) \left(\varsigma_{11}^{(12)(2)} + \gamma_2^{(1)} \theta_1^{(2)(22)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \right) \varsigma_{11}^{(12)(2)} \right] \right\} e^{k\gamma_2^{(1)} (y_2+h)}; \\
& \Gamma_2^{(1)(n)} = k U_{1n}^{(1)} \left(\theta_2^{(1)(11)} - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} \varsigma_{21}^{(21)(1)} \gamma_1^{(1)} \right) e^{k\gamma_1^{(1)} y_2} + U_{2n}^{(1)} \left\{ -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} \left(2\varsigma_{22}^{(12)(1)} + \varsigma_{21}^{(22)(1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} y_2 \left(\theta_2^{(1)(12)} - \varsigma_{21}^{(22)(1)} \gamma_2^{(1)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} \right) \theta_2^{(1)(12)} \right] \right\} e^{k\gamma_2^{(1)} y_2} + k U_{3n}^{(1)} \left(\theta_2^{(1)(12)} + \right. \\
& \quad \left. + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} \varsigma_{21}^{(22)(1)} \gamma_2^{(1)} \right) e^{-k\gamma_2^{(1)} y_2} + U_{4n}^{(1)} \left\{ k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} y_2 \left(\theta_2^{(1)(11)} + \varsigma_{21}^{(21)(1)} \gamma_1^{(1)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} \right) \theta_2^{(1)(11)} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(1)} \left(2\varsigma_{22}^{(11)(1)} - \varsigma_{21}^{(21)(1)} \right) \right\} e^{-k\gamma_1^{(1)} y_2}; \\
& \Gamma_{jj}^{(2)(n)} = U_{1n}^{(2)} k \gamma_1^{(2)} \left(-\gamma_{jj}^{(2)(11)} + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \gamma_{jj}^{(2)(21)} \right) e^{k\gamma_1^{(2)} (y_2+h)} + U_{2n}^{(2)} \left\{ -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \left[\gamma_{jj}^{(2)(12)} + \gamma_2^{(2)} \left(\tau_{jj}^{(22)(s)} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \tau_{jj}^{(12)(s)} \right) \right] + k \gamma_2^{(2)} \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} (y_2 + h) \left(\gamma_{jj}^{(2)(22)} - \gamma_{jj}^{(2)(12)} \right) - \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \right) \gamma_{jj}^{(2)(12)} \right] \right\} e^{k\gamma_2^{(2)} (y_2+h)}; \\
& \Gamma_{mj}^{(2)(n)} = -k U_{1n}^{(2)} \left(\gamma_{mj}^{(2)(11)} + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \gamma_1^{(2)} \gamma_{mj}^{(2)(21)} \right) e^{k\gamma_1^{(2)} (y_2+h)} + U_{2n}^{(2)} \left\{ -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \left(\gamma_{mj}^{(2)(22)} \gamma_2^{(2)} - \tau_{mj}^{(12)(2)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \tau_{mj}^{(22)(2)} \gamma_2^{(2)2} \right) - k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} (y_2 + h) \left(\gamma_{mj}^{(2)(12)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{mj}^{(2)(22)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \right) \gamma_{mj}^{(2)(12)} \right] \right\} e^{k\gamma_2^{(2)} (y_2+h)}; \\
& \Gamma_2^{(2)(n)} = k U_{1n}^{(2)} \left(\theta_2^{(2)(11)} - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \varsigma_{21}^{(21)(2)} \gamma_1^{(2)} \right) e^{k\gamma_1^{(2)} (y_2+h)} + U_{2n}^{(2)} \left\{ -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \left(2\varsigma_{22}^{(12)(2)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \varsigma_{21}^{(22)(2)} \right) + k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} (y_2 + h) \left(\theta_2^{(2)(12)} - \varsigma_{21}^{(22)(2)} \gamma_2^{(2)} \right) + \left(1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{(2)} \right) \theta_2^{(2)(12)} \right] \right\} e^{k\gamma_2^{(2)} (y_2+h)};
\end{aligned}$$

Трансформанты характеристик напряженно-деформированного состояния определяются согласно (2.4) с учетом значений корней характеристического уравнения (1.2) и условий контакта (1.5) и (1.6).

Для того, чтобы перейти в формулах (2.4) к оригиналам следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. - Киев: Наук. думка, 1983. - 296 с.

Получено 20.02.2009г.

УДК 539.3

В.М. Быстров, В.С. Зеленский

ЗАТУХАНИЕ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА ПРИ ПРОДОЛЬНОМ И ПОПЕРЕЧНОМ СЖАТИИ МАТЕРИАЛОВ, АРМИРОВАННЫХ КОМПОНЕНТАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Введение. Одним из актуальных вопросов статики композитов является исследование совместного влияния нагрузки и структуры композитного материала на затухание краевых эффектов. В работе [1] рассмотрены особенности расчетных схем для анализа затухания краевых эффектов в материалах слоистой и волокнистой структуры с изотропными компонентами для случаев поверхностной нагрузки действующей вдоль и перпендикулярно направлению расположения армирующих компонентов. В работе [2] решена задача определения параметров затухания краевого эффекта в слоистом композитном материале при *равномерном одноосном продольном* сжатии слоев наполнителя, а в работе [3] – в волокнистом композитном материале при *равномерном одноосном поперечном* сжатии приповерхностных волокон. Показано, что максимальная протяженность зоны краевого эффекта в случае поперечного сжатия волокнистого материала меньше, чем в случае продольного сжатия слоистого материала, и при ее определении с точностью 1%, не превышает полтора параметра структуры. В случае продольного сжатия эта величина находится в пределах двух параметров структуры.

В настоящей работе рассмотрена задача определения параметров затухания краевого эффекта в материалах слоистой и волокнистой структуры при изменении количества ненагруженных армирующих компонентов. В первом случае это слои наполнителя, во втором – приповерхностные волокна. Исследован вопрос о зависимости зоны краевого эффекта от соотношения между периодом поверхностной нагрузки, связанным с количеством ненагруженных армирующих компонентов, и геометрическими параметрами структуры слоистого и волокнистого материалов.

Расчетная схема, которая используется в данной работе,

© Быстров В.М., Зеленский В.С., 2009

включает смешанную краевую задачу теории упругости кусочно-однородных тел и количественный критерий затухания краевого эффекта для нормальных напряжений. Краевая задача решается с применением метода сеток на основе базовых схем [4].

1. Постановка задачи определения параметров затухания краевого эффекта. Рассматривается задача определения параметров затухания краевого эффекта – зоны и длины затухания краевого эффекта в композитном материале регулярной структуры, армированном компонентами прямоугольной формы. Исследуется затухание краевого эффекта в материале, армированном плоскими слоями при *одноосном продольном сжатии* армирующих слоев (рис. 1, а) и в материале, армированном прямолинейными однонаправленными волокнами квадратного поперечного сечения при *одноосном поперечном нагружении* приповерхностных волокон (рис. 1, б).

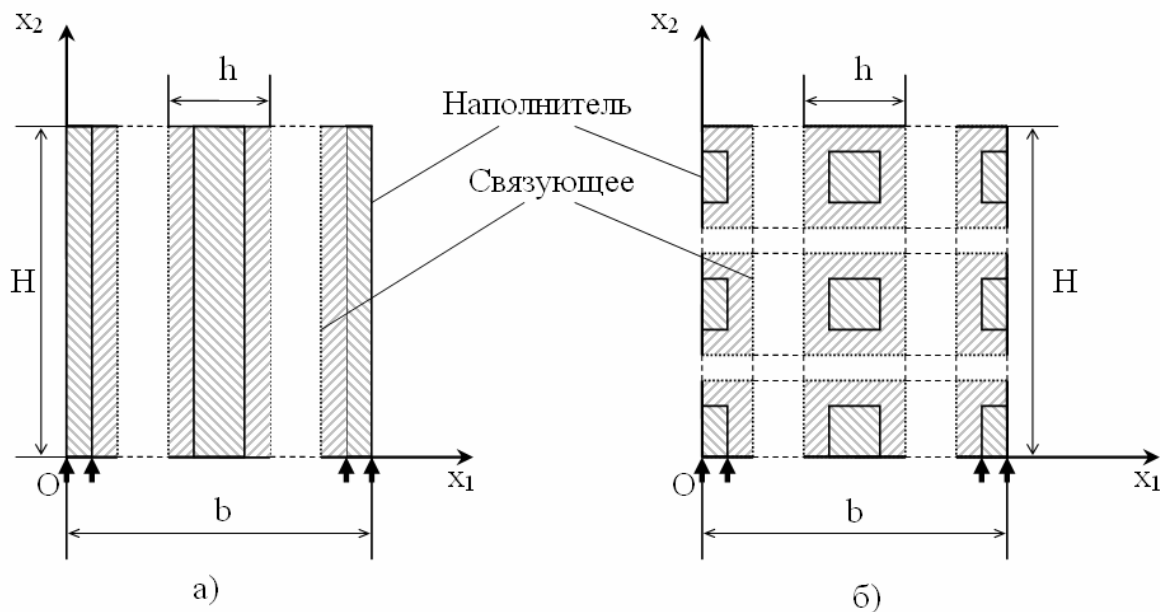


Рисунок 1

Поверхностная нагрузка p действует в направлении оси Ox_2 и прикладывается к армирующим компонентам (слоям наполнителя или приповерхностным волокнам): $p(x_1) = \sigma_{22}(x_1, 0) = p^0$, $|x_1| \leq 0.5h_a + kb$, $k = 0, 1, \dots$; $b = (M - 1)h$. Здесь b – период кусочно-постоянной поверхностной нагрузки, h – параметр структуры материала, h_a – поперечный размер армирующего компонента в направлении Ox_2 , M – количество расчетных элементов в

направлении оси Ox_1 . Вдоль оси Ox_3 нагрузка не изменяется. Затухание краевого эффекта рассматривается в направлении оси Ox_2 .

Регулярность композитной структуры, периодический характер поверхностной нагрузки и наличие установившегося при затухании краевого эффекта поля напряжений позволяют рассматривать задачу для расчетной области $\bar{\Omega}$ конечных размеров: $\bar{\Omega} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \bar{\Omega}^{mn} = \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq b; \quad 0 \leq x_2 \leq H\}$, $m = \overline{1, M}$, $n = \overline{1, N}$, где M , N соответственно количество расчетных элементов в направлении Ox_1 и Ox_2 . Здесь Ω^{mn} – расчетные элементы микроструктуры материала (далее – расчетные элементы), $\Omega^{mn} = \Omega_m^{mn} + \Omega_a^{mn}$, где Ω_m^{mn} , Ω_a^{mn} – области, которые занимают соответственно матрица и армирующий компонент. В случае армирующих элементов, которым соответствуют плоские слои, расчетная область в направлении Ox_2 включает $N = 1$ расчетный элемент и в направлении Ox_1 – M расчетных элементов. При этом размер расчетных элементов в направлении Ox_2 совпадает с размером H расчетной области. Размер H соответствует условию установившегося вдоль оси Ox_2 напряженного состояния с заданной точностью и условию независимости параметров затухания краевого эффекта от этого размера. Размер расчетной области в направлении оси Ox_1 определяется периодом b поверхностной нагрузки.

Граничные условия краевой задачи на участке $\{0 \leq x_1 \leq b, x_2 = 0\}$ границы расчетной области $\bar{\Omega}$ определяют поверхностную нагрузку. На участках $\{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H\}$ и $\{x_1 = b, 0 \leq x_2 \leq H\}$ границы расчетной области граничные условия соответствуют периодическому характеру напряженного состояния и являются смешанными однородными условиями. Граничные условия на участке $\{0 \leq x_1 \leq b, x_2 = H\}$ границы расчетной не допускают перемещение и вращение расчетной области как целого и также являются смешанными однородными условиями.

Для определения границы $\Gamma_\rho(x_1, x_2)$ зоны краевого эффекта и длины λ_ρ затухания краевого эффекта с точностью $\rho\%$ используются следующие условия:

$$\tilde{\rho}(x_1, x_2) \Big|_{x \in \Gamma_\rho} = \rho, \quad (1)$$

где

$$\tilde{\rho} = 100(\sigma(x) - \sigma_{ycm}) / (p(x_1, 0) - \sigma_{ycm}), \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma_\rho \quad (2)$$

для случая продольного сжатия слоистого композита и

$$\tilde{\rho} = 100(\sigma(x) \Big|_{x \in \Omega^{mn}} - \sigma(x) \Big|_{x \in \Omega^{mN}}) / (p(x_1, 0) - \sigma(x) \Big|_{x \in \Omega^{mN}}) \quad \text{для}$$

$$x^{mn} = x^{mN},$$

$$m = \overline{1, M}, \quad n = \overline{1, (N-1)} \quad (3)$$

для случая поперечного сжатия волокнистого композита.

В (2) $\sigma_{ycm} = \sigma(x_1, H)$ – установившиеся напряжения на границе $x_2 = H$ расчетной области в направлении затухания краевого эффекта, $p(x_1) = \sigma(x_1, 0)$ – поверхностная нагрузка на границе $x_2 = 0$ расчетной области Ω , $\sigma(x) = \sigma_{22}(x)$. В (3) нормальные напряжения $\sigma(x) \Big|_{x \in \Omega^{mn}} = \sigma_{22}^{(mn)} = \sigma^{(mn)}$ и $\sigma(x) \Big|_{x \in \Omega^{mN}} = \sigma_{22}^{(mN)} = \sigma^{(mN)}$ сравниваются при одинаковых значениях координат в локальных системах координат $O^{mn}x_1^{mn}x_2^{mn}$ и $O^{mN}x_1^{mN}x_2^{mN}$, которые связаны с соответствующими волокнами.

Длина затухания краевого эффекта λ_ρ определяется как максимальная протяженность зоны краевого эффекта в направлении затухания краевого эффекта, что соответствует условию

$$\lambda_\rho = \max_{x_1, x_2 \in \Gamma_\rho} (x_2). \quad (4)$$

3. Сравнительный анализ результатов определения зоны краевого при продольном и поперечном сжатии армированных материалов. Расчеты проводились для следующих значений упругих и геометрических характеристик компонент материала: $E_a/E_m = 100$, $\nu_a = \nu_m = 0,3$, где E_a , ν_a и E_m , ν_m – соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона армирующих компонентов и матрицы, $c_a = 0,5$ – концентрация армирующих компонентов.

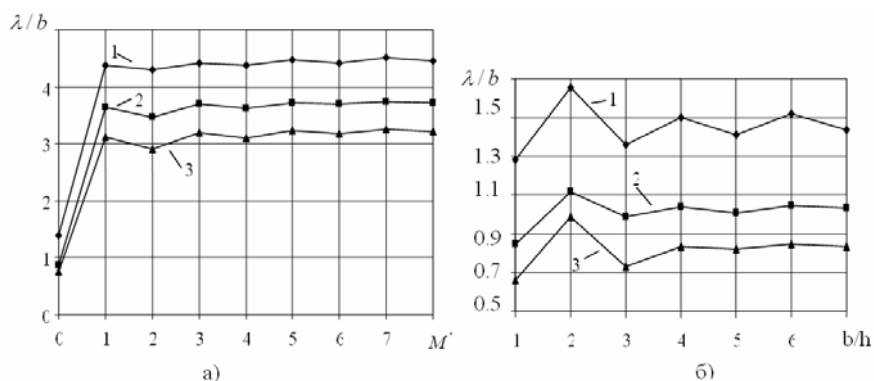


Рисунок 2

На рис.2, а показано изменение максимальной протяженности зоны краевого эффекта при увеличении периода поверхностной нагрузки, когда увеличивается количество M' ненагруженных слоев наполнителя в расчетной области композитного материала. Кривая 1 соответствует определению протяженности зоны краевого эффекта с точностью 1%, кривая 2 – 5%, кривая 3 – 10%. В общем случае такая зависимость носит немонотонный характер. При последовательном увеличении количества ненагруженных слоев наполнителя максимальная протяженность зоны краевого эффекта в материале понижается при их четном количестве. Изменение протяженности зоны краевого эффекта при увеличении количества ненагруженных слоев в случае их только четного или нечетного количества носит монотонный характер.

На рис.2, б показано изменение максимальной протяженности зоны краевого эффекта при увеличении периода поверхностной нагрузки, когда увеличивается количество ненагруженных приповерхностных волокон. Кривая 1 соответствует определению протяженности зоны краевого эффекта с точностью 1%, кривая 2 – 5%, кривая 3 – 10%. В общем случае указанные зависимости носят немонотонный характер. При последовательном увеличении количества ненагруженных приповерхностных волокон максимальная протяженность зоны краевого эффекта для материала в целом понижается при их четном количестве, когда сечение $x_1 = b/2$ располагается в материале матрицы.

Представленные зависимости имеют качественный одинаковый характер для случаев продольного и поперечного деформирования армированных материалов, однако, существенно отличаются в количественном выражении. Это объясняется проявлением

анизотропии слоистого материала в плоскости x_1Ox_2 при его продольном деформировании.

4. Выводы. Как видно из представленных результатов, установившееся значение максимальной протяженности зоны краевого эффекта в случае продольного деформирования материала слоистой структуры превышает соответствующее значение для материала волокнистой структуры при его поперечном деформировании. Это превышение составляет: в 3 раза – при точности 1%, в 3,6 раза – при точности 5%, в 3,8 раза – при точности 10%. Такое отличие характерно при сравнении анизотропных и изотропных материалов. При увеличении периода b поверхностной нагрузки длина затухания краевого эффекта в слоистом материале существенно увеличивается при наличии ненагруженных слоев по сравнению с их равномерной нагрузкой. Это происходит вследствие увеличения анизотропии слоистого материала в плоскости x_1Ox_2 на макромеханическом уровне рассмотрения. Аналогичное изменение в случае поперечного сжатия волокнистого материала является незначительным. В случае поперечного сжатия волокнистого материала конструктивная анизотропия материала в наибольшей степени проявляется при одном ненагруженном в расчетной области включении, когда период нагрузки равен двум параметрам структуры. Дальнейшее увеличение периода нагрузки приводит к уменьшению анизотропии материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быстров В.М. Влияние неоднородности материала на зону краевого эффекта Сен-Венана при плоской деформации полуограниченной трансверсально-изотропной матрицы с покрытием // Доп. НАН України. – 2004. – №1. – С. 38-42.
2. Быстров В.М., Куханенко Ю.В. Анализ затухания краевых эффектов Сен-Венана в трансверсально-изотропной матрице с изотропным покрытием // Механика композитных материалов. – 2002. – 38, №2. – С. 147-160.
3. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.В., Василенко А.Т. и др. Численные методы // Механика композитов: В 12-и т. / Под общей ред. А.Н. Гузя. Т.11. – Киев: “А.С.К.”, 2002. – 448 с.
4. Bystrov V.M. Analysis of the Decay of Edge Effects in Laminated Materials on the Basis of Representative Element // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, No 6. – P. 826-835.

Получено 23.02.2009г.

УДК 539.3

Ю.П. Глухов

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РЕАКЦИИ МНОГОСЛОЙНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ. СЖИМАЕМЫЙ МАТЕРИАЛ

В данной статье в рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями [1] исследовано влияние начальных напряжений и скорости движения поверхностной нагрузки на значения корней характеристических уравнений для слоистого сжимаемого полупространства.

§1. При решении пространственных задач об установившемся движении многослойного предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки с использованием интегрального преобразования Фурье представление решений зависит от корней характеристических уравнений трансформированных дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка, описывающих движение элементов многослойной среды. В случае однородного начального напряженного состояния

$$\lambda_1^{\{s\}} \neq \lambda_2^{\{s\}} \neq \lambda_3^{\{s\}}; S_0^{\{s\}11} \neq S_0^{\{s\}22} \neq S_0^{\{s\}33} \quad (1)$$

эти уравнения имеют вид

$$a_0^{\{s\}} \eta^{\{s\}6} - a_1^{\{s\}} \eta^{\{s\}4} + a_2^{\{s\}} \eta^{\{s\}2} - a_3^{\{s\}} = 0; s = \overline{1, N+1}. \quad (2)$$

Здесь s - номер слоя. Подстилающее полупространство имеет номер $N+1$. В случае, если материал слоя - сжимаемый, то коэффициенты уравнения (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_0^{\{s\}} &= c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2}; \quad a_1^{\{s\}} = -k_1^2 \left[c_{33}^{\{s\}2} (c_{11}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2}) + c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - \right. \\ &\quad \left. - c_{32}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - v^2 \cos^2 \phi (c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{31}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2}) \right] - k_2^2 \left[c_{31}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + \right. \\ &\quad \left. + c_{33}^{\{s\}2} (c_{21}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2}) - c_{31}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} \right]; \quad a_2^{\{s\}} = k_1^4 \left\{ c_{11}^{\{s\}2} (c_{12}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2}) + \right. \\ &\quad \left. + c_{12}^{\{s\}2} c_{31}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - c_{12}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - v^2 \cos^2 \phi \left[c_{11}^{\{s\}2} (c_{32}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2}) + c_{12}^{\{s\}2} (c_{31}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2}) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c_{13}^{\{s\}2} \left(c_{31}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} \right) - d_{13}^{\{s\}2} \Big] \Big\} + k_2^4 \left\{ c_{22}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{31}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} - \right. \\
& - c_{21}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} - v^2 \sin^2 \phi \left[c_{32}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{31}^{\{s\}2} \left(c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{33}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} \right) - \right. \\
& \left. \left. - d_{23}^{\{s\}2} \right] \right\} + k_1^2 k_2^2 \left[c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{22}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{33}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + \right. \\
& + c_{31}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) - c_{11}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} - c_{22}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} - c_{33}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} + 2d_{12}^{\{s\}2} d_{13}^{\{s\}2} d_{23}^{\{s\}2} + \\
& + v^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \left(c_{31}^{\{s\}2} + c_{32}^{\{s\}2} + c_{33}^{\{s\}2} \right) \Big]; \quad a_3^{\{s\}} = -k_1^6 \left[c_{11}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - \right. \\
& - v^2 \cos^2 \phi \left(c_{11}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} + c_{11}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + v^4 \cos^4 \phi \left(c_{11}^{\{s\}2} + c_{12}^{\{s\}2} + c_{13}^{\{s\}2} \right) \Big] - \\
& - k_2^6 \left[v^4 \sin^4 \phi \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) - v^2 \sin^2 \phi \left(c_{21}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \right) + \right. \\
& + c_{21}^{\{s\}2} c_{22}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} \Big] - k_1^4 k_2^2 \left\{ c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} - c_{13}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} - \right. \\
& - v^2 \cos^2 \phi \left[c_{11}^{\{s\}2} \left(c_{22}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{12}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{23}^{\{s\}2} \right) + c_{13}^{\{s\}2} \left(c_{21}^{\{s\}2} + c_{22}^{\{s\}2} \right) - d_{12}^{\{s\}2} \right] \Big\} - \\
& - k_1^2 k_2^4 \left[c_{22}^{\{s\}2} \left(c_{11}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} + c_{21}^{\{s\}2} c_{13}^{\{s\}2} \right) + c_{21}^{\{s\}2} c_{12}^{\{s\}2} c_{23}^{\{s\}2} - c_{23}^{\{s\}2} d_{12}^{\{s\}2} - v^6 \cos^2 \phi \sin^4 \phi \right];
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\tilde{\rho}^{\{s\}} c_{ij}^{\{s\}2} = \tilde{\omega}_{ijji}^{\{s\}}; \quad \tilde{\rho}^{\{s\}} d_{ij}^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{i122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}}; \quad k_1, k_2 - \text{параметры двойного}$$

преобразования Фурье, v - скорость движения поверхностной нагрузки, ϕ - угол, который образует траектория движения нагрузки с положительным направлением оси абсцисс (нагрузка движется прямолинейно с постоянной скоростью), $\tilde{\rho}^{\{s\}}$ - плотность соответствующего элемента многослойной среды в естественном состоянии. Формулы для вычисления компонентов тензора $\tilde{\omega}$ для различных вариантов теорий конечных и малых начальных деформаций приведены в [1].

Так как уравнения (2) - бикубические алгебраические уравнения, то их решение можно получить классическим способом. Приведем уравнения (2) заменой

$$\eta^{\{s\}2} = \mu^{\{s\}2} - \frac{a_1^{\{s\}}}{3a_0^{\{s\}}} \tag{4}$$

к виду

$$\mu^{\{s\}6} + p^{\{s\}} \mu^{\{s\}2} + q^{\{s\}} = 0, \tag{5}$$

где

$$p^{\{s\}} = -\frac{a_1^{\{s\}2}}{3a_0^{\{s\}2}} + \frac{a_2^{\{s\}}}{a_0^{\{s\}}}; \quad q^{\{s\}} = \frac{2a_1^{\{s\}3}}{27a_0^{\{s\}3}} - \frac{a_1^{\{s\}} a_2^{\{s\}}}{3a_0^{\{s\}2}} + \frac{a_3^{\{s\}}}{a_0^{\{s\}}}.$$

В случае, если дискриминант $\Delta^{\{s\}} = \frac{q^{\{s\}2}}{4} + \frac{p^{\{s\}3}}{27} = 0$, уравнения (5) при $p^{\{s\}} \neq 0$, $q^{\{s\}} \neq 0$ имеют один простой и один двукратный корень

$$\mu_1^{\{s\}2} = \frac{3q^{\{s\}}}{p^{\{s\}}}; \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = -\frac{3q^{\{s\}}}{2p^{\{s\}}}. \quad (6)$$

Если $\Delta^{\{s\}} \neq 0$, то уравнение (5) имеет три различных корня. При $\Delta^{\{s\}} > 0$ уравнения (6) имеют один действительный корень и два комплексных

$$\mu_1^{\{s\}2} = u_0^{\{s\}} + v_0^{\{s\}}; \quad \mu_{2,3}^{\{s\}2} = -\frac{u_0^{\{s\}} + v_0^{\{s\}}}{2} \pm i \frac{(u_0^{\{s\}} - v_0^{\{s\}})\sqrt{3}}{2}. \quad (7)$$

Здесь

$$u_0^{\{s\}} = \sqrt[3]{-\frac{q^{\{s\}}}{2} + \sqrt{\Delta^{\{s\}}}}; \quad v_0^{\{s\}} = -\frac{p^{\{s\}}}{3u_0^{\{s\}}};$$

При $\Delta^{\{s\}} < 0$ все три корня уравнения (5) будут действительными и различными

$$\begin{aligned} \mu_1^{\{s\}2} &= 2 \left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| \cos \frac{\phi^{\{s\}}}{3}; \quad \mu_2^{\{s\}2} = 2 \left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| \cos \frac{\phi^{\{s\}} + 2\pi}{3}; \\ \mu_3^{\{s\}2} &= 2 \left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| \cos \frac{\phi^{\{s\}} + 4\pi}{3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\left| \sqrt[3]{r^{\{s\}}} \right| = \left| \sqrt{-\frac{p^{\{s\}}}{3}} \right|; \quad \cos \phi^{\{s\}} = -\frac{q^{\{s\}}}{2r^{\{s\}}}.$$

Таким образом, при $\Delta^{\{s\}} = 0$ в случае, если $p^{\{s\}} \neq 0$ и $q^{\{s\}} \neq 0$ и имеют разные знаки, уравнение (2) имеет два действительных двукратных корня и два чисто мнимых. Если $p^{\{s\}} \neq 0$ и $q^{\{s\}} \neq 0$ и имеют одинаковые знаки, уравнение (2) имеет два действительных корня и два двукратных чисто мнимых.

При $\Delta^{\{s\}} > 0$, если $\mu_1^{\{s\}2} > 0$ уравнение (2) имеет два действительных корня и четыре комплексных, если $\mu_1^{\{s\}2} < 0$ - шесть комплексных.

При $\Delta^{\{s\}} < 0$ уравнение (2) имеет шесть различных корней. Действительные корни будут соответствовать положительным значениям корней уравнения (5) и определяться знаком тригонометрической функции в выражениях (8).

§2. Так как выражения (3) для коэффициентов уравнений (2) - довольно громоздкие выражения, аналитическое исследование корней характеристического уравнения представляется сложным. Численные исследования были проведены для сжимаемого материала с гармоническим потенциалом

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda s_1^2 + \mu s_2,$$

где λ , μ - постоянные Ламе. Величины s_1 и s_2 представляют собой первый и второй инварианты тензора деформаций линейной теории упругости, отнесенные к главным осям

$$s_1 = (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + (\lambda_3 - 1);$$

$$s_2 = (\lambda_1 - 1)^2 + (\lambda_2 - 1)^2 + (\lambda_3 - 1)^2.$$

Для теории конечных (больших) начальных деформаций и первого варианта малых начальных деформаций выражения для определения составляющих тензора $\tilde{\omega}$ при условии (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1111} &= \frac{\lambda_1(\lambda + 2\mu)}{\lambda_2\lambda_3}; \quad \tilde{\omega}_{2222} = \frac{\lambda_2(\lambda + 2\mu)}{\lambda_1\lambda_3}; \quad \tilde{\omega}_{3333} = \frac{\lambda_3(\lambda + 2\mu)}{\lambda_1\lambda_2}; \\ \tilde{\omega}_{1122} &= \tilde{\omega}_{2211} = \frac{\lambda}{\lambda_3}; \quad \tilde{\omega}_{1133} = \tilde{\omega}_{3311} = \frac{\lambda}{\lambda_2}; \quad \tilde{\omega}_{2233} = \tilde{\omega}_{3322} = \frac{\lambda}{\lambda_1}; \\ \tilde{\omega}_{1212} &= \tilde{\omega}_{2121} = \frac{2\mu - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)}{\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)}; \quad \tilde{\omega}_{1313} = \tilde{\omega}_{3131} = \frac{\lambda_3\tilde{\omega}_{1212}}{\lambda_2}; \\ \tilde{\omega}_{2323} &= \tilde{\omega}_{3232} = \frac{\lambda_3\tilde{\omega}_{1212}}{\lambda_1}; \quad \tilde{\omega}_{1221} = \frac{\lambda_1[(2\mu + \lambda)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1) + \lambda(\lambda_3 - 2)]}{\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)}; \\ \tilde{\omega}_{2112} &= \frac{\lambda_2^2\tilde{\omega}_{1221}}{\lambda_1^2}; \quad \tilde{\omega}_{3113} = \frac{2\mu[\lambda_1 + (\lambda_3 - 1)(\lambda_1 + \lambda_2)] + \lambda\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}; \\ \tilde{\omega}_{1331} &= \frac{2\mu[\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - 1)] - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)}{\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)}; \\ \tilde{\omega}_{2332} &= \frac{2\mu[\lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 - 1)] - \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)(\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)}; \\ \tilde{\omega}_{3223} &= \frac{2\mu[(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_3 - \lambda_1] + \lambda\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)}. \end{aligned}$$

Учтем, что $\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$, где ν - коэффициент Пуассона, и пронормируем все величины по величине μ/ρ . Численные расчеты проводились для $\nu = 0,3$. Начальные удлинения менялись в

диапазоне от 0,8 до 1,2. Целью исследования была оценка возможных значений корней уравнения (2) и влияние начальных деформаций и скорости движения поверхностной нагрузки на значения корней характеристического уравнения (2) и соответственно на выбор решения исследуемой задачи.

Поверхность, соответствующая функции $\Delta^{\{s\}}$, при фиксированных значениях параметров $\lambda_i^{\{s\}}$ ($i = 1, 2, 3$), v и ϕ имеет вид, показанный на рис.1. Причем форма поверхности не изменяется в диапазоне $0.8 \leq \lambda_i^{\{s\}} \leq 1.2$, $0 \leq v^2 \leq c_{11}^{\{s\}2}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Анализ численных значений $\Delta^{\{s\}}$ позволяет утверждать, что дискриминант уравнения (2) принимает в указанной области исследуемых параметров неотрицательные значения ($\Delta^{\{s\}} \geq 0$).

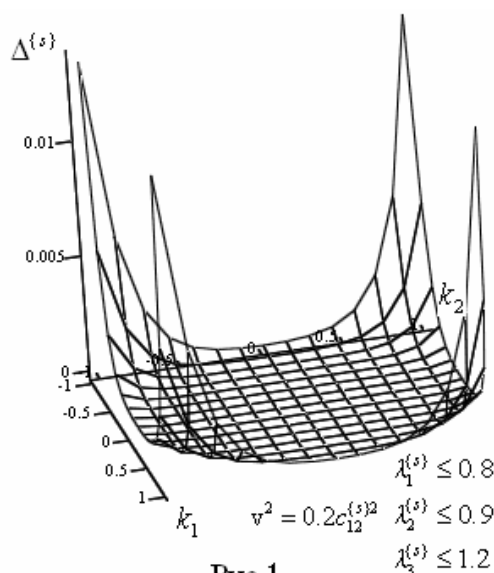


Рис. 1

Рисунок 1

На рис. 2 и 3 проиллюстрировано влияние скорости и траектории движения нагрузки на значение дискриминанта уравнения (2). Как видно из рисунков начальные напряжения, скорость движения нагрузки и направление ее движения существенно влияют на значение функции $\Delta^{\{s\}}$. Очевидно, что при определенной скорости нагрузки влияние начальных напряжений уменьшается. От направления движения нагрузки зависит расположение области наименьшего влияния начальных напряжений.

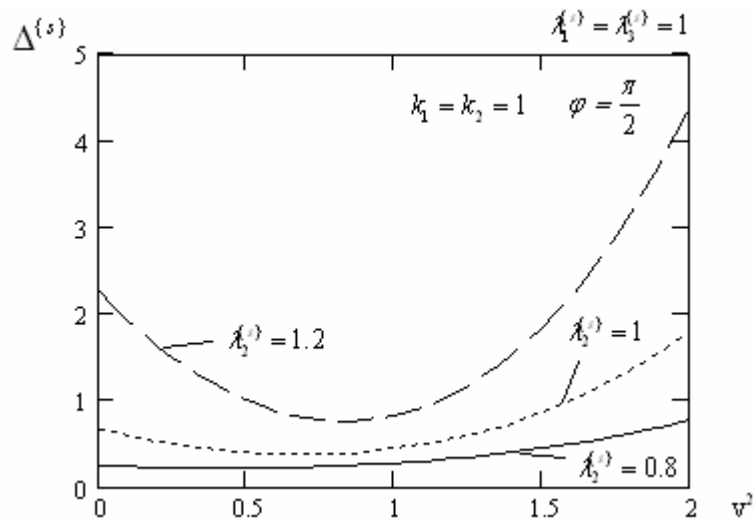


Рисунок 2

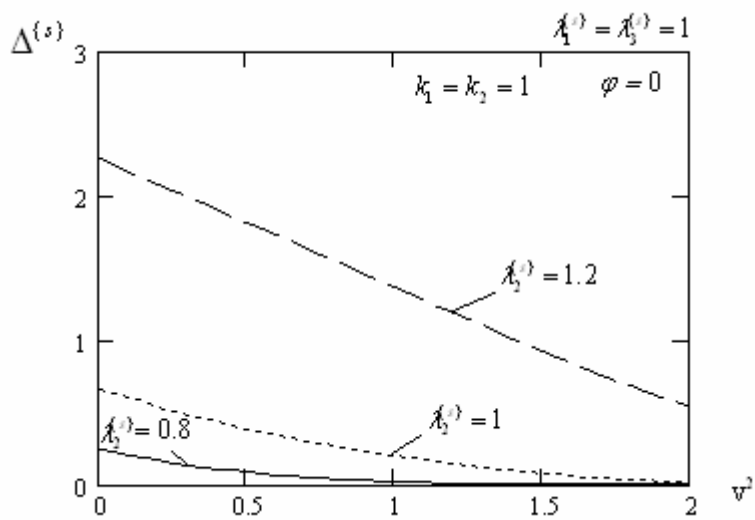


Рисунок 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. - Киев: Наук. думка, 1983. - 296 с.

Получено 28.02.2009г.

О ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Введение. Одним из направлений теории приближений является изучение методов приближения интегралов. Наиболее распространенными в приложениях являются квадратурные формулы, позволяющие приближенно находить значение интеграла в виде линейной комбинации нескольких значений функции: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n c_k f(x_k)$. При этом функция f принадлежит некоторому классу функций. Экстремальная задача теории квадратур состоит в отыскании наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и вычислении её погрешности. Общая постановка экстремальной задачи теории квадратур и первые основополагающие результаты принадлежат С.М. Никольскому и А.Н. Колмогорову. Решению таких задач для различных классов функций посвящено большое количество работ (см., например, [1]-[4] и библиографию к ним).

В настоящей работе рассматриваются классы функций $W^r H_1^\omega$ ($r = 1, 2, \dots$), представляющие собой множество 2π -периодических функций $f(t)$, у которых $(r-1)$ -я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)}(t) \in H_1^\omega$, H_1^ω - множество 2π -периодических измеримых функций $f(t)$ таких, что $\omega(f, t)_1 = \sup_{|h| \leq t} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \omega(t)$, $\omega(t)$ - заданный модуль непрерывности. Будем рассматривать квадратурные формулы вида

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \sum_{k=1}^n c_k f(x_k) + R_n(f, \vec{c}_n, \vec{x}_n) \quad (1)$$

где $\vec{c}_n = \{c_k\}_{k=1}^n$, $c_k \in R$ - коэффициенты, $\vec{x}_n = \{x_k\}_{k=1}^n$, $x_k \in [0, 2\pi)$ - узлы квадратурной формулы (1). Погрешностью квадратурной формулы (1) на классе Ω называют величину

$$R_n(\Omega, \vec{c}_n, \vec{x}_n) = \sup_{f \in \Omega} |R_n(f, \vec{c}_n, \vec{x}_n)|.$$

Квадратурная формула с узлами $\vec{c}_n^*$ и коэффициентами $\vec{x}_n^*$ называется оптимальной на классе Ω , если

$$R_n(\Omega) = \inf_{\vec{c}_n, \vec{x}_n} R_n(\Omega, \vec{c}_n, \vec{x}_n) = R_n(\Omega, \vec{c}_n^*, \vec{x}_n^*).$$

Для $r = 1, 3, 5, \dots$, $n = 1, 2, \dots$ и любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ в [5] найдена погрешность формулы прямоугольников $R_n(W^r H_1^\omega, \{\frac{2\pi}{n}\}, \{\frac{2k\pi}{n}\})$ и доказано, что она является наилучшей для класса $W^1 H_1^\omega$. В [6], [7] для любого выпуклого $\omega(t)$ доказано, что наилучшей для классов $W^2 H_1^\omega$ и $W^3 H_1^\omega$ является формула прямоугольников.

В настоящей работе для $r = 4, 6, 8, \dots$, $n = 1, 2, \dots$ и выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ найдена погрешность формулы прямоугольников на классе $W^r H_1^\omega$.

Вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть $0 < h < \pi/n$, $-\pi/n < t_1 < \dots < t_k < \pi/n - h$. Тогда для любой четной $2\pi/n$ -периодической функции $f \in L_1$ справедливы неравенства

$$-\int_0^h f(t)dt + \int_{\pi/n-h}^{\pi/n} f(t)dt \leq \frac{1}{4n} \omega(f, 2h)_1 \quad (2)$$

$$-\int_0^h f(t)dt + \int_{\pi/n-h}^{\pi/n} f(t)dt \leq \frac{1}{4n} \omega(f, 2h)_1 + \sum_{i=1}^k (-1)^i \int_{t_i}^{t_i+2h} f(t)dt + (1 - (-1)^k) \int_{\pi/n-h}^{\pi/n} f(t)dt \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & -\int_0^h f(t)dt + \int_{\pi/n-h}^{\pi/n} f(t)dt \leq \frac{1}{4n} \omega(f, 2h)_1 - 2 \int_0^h f(t)dt + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \int_{t_i}^{t_i+2h} f(t)dt + \\ & + (1 - (-1)^{k+1}) \int_{\pi/n-h}^{\pi/n} f(t)dt \end{aligned} \quad (4)$$

Лемма 1 является очевидным следствием леммы 1 в [5].

При каждом $n = 1, 2, \dots$, $r = 1, 2, \dots$ обозначим $g_{n,r}(t) = (-1)^{[(r+1)/2]+1} D_r(nt)$, где $[...] -$ целая часть числа,

$D_r(t) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-r} \cos(mt - \pi r / 2)$ - функция Бернулли.

Лемма 2. Пусть $n = 1, 2, \dots$, $r = 3, 5, 7, \dots$. Справедливы следующие неравенства

$$|g_{n,r}(a) - g_{n,r}(b)| \leq g_{n,r}(|a - b|) \text{ для любых } a, b \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right], \text{ таких что}$$

$$|a - b| \leq \frac{\pi}{2n} \quad (5)$$

$$0 \leq g_{n,r}(t) - g_{n,r}(\pi/n - t) \leq \frac{1}{2} g_{n,r}(\pi/n - t) \text{ для всех } t \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right],$$

$$r = 5, 7, 9, \dots \quad (6)$$

$$0 \leq g_{n,3}(t) - g_{n,3}(\pi/n - t) \leq \frac{1}{2} g_{n,3}(\pi/n - t) \text{ для всех } t \in \left[\frac{\varsigma}{2}, \frac{\pi}{2n}\right], \quad (7)$$

где $\varsigma \in (0, \pi/(2n))$ - нуль функции $D_4(nt)$.

Доказательство. Ясно, что $g_{n,r}(t) - g_{n,r}(\pi/n - t) = 2^{1-r} g_{n,r}(2t) \geq 0$ для всех $t \in [0, \pi/(2n)]$, откуда, принимая во внимание свойства функций Бернулли (см., например, [8, стр. 59-60]), получаем (5). Далее, как показано в [9], при любом $s = 1, 2, \dots$

$$D_s(t) = \frac{\pi}{4} \sum_{\mu=0}^{\infty} 2^{-\mu s} \varphi_{s-1}(2^\mu t), \text{ где } \varphi_s(t) - s\text{-й периодический интеграл, в}$$

среднем равный 0 на периоде, от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$, а тогда

$$g_{n,r}(t) - \frac{3}{2} g_{n,r}\left(\frac{\pi}{n} - t\right) = (-1)^{[(r+1)/2]+1} \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} \varphi_{r-1}(nt) + \frac{5}{2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} \varphi_{r-1}(2^\mu nt) \right) \leq$$

$$\leq (-1)^{[(r+1)/2]+1} \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} \varphi_{r-1}(nt) + \frac{5}{2} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} 2^\mu \varphi_{r-1}(nt) \right) \leq 0 \text{ при любом } n = 1, 2, \dots,$$

$$t \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right], \quad r = 5, 7, 9, \dots \text{ Неравенство (7) может быть доказано}$$

непосредственной проверкой.

Основные результаты.

Теорема. Пусть $n = 1, 2, \dots$, $r = 4, 6, 8, \dots$. Для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$

$$R_n \left(W^r H_1^\omega, \left\{ \frac{2\pi}{n} \right\}, \left\{ \frac{2k\pi}{n} \right\} \right) = \frac{2}{n^r} \int_0^\xi \omega'(2t) |D_r(nt)| dt,$$

где $\xi \in [0, \pi/n]$ - нуль функции Бернулли $D_r(nt)$.

Доказательство. В силу теоремы 1.2.1 [10, стр.19],

$$R_n \left(W^r H_1^\omega, \left\{ \frac{2\pi}{n} \right\}, \left\{ \frac{2k\pi}{n} \right\} \right) = 2\pi \sup_{f \in W^r H_{1,n}^\omega} f(0), \text{ где } W^r H_{1,n}^\omega - \text{множество } 2\pi/n -$$

периодических функций $f(x) \in W^r H_1^\omega$ со средним значением 0 на периоде. Пусть $f(\omega, x)$ - $2\pi/n$ -периодическая четная функция, определенная равенством

$$f(\omega, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2n} \omega'(2x), & \text{если } x \in (0, \xi], \\ 0, & \text{если } x \in (\xi, \pi/n] \end{cases}$$

Поскольку $f(\omega, x) \in H_1^\omega$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} 2\pi \sup_{f \in W^r H_{1,n}^\omega} f(0) &= \frac{2}{n^r} \sup_{f \in H_{1,n}^\omega} \int_0^{2\pi} f(t) g_{n,r}(t) dt \geq \frac{2}{n^r} \int_0^{2\pi} f(\omega, t) g_{n,r}(t) dt = \\ &= \frac{2}{n^r} \int_0^\xi \omega'(2t) |D_r(nt)| dt \end{aligned}$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству неравенства

$$\int_0^{2\pi} f(t) g_{n,r}(t) dt \leq \int_0^{2\pi} f(\omega, t) g_{n,r}(t) dt \quad (8)$$

для любой $2\pi/n$ -периодической функции $f(t) \in H_1^\omega$. Рассуждая аналогично [11, лемма 2], получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) g_{n,r}(t) dt &\leq 2n \int_0^\xi g_{n,r-1}(t) \left(F(t) + F\left(\frac{\pi}{n} - t\right) \right) dt + \\ &+ 2n \int_H \left(g_{n,r-1}\left(\frac{\pi}{n} - t\right) - g_{n,r-1}(t) \right) \cdot (L(t) - F(t)) dt + 2n \int_\xi^{\pi/n-\xi} g_{n,r-1}(t) (F(t) - F_*(t)) dt \end{aligned} \quad (9)$$

где $F(t) = -\int_0^t f(\tau) d\tau$, $F_*(t) = \sup_{0 \leq x \leq t \leq z \leq \pi/n} ((z-t)F(x) + (t-x)F(z))/(z-x)$,

$$L(t) = 2F_*(\pi/(2n)) - ((2n)/\pi) F_*(\pi/(2n)) t,$$

$$H = \{t \in [\pi/n - \xi, \pi/n] : L(t) - F(t) > 0\}.$$

В случае, когда $\pi/n - \xi \notin H$, доказательство (8) аналогично [11]. Пусть $\pi/n - \xi \in H$. Возможны 3 случая

$$\exists d \in (0, \pi/n - \xi) : L(t) - F(t) > 0 \text{ при } t \in (d, \pi/n) \text{ и } F(d) = L(d).$$

$\exists \alpha \in [\pi/(2n), \pi/n - \xi], \beta \in (\pi/n - \xi, \pi/n) : F(\alpha) - L(\alpha) = F(\beta) - L(\beta) = 0$
и $L(t) - F(t) > 0$ для всех $t \in (\alpha, \beta)$.

$\exists \alpha \in [0, \pi / (2n)), \beta \in (\pi / n - \xi, \pi / n) : F(\alpha) = F_*(\alpha), F(\beta) = F_*(\beta),$
 $\forall t \in (\alpha, \beta) \quad F(t) < F_*(t).$

В случае (I) (8) следует из (9) и (3) (полагаем $k=1, h=t, t_1=d$). Пусть выполнены условия (II) или (III). Представим множество $H \cap (\beta, \pi / n)$ в виде объединения конечной или счетной системы попарно непересекающихся интервалов $\bigcup_{i \in J} (\alpha_i, \beta_i)$, и при каждом $t \in [0, \xi]$ оценим сверху $F(t) + F(\pi / n - t)$ с помощью леммы 1, включая в совокупность промежутков интегрирования $[\alpha_i, \alpha_i + 2t]$ и $[\beta_i - 2t, \beta_i]$, если $\beta_i - \alpha_i \geq 2t$; $[\alpha_i, \alpha_i + 2t]$, если $\alpha_i < \pi / n - t \leq (\alpha_i + \beta_i) / 2$; $[2\pi / n - 2t - \beta_i, 2\pi / n - \beta_i]$, если $(\alpha_i + \beta_i) / 2 < \pi / n - t < \beta_i$; $[\alpha, \alpha + 2t]$ и $[\beta - 2t, \beta]$, если $\beta - \alpha \geq 2t$; $[-\alpha, 2t - \alpha]$, если $\alpha < t \leq \min\{\xi, (\alpha + \beta) / 2\}$ и либо $2t - \alpha \notin (\xi, \pi / n - \xi)$, либо $F_*(2t - \alpha) - F(2t - \alpha) < 2F_*(t) - 2F(t)$; $[\alpha, \alpha + 2t]$ если $\pi / n - t \leq (\alpha + \beta) / 2$; $[2\pi / n - 2t - \beta, 2\pi / n - \beta]$, если $(\alpha + \beta) / 2 < \pi / n - t < \beta$ и либо $\eta(2\pi / n - 2t - \beta) < 2\eta(\pi / n - t)$, либо $2\pi / n - 2t - \beta \notin (\xi, \pi / n - \xi)$, где $\eta(t) = L(t) - F(t)$. При этом если при некотором t не было выбрано ни одного промежутка, то для таких t применяем (2), если выбран промежуток $[-\alpha, 2t - \alpha]$, то применяем (4), если же ни один из выбранных промежутков не содержит нуля, то используем оценку (3). В случае (II), применяя (5), после преобразований, аналогичных [11], получаем

$$\int_0^{2\pi} f(t)g_{n,r}(t)dt \leq \int_0^{\xi} \omega'(2t)|D_r(nt)|dt + 2n \int_{(\alpha+\beta)/2}^{(\pi/n-\xi+\beta)/2} (2g_{n,r-1}(\pi/n-t) - g_{n,r-1}(t) - 2g_{n,r-1}(\beta-t) - 4g_{n,r-1}(2t-\beta)) \cdot \min\left\{\frac{1}{2}\eta(2t-\beta), \eta(t)\right\} dt.$$

В силу леммы 2 при любом $t \in [(\alpha + \beta) / 2, (\pi / n - \xi + \beta) / 2]$

$$2g_{n,r-1}(\pi / n - t) - g_{n,r-1}(t) - 2g_{n,r-1}(\beta - t) - 4g_{n,r-1}(2t - \beta) \leq 2g_{n,r-1}(t) - 2g_{n,r-1}(2t - \beta) - 2g_{n,r-1}(\beta - t) \leq 0, \text{ откуда следует (8).}$$

В случае (III) для доказательства (8) интегралы по промежуткам, не имеющим общих точек с (α, β) , преобразуем аналогично [11], применяя при этом (5), а остальные интегралы оцениваем с помощью (5) и леммы 2.

Выводы

В настоящей работе найдена погрешность формулы прямоугольников на классе $W^r H_1^\omega$ при $r = 4, 6, 8, \dots$ и любом выпуклом модуле непрерывности $\omega(t)$. Полученные результаты могут быть использованы для решения экстремальной задачи теории квадратур на классах $W^r H_1^\omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул – М.: Наука, 1974.
3. Моторный В.П. Исследования Днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул // Укр. мат. журн. – 1990 – Т. 42, вып.1. – С. 18 – 33.
4. Женсыкбаев А. А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы // Успехи мат. наук. – 1981 – Т. 36, №4. – С. 107 – 159.
5. Лигун А. А. Точное решение некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности / А. А. Лигун, В. Г. Доронин // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2005 – № 6. – Вип. 10. – С. 64 – 70.
6. Дерез Е.В. О наилучшей квадратурной формуле на классе $W^3 H_1^\omega$ // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2004 – №11 – Вип.9. – С 37 – 40.
7. Дерез Е.В. Об оптимизации квадратурных формул для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2005 – №6 – Вип. 10. – С. 43-57.
8. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. – М., 1976.
9. Лигун А.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона для квадратурных формул / А.А. Лигун, В.Г. Доронин // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52, №1. – С. 46 – 51.
10. Моторный В. П. Некоторые экстремальные задачи теории квадратур и приближения функций // Дисс. ... доктора физ.-мат. наук, Днепропетровск, 1974. – 112 с.
11. Дерез Е.В. О погрешности интервальной квадратурной формулы прямоугольников для класса $W^2 H_1^\omega$ // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2007, № 8. – вип. 12. – С. 84 – 88.

Получено 01.03.2009г.

УДК 51:612.846

Н.Г. Кирилах

ДО ПИТАННЯ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДІЇ ОКОРУХОВИХ М'ЯЗІВ

Математичне моделювання порівняно недавно почало застосовуватись в офтальмології. Однією з проблем тут залишається розробка математичних моделей дії окорухових м'язів. І труднощі, з якими стикається дослідник обумовлені не тільки винятковою складністю самого окорухового апарату, але і різноманітністю цілей, з якими такі моделі створюються. Для практикуючого офтальмолога, який займається хірургічним лікуванням багатьох форм косоокості, така модель необхідна для правильного розуміння функціонування м'язів, їх ролі при утворенні тих або інших синдромів та паталогій зору.

Однією із спроб побудувати таку модель є роботи [1]-[2]. Підхід, викладений в цих роботах, хоча і дозволяє отримати досить адекватне якісне і кількісне уявлення про зміну моментів сил тяги м'язів відносно координатних осей при обертаннях ока, має певні недоліки. Зокрема, не вказано джерело руху, м'язи розглядаються як пасивні об'єкти, які обертаються разом з оком. Не вказано, як відбувається виникнення моменту обертання і як задається напрям цього обертання.

В даній роботі робиться спроба побудувати математичну модель механізму дії окорухових м'язів при обертаннях ока.

Очне яблуко розглядається як сфера з певним радіусом r . Введено до розгляду тривимірну декартову систему координат $OXYZ$, таким чином, що точка O збігається з центром ока, вісь OY проходить через вершину рогівки ока, вісь OZ проходить через вершину ока. При обертаннях ока ця система залишається нерухомою.

Розглядаються основні групи окорухових м'язів: горизонтальні прямі м'язи MRM та MRL; вертикальні прямі м'язи MRS та MRI; косі м'язи: два верхніх косих – MOS та два нижніх косих – MOI. М'язи розглядаються як полоски, що мають певну зону прикріплення

до очного яблука. Місце прикріплення кожного м'яза представлено у вигляді трьох точок на поверхні очного яблука, а самі м'язи – як трійка векторів, що виходять із цих точок під певними кутами до координатних площин.

Для групи MRM та MRL напрямок тяги м'яза іде по дотичній до поверхні очного яблука в точці прикріплення, в горизонтальній площині; для групи MRS та MRI прийнято, що напрямок тяги м'яза іде по дотичній у точці прикріплення і у вертикальній площині, що проходить під кутом 23° до координатної площини OYZ назад і медіально (у негативному напрямку осей OX і OY); для точок прикріплення косих м'язів (MOS і MOI) приймаємо, що напрямок тяги м'яза іде по дотичній у точці прикріплення і у вертикальній площині, що має з площиною OYZ кут 51° , уперед і медіально (по осі OX у негативному напрямку, а по осі OY – у позитивному напрямку) [1]. З огляду на сказане вектори сил тяги в первинній позиції погляду побудовано у вигляді векторного добутку:

$$\vec{F}_i = \pm \frac{\vec{N}_i \times \vec{r}_i}{|\vec{N}_i \times \vec{r}_i|} \cdot K_i, \quad (1)$$

де $\vec{r}(x_i, y_i, z_i)$ – радіус-вектор точки прикріплення i -го м'яза, $\vec{N}(A_i, B_i, C_i)$ – координати нормального вектора певної площини. А саме: для точок прикріплення м'язів MRM та MRL необхідно прийняти $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$; для точок прикріплення м'язів MRS та MRI – $A = \cos 23^\circ$, $B = -\sin 23^\circ$, $C = 0$; а для точок прикріплення м'язів MOS та MOI з умов випливає, що $A = \cos 51^\circ$, $B = \sin 51^\circ$, $C = 0$. Знак в (1) обираємо такий, щоб він забезпечував правильний напрям вектора тяги – зовні від поверхні очного яблука. K_i – довільний позитивний множник, який уведено для того, щоб управляти довжиною вектора (тобто змінювати абсолютне значення сили).

На рис. 1 показано описану вище систему векторів. Модель представлено за допомогою графічних можливостей MathCad.

Дія окорухових м'язів визначається величиною важелів м'язів і силою тяги кожного м'язу (довжиною вектора тяги), тобто, параметром K_i .

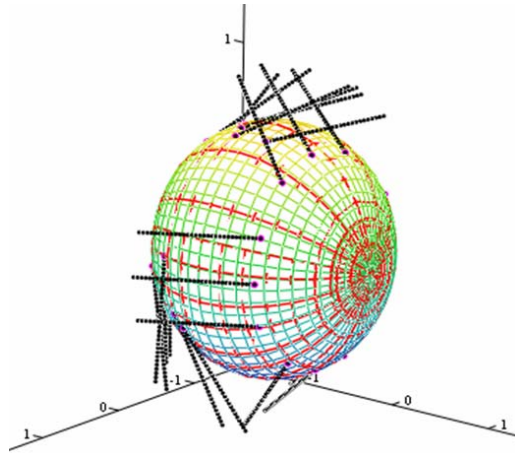


Рисунок 1 - Сферичне яблуко та вектори сил тяги в первинній позиції погляду

Момент обертання, який створюється кожним вектором, визначається за формулою

$$\vec{M}t_i = \vec{F}_i \times \vec{r}_i, \quad (2)$$

де $\vec{F}_i$ – вектор тяги, $\vec{r}_i$ – плече цього вектору відносно центру обертання.

Або, з використанням (1) із (2) маємо:

$$\vec{M}t_i = \vec{F}_i \times \vec{r}_i = \pm \frac{K_i}{|\vec{N}_i \times \vec{r}_i|} (\vec{N}_i \times \vec{r}_i) \times \vec{r}_i, \quad (3)$$

тобто, вектор $\vec{M}t_i$ буде компланарним до пари векторів $\vec{N}_i$ та $\vec{r}_i$ (див. рис.3).

Сума моментів усіх 24 векторів сил тяги м'язів і буде визначати момент, який обертає око. Значить, умова утримання ока в стані рівноваги запишеться як:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}t_i = 0. \quad (4)$$

(4) є рівнянням з 24-ма невідомими K_i – важелями векторів тяги м'язів.

Використаємо пару м'язів-антагоністів, до яких можна віднести горизонтальні прямі м'язи MRM та MRL. Дія антагоністів у первинній позиції погляду повинна бути врівноважена, тобто відповідні моменти обертання задовольняють умові [3]

$$\vec{M}t_{a1} = -\vec{M}t_{a2}. \quad (5)$$

І, оскільки кожен м'яз представлено трьома векторами, умова (5) насправді може бути записана як

$$\sum_{i=1}^3 \bar{M}t_{a1,i} = - \sum_{i=1}^3 \bar{M}t_{a2,i} \quad (6)$$

До умови (6) можна додати ще умови рівності нулю сум моментів сил відносно координатних осей:

$$\sum_{i=1}^n Mx_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n My_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n Mz_i = 0, \quad (7)$$

де

$$Mx_i = -Fy_i \cdot z_i + Fz_i \cdot y_i, \quad (8)$$

$$My_i = Fx_i \cdot z_i - Fz_i \cdot x_i, \quad (9)$$

$$Mz_i = -Fx_i \cdot y_i + Fy_i \cdot x_i, \quad (10)$$

та умову

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0 \quad (11)$$

Значить, для визначення важелів K_i отримаємо систему 6-ти лінійних рівнянь з 24-ма невідомими, тобто, система буде невизначеною.

Тепер, якщо треба повернути око так, щоб вершина рогівки ока, точка M_0 , зайняла позицію точки M_1 , треба створити момент обертання навколо осі, що перпендикулярна площині M_0OM_1 (див рис 4). Тобто, маємо

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}t_i = O\bar{M}_0 \times O\bar{M}_1 \quad (12)$$

Алгоритм знаходження нових координат векторів сил тяги при обертаннях ока, побудовано на тому, що при обертаннях поверхні навколо нерухомого центра нові координати точок цієї поверхні в нерухомій системі координат визначаються за формулами

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де A – матриця перетворення координат, вигляд якої залежить від того, яким чином визначено обертання [2].

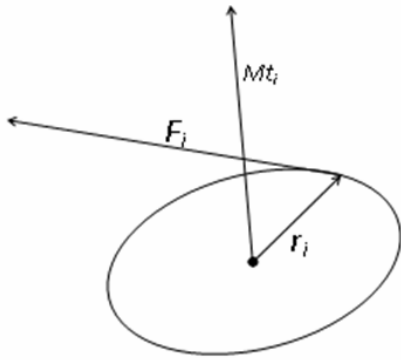


Рисунок 3 - Ось дії вектора тяги м'яза

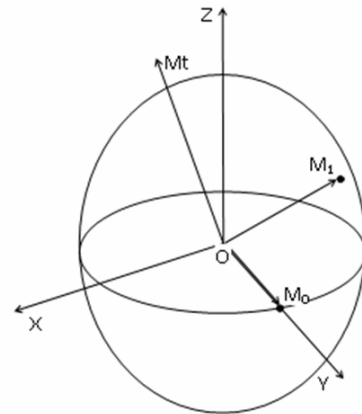


Рисунок 4 - Обертання ока від напрямку OM_0 до напрямку OM_1

Нові координати векторів сил тяги F'_i шукаємо за (1) з урахуванням нових координат r'_i та N'_i , знайденими за (13). Позицію рівноваги знову слід шукати для такої комбінації векторів F'_i , для яких виконуються умови, аналогічні (4)-(11), що приводить до вирішення системи лінійних рівнянь на новому кроці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Про дію окорухових м'язів на очне яблуко людини в первинній позиції погляду / В. І. Ємченко, Н. Г. Кирилах, В. О. Мосьпан [та ін.] // Офтальмол. журн. – 2007. – №2. – С.50–56.
2. Ємченко В. І. Про дію окорухових м'язів на очне яблуко людини при виведенні останнього з первинної позиції погляду / В. І. Ємченко, Н. Г. Кирилах // Офтальмол. журн. – 2007. – № 5. – С.47–53.
3. Koene A. R. Eye Mechanics And Their Implications For Eye Movement Control / A. R. Koene // Helmholtz Instituut, 2002. – 123p.

Одержано 07.03.2009р.

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ГІРСЬКОЇ ВИРОБКИ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕТИНУ ПРИ ДІЇ ГРАВІТАЦІЙНИХ СИЛ ТА ПЛОСКОЇ ВИБУХОВОЇ ХВИЛІ

Вступ. При розв'язку задач сейсмології, сейсморозвідки і аналізі динамічної поведінки гірських виробок при дії вибухів і гірських ударів актуальними виявляються питання математичного моделювання явищ відбиття і заломлення вибухових хвиль на поверхнях розділу порід з різними механічними властивостями. Високі значення градієнтів полів напружень і деформацій на фронтах цих хвиль ускладнюють застосування для їх описання традиційних аналітичних [2] і чисельних методів і приводять до необхідності побудови їх профілів в класі розривних функцій. В таких випадках виявляється ефективним застосування променевих методів [3-5], які дозволяють шляхом використання променевого ряду отримати достатньо точний розв'язок в прифронтних зонах хвилі. В цих випадках рівняння шляху, що пройшла хвиля, описує поверхню фронту хвилі, нульовий член визначає величину розриву визначальних функцій, а останні члени ряду описують зміну тиску за фронтом. Для нестационарної вибухової хвилі можна обмежитись врахуванням лише нульового члена ряду і визначати імпульс, що переноситься хвилею. Тоді виявляється можливим спростити задачу і застосувати заходи, які використовуються в стерео механічній теорії удару і базуються на загальних теоремах динаміки [1]. Така променева методика використана для дослідження взаємодії плоскої вибухової хвилі з круговою гірською виробкою. Фронт хвилі паралельний твірній виробки, яка паралельна денній поверхні. Якщо горизонтальна виробка кругового поперечного перетину має велику протяжність, то можна покласти, що граничні умови не справляють впливу на поля напружень і деформацій в околиці центрального поперечного перетину виробки і досліджувати ці поля будемо з допомогою постановки плоскої задачі теорії пружності.

Постановка задачі. Коливання пружного середовища описується хвильовими рівняннями

$$\nabla^2 \Phi = (\partial^2 \Phi / \partial t^2) / \alpha^2, \quad \nabla^2 \Psi = (\partial^2 \Psi / \partial t^2) / \beta^2. \quad (1)$$

де Φ і Ψ скалярний і векторний потенціали: $\alpha = \sqrt{\lambda + 2\mu / \rho}$, $\beta^2 = \mu / \rho$ - швидкості розповсюдження поздовжніх (P) і зсувних (S) хвиль відповідно; λ, μ - параметри Ламе; ρ - щільність.

В зв'язку з тим, що епіцентри землетрусів, гірських ударів і вибухів за звичай знаходяться на значній відстані від гірських виробок, поперечні розміри яких малі в порівнянні з радіусами фронтів пружних хвиль, то надалі обмежимося розглядом випадків плоских задач. Векторний потенціал запишемо у вигляді $\Psi = \Psi \bar{q}$, де $\bar{q}$ - перпендикулярний площині розв'язку одиничний вектор.

Методика розрахунку. Запишемо хвильові потенціали у вигляді променевих рядів [5]

$$\Phi(\bar{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k [t - \tau]^{k+2} / (k+2)!, \quad (2)$$

$$\Psi(\bar{x}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \bar{q} [t - \bar{\tau}]^{k+2} / (k+2)!.$$

Тут $\bar{x}$ - радіус-вектор; $\varphi_k = \varphi_k(x)$; $\psi_k = \psi_k(x)$; $\tau = \tau(x)$; $\bar{\tau} = \bar{\tau}(x)$. У виразах (2) припускається, що праві частини домножені на $H(t - \tau)$ для P-хвилі і на $H(t - \bar{\tau})$ для S-хвилі, де $H(t)$ - функція Хевісайда, оскільки до приходу фронту хвилі в розглянуту точку пружна порода вважається незбуреною.

Підставляючи (2) в (1) і прирівнюючи нулю коефіцієнти перед однаковими степенями $(t - \tau)$ і $(t - \bar{\tau})$, отримуємо визначальні функції τ і $\bar{\tau}$ рівняння шляху, пройденого хвилею

$$(\nabla \tau)^2 = 1 / \alpha^2, \quad (\nabla \bar{\tau})^2 = 1 / \beta^2 \quad (3)$$

і рівняння переносу

$$\begin{aligned} 2(\nabla \tau)(\nabla \varphi_k) + \varphi_k \nabla^2 \tau &= \nabla^2 \varphi_{k-1} \quad (0 \leq k < \infty), \\ 2(\nabla \bar{\tau})[\nabla(\psi_k \bar{q})] + (\psi_k \bar{q}) \nabla^2 \bar{\tau} &= \nabla^2 (\bar{q} \psi_{k-1}), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\varphi_k = 0$, $\psi_k = 0$ при $k < 0$.

Розв'язок нелінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку зводяться до розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь у вигляді

$$d\bar{p}/ds = 0, \quad d\bar{x}/ds = \bar{p}, \quad d\tau/ds = |\bar{p}|^2. \quad (5)$$

Її розв'язок представляється в формі

$$\bar{x} = \bar{n}\xi + \bar{f}, \quad \tau = \xi/\alpha, \quad \nabla\tau = \bar{n}/\alpha, \quad (6)$$

де $\bar{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні фронту; $\bar{f}$ – вектор, який визначає обриси фронту в початковому стані; ξ – довжина променя. Вона визначає сімейство прямолінійних променів $x(s)$ і ортогональних до них хвильових фронтів $\tau = \text{const}$. Аналогічний розв'язок має місце і для S-хвилі.

Розв'язок рівнянь переносу (4) зручно будувати в ортогональній криволінійній променевій системі координат, що утворюється променями і фронтами Р-хвиль. Будемо вважати, що гірські удари і вибух генерують плоскі хвилі, тому звернемося до випадку вісесиметричних хвильових фронтів. Тоді при $k = 0$ із (4) слідує [5]

$$2\partial\varphi_0/\partial\xi + (1/R + 1/S)\varphi_0 = 0, \quad 2\partial\psi_0/\partial\xi + (1/R + 1/S)\psi_0 = 0, \quad (7)$$

де R і S – головні радіуси кривизни хвильового фронту в площині, що проходить через центр джерела хвиль і перпендикулярній вісі гірської виробки. Рівняння (7) перепишемо у вигляді

$$\partial(RS\varphi_0^2)/\partial\xi = 0, \quad \partial(RS\psi_0^2)/\partial\xi = 0. \quad (8)$$

Тоді

$$\varphi_0 = \pm\sqrt{c_0(\gamma)/RS}, \quad \psi_0 = \pm\sqrt{\bar{c}_0(\gamma)/RS}. \quad (9)$$

Постійні $c_0(\gamma)$, $\bar{c}_0(\gamma)$ в цих рівняннях залежать від координати γ , яка визначає положення точки фронту в його меридіональному перетині. Підставивши (9) в праві частини рівнянь (4) і проінтегрувавши їх, можна знайти φ_1 і ψ_1 , а потім φ_2 і ψ_2 і так далі.

Нижче обмежимося розглядом імпульсних хвиль малої довжини. В цих випадках, як і в стереомеханічній теорії удару, відпадає необхідність побудови профілю вибухової хвилі і виявляється досить відслідкувати тільки ударний імпульс, що переноситься на фронті хвилі. Для його визначення можна вважати, що профілі тензорів напружень $\sigma(\xi)$, $\bar{\sigma}(\xi)$ Р- або S-хвилі являються прямокутними ступеньками з малою довжиною основи $\Delta\xi$. Для

описання таких функцій в (2) необхідно утримувати тільки по одному першому члену ряду з індексом $k = 0$ і функції $\sigma(\xi)$, $\bar{\sigma}(\xi)$ вираховують з допомогою співвідношень [5]

При дослідженні розсіювання імпульсної хвилі на поверхні G розділу двох пружних середовищ використаємо "локально-плоске наближення" [5], згідно якого можна покладати, що в місті падіння хвилі на розділяючу поверхню локально поверхня розділу і фронт являються плоскими і кут падіння хвилі рівний куту між нормальними до відповідних поверхонь.

Чисельні результати. Розглянемо конкретний випадок, коли горизонтальна виробка кругового перетину, радіус якої дорівнює 2м., знаходиться у вугільному пласті на глибині 600м. від денної поверхні. Статичний напружено-деформівний стан породи в околиці виробки будемо аналізувати з допомогою методу скінчених елементів. Для цього виділяється деяка прямокутна обмежена область, що містить вказаний перетин, яка розбивається на скінчені елементи. Вісь y перпендикулярна денній поверхні (рис. 1). На верхні і бокові сторони прямокутника накладаються граничні умови рівності нормальних напружень заданим напруженням на даній глибині і рівності нулю дотичних напружень.

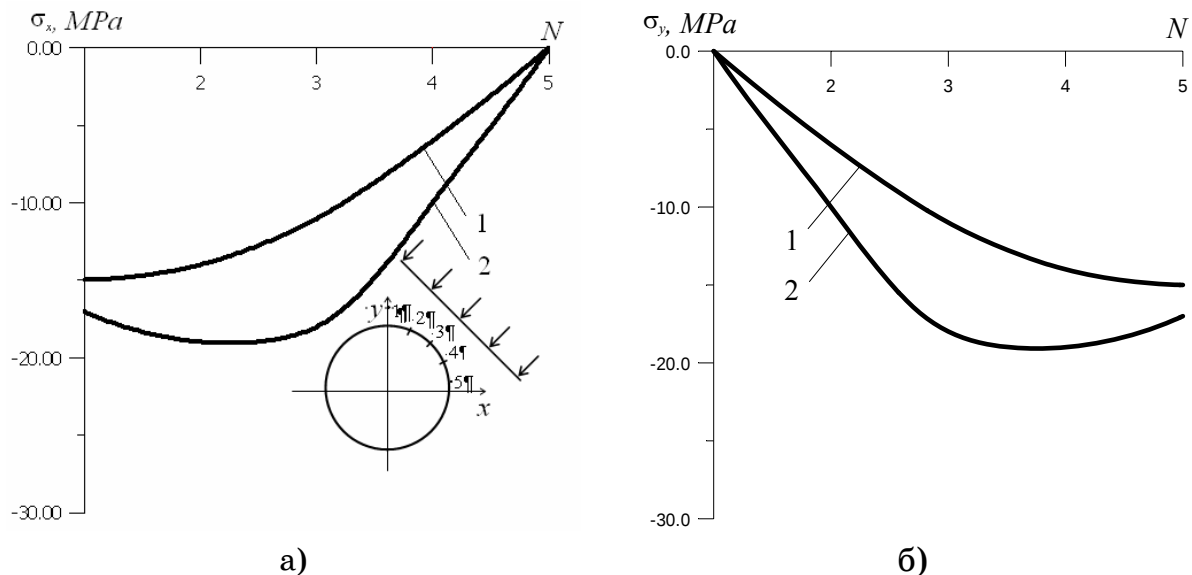


Рисунок 1

На контурі отвору, що моделює контур виробки, напруження відсутні.

Динамічне навантаження створюється плоскою ударною хвилею стиску інтенсивністю 5 МПа, фронт якої наближається до поверхні

виробки під кутом 45° до вісей x і y в першому квадранті (Рис. 1). Результати розрахунків для випадку, коли поверхня виробки вільна від напруг і в'язей, показані на рис. 1,а для напружень σ_x і рис. 1,б для напружень σ_y . Криві 1 на цих рисунках відбивають закономірність зміни напружень в точках 1, 2, 3, 4, 5 контура від дії тільки гравітаційного навантаження. Вони побудовані по результатам статичних розрахунків. Тут точка 1 лежить на вертикальній вісі, точка 5 – на горизонтальній, точки 2, 3, 4 відкладені з однаковим кроком по дузі кола. Криві 2 характеризують сумарне значення напружень від сукупної дії статичного навантаження і максимального навантаження від вибуху або гірського удару.

Можна бачити, що $\sigma_x = 0$ на кривій 1 в точці 5, в точці 1 воно максимальне. Оскільки фронт ударної хвилі падає на виробку під кутом 45° , то додаткові максимальні напруження мають місце в околиці точки 3, що є лобовою. Підкреслимо також, що в зв'язку з симетричністю поставленої задачі напруження σ_x на рис. 1,а і σ_y на рис.1,б мають значення, обернені по відношенню до точок 1,2,3,4,5.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. -М.: Госстройиздат, 1965. - 448 с.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наук. думка, 1978. – 307с.
3. Гуляев В.И. Дифракция разрывных волн на эллипсоидальных поверхностях раздела трансверсально-изотропных упругих сред / В.И.Гуляев, П.З. Луговой, Г.М. Иванченко // Прикл. Механика. Т. 40, № 10.2004. – С.98-106.
4. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. -М.: Наука, 1980.-304 с.
5. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн.- К.: Наук, думка, 1988. - 220 с.

Одержано 12.03.2009р.

УДК 621.793

С.О. Чернета, В.Ю. Солод, Є.М. Гречаник, О.Г. Чернета

ПІДВИЩЕННЯ ЗНОСОСТІЙКОСТІ ВАЛІВ КОРОБКИ ШВИДКОСТЕЙ ТОКАРНОГО ВЕРСТАТА 1К670.320Ф3

Вступ. За даними інформаційного статистичного аналізу станочний парк металургійних, машиностроительних, автотранспортних підприємств України містить великий паку токарних верстатів, ресурс роботи яких відсотків на 70 вичерпано. Одними з проблемних вузлів верстатів є вали- шестерні коробки швидкостей токарних верстатів, які сприймають максимальні навантаження від крутячих моментів і мають найбільше спрацювання в зонах контакту зубчастих пар і на опрних площинах.

Аналізуючи базовий (заводський) технологічний процес виготовлення деталі, слід зазначити, що виробництво на базовому підприємстві одиничне, звідси слідує застосування відповідного устаткування, пристосувань і інструменту. Заготівкою для валу є поковка з великими припусками, велика витрата металу при обробці. Верстатне устаткування на заводі застаріле, таке, що вимагає ремонту, багато верстатів з ручним управлінням. Потужність верстатів використовується не повною мірою.

Деталь входить до складу коробки швидкостей верстата 1К670.320Ф3 і передає обертання від електродвигуна через муфту на шпіндель, є одним з ланок цього кінематичного ланцюга. Для передачі моменту, що крутить, і існують зуби, нарізані безпосередньо на валу.

Вал-шестерня виготовлена з легованої сталі 40Х ГОСТ 4543-71. У таблицях 1.1 і 1.2 представлені хімічний склад і механічні властивості сталі.

Таблиця 1.1

Хімічний склад сталі 40Х ГОСТ 4543-71

Зміст елементів %						
Вуглець	Кремній	Марганець	Хром	Ni	P	S
				не більш		
0,36-0,44	0,17-0,37	0,3.0,8	0,9.1,1	0,25	0,04	0,04

© Чернета С.О., Солод В.Ю., Гречаник Є.М., Чернета О.Г., 2009

Таблиця 1.2

Механічні властивості сталі 40Х ГОСТ4543-71

Термообробка	Межа міцності при розтягуванні σ_B , МПа	Межа текучості σ_T , МПа	Відносна подовження при розриві %, δ	Відносне звуження площі поперечного перетину при розриві %, Ψ	питома ударна в'язкість, a	σ_1	Твердість НВ
Поліпшення	750	500	15	50	7	360	217.269

Для виготовлення валів застосовують сталі 45А, 38ХС, 50ХН, 40Х, 40ХН, 40ХН2МА, 40Х9С2, 40Х10С2М.

Діаграма кінетики ізотермічних перетворень аустеніту при стандартній термообробці для сталі 40Х наведена на рис.1.1

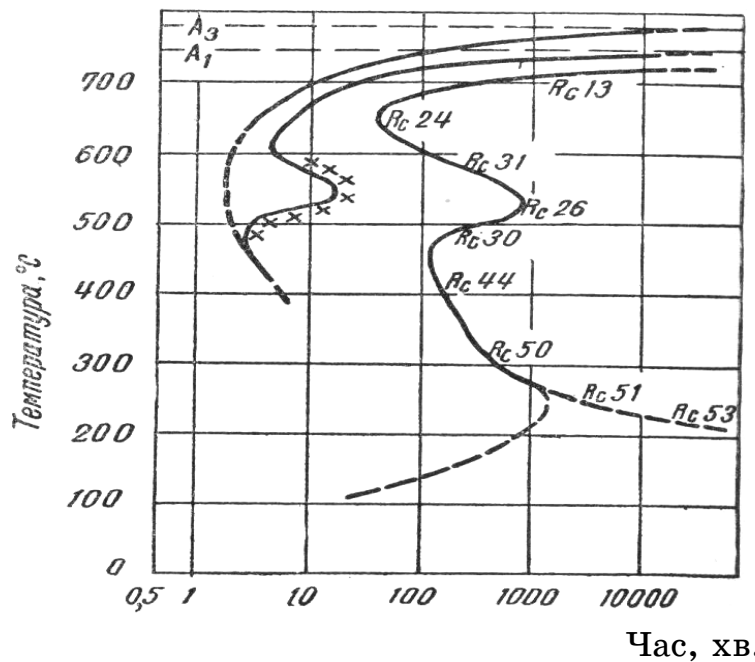


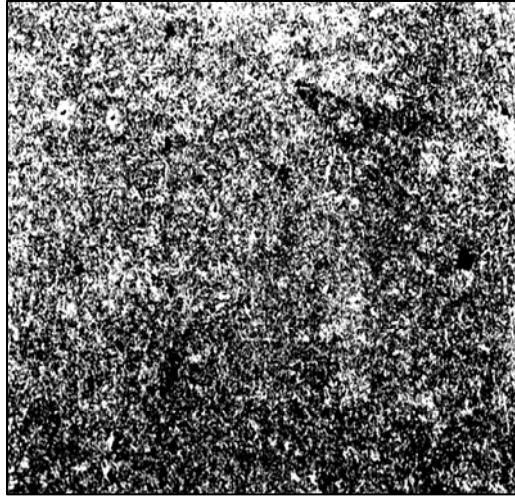
Рисунок 1.1 - Діаграма кінетики ізотермічних перетворень аустеніту для сталі 40Х

На рис.1.2 а приведена фотографія загартованого шліфа із сталі 40Х без лазерної обробки із збільшенням в 200 разів. Початкова структура мікрошліфа – ферітно-карбидна. Мікротвердість, рівна 487,6 одиниць за Вікерсом на глибині близько 140 мкм.

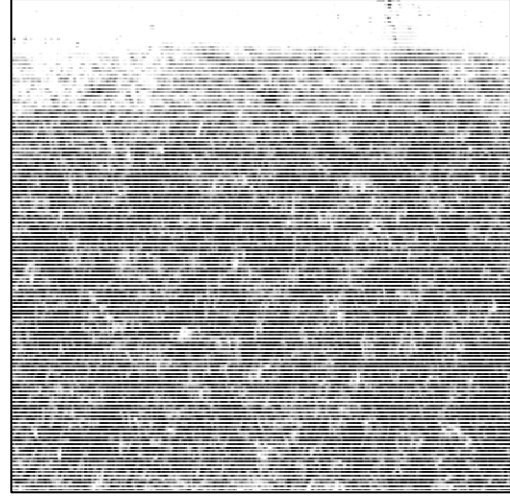
Мікротвердість на глибині 140 мкм поступово зменшується до НВ-370. Середня мікротвердість зразків рівна НВ-450.

Вивчення мікроструктури обробленого за допомогою лазерного випромінювання шару матеріалу (рис.1.2 б) показує, що на поверхні

утворюється достатньо однорідний шар (мартенситні утворення) завглибшки близько 80 мкм (рис.1.2 а,б), який має структуру з рівномірно розподіленими частинками зміцнюючих фаз і слабо тріється в порівнянні з металом основи.



а. х 200



б. х 200

Рисунок 1.2 - Мікроструктура поверхні валу-шестерні: а. - без лазерної обробки; б. - з лазерною обробкою

За ним розташовується підшар – бейніт, товщина якого складає 35 мкм. Далі розташована початкова ферритно-карбидная структура.

Оскільки досліджувана сталь має ряд легуючих елементів, то мікротвердість зони лазерної дії підвищується у декілька разів із-за концентрації мартенситу, який утворюється в поверхневих шарах деталі, нитридные, що містять, і карбідні утворення.

Лазерна обробка проводилася при енергії накачування, рівною $E_n = 10$ кДж, з кроком перекриття 3 мм. Зразок знаходився на відстані $I = 50$ см від об'єктивної лінзи.

Після лазерної обробки без оплавлення поверхневого шару була отримана поверхня із слідами лазерного зміцнення (плями діаметром 5 мм).

Для дослідження мікроструктури поверхні були вирізані фрагменти матеріалу (мікрошліфи) з характерними слідами зон термічного зміцнення.

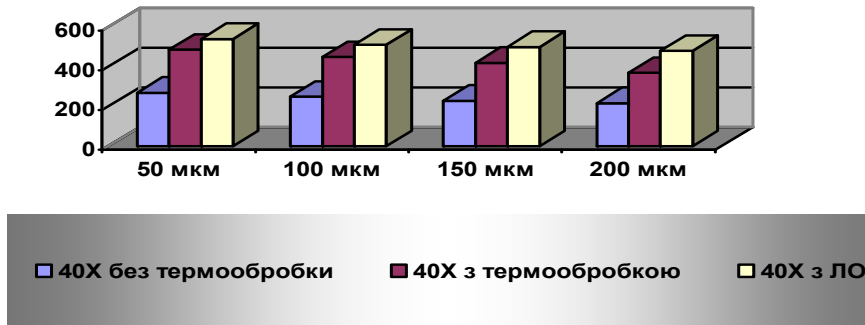


Рисунок 1.3 - Діаграма змінення мікротвердості за глибиною (HV) поверхні валу в залежності від термічної обробки

Виміри твердості проводилися на зразках до і після лазерної обробки. З отриманих результатів можна зробити вивод, що мікротвердість після лазерного легування підвищується в середньому на 37% .

Мікротвердість підшару трохи відрізняється від обробленої зони - HV-549. Мікротвердість основної структури складає HV-406.

ЛІТЕРАТУРА

1. Петров С.В., Коржік В.Н., Горбань, Демідов В.Д., Новоселів А.В. Газотермічні покриття для зміцнення важко навантажених деталей могутніх дизелів // Зміцнюючі технології і покриття (Науково-технічний і виробничий журнал) 2005 №6, 20-29с.
2. Завьялов А.С., Теплухин Г.Н., Габєєв К.В. Умови і механізм утворення безструктурного мартенситу (гарденита). Металознавство і термічна обробка металів.- №10.-1979.-11-12с.
3. Крапошин В.С. Термічеськая обробка стали і сплавів із застосуванням лазерного променя і інших прогресивних видів нагріву. Підсумки науки і техніки. Металознавство і термічна обробка. – М.- Т21; 1987.- 144с.
4. Попов А.А., Попова Л.Е. Ізотермічні і термокінетические діаграми розпаду охолодженого аустеніту. Довідник терміста. – М.: Машгиз, 1961.-.480 с.
5. Леонтьев П.А, Н.Т. Чеканов, М.Г. Хан Лазерна поверхнева обробка металів і сплавів. – М., «Металургія», 1986.- 144с.
6. Коваленко В.С., Головка Л.Ф., Меркулов Г.В., Зміцнення деталей променем лазера. Техніка, 1981.-131с
7. Малов М.А. Короткий довідник металіста, Машинобудування, 1976. –767с.

Одержано 17.03.2009р.

УДК 539.3

М.О. Белова

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ІНВАРІАНТНОГО ВИМІРЮВАЛЬНОГО
ПЕРЕТВОРЕННЯ**

Володіння точною інформацією є основою управління в системах високого рівня складності – державного управління, соціального регулювання, в системах створення високих технологій та енергозбереження. На сучасному етапі розвитку технічних інформаційних систем підвищення вірогідності інформації здійснюється шляхом реалізації принципу інваріантності параметрів систем відносно зовнішніх факторів, які впливають на точність перетворення сигналів, що містять інформацію.

Інформатизація всіх сторін життя, яка надалі поглиблюється, ставить ряд актуальних проблем, серед яких ідентифікація достовірності інформації в пакунку повідомлень, одержаних від різних джерел. Процес формування інформації, що поступає на вхід системи її перетворення підпадає під впливи випадковості, впливу збурень різного характеру, часовій мінливості і т.п. Тому застосування класичних методів і теорій для обробки логічно нечіткої інформації стає неможливим через те, що в більшості випадків це призводить до помилкового або неоптимального рішення. Обробка великих масивів даних в інформаційно-перетворювальних системах потребує розробки методів їх стиснення без втрати суттєвих інформаційних параметрів [1].

Теорія інваріантності, яка була розроблена вітчизняними науковими школами Г.В. Щипанова, Н.Н. Лузіна, Б.Н. Петрова, А.Г. Івахненка, А.І. Кухтенка, в свій час сприяла значному розвитку точних систем управління, однак з появою нових високотехнологічних систем обробки інформації з'явилась можливість і необхідність в створенні теорії високоточної обробки інформації [2, 3].

За теорією чутливості, яку започаткував Боде, встановлено, що умова нульової чутливості є умовою абсолютної інваріантності. Але

теорія чутливості не вирішила задачу створення не чутливих до факторів впливу систем обробки інформації, бо не запропонувала адекватної математичної моделі.

Уперше поєднання теорій інваріантності та чутливості в задачах точної обробки інформації здійснено в [4], але широкого узагальнення математичної моделі перетворення інформаційного сигналу до останнього часу ще не зроблено.

Аналіз запропонованих математичних моделей вимірювального перетворення в структурі інформаційно-вимірювальної системи із зворотним зв'язком показує, що їх фізична реалізація в повній мірі неможлива. Такий висновок ґрунтується на тому, що точне диференціювання точкового значення ряду перетворень інформаційного сигналу за операторами реальної фізичної моделі залишається нерозв'язаною остаточно проблемою. Для її вирішення, по-перше, використовують функціональну підсистему, яка вбудовується в загальну систему, тобто використовують генератор функцій чутливості [5]. По-друге, функція відносної чутливості визначається в малих приростах шляхом дискретних змін операторів перетворення [6]. Однак ані перший, ані другий спосіб у зазначеному вигляді неприйнятні. Адже сама фізична модель генератора функцій відносної чутливості також підлягає впливу дестабілізуючих факторів. Крім того, оскільки величини приростів визначають точність обчислювання похідних, виникає проблема оцінки допустимих значень приросту, яку складно розв'язати.

Напрямок дослідження інваріантних систем перетворення інформації за допомогою функцій операторної чутливості передбачає вивчення впливу позитивного зворотнього зв'язку [ПЗЗ] і від'ємного зворотнього зв'язку [ВЗЗ] на точність систем перетворення інформаційних сигналів, а також вибір значення коефіцієнта петлеподібного перетворення на стан стійкості систем перетворення інформаційних сигналів.

Отже, метод визначення функцій чутливості за такими кінцевими приростами операторів перетворення, що не обмежені точністю апроксимації, сприятиме створенню фізично здійсненої математичної моделі інваріантного перетворення.

Модель реальної інформаційної системи, тобто такої, яка враховує похибки перетворення інформаційного сигналу, встановлює

деяку множину Y_0 з довільним елементом y , що визначений згідно зі значеннями k_i, γ_i, y_{ai}, x і β . За допомогою правила, який зазвичай називається оператором P , можливо одержати відображення багатьох Y_0 в деяку множину Y з довільним елементом y_j . Його визначено за згаданим оператором значень k_i, γ_i, y_{ai}, x і β . Оскільки значення γ_i, y_{ai} є змінними, що залежать від збурюючих факторів, цілеспрямовану дію оператора P слід віднести тільки до величин k_i, x, β .

Установимо, що оператор P_1 визначає відображення множини Y_0 в множину Y_1 , а оператор P_2 - в множину Y_2 ; $P_1/Y_0 = Y_1$ $P_2/Y_0 = Y_2$.

Опишемо стан моделі в часовому просторі її незалежних змінних і часі згідно з правилами P_1 і P_2

$$y(\tau_0, \tau_1, \tau_2) = \begin{cases} \frac{k_0(1+\gamma_0)}{1+k_0\beta(1+\gamma_0)} \cdot x + y_{a0}, & \tau = \tau_0 \\ \frac{k_0 \cdot q_1(1+\gamma_1)}{1+k_0\beta(1+\gamma_1)q_1} \cdot x + y_{a1}, & \tau = \tau_1 \\ \frac{k_0(1+\gamma_2)}{1+k_0\beta(1+\gamma_2)q_2} \cdot x + y_{a2}, & \tau = \tau_2. \end{cases} \quad (1)$$

Прийнявши гіпотезу про незмінність на відрізок часу $\tau_0 \dots \tau_2$ величин і, припустимо, що $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$; $y_{a0} = y_{a1} = y_{a2} = y_a$.

Установимо деякий вид функцій відносної чутливості за кінцевими приростами, які в подальшому назовемо функціями операторної чутливості:

$$Q_{qk}^{(y)} = \frac{\Delta y_k}{\Delta q} \cdot \frac{1}{y_0} = \frac{k_0}{(1+qk_0\beta)(k_0+k_0\beta\delta+\delta)}, \quad (2)$$

$$P_{qk}^{(y)} = \frac{\Delta y_\beta}{\Delta q} \cdot \frac{q}{y_0} = -\frac{\beta q k_0^2}{(1+qk_0\beta)(k_0+k_0\beta\delta+\delta)}, \quad (3)$$

де $q_1 = q_2 = q$; $y(\tau_0) - y(\tau_1) = \Delta y_k$; $y(\tau_0) - y(\tau_2) = \Delta y_\beta$; $\delta = \frac{y_a}{x}$; $1-q = \Delta q$.

Зазначимо, що функції (2) і (3), на відміну від функцій відносної чутливості в диференціальній формі, не є однорідними. Оскільки функція $Q_{qk}^{(y)}$ являє собою аналог класичної функції напіввідносної, а функція $P_{q\beta}^{(y)}$ - відносної чутливості.

Запропоновані операторні функції чутливості надають можливість здійснювати їхнє числове визначення. Покажемо цю властивість за допомогою теореми, яка сформульована у такому вигляді: різниця функції операторної чутливості виду

$$Q_{qk}^{(y)} = \frac{\Delta y_k}{\Delta q} \cdot \frac{1}{y(\tau_0)}, P_{qk}^{(y)} = \frac{\Delta y_\beta}{\Delta q} \cdot \frac{q}{y(\tau_0)}$$

до операторів k і β моделі $y_0(x) = \frac{k_0(1+\gamma)}{1+k_0(1+\gamma)\beta} \cdot x + \bar{y}_a$ наближається

до інваріанта $J^{(y)} = 1$ на величину $\varepsilon = \frac{y_a}{y_0}$.

Здійснюємо доведення цієї теореми. Визначаємо різницю

$$Q_{qk}^{(y)} - P_{q\beta}^{(y)} = \frac{k}{k + k\beta\delta + \delta}.$$

Знаходимо ε - наближення до інваріанта $J^{(y)} = 1$:

$$\bar{\varepsilon} = 1 - (Q_{qk}^{(y)} - P_{q\beta}^{(y)}) = \frac{k\beta + 1}{k + k\beta\delta + \delta}.$$

Помноживши ε на y_0 , одержуємо:

$$\varepsilon \cdot y_0 = \frac{(1+k\beta)\delta}{k + k\beta\delta + \delta} \cdot \frac{k + k\beta\delta + \delta}{1 + \beta k} \cdot x = \delta \cdot x,$$

$$\varepsilon = \frac{\delta x}{y_0} = \frac{y_a}{x} \cdot \frac{x}{y_0}; \quad \varepsilon = \frac{y_a}{y_0}, \text{ що і треба було довести.}$$

Таким чином, доведено, що величина відносної адитивної похибки $\varepsilon = \frac{y_a}{y_0}$ визначається як класичними функціями відносної чутливості, так і запропонованими функціями операторної чутливості.

Отже, одержаний результат має суттєве значення для впливу на кінцеві прирости операторів k і β . На них не встановлюються будь-які обмеження, щодо точності апроксимації, які мають місце у разі переходу від диференціалів до кінцевих приростів.

Функції операторної чутливості надають можливість визначити оператор

$$K = -\frac{P_{q\beta}^{(y)}}{Q_{qk}^{(y)} \cdot q \cdot \beta}. \quad (4)$$

Математична модель системи перетворення інформаційного сигналу набуває такої лінійної форми, яка властива лише замкненим структурам з сильним від'ємним зворотним зв'язком (ВЗЗ)

$$N = \frac{1}{\beta} x, \quad (5)$$

$$\text{де } N = \frac{|P_{q\beta}^{(y)}|}{(Q_{qk}^{(y)} \cdot q - P_{q\beta}^{(y)}) \cdot (Q_{qk}^{(y)} - P_{qp}^{(y)})}.$$

Тут N - інваріантна форма кінцевого результату перетворень інформаційного сигналу, утворена внаслідок обчислення функцій операторної чутливості згідно зі значеннями $y(\tau_i)$. Величини $y(\tau_i)$ можуть бути істотно рознесені одна від одної, оскільки функції операторної чутливості $Q_{qk}^{(y)}$ і $P_{q\beta}^{(y)}$ визначаються в кінцевих приростах, які не обмежуються умовою точності апроксимації. Це виключає можливість похибки обчислення відношення близьких значень і необхідність високоточного визначення величин $y(\tau_i)$.

Наведемо основні результати відносно структури з позитивним зворотним зв'язком (ПЗЗ), оскільки, як відомо, відмінність від вищезгаданих результатів перетворення в структурі з від'ємним зворотним зв'язком обумовлена лише знаком перед коефіцієнтом петлеподібного перетворення $k_0(1 + \gamma) \cdot \beta$:

$$\begin{aligned} y(x, k, \gamma, \delta) &= \frac{k_0(1 + \gamma)}{1 - k_0(1 + \gamma)\beta} \cdot x + y_a = \\ &= \frac{k_0(1 + \gamma) - k_0(1 + \gamma)\beta\delta + \delta}{1 - k_0(1 + \gamma)\beta} \cdot x, \end{aligned} \quad (6)$$

$$Q_k^{(y)} = \frac{k_0(1 + \gamma)}{(1 - k_0(1 + \gamma)\beta q) \cdot [k_0(1 + \gamma) - k_0(1 + \gamma)\delta + \delta]}, \quad (7)$$

$$P_\beta^{(y)} = \frac{k_0^2(1 + \gamma)\beta q}{(1 - k_0(1 + \gamma)\beta q) \cdot [k_0(1 + \gamma) - k_0(1 + \gamma)\beta\delta + \delta]}, \quad (8)$$

$$N = \frac{1}{\beta} x, \quad (9)$$

$$N = \frac{|P_\beta^{(y)}|}{(Q_k^{(y)} \cdot q + P_\beta^{(y)}) \cdot (Q_k^{(y)} + P_\beta^{(y)})}.$$

З останнього виразу видно, що модель системи перетворення інформаційного сигналу в структурі зі слабким зворотним зв'язком

адекватна моделі з сильним зворотним зв'язком. Доведена можливість вираження функції відносної чутливості через кінцеві прирости, а не через диференціали. Це відкриває нові можливості для використання систем з ПЗЗ як точних структур для перетворення інформаційних сигналів від фізичних скалярних величин.

Визначені функції відносної чутливості дають змогу створити скореговану за похибками і ідентифіковану обчислювальною процедурою нову модель більш точного перетворення інформаційного сигналу. Системи перетворення інформаційних сигналів підтримують стан стійкості шляхом вибору щонайменшого значення коефіцієнта петлеподібного перетворення.

Завершенням дослідження інваріантності систем перетворення інформації за допомогою запропонованих функцій чутливості передбачається вивчення впливу на достовірність одержаного результату таких факторів, які можна визначити аналітично і врахувати в алгоритмі перетворення, що дозволить в подальшому цій алгоритм спростити.

Необхідним кроком до практичної реалізації запропонованого методу досягнення інваріантності є розробка пакету програм обробки інформації в комп'ютерних системах.

ЛІТЕРАТУРА

1. Корченко А.Г. Построение систем защиты информации на нечетких множествах. Теория и практические решения. — К.: „МК— Пресс”, 2006. — 320 с.
2. Горовиц А.М. Синтез систем с обратной связью. М.: Сов. радио, 1970. — 600 с.
3. Голубцов П.В., Старикова О.В. Редукция параметрически заданных инвариантных измерительных систем //Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 2001. — №6. — С. 23–27.
4. Петров Б.Н. Избранные труды. — М.: Наука, 1983. Т.1. — 245 с.
5. Ходько С.Т. Проектирование систем управления с нестабильными параметрами. — Л: Машиностроение, 1987. — 232 с.
6. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ/Справочник. — К.: Наукова думка, 1984. — 599 с.

Одержано 24.03.2009р.

УДК 539.3

Э.А. Ткаченко, В.Н. Чехов

РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТЫХ ПОКРЫТИЙ ПРИ ДВУХОСНОМ НАГРУЖЕНИИ И ПОВЫШЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СРЕДНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ СЛОЕВ

Введение. Существующие в машиностроении и современной технике покрытия из конструкционных материалов, как правило эксплуатируются в условиях повышенных температур и высоких уровней внешнего сжимающего давления. При анализе их долговечности и несущей способности в технической литературе, как правило, используются локальные критерии прочности основанные на исследовании напряженно деформированного состояния элементов конструкций в сочетании с использованием соответствующего критерия прочности. В этом случае незначительная погрешность в постановке задачи или выборе расчетной схемы может привести к существенным неточностям в оценке напряженного состояния в опасных точках объекта исследования и, как следствие, неправильной оценке указанных выше характеристик процесса его деформирования. Поэтому при наличии сильно сжатых участков поверхности таких покрытий целесообразно также использовать интегральный критерий прочности основанный на анализе устойчивости состояния равновесия такого участка слоистого материала под действием сжимающих усилий. Таким образом приходим к проблеме исследования поверхностной устойчивости в структуре слоистых конструкционных материалов под действием двухосных сжимающих нагрузок и повышенного уровня температурного поля.

В работах [1,2] проблема устойчивости слоистых покрытий под действием сжимающих поверхностных нагрузок была рассмотрена в рамках модели кусочно-однородных сред на основе трехмерной линеаризированной теории устойчивости при малых и конечных докритических деформациях. Однако при этом не учитывались повышенные значения средней температуры слоев.

© Ткаченко Э.А., Чехов В.Н., 2009

Постановка задачи. Зона контакта между элементами конструкций и слоистыми покрытиями моделируется слоистой средой, состоящей из слоистого пакета с ограниченным числом слоев и структурно однородного полупространства, как показано на Рис. 1. Каждый слой и полупространство отнесены к системе локальных лагранжевых координат $\chi_i^{(k)}$, до деформирования совпадающих декартовыми координатами. Здесь обозначено $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, K+1}$, j - количество слоев в покрытии. Среда сжимается распределенными нагрузками интенсивности p_{ij} , как в плоскости слоев, так и в ортогональном направлении между отдельными слоями, а также между слоями и полупространством предполагаем условия полного контакта. На бесконечности будут выполняться условия затухания возмущения компонент вектора перемещений $\vec{u}$. При этом исследуется неустойчивость в структуре слоистого тела, когда критические значения параметров нагружения и волнообразования зависят только от соотношения между геометрическими и механическими характеристиками отдельных слоев покрытия, а не от размеров и формы всего элемента конструкций в целом. Для определенности считаем, что физико-механические свойства слоев и полупространства описываются моделью линейно упругого трансверсально изотропного или изотропного тела. В литературе [9] для исследования задач термоустойчивости тонкостенных элементов конструкций и трехмерных тел [1] используется квазистатический подход. При этом предполагается, что температурное поле влияет только на докритическое напряженно-деформированное состояние исследуемого тела. Используя такой подход считаем, что все линеаризованные соотношения постановочного характера приведенные в работах [2], где рассматривается проблема поверхностной неустойчивости слоистых покрытий под действием сжимающих поверхностных нагрузок, остаются без изменения. Изменяются лишь, входящие в коэффициенты линеаризованных уравнений устойчивости, выражения для докритического напряженного состояния и физико-механические характеристики слоистой среды, если последние существенно зависят от температуры. В рамках такого подхода в зависимости от характера изменения температуры, ее предельного значения $\hat{T}$, теплофизических, физико-

механических и геометрических характеристик среды, вида деформирования и характера силового нагружения, граничных условий на поверхности среды и условий межслоевого контакта могут быть приведены различные математические постановки и разработаны методы решения конкретных задач о докритическом термонапряженном состоянии и поверхностной неустойчивости рассматриваемых слоистых тел. В случае высоких уровней однородного температурного поля слоев влияние температурного поля на процесс потери устойчивости слоистого полупространства будем оценивать через значения физико-механических характеристик слоев покрытия и полупространства, определяемых экспериментально при различных значениях температуры. Поскольку задача устойчивости при каждом значении температуры будет рассматриваться с учетом заданных значений физико-механических характеристик среды, то температура T выполняет здесь роль параметра. Таким образом окончательно постановка задачи сводится к постановке изложенной в работах [1-3], но при этом для упругих постоянных α_{ij}, G_{ij} используются их значения, полученные при температуре $T = \hat{T}$.

Метод решения. Для определения докритических напряжений, обусловленных постоянной температурой, можно использовать соотношения Дюгамеля-Неймана. В случае однородного докритического состояния при плоской деформации, когда материал слоев и полупространства линейно упругий, ортотропный докритические напряжения в i -ом слое имеют вид

$$\sigma_{11,i}^0 = -p_{11} \left[\left(1 - y \frac{a_{13}}{a_{33}}\right)_{(T+1)} \frac{(a_{11} - a_{13}^2 a_{33}^{-1})_{(i)}}{(a_{11} - a_{13}^2 a_{33}^{-1})_{(T+1)}} - y \frac{a_{13}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}} \right] -$$

$$- \theta \left[\left(\beta_{11} - \beta_{33} \frac{a_{13}}{a_{33}}\right)_{(i)} - \left(a_{11} - \frac{a_{13}^2}{a_{33}}\right)_{(i)} \frac{(\beta_{11} - \beta_{33} \frac{a_{13}}{a_{33}})_{(T+1)}}{(a_{11} - \frac{a_{13}^2}{a_{33}})_{(T+1)}} \right], \sigma_{33,i}^0 = -p_{33} = -p_{11} y \quad (2.1)$$

Здесь обозначено $\beta_{ii} = \alpha_{kl}^T c_{iikl}$ при $i = 1, 3$, $\hat{T} = -T_0$ c_{ijkl} - компоненты тензора упругой жесткости ортотропного тела. При получении формул (2.1) использовались условия равенства докритических деформаций $\varepsilon_{11,1}^0 = \varepsilon_{11,\hat{T}}^0 = \varepsilon_{11,\kappa+1}^0$.

При однородном докритическом состоянии решение уравнений устойчивости в пределах каждого элемента слоистой среды выражается через функции $\Psi_i^{(k)}$ ($i = 1, 3; k = \overline{1, K+1}$), которые в свою очередь удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 \Psi_i^{(k)}}{\partial x_3^{(k)2}} + \eta_i^{(k)} \frac{\partial^2 \Psi_i^{(k)}}{\partial x_1^{(k)2}} = 0, \quad (2.2)$$

В зависимости от уровня нагружения и физико-механических свойств среды коэффициенты $\eta_i^{(k)}$ могут быть вещественными или комплексными величинами.

Между элементами слоистой среды предполагается выполнение условий полного контакта, которые в возмущениях можно записать

$$\begin{aligned} P_i^{(k)}(x_1^{(k)}, x_3^{(k)} + 0) &= P_i^{(t)}(x_1^{(t)}, x_3^{(t)} - 0), \quad t = k + 1, \\ u_i^{(k)}(x_1^{(k)}, x_3^{(k)} + 0) &= u_i^{(t)}(x_1^{(t)}, x_3^{(t)} - 0), \quad i = 1, 3 \end{aligned} \quad (2.3)$$

На «бесконечности» выполняются условия затухания

$$u_i^{(K+1)}(x_1^{(K+1)}, x_3^{(K+1)}) \rightarrow 0 \text{ при } x_3^{(K+1)} \rightarrow -\infty \quad (2.4)$$

На поверхности среды ($x_3^{(1)} = 0$) граничные условия задаем в напряжениях

$$P_i^{(1)}(x_1^{(1)}, 0) = \tilde{P}_i. \quad (2.5)$$

Здесь $P_i^{(k)}(x_1^{(k)}, x_3^{(k)})$ - компоненты возмущений главного вектора напряжений на поверхности сопряжения $\tilde{h}$ -го элемента среды; $\tilde{P}_i$ - компоненты возмущений поверхностной нагрузки. При «мертвых» значениях p_{33} величина $\tilde{P}_i = 0$, а при следящих [2,3].

$$\tilde{P}_i = -p_{33} \left(N_i \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial x_\alpha^{(1)}} - N_\alpha \delta_{\beta i} \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial x_\beta^{(1)}} \right) \quad (2.6)$$

Здесь по повторяющимся индексам производится суммирование. Для построения разрешающих характеристических уравнений используется матричный подход, изложенный в работе [2,3]. Применительно к рассматриваемой задаче оно имеет вид

$$\det \|d_{lm} + d_{l,m+2}\| = 0, \quad l, m = 1, 2 \quad (2.7)$$

Решение для конкретной модели. Считаем материал слоев и полупространства линейно-упругим изотропным. В этом случае имеем зависимости

$$a_{11} = a_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, a_{13} = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, G_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.1)$$

Здесь E и ν -модуль упругости и коэффициент Пуассона. Для определенности считаем, что исследуемое покрытие из трех слоев, сопряжено с однородной полуплоскостью, а нагрузка p_{33} является «мертвой». Температура слоев составляет 600°C . Материал слоев и полупространства, а также их свойства при указанной температуре приведены в таблице. На Рис. 2 приведено численное решение задачи.

Таблица

Материалы: $E(\text{Кг/мм}^2) / \nu$				$T^{\circ}\text{C}$
X18H10T	АД1 ¹⁾	АМГ4 ¹⁾	АМГ6	
18700/0,3	1300/0,45	1540/0,41	1700/0,4	600
18700/0,3	195/0,47	800/0,42	1300/0,41	615
18700/0,3	130/0,47	800/0,43	1300/0,41	620
18700/0,3	50/0,49	800/0,43	1300/0,41	650

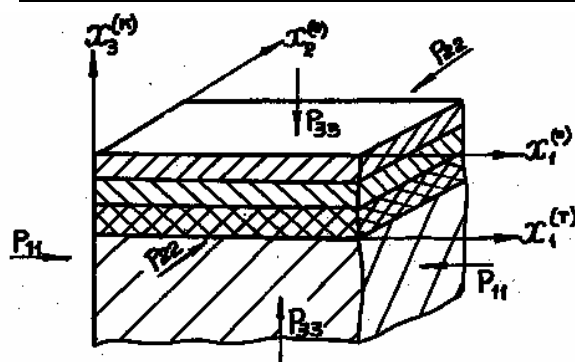


Рисунок 1

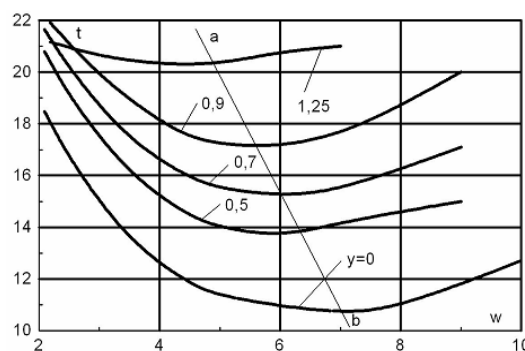


Рисунок 2

Здесь обозначено $t = 10^2(p_{11}/E_4)$; $\omega = (\pi h H)/l$, где l – общая для всего пакета слоев длина полуволны формы потери устойчивости; цифры возле кривых показывают значения параметра $y = p_{33}/p_{11}$. Анализ решения показал, при выбранных параметрах задачи увеличение давления p_{33} приводит к существенному повышению критических значений нагрузок p_{11} и состояние покрытия можно считать устойчивым. Однако при более высоких значениях температур $T = \hat{T}$, этот вывод может оказаться неверным. Поэтому необходимо проведение дополнительных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии.- К.: Наук. думка, 1990.- 629 с.
2. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Поверхностная неустойчивость слоистых материалов при малых и конечных докритических деформациях//Мех. Композитн. материалов.-1984.- № 5. - С. 838 – 84.
3. Ткаченко Э.А. Чехов В.Н. Устойчивость упругого слоистого пакета, сопряженного с двумя полупространствами, при действии сжимающих нагрузок.-2002, 38№11 с. 110-116.

Получено 01.04.2009г.

УДК 621.876.2.001.2

О.І. Білоус, А.Т. Нельга, О.Л. Бельмас

**АВТОМАТИЧНА СИСТЕМА КОНТРОЛЮ РОЗРИВІВ ТРОСІВ
ГУМОТРОСОВОГО КАНАТУ**

Троси в гумотросових канатах (ГТК) захищені від впливу зовнішнього довкілля гумовою оболонкою. Через це, вони безпосередньо не взаємодіють з елементами підйомної машини та агресивними речовинами, що знаходяться в зовнішньому середовищі. Такі властивості забезпечують суттєве (у декілька раз) зростання терміну експлуатації канатів підйомних машин. Разом з цим, прямий візуальний контроль технічного стану тросів в таких канатах реалізувати неможливо. Тому створення автоматичної системи виявлення розриву тросів гумотросового канату – актуальна науково-технічна задача підвищення безпеки експлуатації підйомних машин.

В гумотросовому канаті троси створюють малий, у порівнянні з гумовою оболонкою, електричний опір. Руйнування тросів ГТК зумовлює зміну величин електричного опору (рис. 1), заміряного поміж будь-якою парою тросів. Характер зміни залежить від фізичних характеристик тросів, гуми, схеми замірювання електричного опору та місця ушкодження.

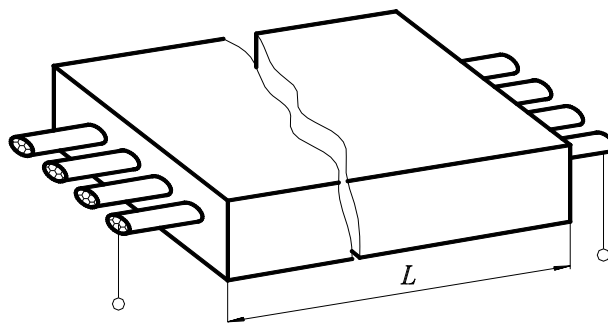


Рисунок 1- Гумотросовий канат

Дослідженнями зміни окремих механічних параметрів зумовлених пошкодженнями тросової основи гумотросового канату займалися ряд вчених. Огляд окремих робіт наведено в роботі [1], методи контролю стану ГТК описані в монографії [2]. Результати цих

робіт не дозволяють створити автоматичну систему виявлення розриву тросів гумотросового канату з функцією визначення місця ушкодження.

Гумотросовий канат розглядали, як систему провідників струму з кількістю тросів в канаті. Кожний провідник, окрім крайніх, в системі вважався зєднаним паралельно з двома суміжними провідниками іншими неперервними провідниками струму, що відтворювали електропровідні властивості гумових прошарків в ГТК. Крайні провідники вважалися паралельно приєднаними лише до одного провідника. Питомий опір тросів та питома електрична провідність гуми вважалися відомими. Для такої моделі та моделі з довільним ушкодженням тросової основи канату знайдені аналітичні значення електричного опору для будь-якої схеми підключення кінців тросу при замірюванні електричного опорк пари тросів в гумотросовому канаті з довільними електротехнічними характеристиками.

На підставі отриманих оезультатів стало можливим розробити автоматичну систему виявлення розриву тросів гумотросового канату з функцією визначення місця ушкодження. Вона здійснює контроль за робочим станом тросів, ідентифікує номер ушкодженого тросу і визначає місце ушкодження.

Робота системи базується на:

- циклічному опитуванні кожної пари тросів, номери яких ідентифікується, з метою визначення електричного опору поміж двома точками підключення;
- порівнянні вимірювальної величини поміж парою точок, яка опитується, з «нормативною» величиною, що відповідає нормальному стану контрольованого вузла, та знаходженні результату порівняння «Розрив виявлено» або «Стан робочий»;
- формуванні сигналу відключення електричного двигуна приводу підйомної машини;
- визначення місця ушкодження, як функції змін електричних опорів, замірянних поміж різними парами тросів.

Структурна схема автоматичної системи контролю розриву тросів гумотросового канату та визначення місця ушкодження показана на рисунку 2.

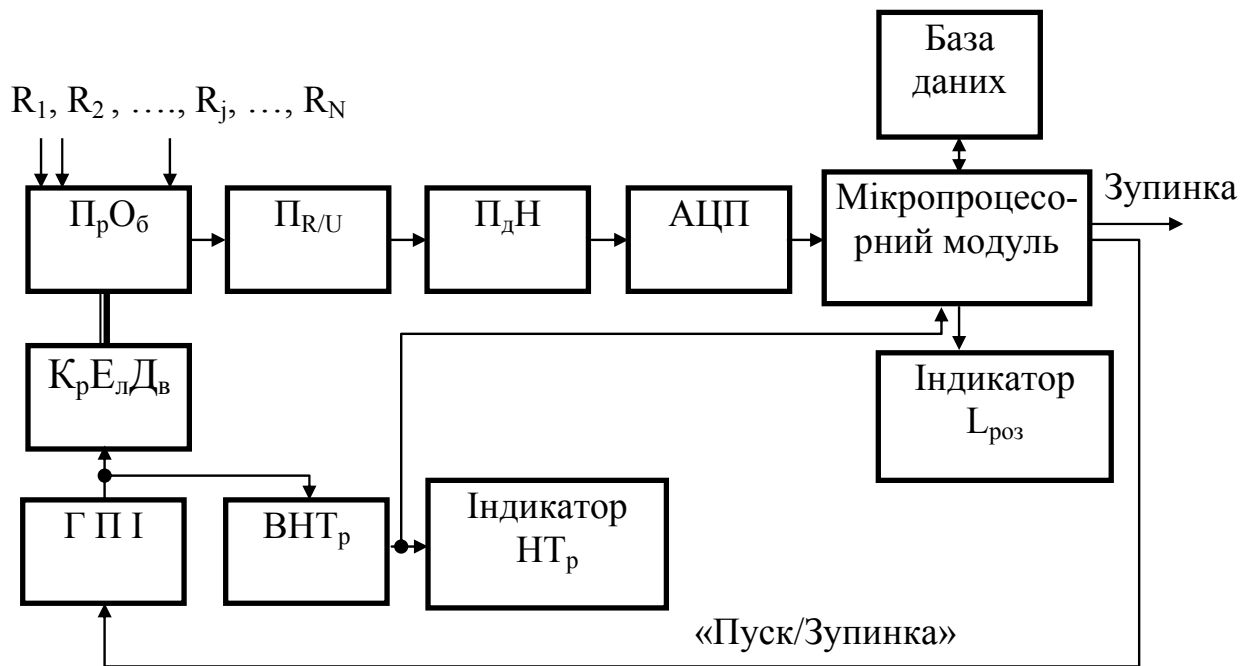


Рисунок 2 – Структурна схема автоматичної системи контролю розриву тросів ГТК

Відповідно до показаної схеми, значення електричного опору тросів $R_1, R_2, \dots, R_j, \dots, R_N$, як параметри залежні від технічного стану гумотросового канату, надходять у пристрій обігу ($\Pi_p O_6$). Для цього, пристрій обігу у заданій послідовності підєднує кожну фіксовану пару тросів до вимірювальної ланки системи. Керується пристрій кроковим електродвигуном ($K_p E_{лДв}$), який забезпечує час приєднання давача, так і інтервал часу поміж вимірюваннями опору заданих пар тросів. Джерелом живлення електродвигуна є генератор прямокутних імпульсів (ГПІ). Електричні параметри (період генерації імпульсів, їх шорина) визначають тривалість приєднання тросів і інтервал часу поміж вимірюваннями опору відповідних пар тросів. Паралельно вихідні імпульси ГПІ надходять у визначальник номера пари тросів ($ВНТ_p$), що ідентифікує пару, яка у даний період часу приєднана до системи. $ВНТ_p$ уявляє собою двійковий лічильник імпульсів з дешифратором. Номер пари тросів відтворюється на відповідному табло системи (Індикатор $НТ_p$). Опір підєднаної пари тросів перетворюється у блоці ($\Pi_{R/U}$) в електричну напругу. Напруга за допомогою підсилювача ($\Pi_{дН}$) доводиться до нормованого значення. Це значення визначається максимальною величиною робочого діапазону аналогово-цифрового перетворювача (АЦП). Перетворювач ($\Pi_{R/U}$) побудовано за схемою нерівноважного моста.

АЦП – перетворює аналоговий вихідний сигнал у 10-ти розрядний двійниковий код. Цей код надходить на системну шину даних мікропроцесорного модулю, створеного на основі однокристальної ЕОМ K1816BE51 [3]. Інформація пов'язана з фактом виникнення пошкодження тросу та розрахунком місця цього ушкодження накопичується в базі даних. Визначення пошкодженого троса ГТК, та місця ушкодження здійснюється програмно з використанням мови низького рівня (Асемблер МК 51).

На рис. 3 надана структурна схема алгоритму напрацювання такої програми. У складі цієї схеми 16 алгоритмічних блоків. Початок роботи системи визначається блоком 1. Блок 2 для кожної пари тросов ГТК формує масив нормативних опорів R_j^* для порівняння їх значень із вагованими опорами R_j (блок 6), які замірюються у процесі роботи автоматичної системи контролю. Блок 3 розміщує інформацію про загальну кількість (N) тросов у ГТК, які підлягають контролю.

Схема алгоритму включає внутрішній і зовнішній цикли роботи системи. Внутрішній цикл реалізує опитування визначеного тросу ГТК (блок 5), оцінює його стан (блоки 6 і 7). У випадку нормального стану тросу, який щойно контролювався — переходу на контроль чергового (блок 8).

Якщо ситуація виникла такою, що трос виявився пошкодженим (розірвався), блок 7, реагуючи на результат порівняння ΔR_j , видає логічний сигнал «ТАК», що від'єднує електродвигун (блок 9) від силового контуру і «сповіщає» про факт розриву тросу (блок 10). Одночасно, цей сигнал є командним для початку розрахунку $L_{роз}$ (блок 11) та індикації цього результату (блок 12). Блок 11 на період опитування чергового номеру троса фіксує нове значення R_j але до цього «обнулює» попереднє.

Блоки 13, 14 утворюють лічильник кількості тросів, контроль яких ще не здійснений. Блок 15 папорядкований прийняттю рішення оператором або на зупинку (блок 16) функціонування автоматичної системи контролю (сигнал «НІ»), або його продовження (сигнал «ТАК»), Зворотній зв'язок блоку 15 через його вихід «ТАК» з блоком 4 утворює зовнішній цикл схеми алгоритму.

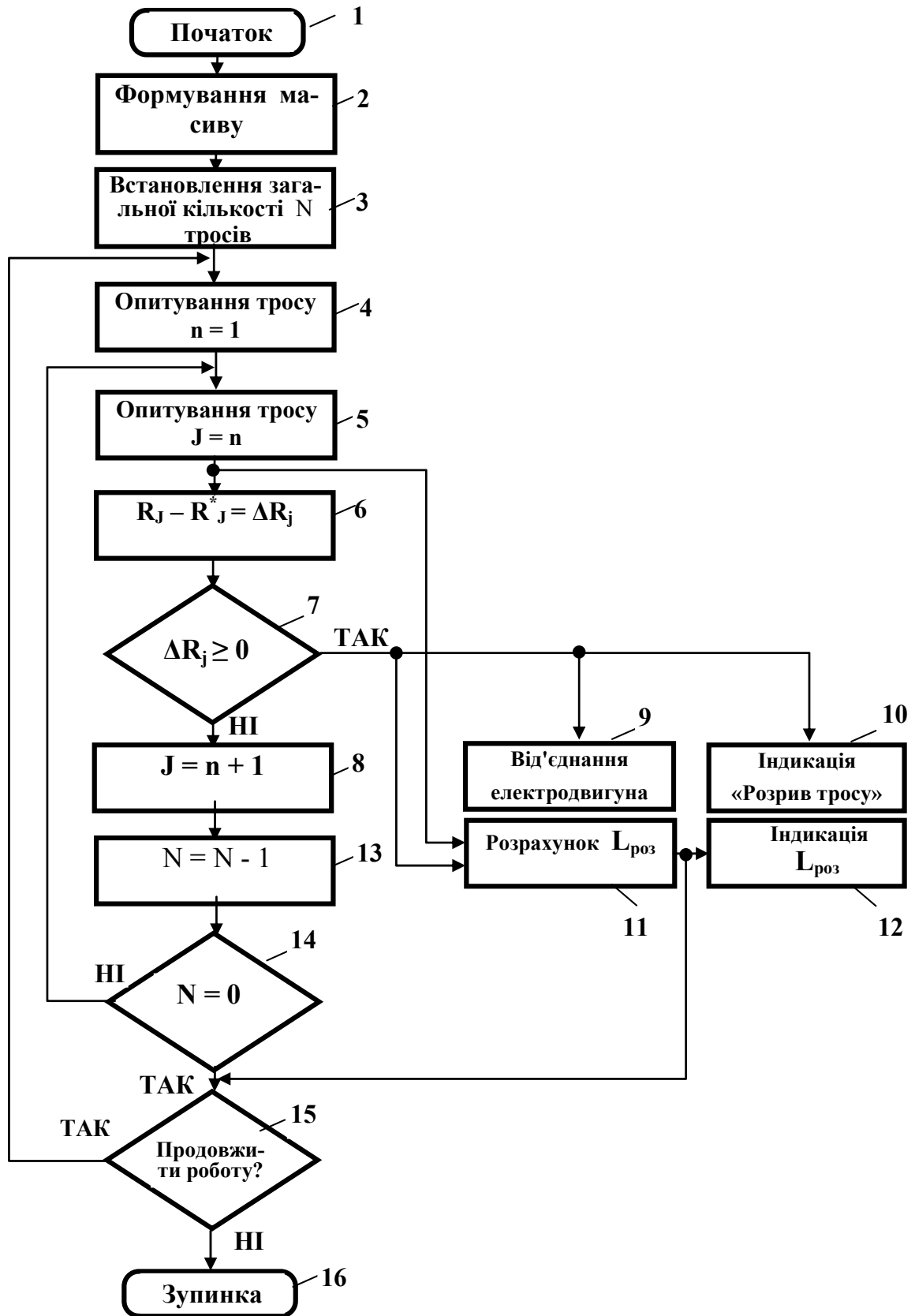


Рисунок 3 – Структурна схема алгоритму функціонування автоматичної системи контролю розриву тросів ГТК

Висновки. Автоматична система виявлення розриву тросів гумотросового канату з функцією визначення місця ушкодження дозволяє в автоматичному режимі в процесі експлуатації підйомної машини обладнаної плоским гумотросовим канатом контролювати технічний стан тросів завулканізованих в гумову оболонку та зупиняти машину у разі пориву будь-якого троса. Функція визначення місця ушкодження дозволяє встановлювати номер ушкодженого троса та відстань від кінця канату до перерізу ушкодження. Впровадження автоматичної системи контролю дасть змогу оперативно приймати рішення спрямовані на ліквідацію ушкодження канату, зупиняти «розвиток» ушкоджень, зменшити витрати часу на відновлення робочого стану підйомної машини, а головне підняти її надійність та безпеку її експлуатації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Колосов Д.Л. Обґрунтування параметрів та конструкцій двошарових гумотросових конвеєрних стрічок для гірничих підприємств. Дис. канд. техн. наук: 05.05.06. - Дніпропетровск, 2002. - 164 с.
2. Полунин В.Т., Гуленко Г.Н. Эксплуатация мощных конвейеров. - М. Машиностроение. - 1986, 324 с.
3. Сташин В.В., Урусов А.В., Мологонцева О.Ф. Проектирование цифровых устройств на однокристальных микроконтроллерах. — М. Энергоатомиздат. — 1992, 224 с.

Одержано 09.04.2009р.

ВАРІАЦІЙНИЙ ВЕКТОРНО-РІЗНИЦЕВИЙ МЕТОД У НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ОБОЛОНОК З КРИВОЛІНІЙНИМИ ОТВОРАМИ

Вступ. Розв'язання аналітичними методами фізично і геометрично нелінійних крайових задач для оболонок Кірхгофа-Лява, послаблених отворами, пов'язано із значними математичними труднощами. Тому дослідження нелінійного деформування гнучких оболонок за межею пружності виконують, в основному, з використанням чисельних методів сіткового виду, до яких належать метод скінченних різниць (МСР), варіаційно-різницевий метод (ВРМ) і метод скінченних елементів (МСЕ).

МСЕ розв'язано значну кількість одновимірних і двовимірних нелінійних задач концентрації напружень в оболонках як простої, так і складної геометрії [4,7].

Результати, отримані за допомогою МСР, відносяться переважно до вісесиметричного деформування оболонок [4,5,8].

Традиційний ВРМ, в якому гіпотези Кірхгофа-Лява реалізовані звичайним шляхом (підстановкою у співвідношення для деформацій замість кутів повороту нормалі їх виразів через переміщення точок серединної поверхні оболонки), знайшов застосування при розв'язанні як вісесиметричних, так і невісесиметричних нелінійних задач для оболонок простої геометрії [4,6,8,9].

Нижче описано варіант ВРМ для дослідження пружнопластичного стану гнучких оболонок складної геометрії.

Постановка задачі. Тонку довільну оболонку товщини h , яка послаблена отворами і знаходиться під дією поверхневих $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$ та крайових $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$ сил, віднесемо до криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$. Нехай при підвищених рівнях навантаження в оболонці виникають пластичні деформації її матеріалу і скінченні прогини.

Зв'язок між компонентами тензора деформацій і вектора переміщень точок серединної поверхні запишемо на основі геометрично нелінійної теорії непологих оболонок у квадратичному наближенні, в якій прийняті гіпотези Кірхгофа-Лява. Вирази для компонент мембранної (ε_{ij}) і згинної (μ_{ij}) деформацій подамо у векторній формі:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}^0 + \frac{1}{2} \theta_1^2; & \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{12}^0 + \theta_1 \theta_2; & \varepsilon_{11}^0 &= \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1}; \\ \varepsilon_{12}^0 &= \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_2 \partial \alpha_2}; \\ \mu_{11} &= -\vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\theta}}{A_1 \partial \alpha_1} + \frac{\partial \vec{n}}{A_1 \partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1}; \theta_1 = \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1} \quad (1 \rightarrow 2); \\ 2\mu_{12} &= -\vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\theta}}{A_1 \partial \alpha_1} - \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\theta}}{A_2 \partial \alpha_2} + \frac{\partial \vec{n}}{A_2 \partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1} + \frac{\partial \vec{n}}{A_1 \partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_2 \partial \alpha_2},\end{aligned}\quad (1)$$

де A_1, A_2 – параметри Ламе; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ – орти криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$; $\vec{U} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{n}$ – вектор переміщень; $\vec{\theta} = \theta_1\vec{e}_1 + \theta_2\vec{e}_2$ – вектор кутів повороту дотичних до координатних ліній.

Приймаючи, що навантаження просте, при дослідженні деформування оболонок за межею пружності будемо користуватися співвідношеннями теорії малих пружно-пластичних деформацій.

Внутрішні зусилля і моменти подамо у вигляді:

$$\begin{aligned}T_{11} &= S_{11} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{n}}{A_1 \partial \alpha_1} M_{11} + \vec{e}_1 \cdot \frac{\partial \vec{n}}{A_2 \partial \alpha_2} M_{12}; \\ T_{12} &= S_{12} + \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{n}}{A_2 \partial \alpha_2} M_{12} + \vec{e}_2 \cdot \frac{\partial \vec{n}}{A_1 \partial \alpha_1} M_{11}; \\ S_{11} &= S_{11}^0 + S_{11}^H; \quad S_{12} = S_{12}^0 + S_{12}^H; \quad M_{11} = M_{11}^0 + M_{11}^H; \quad M_{12} = M_{12}^0 + M_{12}^H; \\ S_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} d\gamma; \quad S_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} d\gamma; \quad M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \gamma d\gamma; \quad M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \gamma d\gamma; \quad (2) \\ ((S_{ij}, M_{ij}, \sigma_{ij}) &\rightarrow (S_{ij}^0, M_{ij}^0, \sigma_{ij}^0), (S_{ij}^H, M_{ij}^H, \sigma_{ij}^H)), \quad (1 \leftrightarrow 2),\end{aligned}$$

де σ_{ij} – компоненти напружень в довільній точці оболонки; величини з індексами «0» і «H» зверху відповідають лінійним і нелінійним членам у відповідних виразах.

Відмітимо, що компоненти деформації оболонки, визначені за формулами (1), є енергетичними відносно симетричних зусиль (S_{ij}) і моментів (M_{ij}), тобто відповідають їм у виразі для енергії деформації.

Змішаний функціонал для гнучких пружно-пластичних оболонок. Розв'язувальні рівняння в переміщеннях теорії тонких оболонок при застосуванні МСЕ і ВРМ отримують з умов стаціонарності функціоналу Лагранжа, в якому кути повороту θ_1 і θ_2 обчислюються через вектор переміщень $\vec{U}$ у відповідності з формулами (1), що приводить до появи похідних другого порядку і ускладнює процес дискретизації. Альтернативний шлях полягає в прийнятті кутів повороту θ_1 і θ_2 за незалежні функції, реалізації зв'язку кутів повороту з вектором переміщень за допомогою множників Лагранжа і побудові відповідного змішаного функціоналу, який не містить похідних вище першого порядку. Такий підхід до побудови функціонала для тонких оболонок є, по суті, реалізацією гіпотез Кірхгофа-Лява за допомогою множників Лагранжа. Стосовно ВРМ, метод множників Лагранжа для реалізації гіпотез Кірхгофа-Лява, напевне, вперше був запропонований в роботі [2] з подальшим продовженням в [3,6,8,9].

З умов стаціонарності змішаного функціоналу отримаємо систему нелінійних рівнянь, яка описує напружено-деформований стан оболонки при сумісному врахуванні пластичних деформацій і скінченних прогинів. Розроблена в роботі методика розв'язання нелінійних рівнянь базується на використанні методу послідовних наближень (простих ітерацій) в поєднанні з варіаційним векторно-різницеvim методом (ВВРМ). В цьому випадку лінеаризований змішаний функціонал з використанням співвідношень (1), (2) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \Pi^{LN} = & \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \left(S_{11}^0 \varepsilon_{11}^0 + S_{22}^0 \varepsilon_{22}^0 + S_{12}^0 \varepsilon_{12}^0 + M_{11}^0 \mu_{11} + M_{22}^0 \mu_{22} + 2M_{12}^0 \mu_{12} \right) d\Sigma + \\ & + \iint_{\Sigma} \left[(S_{11} \theta_1 + S_{12} \theta_2) \theta_1 + (S_{22} \theta_2 + S_{12} \theta_1) \theta_2 + S_{11}^H \varepsilon_{11}^0 + S_{22}^H \varepsilon_{22}^0 + S_{12}^H \varepsilon_{12}^0 + \right. \\ & \left. + M_{11}^H \mu_{11} + M_{22}^H \mu_{22} + 2M_{12}^H \mu_{12} \right] d\Sigma + \iint_{\Sigma} \left(T_{1\gamma} \varepsilon_{1\gamma} + T_{2\gamma} \varepsilon_{2\gamma} \right) d\Sigma - A_P, \end{aligned} \quad (3)$$

де A_p - робота зовнішніх поверхневих і контурних сил; Σ - область серединної поверхні оболонки; $T_{1\gamma}, T_{2\gamma}$ - множники Лагранжа; $\varepsilon_{1\gamma}, \varepsilon_{2\gamma}$ - вирази виду: $\varepsilon_{1\gamma} = -\vec{\theta} \cdot \vec{e}_1 + \vec{n} \cdot \frac{\partial \vec{U}}{A_1 \partial \alpha_1} \quad (1 \rightarrow 2)$.

В змішаному функціоналі (3) немає похідних вище першого порядку, розв'язуючими є сім функцій $(u, v, w, \theta_1, \theta_2, T_{1\gamma}, T_{2\gamma})$, які можна незалежно варіювати.

Методика чисельного розв'язання двовимірних задач для тонких оболонок. Розглянемо випадок, коли область (Σ) зміни координат (α_1, α_2) є складною, тобто такою, в якій не всі контурні лінії співпадають з координатними лініями. Для отримання різницевих рівнянь розбиваємо область (Σ) на (K_Φ) криволінійних чотирикутних фрагментів, в кожному з яких вводимо локальну косокутну систему координат (ξ, η) .

Перейдемо у геометричних та фізичних співвідношеннях до косокутних координат (ξ, η) і перетворимо функціонал (3) до вигляду:

$$\begin{aligned} \Pi^{LH} = \sum_{k=1}^{K_\Phi} \left\{ \frac{1}{2} \iint_{\Sigma_k} \left[d_{11}(\varepsilon_{\xi\xi}^0)^2 + d_{22}(\varepsilon_{\eta\eta}^0)^2 + d_{33}(\varepsilon_{\xi\eta}^0)^2 + 2d_{12}\varepsilon_{\xi\xi}^0\varepsilon_{\eta\eta}^0 + 2d_{13}\varepsilon_{\xi\xi}^0\varepsilon_{\xi\eta}^0 + 2d_{23}\varepsilon_{\eta\eta}^0\varepsilon_{\xi\eta}^0 + \right. \right. \\ \left. + d_{44}\mu_{\xi\xi}^2 + d_{55}\mu_{\eta\eta}^2 + 4d_{66}\mu_{\xi\eta}^2 + 2d_{45}\mu_{\xi\xi}\mu_{\eta\eta} + 4d_{46}\mu_{\xi\xi}\mu_{\xi\eta} + 4d_{56}\mu_{\eta\eta}\mu_{\xi\eta} \right] d\Sigma + \\ \left. + \iint_{\Sigma_k} \left[(S_{\xi\xi}\theta_\xi + S_{\xi\eta}\theta_\eta)\theta_\xi + (S_{\eta\eta}\theta_\eta + S_{\xi\eta}\theta_\xi)\theta_\eta + S_{\xi\xi}^H\varepsilon_{\xi\xi}^0 + S_{\eta\eta}^H\varepsilon_{\eta\eta}^0 + S_{\xi\eta}^H\varepsilon_{\xi\eta}^0 + \right. \right. \\ \left. + M_{\xi\xi}^H\mu_{\xi\xi} + M_{\eta\eta}^H\mu_{\eta\eta} + 2M_{\xi\eta}^H\mu_{\xi\eta} \right] d\Sigma + \iint_{\Sigma_k} \left(T_{\xi\gamma}\varepsilon_{\xi\gamma} + T_{\eta\gamma}\varepsilon_{\eta\gamma} \right) d\Sigma \right\} - A_p, \quad (4) \end{aligned}$$

де $d_{11}, d_{12}, \dots, d_{66}$ - елементи матриці жорсткостей оболонки.

Область зміни локальних координат (ξ, η) , яка для кожного фрагменту є прямокутником, покриваємо основною (i, j) і допоміжною $\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right)$ системами сіток з кроками l і δ вздовж координатних ліній ξ і η , у виразі (4) для змішаного функціоналу переходимо від диференціювання до скінченних різниць і від інтегрування – до підсумовування за формулою прямокутників.

Компоненти деформації оболонки в косокутній системі координат (ξ, η) обчислюються наближено за скінченно-різницевиими формулами:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\xi\xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= \varepsilon_{\xi\xi}^0 \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{1}{2} \theta_{\xi}^2 \Big|_{i+\frac{1}{2},j}; \quad \varepsilon_{\xi\xi}^0 \Big|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\vec{U}_{i+1,j} - \vec{U}_{i,j}}{l} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j}; \\
 \varepsilon_{\eta\eta} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= \varepsilon_{\eta\eta}^0 \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \theta_{\eta}^2 \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}; \quad \varepsilon_{\eta\eta}^0 \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\vec{U}_{i,j+1} - \vec{U}_{i,j}}{\delta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}; \\
 \theta_{\xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= \frac{\vec{\theta}_{i+1,j} + \vec{\theta}_{i,j}}{2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j}; \quad \theta_{\eta} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{\vec{\theta}_{i,j+1} + \vec{\theta}_{i,j}}{2} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}; \\
 \varepsilon_{\xi\eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \varepsilon_{\xi\eta}^0 \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \left(\theta_{\xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \theta_{\xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+1} \right) \left(\theta_{\eta} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \theta_{\eta} \Big|_{i+1,j+\frac{1}{2}} \right); \\
 \varepsilon_{\xi\eta}^0 \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{U}_{i+1,j} - \vec{U}_{i,j}}{l} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\vec{U}_{i+1,j+1} - \vec{U}_{i,j+1}}{l} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+1} \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{U}_{i,j+1} - \vec{U}_{i,j}}{\delta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\vec{U}_{i+1,j+1} - \vec{U}_{i+1,j}}{\delta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \Big|_{i+1,j+\frac{1}{2}} \right); \\
 \mu_{\xi\xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &= -\frac{\vec{\theta}_{i+1,j} - \vec{\theta}_{i,j}}{l} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\vec{U}_{i+1,j} - \vec{U}_{i,j}}{l} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \xi} \Big|_{i+\frac{1}{2},j}; \\
 \mu_{\eta\eta} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} &= -\frac{\vec{\theta}_{i,j+1} - \vec{\theta}_{i,j}}{\delta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\vec{U}_{i,j+1} - \vec{U}_{i,j}}{\delta} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \eta} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}}; \\
 2\mu_{\xi\eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\vec{\theta}_{i+1,j} - \vec{\theta}_{i,j}}{l} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\vec{\theta}_{i+1,j+1} - \vec{\theta}_{i,j+1}}{l} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+1} \right) - \\
 &- \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{\theta}_{i,j+1} - \vec{\theta}_{i,j}}{\delta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\vec{\theta}_{i+1,j+1} - \vec{\theta}_{i+1,j}}{\delta} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \Big|_{i+1,j+\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{U}_{i+1,j} - \vec{U}_{i,j}}{l} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\vec{U}_{i+1,j+1} - \vec{U}_{i,j+1}}{l} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \eta} \Big|_{i+\frac{1}{2},j+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{U}_{i,j+1} - \vec{U}_{i,j}}{\delta} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \xi} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\vec{U}_{i+1,j+1} - \vec{U}_{i+1,j}}{\delta} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial \xi} \Big|_{i+1,j+\frac{1}{2}} \right),
 \end{aligned} \tag{5}$$

де $\vec{r}$ - радіус-вектор точок серединної поверхні.

Зауважимо, що ідея застосування скінченних різниць у векторних співвідношеннях лежить в основі методу криволінійних сіток [1].

Інтеграли у функціоналі (4) замінюються сумами за схемою:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Sigma_k} (...) d\Sigma = & \\
 = & \sum_{i=1}^{I_k-1} \sum_{j=1}^{J_k} \left\{ \frac{1}{2} \left[d_{11} (\varepsilon_{\xi\xi}^0)^2 + d_{44} \mu_{\xi\xi}^2 \right] + T_{\xi\gamma} \varepsilon_{\xi\gamma} + (S_{\xi\xi} \theta_{\xi} + S_{\xi\eta} \theta_{\eta}) \theta_{\xi} + S_{\xi\xi}^H \varepsilon_{\xi\xi}^0 + M_{\xi\xi}^H \mu_{\xi\xi} \right\} \omega \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \\
 & + \sum_{i=1}^{I_k} \sum_{j=1}^{J_k-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[d_{22} (\varepsilon_{\eta\eta}^0)^2 + d_{55} \mu_{\eta\eta}^2 \right] + T_{\eta\gamma} \varepsilon_{\eta\gamma} + (S_{\eta\eta} \theta_{\eta} + S_{\xi\eta} \theta_{\xi}) \theta_{\eta} + S_{\eta\eta}^H \varepsilon_{\eta\eta}^0 + M_{\eta\eta}^H \mu_{\eta\eta} \right\} \omega \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \\
 & + \sum_{i=1}^{I_k-1} \sum_{j=1}^{J_k-1} \left\{ \frac{1}{2} \left[d_{33} (\varepsilon_{\xi\eta}^0)^2 + 2d_{12} \varepsilon_{\xi\xi}^0 \varepsilon_{\eta\eta}^0 + 2d_{13} \varepsilon_{\xi\xi}^0 \varepsilon_{\xi\eta}^0 + 2d_{23} \varepsilon_{\eta\eta}^0 \varepsilon_{\xi\eta}^0 + 4d_{66} \mu_{\xi\eta}^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2d_{45} \mu_{\xi\xi} \mu_{\eta\eta} + 4d_{46} \mu_{\xi\xi} \mu_{\xi\eta} + 4d_{56} \mu_{\eta\eta} \mu_{\xi\eta} \right] + S_{\xi\eta}^H \varepsilon_{\xi\eta}^0 + 2M_{\xi\eta}^H \mu_{\xi\eta} - \vec{p} \cdot \vec{U} \right\} \omega \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

де $\omega(\xi, \eta)$ - частина елемента площі $(A_1 A_2 |J| l \delta)$ з центром в точці (ξ, η) , яка належить фрагменту (Σ_k) ; $|J|$ - якобіан; $\vec{p} = p_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 + p_3 \vec{n}$ - вектор поверхневих сил.

З умов стаціонарності дискретного аналога функціоналу (4) отримуємо систему різницевих рівнянь, яка у внутрішньому вузлі (i, j) фрагмента має вигляд:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left[\frac{\omega}{l} \left(T_{\xi\xi}^0 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + T_{\xi\eta}^0 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} + T_{\xi\gamma} \vec{n} \right) \right] \right\}_{i-\frac{1}{2},j}^{i+\frac{1}{2},j} + \\
 & + \left[\frac{\omega}{\delta} \left(T_{\xi\eta}^0 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + T_{\eta\eta}^0 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} + T_{\eta\gamma} \vec{n} \right) \right]_{i,j-\frac{1}{2}}^{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} \left[(\omega \vec{p})_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \right. \\
 & \left. + (\omega \vec{p})_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + (\omega \vec{p})_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (\omega \vec{p})_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right] \cdot \vec{e}_1 \Big|_{i,j} + \Phi_1 \Big|_{i,j} = 0 \quad ; \\
 & ((\vec{e}_1, \Phi_1) \rightarrow (\vec{e}_2, \Phi_2), (\vec{n}, \Phi_3)) \\
 & \Phi_1 \Big|_{i,j} = \left\{ \left[\frac{\omega}{l} \left(T_{\xi\xi}^H \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + T_{\xi\eta}^H \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) \right] \right\}_{i-\frac{1}{2},j}^{i+\frac{1}{2},j} + \left[\frac{\omega}{\delta} \left(T_{\xi\eta}^H \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + T_{\eta\eta}^H \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) \right]_{i,j-\frac{1}{2}}^{i,j+\frac{1}{2}} \cdot \vec{e}_1 \Big|_{i,j} \quad ; \quad (7) \\
 & \left\{ \left[\frac{\omega}{l} \left(M_{\xi\xi}^0 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + M_{\xi\eta}^0 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) \right] \right\}_{i-\frac{1}{2},j}^{i+\frac{1}{2},j} + \left[\frac{\omega}{\delta} \left(M_{\xi\eta}^0 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + M_{\eta\eta}^0 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) \right]_{i,j-\frac{1}{2}}^{i,j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left[\left(\omega T_{\xi\gamma} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right) \right]_{i+\frac{1}{2},j} + \\
 & + \left(\omega T_{\xi\gamma} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right)_{i-\frac{1}{2},j} + \left(\omega T_{\eta\gamma} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} + \left(\omega T_{\eta\gamma} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \Big] \cdot \vec{e}_1 \Big|_{i,j} + \Phi_4 \Big|_{i,j} = 0 \\
 & (\vec{e}_1, \Phi_4 \rightarrow \vec{e}_2, \Phi_5) \quad ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_4|_{i,j} = & \left\{ \left[\frac{\omega}{l} \left(M_{\xi\xi}^H \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + M_{\xi\eta}^H \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) \right] \right|_{i+\frac{1}{2},j} + \left[\frac{\omega}{\delta} \left(M_{\xi\eta}^H \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} + M_{\eta\eta}^H \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) \right] \right|_{i,j-\frac{1}{2}} + \\
& + \frac{1}{2} \left[\left(\omega(T_{\xi\xi}\theta_\xi + T_{\xi\eta}\theta_\eta) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right) \right|_{i+\frac{1}{2},j} + \left(\omega(T_{\xi\xi}\theta_\xi + T_{\xi\eta}\theta_\eta) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right) \right|_{i-\frac{1}{2},j} + \\
& + \left(\omega(T_{\eta\eta}\theta_\eta + T_{\xi\eta}\theta_\xi) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) \right|_{i,j+\frac{1}{2}} + \left(\omega(T_{\eta\eta}\theta_\eta + T_{\xi\eta}\theta_\xi) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right) \right|_{i,j-\frac{1}{2}} \Bigg] \cdot \vec{e}_1|_{i,j}; \\
& (\omega\varepsilon_{\xi\gamma})_{i+\frac{1}{2},j} + (\omega\varepsilon_{\xi\gamma})_{i-\frac{1}{2},j} = 0; \quad (\omega\varepsilon_{\eta\gamma})_{i,j+\frac{1}{2}} + (\omega\varepsilon_{\eta\gamma})_{i,j-\frac{1}{2}} = 0,
\end{aligned}$$

де Φ_k - нелінійні члени рівнянь, які відомі з попереднього наближення.

Послідовна підстановка різницевих співвідношень для компонент деформації і внутрішніх зусиль та моментів в (7) приводить до системи розв'язувальних алгебраїчних рівнянь, яка в матричній формі записується так:

$$[A] \{V\} = \{P\} + \{\Phi\}, \quad (8)$$

де $[A]$ - матриця системи (8); $\{V\}$ - глобальний вектор вузлових невідомих; $\{P\}$ - вектор навантажень; $\{\Phi\}$ - вектор нелінійностей.

Висновки. Таким чином, в роботі запропоновано варіант ВВРМ для розв'язання фізично і геометрично нелінійних задач теорії тонких оболонок, який базується на реалізації гіпотез Кірхгофа-Лява за допомогою множників Лагранжа, записі геометричних співвідношень у векторній формі та розбитті серединної поверхні оболонки на криволінійні чотирикутні фрагменти. Розроблена методика дозволила побудувати для тонких оболонок функціонал, який не містить похідних вище першого порядку, а також повністю виключити негативний вплив жорстких переміщень на збіжність результатів чисельних розрахунків та надає можливість розв'язувати лінійні і нелінійні задачі для оболонок складної геометрії, зокрема, послаблених отворами і вирізами різноманітної форми.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гоцуляк Е.А., Ермишев Е.Н., Жадрасинов Т.Н. Сходимость метода криволинейных сеток в задачах теории оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1981. – Вып. 39. – С. 80 - 84.

2. Ермаковская И.П., Максимюк В.А., Чернышенко И.С. Нелинейно упругие двумерные задачи статики ортотропных тонких оболочек и методика их решения // Ред. ж. Прикл. механика. – Киев, 1988. – 30 с. – Деп. в ВИНТИ 19.10.88, № 7526 - В 88. – Аннот. в ж. Прикл. механика. – 1989. – 25, № 2. – С. 129.
3. Максимюк В.А. Про послідовне виключення множників Лагранжа // Системні технології. Математичні проблеми технічної механіки. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2008. – № 4 (57). – С.45–47.
4. Максимюк В.А., Сторожук Е. А., Чернышенко И. С. Решение нелинейных задач статики тонких оболочек сеточными методами // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 1. – С. 41 – 70.
5. Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н.Гузъ, И.С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов и др. – К.: Наук.думка,1980.- 636 с.
6. Механика композитов: В 12-ти т.; Т.7. Концентрация напряжений / А.Н. Гузъ, А.С. Космодамианский, В.П.Шевченко и др.- К.:”А.С.К.”,1998.-387 с.
7. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Physically and Geometrically Nonlinear Static Problems for Thin-Walled Multiply Connected Shells // Int. Appl.Mech.- 2003.- 39, N6.- P. 679 - 687.
8. Guz A.N., Chernyshenko I. S., Shnerenko K.I. Stress Concentration near Opening in Shells Made of Composites // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 2. – P. 139 – 181.
9. Macsimyuk V.A., Chernyshenko I. S. Mixed Functional in the Theory of Nonlineary Elastic Shells // Int.Appl.Mech.- 2004.- 40, N11.- P. 1226 - 1262.

Получено 13.04.2009г.

УДК 621.771.28

А.С. Ткаченко, И.А. Колесник, С.Р. Рахманов**ДИНАМИКА СТЕРЖНЯ МЕХАНИЗМА УДЕРЖАНИЯ ОПРАВКИ
СТАНОВ ТРУБОПРОКАТНОГО АГРЕГАТА**

Одним из существенных показателей при производстве горячекатаных бесшовных труб на станах технологической линии трубопрокатного агрегата (ТПА) является разностенность полученных гильз, определяющих качество готовой продукции.

Требования, предъявляемые стандартами к горячекатаным трубам, показывают, что по точности геометрических размеров продукцию, выпускаемую отечественной промышленностью, необходимо довести до уровня мировых достижений. Ряд отраслей промышленности выдвигают определенно жесткие требования к точности геометрических размеров гильз и качеству готовых труб [1].

Особенности технологии производства горячекатаных бесшовных труб, полученных преимущественно способом винтовой прокатки, приводит к образованию гильз с определенной наведенной разностенностью. Следовательно, разностенность полученных гильз устраняется частично или не устраняется вообще при последующих технологических операциях на остальных станах всего технологического цикла ТПА.

Отклонение стержня оправки от исходной оси прокатки влияет на условия формирования очага деформации на станах ТПА. Виброактивность станов ТПА вызвано значительными колебаниями стержня механизма удержания оправки. Следовательно, нарушение стабильности технологических процессов прошивки заготовок в гильзы на прошивном стане, продольной прокатки гильз на автоматическом стане и раскатки гильз на раскатном стане в конечном итоге приводят к получению труб повышенной разностенности. Значительную часть продольной и поперечной разностенности готовых труб составляют изменения по толщине стенки гильз, что обусловлено в основном колебаниями стержня с оправкой в очаге деформации станов ТПА.

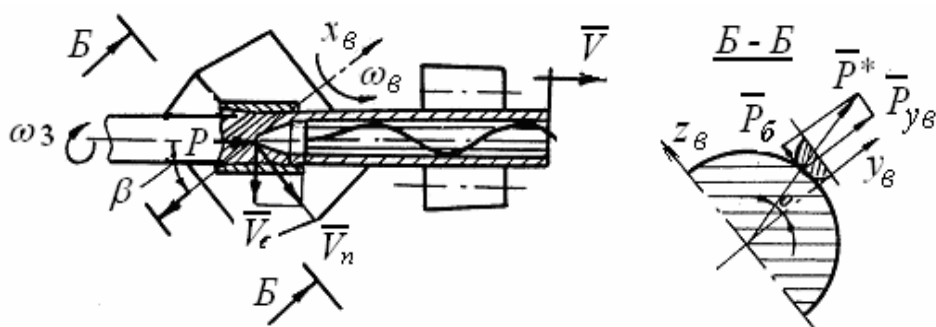


Рисунок 1 - Схема процесса прошивки гильз на прошивном стане

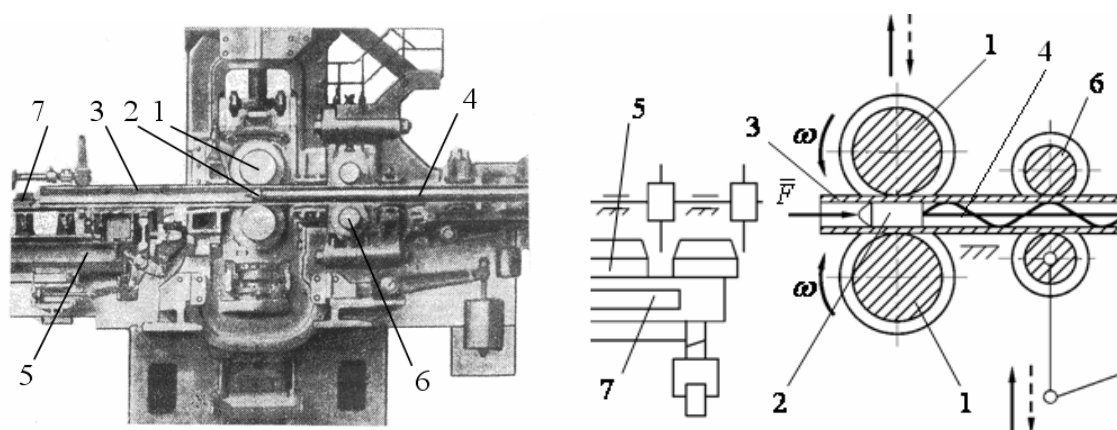


Рисунок 2 - Схема прокатки гильз на автоматическом стане

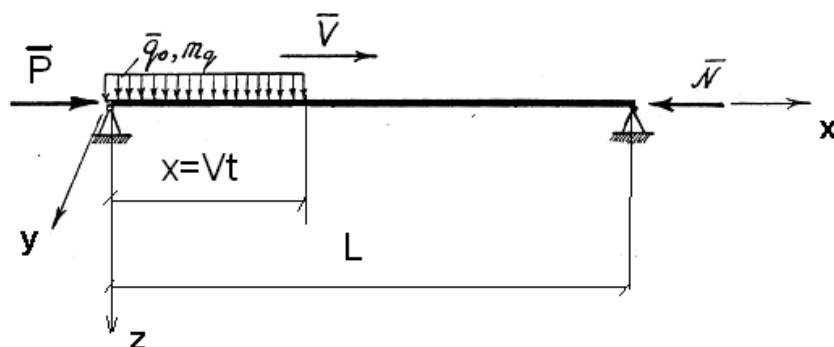


Рисунок 3 - Расчетная схема стержневой системы механизма удержания оправки

Необходимыми условиями снижения разностенности бесшовных труб является повышение динамической устойчивости системы «заготовка (гильза) – оправка – стержень». Необходимо отметить, что это возможно внедрением совершенных конструкций центрователей и упорно-регулирующего механизма, стабилизирующих виброактивность стержня оправки и гильзы (трубы) на выходной стороне станов ТПА [2].

Интенсификация процесса производства горячекатаных труб в условиях существующей тенденции осуществляется путем увеличения угла подачи рабочих валков станов винтовой прокатки,

что требует предварительную оценку уровня динамической нагруженности системы «заготовка (гильза) – оправка – стержень».

Динамическое взаимодействие стержневой системы механизма удержания оправки с прошиваемой заготовкой или прокатываемой гильзой (трубой), в области больших углов подачи рабочих валков, обусловлено высокими темпами прокатки, существенными изменениями массы трубы и другими параметрами системы.

Для количественной оценки динамических процессов учтем влияние изменения скорости, погонной массы перемещающейся трубы и других основных параметров системы на условия реализации технологического процесса производства горячекатаных труб на станах ТПА. В рамках принятой модели воспользуемся дифференциальным уравнением поперечных колебаний стержневой системы механизма удержания оправки в виде:

$$EJ \frac{d^4 y(x,t)}{dx^4} + m_0 \frac{d^2 y(x,t)}{dt^2} = q(x,t), \quad (1)$$

где m_0 – погонная масса стержня оправки; EJ – жесткость стержня оправки; $q(x,t)$ – интенсивность воздействия прокатываемой трубы.

Для решения поставленной задачи в замкнутом виде воспользуемся методом Бубнова – Галеркина.

Предварительно разделив на m_0 уравнение (1), оператор системы представим:

$$L(x,t) = \frac{d^4 y(x,t)}{dx^4} a^2 + \frac{d^2 y(x,t)}{dt^2} - \frac{q(x,t)}{m_0} \quad (2)$$

где $a^2 = \frac{EJ}{m_0}$; $q(x,t) = q_0 - m'_q \frac{d^2 y(x,t)}{dt^2}$; q_0 – постоянная составляющая интенсивности воздействия трубы (гильзы).

Согласно [3] характер нарастания массы прокатываемой трубы во времени при реализации технологического процесса на станах ТПА можно представить в виде линейного закона

$$m'_q = m_q \cdot \left(1 + K^* \frac{Vt}{\ell} \right),$$

где K^* – коэффициент изменения погонной массы гильзы в процессе прошивки заготовки, продольной прокатки или раскатки гильзы.

Используя результаты работы [4] абсолютное ускорение прокатываемой трубы представим в виде:

$$\frac{d^2 y(x,t)}{dt^2} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \quad (3)$$

тогда для интенсивности нагрузки от действия прокатываемой трубы запишем

$$\frac{q(x,t)}{m_0} = \frac{q_0}{m_0} - \frac{m'_q}{m_0} \left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right), \quad (4)$$

где $y(x,t)$ - динамические прогибы стержневой системы механизма удержания оправки; m'_q - погонная масса трубы; V - скорость движения трубы (скорость прокатки).

Используя фундаментальные функции $X_u(x)$ динамические прогибы стержня оправки представим в виде ряда Фурье согласно [4]

$$y(x,t) = \sum_{u=1}^n X_u(x) \cdot T_u(t). \quad (5)$$

Воспользуемся известной процедурой Бубнова – Галеркина и после подстановок получим систему неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 T_j}{dt^2} + \frac{m'_q}{m_0} \sum_{u=1}^n \frac{d^2 T_u}{dt^2} \int_0^{\nu t} X_j(x) X_u(x) dx + \\ & + \frac{2m'_q}{m_0 r_j} \sum_{u=1}^n \frac{dT_u}{dt} \int_0^{\nu t} X_j(x) \frac{dX_u(x)}{dx} dx + \\ & + \varphi_j^2 T_j + \frac{V^2 m'_q}{r_j m_0} \sum_{u=1}^n T_u \int_0^{\nu t} X_j(x) \frac{d^2 X_u(x)}{dx^2} dx = \\ & = \frac{q_0}{m_0 \cdot r_j} \int_0^{\nu t} X_j(x) dx, \end{aligned} \quad (6)$$

где $T_u(t)$ – искомая функция времени, подлежащая определению; φ_j - частота j – ой формы свободных колебаний стержня оправки.

Фундаментальные функции задачи определяем путем предварительного интегрирования соответствующих выражений, входящих в уравнение (6) в виде:

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \int_0^{Vt} X_j(x) X_u(x) dx = \ell \int_0^{\xi} \sin(j\pi\xi) \cdot \sin(u\pi\xi) d\xi; \\
 2. \quad & \int_0^{Vt} X_j(x) \frac{X_u(x)}{dx} dx = \ell \frac{4\pi}{\ell} \int_0^{\xi} \sin(\pi\xi) \cdot \cos(u\pi\xi) d\xi; \\
 3. \quad & \int_0^{Vt} X_j(x) \frac{d^2 X_u(x)}{dx^2} dx = -\ell \left(\frac{u\pi}{\ell} \right)^2 \int_0^{\xi} \sin(j\pi\xi) \cdot \sin(u\pi\xi) d\xi; \\
 4. \quad & \int_0^{Vt} X_j(x) = \ell \int_0^{\xi} \sin(j\pi\xi) d\xi = \frac{\ell}{j\pi} (1 - \cos(j\pi\xi)); \\
 5. \quad & r_j = \int_0^{\ell} X_j^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(1 - \cos^2 \frac{\pi x}{\ell} \right) dx = \frac{\ell}{2}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Для удобства решения задачи в общем виде воспользуемся безразмерными параметрами

$$\begin{aligned}
 T_j^{(\xi)} &= W_j(\xi) \cdot f_{cm}; & T_u^{(\xi)} &= W_u(\xi) \cdot f_{cm}; \\
 \beta &= \frac{mq}{m_0}; \quad \alpha_j = \frac{V}{V_{кр}}; & V_{кр} &= \frac{j\pi V}{\ell} \sqrt{\frac{EJ}{m_0}}; \quad \xi = \frac{Vt}{\ell},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где ξ – безразмерная переменная задачи; f_{cm} – величина статического прогиба стержневой системы по оси прокатки в середине пролета $\left(\frac{\ell}{2}\right)$; α_j – параметр критической скорости движения трубы по стержневой системе j -го порядка; β – коэффициент, определяющий отношение погонной массы подвижной трубы к погонной массе стержня оправки.

Следовательно, после преобразований выражение (6) запишем:

$$\begin{aligned}
& f_{cm} \left(\frac{V}{\ell} \right)^2 \frac{d^2 W_j(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\beta(1+K^*\xi)}{\frac{\ell}{2}} \ell \left(\frac{V}{\ell} \right)^2 \cdot \\
& \cdot f_{cm} \sum_{u=1}^n \frac{d^2 W_u(\xi)}{\frac{\ell}{2}} \int_0^\xi \sin(j\pi\xi) \sin(u\pi\xi) \ell d\xi + \\
& + \frac{2\beta(1+K^*\xi)}{\frac{\ell}{2}} \frac{V}{\ell} f_{cm} \cdot \sum_{u=1}^n \ell \frac{u\pi}{\ell} \frac{dW_u(\xi)}{d\xi} \int_0^\xi \sin(j\pi\xi) \cos(u\pi\xi) d\xi - \\
& - V^2 \beta(1+K^*\xi) \ell f_{cm} \\
& \sum_{u=1}^n (u\pi)^2 W_u(\xi) \int_0^\xi \sin(j\pi\xi) \cdot \sin(u\pi\xi) d\xi + \frac{j^2 \cdot \pi^2 \cdot EJ}{\ell^2 m_0} f_{cm} W_j(\xi) = \\
& = \frac{q_0 \cdot \beta(1+K^*\xi)}{\frac{\ell}{2}} \ell \int_0^\xi \sin(j\pi\xi) d\xi. \tag{9}
\end{aligned}$$

Производя необходимые упрощения дифференциального уравнения (9) получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 W_j(\xi)}{d\xi^2} + 2\beta(1+K^*\xi) \sum_{u=1}^n \frac{d^2 W_u(\xi)}{d\xi^2} \int_0^\xi \sin(j\pi\xi) \sin(u\pi\xi) d\xi + \\
& + \frac{4\beta(1+K^*\xi)\pi}{V} \cdot \sum_{u=1}^n u \frac{dW_u(\xi)}{d\xi} \int_0^\xi \sin(j\pi\xi) \cos(u\pi\xi) d\xi - \\
& - 2\beta(1+K^*\xi) \pi^2 \sum_{u=1}^n u^2 W_u(\xi) \int_0^\xi \sin(j\pi\xi) \sin(u\pi\xi) d\xi + \\
& + \frac{j^2 \pi^2 EJ}{V^2 m_0} W_j(\xi) = \frac{2q_0 \ell \beta(1+K^*\xi)}{f_{cm} V^2} \int_0^\xi \sin(j\pi\xi) d\xi. \tag{10}
\end{aligned}$$

После интегрирования соответствующих частей уравнения (10) с учетом обозначений (8) окончательно получим неоднородную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 W_j(\xi)}{d\xi^2} + 2\beta(1 + K^*_{\xi}) \sum_{u=1}^n \frac{d^2 W_u(\xi)}{d\xi^2} \int_0^{\xi} \sin(j\pi\xi) \sin(u\pi\xi) d\xi + \\
& + 4\beta(1 + K^*_{\xi}) \pi \cdot \sum_{u=1}^n u \frac{dW_u(\xi)}{d\xi} \int_0^{\xi} \sin(j\pi\xi) \cos(u\pi\xi) d\xi - \\
& - 2\beta(1 + K^*_{\xi}) \pi^2 \sum_{u=1}^n u^2 W_u(\xi) \int_0^{\xi} \sin(j\pi\xi) \sin(u\pi\xi) d\xi + \\
& + \frac{j^2 \pi^2}{\alpha_j^2} W_j(\xi) = \frac{(1 + K^*_{\xi})}{A \alpha_j^2 (j\pi)^2} \int_0^{\xi} \sin(j\pi\xi) d\xi,
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
1. \quad I_1 &= \int_0^{\xi} \sin(j\pi\xi) \sin(u\pi\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[\pi(u-j)\xi]}{u-j} - \frac{\sin[\pi(u+j)\xi]}{u+j} \right], \\
& u \neq j; \\
I_1 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2j\pi} \sin 2j\pi\xi \right); \quad u = j. \\
I_2 &= \int_0^{\xi} \sin(j\pi\xi) \cos(u\pi\xi) d\xi = \\
2. \quad &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1 - \cos[\pi(u-j)\xi]}{u-j} - \frac{1 - \cos[\pi(u+j)\xi]}{u+j} \right], \\
& u \neq j; \\
I_2 &= -\frac{1}{4j\pi} (1 - \cos(2j\pi\xi)); \quad u = j. \\
3. \quad I_3 &= \int_0^{\xi} \sin(j\pi\xi) d\xi = \frac{1}{j\pi} (1 - \cos(j\pi\xi)); \\
& u \neq j; \quad u = j.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь I_1, I_2 и I_3 – коэффициенты системы дифференциальных уравнений (11).

Для решения задачи в первом приближении систему дифференциальных уравнений (11) после подстановок $u=1$ и $j=1$ в выражение (12), представим в виде:

$$\begin{aligned}
& \left\{ 1 + \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\xi) \right] \right\} \frac{d^2 W_1(\xi)}{d\xi^2} + \\
& + \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \cos(2\pi\xi) \right] \frac{dW_1(\xi)}{d\xi} + \\
& + \left\{ \frac{\pi^2}{\alpha^2} + \pi^2 \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\xi) \right] \right\} W_1(\xi) = \\
& = \frac{1 + K^* \xi}{A \alpha_1^2 \pi^3} \left[1 - \cos(\pi\xi) \right],
\end{aligned} \tag{13}$$

где $W_1(\xi)$ – обобщенная координата (динамические перемещения стержня оправки) для первого приближения задачи; A – постоянный коэффициент, соответствующий условиям статической деформации стержня оправки; $K^* = \frac{K}{m_0}$ – коэффициент, определяющий

нарастание во времени характеристики погонной массы прокатываемой трубы за период реализации технологического процесса.

Дифференциальные уравнения (11), согласно алгоритму коэффициентов по рисунку, в рамках принятой динамической модели во втором приближении решения задачи для характерной формы колебаний стержня оправки сводятся к системе двух взаимосвязанных дифференциальных уравнений вида:

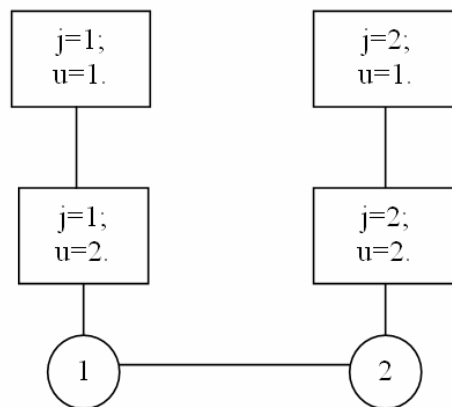


Рисунок – К решению задачи во втором приближении

$$\begin{aligned}
& \left\{ 2 + \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\xi) \right] \right\} \frac{d^2 W_1(\xi)}{d\xi^2} + \\
& + \beta \left[1 + K^* \xi \right] \left[1 - \cos(2\pi\xi) \right] \frac{dW_1(\xi)}{d\xi} + \\
& + \left\{ \frac{2\pi^2}{\alpha_1^2} + \pi^2 \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\xi) \right] \right\} W_1(\xi) + \\
& + \frac{\beta \left(1 + K^* \xi \right)}{\pi} \left[\sin(\pi\xi) - \frac{\sin(3\pi\xi)}{3} \right] \frac{d^2 W_2(\xi)}{d\xi^2} + \\
& + 4\beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \cos(\pi\xi) - \frac{1 - \cos(3\pi\xi)}{3} \right] \frac{dW_2(\xi)}{d\xi} - \\
& - 4\pi\beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[\sin(\pi\xi) - \frac{\sin(3\pi\xi)}{3} \right] W_2(\xi) = \frac{1 + K^* \xi}{A\alpha_1^2 \pi^3} [1 - \cos(\pi\xi)]; \\
& \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[\sin(\pi\xi) - \frac{\sin(3\pi\xi)}{3} \right] \frac{d^2 W_1(\xi)}{d\xi^2} + \\
& + 2\beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \cos(\pi\xi) - \frac{1 - \cos(3\pi\xi)}{3} \right] \frac{dW_1(\xi)}{d\xi} - \\
& - \pi\beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[\sin(\pi\xi) - \frac{\sin(3\pi\xi)}{3} \right] W_1(\xi) + \\
& + \left\{ 2 + \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi\xi) \right] \right\} \frac{d^2 W_2(\xi)}{d\xi^2} - \\
& - \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \cos(4\pi\xi) \right] \frac{dW_2(\xi)}{d\xi} + \\
& + \left\{ \frac{8\pi^2}{\alpha_2^2} - 4\pi^2 \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \frac{1}{4\pi} \sin(4\pi\xi) \right] \right\} W_2(\xi) = \\
& = \frac{1 + K^* \xi}{8A\alpha_2^2 \pi^3} [1 - \cos(4\pi\xi)].
\end{aligned} \tag{14}$$

Численное решение системы двух дифференциальных уравнений (14) реализовано применением метода Рунге-Кутты. Полученные результаты, в силу определенных расхождений с результатами экспериментальных исследований, указывают на

необходимость продолжения расчетов до требуемого уровня достоверности решения задачи.

Следовательно, в очередном, третьем приближении, для соответствующей формы колебаний стержня оправки, система дифференциальных уравнений (11), согласно схеме принятого алгоритма (рисунок), сводится к системе трех взаимосвязанных дифференциальных уравнений, имеющих вид:

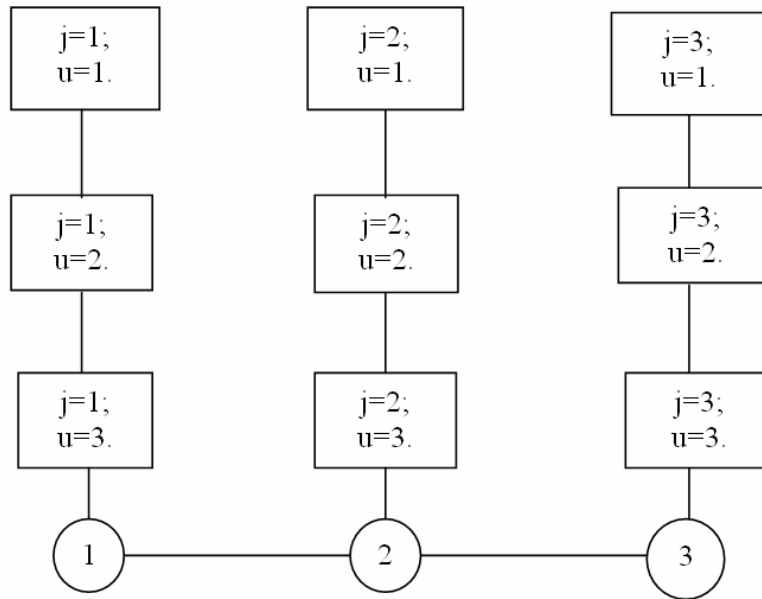


Рисунок – К решению задачи в третьем приближении

$$\begin{aligned}
 & \left[3 + \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\xi) \right] \frac{d^2 W_1(\xi)}{d\xi^2} + \right. \\
 & + \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \cos(2\pi\xi) \right] \frac{dW_1(\xi)}{d\xi} + \\
 & + \left[\frac{3\pi^2}{\alpha_1^2} + \pi^2 \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\xi) \right] W_1(\xi) + \right. \\
 & + \frac{\beta \left(1 + K^* \xi \right)}{\pi} \left[\sin(\pi\xi) - \frac{\sin(3\pi\xi)}{3} \right] \frac{d^2 W_2(\xi)}{d\xi^2} + \\
 & \left. + 4\beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \cos(\pi\xi) - \frac{1 - \cos(3\pi\xi)}{3} \right] \frac{dW_2(\xi)}{d\xi} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4\pi\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(3\pi\xi)}{3}\right]W_2(\xi)+ \\
& +\frac{\beta\left(1+K^*\xi\right)}{2\pi}\left[\sin(2\pi\xi)-\sin(4\pi\xi)\right]\frac{d^2W_3(\xi)}{d\xi^2}- \\
& -3\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\cos(2\pi\xi)-\frac{1-\cos(4\pi\xi)}{2}\right]\frac{dW_3(\xi)}{d\xi}- \\
& -\frac{9\beta\left(1+K^*\xi\right)\pi}{2}\left[\sin(2\pi\xi)-\sin(4\pi\xi)\right]W_3(\xi)=\frac{1+K^*\xi}{A\alpha_1^2\pi^3}\left[1-\cos(\pi\xi)\right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(3\pi\xi)}{3}\right]\frac{d^2W_1(\xi)}{d\xi^2}+ \\
& +2\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\cos(\pi\xi)+\frac{1-\cos(3\pi\xi)}{3}\right]\frac{dW_1(\xi)}{d\xi}- \\
& -\pi\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(3\pi\xi)}{3}\right]W_1(\xi)+ \\
& +\left\{3+\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\frac{1}{4\pi}\sin(4\pi\xi)\right]\right\}\frac{d^2W_2(\xi)}{d\xi^2}- \\
& -\beta\left(1+K^*\xi\right)(1-\cos 4\pi\xi)\frac{dW_2(\xi)}{d\xi}+ \\
& +\left\{\frac{18\pi^2}{\alpha_2^2}-4\pi^2\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\frac{1}{4\pi}\sin(4\pi\xi)\right]\right\}W_2(\xi)+ \\
& +\frac{\beta\left(1+K^*\xi\right)}{\pi}\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(5\pi\xi)}{5}\right]\frac{d^2W_3(\xi)}{d\xi^2}- \\
& -6\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\cos(\pi\xi)-\frac{1-\cos(5\pi\xi)}{5}\right]\frac{dW_3(\xi)}{d\xi}- \\
& -9\pi\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(5\pi\xi)}{5}\right]W_3(\xi)= \\
& =\frac{1+K^*\xi}{8A\alpha_2^2\pi^3}\left[1-\cos(2\pi\xi)\right];
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta(1+K^*\xi)}{2\pi} [1 - \cos(2\pi\xi)\sin(2\pi\xi)] \frac{d^2W_1(\xi)}{d\xi^2} + \\
& + \beta(1+K^*\xi) \left[1 - \cos(2\pi\xi) - \frac{1 - \cos(4\pi\xi)}{2} \right] \frac{dW_1(\xi)}{d\xi} - \\
& - \frac{\beta(1+K^*\xi)}{2} \pi [1 - \cos(2\pi\xi)\sin(2\pi\xi)] W_1(\xi) - \\
& - \frac{\beta(1+K^*\xi)}{\pi} \left[\sin(\pi\xi) - \frac{\sin(5\pi\xi)}{5} \right] \frac{d^2W_2(\xi)}{d\xi^2} + \\
& + 4\beta(1+K^*\xi) \left[1 - \cos(\pi\xi) - \frac{1 - \cos(5\pi\xi)}{5} \right] \frac{dW_2(\xi)}{d\xi} - \\
& - 4\pi\beta(1+K^*\xi) \left[\sin(\pi\xi) - \frac{\sin(5\pi\xi)}{5} \right] W_2(\xi) + \\
& + \left\{ 3 + \frac{\beta(1+K^*\xi)}{\pi} \left[1 - \frac{1}{6\pi} \sin(6\pi\xi) \right] \right\} \frac{d^2W_3(\xi)}{d\xi^2} - \\
& - \beta(1+K^*\xi) [1 - \cos(6\pi\xi)] \frac{dW_3(\xi)}{d\xi} + \\
& + \left\{ \frac{9\pi^2}{\alpha_3^2} - 9\beta(1+K^*\xi) \pi \left[1 - \frac{1}{6\pi} \sin(6\pi\xi) \right] \right\} W_3(\xi) = \\
& = \frac{1+K^*\xi}{27A\alpha_3^2\pi^3} [1 - \cos(3\pi\xi)].
\end{aligned}$$

Для очередного четвертого приближения решения задачи и формы колебаний стержня оправки, очевидно, следует составить систему четырех взаимосвязанных неоднородных дифференциальных уравнений. Динамические характеристики стержневой системы с достаточной точностью определяются дифференциальными уравнениями (11). Следовательно, с учетом выбранного алгоритма и соответствующих коэффициентов (рисунок) уравнение (11) имеет вид:

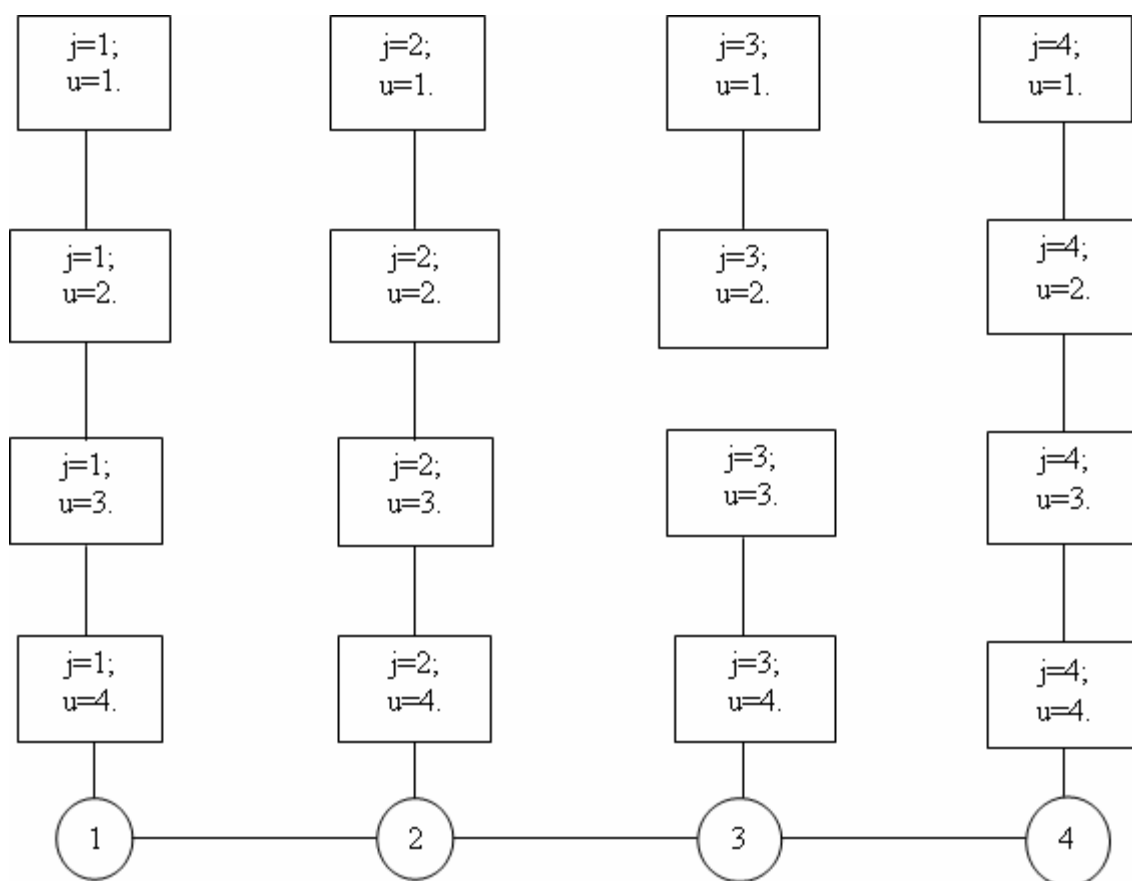


Рисунок – К решению задачи в четвертом приближении

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 4 + \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\xi) \right] \right\} \frac{d^2 W_1(\xi)}{d\xi^2} + \\
 & + \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \cos(2\pi\xi) \right] \frac{dW_1(\xi)}{d\xi} + \\
 & + \left\{ \frac{4\pi^2}{\alpha_1^2} + \pi^2 \beta \left(1 + K^* \xi \right) \left[1 - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\xi) \right] \right\} W_1(\xi) + \\
 & + \frac{\beta \left(1 + K^* \xi \right)}{\pi} \left[\sin(\pi\xi) - \frac{\sin(3\pi\xi)}{3} \right] \frac{d^2 W_2(\xi)}{d\xi^2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\cos(\pi\xi)-\frac{1-\cos(3\pi\xi)}{3}\right]\frac{dW_2(\xi)}{d\xi}- \\
& -4\pi\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(3\pi\xi)}{3}\right]W_2(\xi)+ \\
& +\frac{\beta\left(1+K^*\xi\right)}{2\pi}\left[\sin(2\pi\xi)-\sin(4\pi\xi)\right]\frac{d^2W_3(\xi)}{d\xi^2}- \\
& -3\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\cos(2\pi\xi)-\frac{1-\cos(4\pi\xi)}{2}\right]\frac{dW_3(\xi)}{d\xi}- \\
& -\frac{9\beta\left(1+K^*\xi\right)}{2}\left[\sin(2\pi\xi)-\sin(4\pi\xi)\right]W_3(\xi)+ \\
& +\frac{\beta\left(1+K^*\xi\right)}{\pi}\left[\frac{\sin(3\pi\xi)}{3}-\frac{\sin(5\pi\xi)}{5}\right]\frac{d^2W_4(\xi)}{d\xi^2}- \\
& -8\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\frac{1-\cos(3\pi\xi)}{3}-\frac{1-\cos(5\pi\xi)}{5}\right]\frac{dW_4(\xi)}{d\xi}- \\
& -16\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\frac{\sin(3\pi\xi)}{3}-\frac{\sin(5\pi\xi)}{5}\right]W_4(\xi)= \\
& =\frac{1+K^*\xi}{A\alpha_1^2\pi^3}\left[1-\cos(\pi\xi)\right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(3\pi\xi)}{3}\right]\frac{d^2W_1(\xi)}{d\xi^2}+ \\
& +2\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\cos(\pi\xi)+\frac{1-\cos(3\pi\xi)}{3}\right]\frac{dW_1(\xi)}{d\xi}- \\
& -\pi\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(3\pi\xi)}{3}\right]W_1(\xi)+ \\
& +\left\{4+\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\frac{1}{4\pi}\sin(4\pi\xi)\right]\right\}\frac{d^2W_2(\xi)}{d\xi^2}-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta(1+K^*\xi)\left[1-\cos(4\pi\xi)\right]\frac{dW_2(\xi)}{d\xi}+ \\
& +\left\{\frac{28\pi^2}{\alpha_2^2}-4\pi^2\beta(1+K^*\xi)\left[1-\frac{1}{4\pi}\sin(4\pi\xi)\right]\right\}W_2(\xi)+ \\
& +\frac{\beta(1+K^*\xi)}{\pi}\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(5\pi\xi)}{5}\right]\frac{d^2W_3(\xi)}{d\xi^2}- \\
& -6\beta(1+K^*\xi)\left[1-\cos(\pi\xi)-\frac{1-\cos(5\pi\xi)}{5}\right]\frac{dW_3(\xi)}{d\xi}- \\
& -9\pi\beta(1+K^*\xi)\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(5\pi\xi)}{5}\right]W_3(\xi)+ \\
& +\frac{\beta(1+K^*\xi)}{2\pi}\left[\sin(2\pi\xi)-\frac{\sin(6\pi\xi)}{6}\right]\frac{d^2W_4(\xi)}{d\xi^2}- \\
& -4\beta(1+K^*\xi)\left[\frac{1-\cos(8\pi\xi)}{2}-\frac{1-\cos(6\pi\xi)}{6}\right]\frac{dW_4(\xi)}{d\xi}- \\
& -16\pi\beta(1+K^*\xi)\left[\sin(2\pi\xi)-\frac{\sin(6\pi\xi)}{6}\right]W_4(\xi)= \\
& =\frac{1+K^*\xi}{8A\alpha_2^2\pi^3}\left[1-\cos(2\pi\xi)\right];
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta(1+K^*\xi)}{2\pi}\left[1-\cos(2\pi\xi)\sin(2\pi\xi)\right]\frac{d^2W_1(\xi)}{d\xi^2}+ \\
& +\beta(1+K^*\xi)\left[1-\cos(2\pi\xi)-\frac{1-\cos(4\pi\xi)}{2}\right]\frac{dW_1(\xi)}{d\xi}- \\
& -\frac{\beta(1+K^*\xi)}{\pi}\left[1-\cos(2\pi\xi)\sin(2\pi\xi)\right]W_1(\xi)- \\
& -\frac{\beta(1+K^*\xi)}{\pi}\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(5\pi\xi)}{5}\right]\frac{d^2W_2(\xi)}{d\xi^2}-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4\pi\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\cos(\pi\xi)-\frac{1-\cos(5\pi\xi)}{5}\right]\frac{dW_2(\xi)}{d\xi}- \\
& -4\pi\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(5\pi\xi)}{5}\right]W_2(\xi)+ \\
& +\left\{4+\frac{\beta\left(1+K^*\xi\right)}{\pi}\left[1-\frac{1}{6\pi}\sin(6\pi\xi)\right]\right\}\frac{d^2W_3(\xi)}{d\xi^2}- \\
& -\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\cos(6\pi\xi)\right]\frac{dW_3(\xi)}{d\xi}+ \\
& +\left\{45\frac{\pi^2}{\alpha_3^2}-9\beta\left(1+K^*\xi\right)\pi\left[1-\frac{1}{6\pi}\sin(6\pi\xi)\right]\right\}W_3(\xi)-\frac{\beta\left(1+K^*\xi\right)}{\pi}. \\
& \cdot\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(7\pi\xi)}{7}\right]\frac{d^2W_4(\xi)}{d\xi^2}- \\
& -8\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[1-\cos(\pi\xi)-\frac{1-\cos(7\pi\xi)}{7}\right]\frac{dW_4(\xi)}{d\xi}- \\
& -16\beta\left(1+K^*\xi\right)\pi\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(7\pi\xi)}{7}\right]W_4(\xi)= \\
& =\frac{1+K^*\xi}{27A\alpha_3^2\pi^3}\left[1-\cos(3\pi\xi)\right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\frac{\sin(3\pi\xi)}{3}-\frac{\sin(5\pi\xi)}{5}\right]\frac{d^2W_1(\xi)}{d\xi^2}+ \\
& +2\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\frac{1-\cos(3\pi\xi)}{3}-\frac{1-\cos(5\pi\xi)}{5}\right]\frac{dW_1(\xi)}{d\xi}- \\
& -\pi\beta\left(1+K^*\xi\right)\left[\frac{\sin(3\pi\xi)}{3}-\frac{\sin(5\pi\xi)}{5}\right]W_1(\xi)+ \\
& +\frac{2\beta\left(1+K^*\xi\right)}{\pi}\left[\frac{\sin(2\pi\xi)}{2}-\frac{\sin(6\pi\xi)}{6}\right]\frac{d^2W_2(\xi)}{d\xi^2}-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\beta(1+K^*\xi)\left[\frac{1-\cos(2\pi\xi)}{2}-\frac{1-\cos(6\pi\xi)}{6}\right]\frac{dW_2(\xi)}{d\xi}- \\
& -\pi\beta(1+K^*\xi)\left[\frac{\sin(2\pi\xi)}{2}-\frac{\sin(6\pi\xi)}{6}\right]W_2(\xi)+ \\
& +\frac{\beta(1+K^*\xi)}{\pi}\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(7\pi\xi)}{7}\right]\frac{d^2W_3(\xi)}{d\xi^2}- \\
& -2\beta(1+K^*\xi)\left[1-\cos(\pi\xi)-\frac{1-\cos(7\pi\xi)}{7}\right]\frac{dW_3(\xi)}{d\xi}- \\
& -9\pi\beta(1+K^*\xi)\left[\sin(\pi\xi)-\frac{\sin(7\pi\xi)}{7}\right]W_3(\xi)+ \\
& +\left\{4+\beta(1+K^*\xi)\left[1-\frac{1}{8\pi}\sin(8\pi\xi)\right]\right\}\frac{d^2W_4(\xi)}{d\xi^2}- \\
& -\beta(1+K^*\xi)[1-\cos(8\pi\xi)]\frac{dW_4(\xi)}{d\xi}- \\
& -\left\{64\frac{\pi^2}{\alpha_4^2}-16\pi^2\beta(1+K^*\xi)\left[1-\frac{1}{8\pi}\sin(8\pi\xi)\right]\right\}W_4(\xi)= \\
& =\frac{1+K^*\xi}{64A\alpha_4^2\pi^3}[1-\cos(4\pi\xi)].
\end{aligned}$$

Решение системы дифференциальных уравнений (16) до четвертого приближения реализовано численно методом Рунге-Кутты. Применение компьютерных технологий позволяет получить достоверные данные об уровне виброактивности системы. Система дифференциальных уравнений (11), как показано, только при достаточном приближении описывает достоверное поведение динамической модели стержня оправки соответствующих станов ТПА.

Результаты решения задачи позволили построить ряд кривых (рис. 4), характеризующих виброактивность стержня оправки за время реализации всего технологического процесса производства бесшовных труб. Полученные результаты говорят об адекватности динамической модели и реальной системы и удовлетворительном

совпадении полученных данных с результатами экспериментальных исследований о виброактивности оборудования станов ТПА [5].

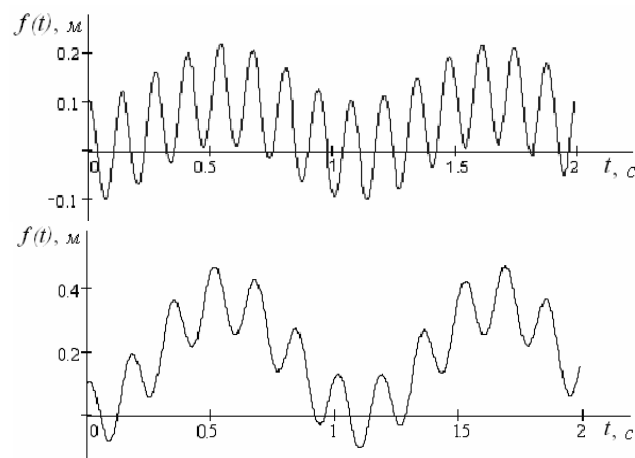


Рисунок 4 – Динамические прогибы стержня удержания оправки прошивных станов: а) ТПА 140 при прокатке труб Ш 57Ч3,5; б) ТПА 250 при прокатке труб Ш 168Ч7,0

Вышеприведенное аналитическое решение задачи существенно отличается от ранее известных математических моделей тем, что более полно отражает динамические процессы в стержневой системе механизма удержания оправки и уточняет механизм образования разностенности труб.

Использование результатов работы позволяет путем реализации математического эксперимента, выбором технологических и динамических параметров системы выполнить необходимые стабильные режимы прокатки труб на оправке, удерживаемой стержнем. При этом создаются определенные возможности для сведения к минимуму динамических нагрузок и виброактивности оборудования станов ТПА.

Очевидно, в этом случае будет достигнуто значительное повышение долговечности оборудования выходной стороны станов, снижение продольной разностенности гильз и существенное повышение качества готовых труб.

Выводы

1. Исследования динамической модели стержня оправки позволили установить характер развития динамических процессов на прошивном, автоматическом и раскатном станах основного технологического цикла ТПА.

2. Получена система дифференциальных уравнений параметрических колебаний стержня оправки, являющихся функцией прокатываемой трубы.

3. Решение системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами реализовано численно до четвертого приближения методом Рунге-Кутты для соответствующих форм колебаний стержня оправки с применением компьютерных технологий.

4. Уточнена картина виброактивности стержневой системы с оправкой при реализации всего технологического процесса производства бесшовных труб на прошивном, автоматическом и раскатном станах ТПА, с учетом воздействия со стороны очага деформации и изменения погонной массы прокатываемой трубы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лордкипанидзе Д.Л. Исследование колебаний стержня стана винтовой прокатки/ Лордкипанидзе Д.Л., Чхартшвили И.В.// Сообщение Академии Наук Грузинской ССР, вып. 88, №1, 1977. – С.145 – 148
2. Потапов И.Н. Новая технология винтовой прокатки./ Потапов И.Н., Полухин П.И. // – М.: Металлургия, 1975. – 344 с..
3. Оклея Л.Н. Качество горячекатаных труб. М.: Металлургия, 1986. – 144 с.
4. Вольпер Д.Б. О динамическом воздействии подвижной нагрузки при больших скоростях движения. / Волпер Д.Б., Моргаевский А.Б. // Сборник "Исследования по теории сооружений", вып. XII, 1963. С. 75 –83.
5. Рахманов С.Р. Динамические особенности стержневой системы трубопрокатного агрегата. Сборник. Труды IV Всесоюзной конференции, Одесса, 1986. С. 38 – 41.
6. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1956. – 694 с.
7. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М.: Машгиз, 1957. – 336 с.

Получено 04.02.2009г.

СОДЕРЖАНИЕ

Р.В. Кирия

Описание процесса истечения сыпучего груза из бункера с помощью структурно-механических моделей 3

Г.І. Ларіонов

Вибір кроку гвинтової навівки анкерних штанг для металополімерних анкерів 20

П.З. Луговой, Н.Я. Прокопенко

Колебания пологих ребристых цилиндрических оболочек с прямоугольным планом 34

В.Ф. Мейш, Н.В. Арнаута

До розрахунку осесиметричних коливання тришарових циліндричних оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер при нестационарних навантаженнях 40

А.В. Кошлак

Равновесные состояния в динамике формирования пористой структуры 45

Е.В. Золотовская

Взаимодействие частицы с потоком газа в вертикальном канале..... 50

М.О. Шульга, Л.О. Григор'єва

Застосування методу послідовних наближень для аналізу електромеханічних нестационарних коливань п'єзоелектричного шару при електричних збуреннях..... 56

И.Л. Соловьёв

Статическая и динамическая потеря устойчивости тонкостенных вращающихся валов, сжатых осевой следящей силой 60

К.І. Шнеренко, В.Ф. Годзула

Дослідження напруженого стану циліндричної оболонки із композитного матеріалу з отвором під дією комбінованого навантаження..... 71

Г.И. Щурук

К вопросу о распространении неосесимметричных волн в гидроупругой системе оболочка-вязкая жидкость..... 76

С.Ю. Бабич, Е.Н. Борисов, А.Б. Кулик, В.Ф. Лазар

К теории контактной задачи для предварительно напряженной упругой полосы, лежащей на жестком основании без учета сил трения 82

И.И.Аникьев, М.И. Михайлова, Е.А. Сущенко

Поведение упругой пластины с боковым разрезом при действии ударной волны 86

С.Ю. Бабич, Ю.П. Глухов

Напряженно-деформированное состояние слоистого предварительно-напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки..... 93

В.М. Быстров, В.С. Зеленский

Затухание краевого эффекта при продольном и поперечном сжатии материалов, армированных компонентами прямоугольной формы .. 99

Ю.П. Глухов

Представление решения задачи о реакции многослойного полупространства с начальными напряжениями на подвижную нагрузку. сжимаемый материал 105

Е.В. Дерез

О погрешности квадратурной формулы прямоугольников на некоторых классах периодических дифференцируемых функций . 111

Н.Г. Кириллаха

До питання побудови математичної моделі дії окорухових м'язів . 117

В.І. Кошель

Напружений стан гірської виробки кругового поперечного перетину при дії гравітаційних сил та плоскої вибухової хвилі..... 122

С.О. Чернета, В.Ю. Солод, Є.М. Гречаник, О.Г. Чернета

Підвищення зносостійкості валів коробки швидкостей токарного верстата 1К670.320ФЗ..... 127

М.О. Бєлова

Математична модель інваріантного вимірювального перетворення 131

Э.А. Ткаченко, В.Н. Чехов

Расчет устойчивости слоистых покрытий при двухосном нагружении и повышенных значениях средней температуры слоев..... 137

О.І. Білоус, А.Т. Нельга, О.Л. Бельмас

Автоматична система контролю розривів тросів гумотросового канату 143

Є.А. Сторожук

Варіаційний векторно-різницевий метод у нелінійних задачах теорії тонких оболонок з криволінійними отворами 149

А.С. Ткаченко, *И.А. Колесник, С.Р. Рахманов*

Динамика стержня механизма удержания оправки станов трубопрокатного агрегата 157

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.386:622.647.2

Кирия Р.В. **Описание процесса истечения сыпучего груза из бункера с помощью структурно-механических моделей** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.3– 19.

В работе на основании анализа структурно-механического состояния сыпучего груза получены математические модели его истечения из бункера с различным расположением и формой выпускного отверстия. Установлены зависимости расхода сыпучего груза от параметров выпускного отверстия и свойств сыпучего груза.

Библ.14, ил.4.

УДК 622.28.044:622.831

Ларионов Г.И. **Выбор шага винтовой навивки анкерных штанг для металлополимерных анкеров** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.20 – 33.

В работе рассмотрено решение задачи о выборе шага винтовой навивки анкерных штанг для металлополимерных анкеров. Рассмотрено влияние шага навивки на напряженное - деформированное – состояние в окрестности анкерного шпура. Дан анализ полученных результатов.

Библ.7, ил.12.

УДК 539.3

Луговой П.З., Прокопенко Н.Я. **Колебания пологих ребристых цилиндрических оболочек с прямоугольным планом** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.34 – 39.

На численном примере исследовано влияние коэффициентов упругого основания Винклера и Пастернака на собственные частоты и формы колебаний прямоугольной в плане полой ребристой цилиндрической оболочки. Показано, что изменение коэффициентов основания ведет не только к изменению величины собственных частот, но и к изменению формы колебаний квадратной в плане полой цилиндрической оболочки, подкрепленной стрингером и шпангоутом в центральном сечении.

Библ.5, ил.2.

УДК 539.3

Мейш В.Ф., Арнаута Н.В. **К расчету осесимметричных колебаний трехслойных цилиндрических оболочек с учетом дискретности размещения ребер при нестационарных нагрузках** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.40 – 44.

Рассматриваются нестационарные колебания трехслойных цилиндрических оболочек с учетом дискретности расположения ребер. На основе вариационного принципа Рейсснера получены уравнения нелинейных колебаний и естественные граничные условия многослойных подкрепленных оболочек вращения с учетом дискретности расположения ребер в рамках гипотез типа Тимошенко для оболочек и стержней. В основе численного алгоритма лежит интегро - интерполяционный метод построения конечно-разностной схемы по пространственной координате и явная конечно-разностная схема типа «крест» по временной координате с использованием

аппроксимации Ричардсона по пространственной координате. Приведено решение конкретной задачи и анализ полученных результатов.

Библ. 3, ил.2.

УДК 539.3

Кошлак А.В. **Рівноважний стан в динаміці формування пористої структури** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.45 – 49.

У статті приводиться математична модель рівноважного стану пористої структури у момент її формування. Визначені особливості спучення матеріалів, отримані залежності, що дозволяють управляти цим процесом.

Библ. 2, ил.0.

УДК 539.3

Золотовська Е.В. **Взаємодія часток з потоком газу в вертикальних каналах** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.50 – 55.

В статті наводиться математична модель руху частки у вертикальному каналі при термообробці. Визначені особливості руху частки в апараті, отримана залежність, що дозволяє управляти тривалістю термічної обробки, на основі яких можна спроектувати пристрій для сушки дисперсного матеріалу.

Библ. 4, ил.1.

УДК 534-21:537.226.86

Шульга М. О., Григор'єва Л.О. **Застосування методу послідовних наближень для аналізу електромеханічних нестационарних коливань п'єзоелектричного шару при електричних збуреннях** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.56 – 59.

Пропонується розв'язок задачі про нестационарні коливання п'єзоелектричного плоского шару при електричних навантаженнях методом послідовних наближень. При застосуванні методу електричні та механічні параметри визначаються в різних наближеннях через механічні та електричні параметри з попередніх наближень. Розв'язок наближень для механічних величин отримується за допомогою методу характеристик. Досліджено динамічну поведінку механічних переміщень та напружень.

Библ. 4, ил.1.

УДК 539.3

Соловйов І.Л. **Статична та динамічна втрата стійкості тонкостінних валів, що обертаються, під дією стиску осьової слідкуючої сили** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.60 – 70.

На основі аналізу залежностей частот власних прецесійних коливань тонкостінних одноопорних валів, що обертаються, під дією осьової слідкуючої сили розглянуто задачу про їх статичну та динамічну втрату стійкості. Прийнято дві постановки задачі, що базуються на застосуванні теорії балок і теорії тонких циліндричних оболонок. Запропоновано методику їх розв'язання. Виконано дослідження впливу обертання та неконсервативності осьових сил на характер втрати стійкості тонкостінних труб.

Библ. 8, ил.4.

УДК 539.3

Шнеренко К.И., Годзула В.Ф. **Исследование напряженного состояния цилиндрических оболочек из композитных материалов с отверстием при действии комбинированного нагружения** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.71 – 75.

Исследовано напряженное состояние в композитной цилиндрической оболочке с круговым отверстием при действии комбинированного нагружения. Приведены численные результаты для оболочки при осевой нагрузке и внутреннем давлении.

Библ. 6, табл. 2.

УДК 539.3

Щурук Г.И. **До розповсюдження неосесиметричних хвиль в гідропружній системі оболонка-в'язка рідина** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.76 – 81.

Приведені результати дослідження закономірностей розповсюдження неосесиметричних пружних хвиль в циліндричній ортотропній оболонці, що містить в'язку стисливу рідину. В рамках лінійних рівнянь теорії оболонок типу С.П.Тимошенка та лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса для рідини отримане основне дисперсійне співвідношення. Досліджено вплив рідини на дисперсійні залежності.

Бібл. 3, іл.2.

УДК 539.3

Бабич С.Ю., Борисов Є.М., Кулик А.Б., Лазар В.Ф. **До теорії контактної задачі для попередньо напруженої пружної смуги, яка знаходиться на жорсткій основі без врахування сил тертя** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.82 – 85.

Для конкретних видів пружних потенціалів визначені критичні значення параметрів навантаження в залежності від початкових напружень при яких не виникають явища внутрішньої стійкості смуги (півплощини).

Бібл. 8.

УДК 539.3

Анік'єв І.І., Михайлова М.І., Сущенко Є.О. **Поведінка пружної пластини з боковим розрізом при дії ударної хвилі** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.86 – 92.

Експериментально досліджено поведінку тонкої пружної пластини з боковим розрізом на дію слабкої ударної хвилі у повітрі. Показано суттєвий вплив розрізу на процес деформування.

Бібл.5, іл.7

УДК 539.3

Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. **Напряженно-деформированное состояние слоистого предварительно-напряженного полупространства при воздействии подвижной загрузки** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.93 – 98.

В статье в рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрена постановка плоской установившейся задачи о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузки двухслойного предварительно напряженного полупространства.

Библ. 1, ил.0.

УДК 539.3

Бистров В.М., Зеленський В.С. **Згасання крайового ефекту при повздовжньому та поперечному стисканні матеріалів, армованих компонентами прямокутної форми** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.99 – 104.

Розглянуто задачу визначення зони та довжини згасання крайового ефекту у композитному матеріалі регулярної структури, армованому компонентами прямокутної форми. Досліджено згасання крайового ефекту у матеріалі, армованому плоскими шарами за умовами одновісного повздовжнього стискання армуючих шарів та у матеріалі, армованому прямолінійними односпрямованими волокнами квадратного поперечного перерізу за умовами одновісного поперечного навантаження приповерхневих волокон.

Бібл.4, іл.2

УДК 539.3

Глухов Ю.П. **Представлення розв'язку задачі про реакцію багат шарового напівпростору з початковими напруженнями на рухоме навантаження. Матеріал, що стискається** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.105 – 110.

Досліджений вплив початкових напружень і швидкості руху навантаження на значення коренів характеристичних рівнянь елементів шаруватого напівпростору, що стискаються. Чисельні дослідження проведені для матеріалу з гармонійним потенціалом.

Бібл.1, іл.3

УДК 517.5

Дерець Є.В. **Про похибку квадратурної формули прямокутників на деяких класах періодичних диференційованих функцій** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.111 – 116.

Знайдено похибку формули прямокутників на класі $W^r H_1^\omega$ для $r = 4, 6, \dots$ і будь-якого опуклого модуля неперервності $\omega(t)$.

Бібл. 11.

УДК 51:612.846

Кирилах Н.Г. **К вопросу построения математической модели действия глазодвигательных мышц** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.117 – 121.

В данной работе приведена задача построения модели действия глазодвигательных мышц в первичной позиции и при поворотах глаза. Задача сводится к нахождению решения неопределенной системы линейных уравнений.

Библ. 3, ил.4.

УДК 539.3:622.281.74

Кошель В.І. **Напружений стан гірської виробки кругового поперечного перетину при дії гравітаційних сил та плоскої вибухової хвилі** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.122 – 126.

Розглядається взаємодія плоскої вибухової хвилі з лінією розділу пружних середовищ з різними механічними властивостями. Задача розв'язується з допомогою променевого методу і теорії стереомеханічного удару. Як приклад розглядається взаємодія плоскої вибухової хвилі з гірською виробкою кругового перетину. Вважається, що на виробку діє сила земного тяжіння і ударне навантаження.

Бібл.5, іл.1.

УДК 621.793

Чернета С. О., Солод В.Ю., Гречаник Є.М., Чернета О.Г. **Повышение износостойкости валов коробки скоростей токарного станка 1К670.320ФЗ** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.127 – 130.

Изложены результаты работы по упрочнению рабочей поверхности вала токарного станка 1К670.320ФЗ с помощью лазерной обработки.

Библ. 7, ил.3.

УДК 539.3

Белова М.О. **Математическая модель инвариантного измерительного преобразования** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.131 – 136.

В статье предлагает метод, приводящий к информационному преобразованию для систем обратной связи, которые используются в алгебраических системах уравнения, с каждым уравнением, являющимся уравнением функции чувствительности внутреннего фактора.

Библ. 6, ил.0.

УДК 539.3

Ткаченко Э.А., Чехов В.Н. **Расчет устойчивости слоистых покрытий при двухосном нагружении и повышенных значениях средней температуры слоев** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.137 – 142.

В межах моделі кусково- однорідного середовища наведено постановку задач про втрату стійкості у структурі шаруватого композитного конструкційного матеріалу. Наведено чисельний розв'язок задачі про поверхневу нестійкість композита при двухосном стиску розподіленням навантаженням.

Библ. 3, ил.2.

УДК 621.876.2.001.2

Білоус О.І. к.т.н., Нельга А.Т., Бельмас О.Л. **Автоматична система виявлення розриву тросів гумотросового канату** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.143 – 148.

Розроблена автоматична система виявлення розриву тросів гумотросового канату з функцією визначення місця ушкодження. Робота системи базується на вимірюванні електричного опору тросів канату, яка змінюється у разі розриву будь-якого тросу. Величина зміни опору залежить від властивостей канату, місця ушкодження та розташування ушкодженого троса в канаті.

Бібл.3, іл.3.

УДК 517.374

Сторожук Е.А. **Вариационный векторно-разностный метод в нелинейных задачах теории тонких оболочек с криволинейными отверстиями** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.149 – 156.

Разработан вариант вариационно-разностного метода для исследования упруго-пластического состояния гибких оболочек сложной геометрии с отверстиями. Геометрические соотношения записаны в векторной форме, а гипотезы Кирхгофа-Лява реализованы с помощью множителей Лагранжа.

Библ. 9.

Ткаченко А.С., Колесник И.А., Рахманов С.Р. **Динамика стержня механизма удержания оправки станов трубопрокатного агрегата** // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3(62). – Днепропетровск, 2009. – С.157 – 175.

Приведены результаты исследования динамической модели стержня оправки станов основного технологического цикла трубопрокатного агрегата. Получена неоднородная система дифференциальных уравнений параметрических колебаний стержня оправки с правой частью, являющейся функцией перемещения трубы. Решение системы дифференциальных уравнений реализовано численно методом Рунге-Кутты до четвертого приближения с применением компьютерных технологий. Уточнена картина виброактивности стержневой системы с оправкой при реализации всего технологического процесса производства бесшовных труб на прошивном, автоматическом и раскатном станах, с учетом воздействия со стороны очага деформации и изменения движущейся массы прокатываемой трубы.

Библ. 7, ил. 7.

UDC 539.386:622.647.2

Kiriua R.V. **The description of process of the expiration of the loose cargo from the bunker by means of structurally-mechanical models** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.3 – 19.

In work on the basis of analysis of the structural-mechanical state of friable load the mathematical models of his expiration from a bunker with a different location and form of tape-hole are got. Dependences of expense of friable load on the parameters of tape-hole and properties of friable load are set.

Bibl.14, il.4.

UDC 622.28.044:622.831

Larionov G.I. **The helix rebar step for resin metal anchor** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.20 – 33.

The paper is devoted to helix rebar step choice for resin-metal anchor. Helix rebar's step influence in stress – strain state in borehole vicinity is researched. Result analysis and conclusions are made.

Bibl.7, il.12.

UDC 539.3

Lugovoy P.Z., Prokopenko N.Ya. **Vibration of shallow ribbed cylindrical shells rectangular in plane** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.34 – 39.

The influence of Pasternak and Winkler foundation on the eigenfrequencies and corresponding modes of shallow ribbed cylindrical shells rectangular in plane is studied on numerical example. It was shown that the change of coefficients foundation leads not only to change of the eigenfrequency but to the change of mode of square in plane shallow cylindrical shell reinforced by stringer and ring on the central section.

Bibl.5, il.2.

UDK 539.3

Meysh V., Arnauta N. **To calculation of axisymmetrical vibrations of three – layer cylindrical shells with allowance of discrete ribs placement under non – stationary loading** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.40 – 44.

A problem of non – linear deformation of three-layer cylindrical shells with allowance for discrete ribs under non – stationary loading is considered. The system of non – linear differential equations is based on the Timoshenko type theory of rods and shells. The Reissner's variational principle is used for deductions of the motion equations. An efficient numerical method with using Richardson type finite difference approximation for solution of problems on nonstationary behaviour of three-layer cylindrical shells with allowance discrete ribs which permit to realize solution of the investigated wave problems with the use of personal computers. Numerical examples are given.

Bibl.3, il.2.

UDK 539.3

Koshlak A.V. **Equilibrium conditions in dynamics of formation of porous structure** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.45 – 49.

In the article the mathematical model of the state of porous structure is presented in the moment of its forming. The features of materials are certain, dependences, allowing to manage this process, are got.

Bibl.2, il.0.

UDK 539.3

Zolotovskay E.V. **Interaction of the particle with the stream of gas in the vertical channel** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.50 – 55.

In article a mathematical model is presented, of motion of particle in the vortical layer at the heat treatment. Features are definite of motion of particle in the vortical vehicle, dependences are got, allowing to handle by duration of heat treatment, on the basis of which it is possible to project the device for drying of dispersion particles. It is accepted in the offered model, that of process of heat treatment scopes, are a basic power constituent of speed and pressure in thread in relation to particle.

Bibl.4, il.1.

UDK 534-21:537.226.86

Shulga M. O., Grigoryeva L. O. **The application of successive approximations method to piezoelectric layer electroelastic nonsteady vibrations under electrical excitation analysis interaction of the particle with the stream of gas in the vertical channel** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.56 – 59.

It is proposed piezoelectric layer under electric loading nonsteady vibrations problem's solution by successive approximations method. In this method electrical and mechanical parameters are discovered on different approximations through the mechanical and electrical parameters from previous approximations. For solution of the mechanical features approximations it is used the method of characteristics. Dynamical behaviors of mechanical displacements and stresses are examined.

Bibl.3, il.2.

UDK 539.3

Solovjov I.L. **Static and dynamic stability loss of the thin-walled rotating shaft that compressed by the axial watching force** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.60 – 70.

On the basis of the analysis of dependences of frequencies own precession vibrations of the thin-walled rotating one-support shaft loaded with axial watching force, the problem about their static and dynamic loss of stability is considered. Two statements of a problem which are based on application of the theory of beams and the theories of thin cylindrical mantles are accepted. The technique of their decision is offered. Probe of influence of rotation and non-conservative axial forces on character of loss of stability of thin-walled tubes is executed.

Bibl.8, il.4.

UDK 539.3

Shnerenko K.I., Godzula V.F. **Investigation of stress state in composite cylindrical shell with hole under action of combined load** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.71 – 75.

Stresses state in composite cylindrical shell with circular hole under action of combined load is Investigated. Numerical results for shell under axial load and internal pressure are given.

Bibl 6, tab. 2.

UDK 539.3

Shchuruk G.I. **To question of nonaxisymmetrical waves propagation in shell-viscosity liquid hydroelastic system** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk,

2009.- P.76 – 81.

Results of investigation of regularity nonaxisymmetrical waves propagation in cylindrical orthotropic shell with viscosity compressible liquid are represented. Within the framework of the linear equations of S.P.Timoshenko type for the shell and linearized Navier-Stokes liquid equations the main dispersion equation is obtained. The influence of liquid on dispersion relation is investigated.

Bibl.3, il.2.

UDK 539.3

Babich S.Yu., Borysov E.M., Kulyk A.B., Lazar V.F. **To the theory of contact problem for preceding stressed elastic strip, that is disposed on the hard base without taking into account forces of friction** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.82 – 85.

Critical meaning of parameters of load are defined for certain types of elastic potentials. They are depend on initial stresses, before which the facts of inside loss of strip (semiplane) durability don't exist.

Bibl.8

UDC 539.3

Anik'ev I.I., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A. **Behaviour of the elastic plate with a side notch when action shock wave** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.86 – 92.

Behaviour of the thin elastic plate with a side notch under action wear shock wave in the air is investigated experimentally. The influens of the side notch on the process of deformation is shown.

Bibl.5, il.7

UDC 539.3

Babich S.U., U.P. **The is intense-deformed condition layered preliminary-strained halfspase at influence of mobile loading** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009.- P.93 – 98.

In article within the limits of linear theories of elasticity for bodies with initial pressure statement of the flat installed problem about indignation moving with constant speed of superficial loading two-layer preliminary strained halfspase is considered.

Bibl.1

UDC 539.3

Bystrov V.M., Zelensky V.S. **Decay of end effect at longitudinal and cross-section compression of the materials reinforced by components of the rectangular form** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009. - P.99 – 104.

The problem of definition of a zone and length of decay of end effect in the composite material of regular structure reinforced by components of the rectangular form is considered. Decay of end effect in a material reinforced by flat layers at one-axial longitudinal compression of reinforcing layers and in a material, reinforced by rectilinear unidirectional fibers of a square cross-section at one-axial cross-section loading of near surface fibers is investigated.

Bibl.5, il.7

UDC 539.3

Glukhov Y.P. **Introduction of solution of the problem of multi-layer semispace with**

the initial stresses on the moving load. Compressible material // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009. - P.105 – 110.

The influence of initial stresses and speed of the load on the roots of the characteristic equations of compressible elements of the layered semispace is studied. Numerical researches are carried out for material with harmonic potential.

Bibl.1, il.3

UDC 517.5

Derets E.V. **About an error of the formula of rectangulars on a certain classes of periodical differentiable functions** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009. - P.111 – 116.

The error of the formula of rectangulars on a class $W^r H_1^\omega$ for $r = 4, 6, \dots$ and any convex modulus of continuity $\omega(t)$ is found.

Bibl.11.

UDC 51:612.846

Kirilakha N. **To the question of construction of mathematical model of influence of eye moving muscles** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009. - P.117 – 121.

In this work the task of construction of model of action of eye moving muscles in primary position and at the turns of eye is resulted. A task is taken to finding of solving of the indefinite system of linear equations.

Bibl.3, il.4

UDK 539.3:622.281.74

Koshel' V.I. **Stress state of circle mine cavity under action of the earth gravity and plane explosive wave** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009. - P.122 – 126.

A problem of interaction of shock waves with the interface of elastic media with different mechanical properties is set up. Its solution is based on a joint use of the ray theory and theory of stereomechanical impact. Example associated with the phenomenon of plane shock wave interaction with the mine cavity with circle cross section. It is assumed that the load on the mine cavity is created by the earth gravity and the rock shocks.

Bibl. 5, ill. 1.

UDK 621.793

Cherneta S.O., Solod V.U., Grechanik E.M., Cherneta O.G. **Increase of wear resistance of shaft of the box of speeds of the lathe 1K670.320Φ3** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009. - P.127 – 130.

Job performances on consolidating of working surface of shaft of lathe by laser treatment are expounded.

Bibl. 7, ill.3.

UDK 539.3

Belova M.O. **Mathematical model of invariant measuring transformation** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009. - P.131 – 136.

The article proposes a method that helps to achieve invariant results in information transformation for feedback systems that are used in algebraic equation systems, with every equation being an equation of sensitivity function of internal factor.

Bibl. 6, ill.0.

UDK 539.3

Chexov V.N., Tkachenko E.A. **Calculation of stability laminated coatings in biaxial loading and increased values mean temperature layers** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009. - P.137 – 142.

Within the framework of model of piecewise-homogeneous environment the formulation about loss of stability in frame of a laminated composite structural materials is given. The numerical solution of a problem about surface instability of an composite is reduced at multifold biaxial compression by spread load.

Bibl. 3, ill.2.

UDK 621.876.2.001.2

Bilous O.I., Nelga A.T., Belmas O.L. **Automatic device of diagnosing of damages of rope in which reinforcing elements are located in a shell from elastic material** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009. - P.143 – 148.

The device of diagnosing of damages of rope in which reinforcing elements are located in a shell from elastic material is developed. Work of the system is based on measuring of electric resistance of heaving up elements, which changes at a break any of them. The size of change of resistance depends on properties of rope, site of damage.

Bibl. 3, ill.3.

UDC 517.374

Storozhuk E.A. **Variation vector-difference method in nonlinear problems of the theory of thin shells with curvilinear holes** // System technologies. N 3(62) - Dnipropetrovsk, 2009. - P.149 – 156.

Variation-difference method the variant for research elastic-plastic condition of flexible shells of the difficult geometry with holes is developed. Geometrical parities are written down in the vector form, and hypotheses Kirchhoff-Love are implemented by means of Lagrangian multipliers.

Bibl. 9.

АВТОРЫ ВЫПУСКА

Кирия Руслан Виссарионович - к.т.н., ст. научн. сотрудник, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины.

Ларіонов Г.І. - к.т.н., Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины.

Луговой П.З. - Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины.

Прокопенко Н.Я. - Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины.

Мейш В.Ф. - д.ф.-м.н., с.н.с. Институт механіки НАНУ.

Арнаута Н.В. - аспирант Институт механіки НАНУ.

Кошлак А.В. - аспирант Днепродзержинский государственный технический университет.

Золотовская Е.В. - аспирант Днепродзержинский государственный технический університет.

Шульга М.О. – д.ф.-м.н., чл.-кор. НАНУ, професор, завідувач відділу електропружності Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Григор'єва Л.О. – к.ф.-м.н., молодший науковий співробітник відділу електропружності Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України.

Соловьёв И.Л. - National Transport University, Kiev, Ukraine.

Шнеренко К.І. - д.т.н., с.н.с. Институт механіки НАНУ.

Годзула В.Ф. - к.т.н., с.н.с. Институт механіки НАНУ.

Щурук Г.І. - к.ф.-м.н., Институт механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.

Бабич С.Ю. –д.т.н., профессор КНЕУ.

Борисов Е.Н. –к.ф.-м.н., доцент КНЕУ.

Кулик А.Б. –к.ф.-м.н., доцент КНЕУ.

Лазар В.Ф. –к.т.н., доцент Мукачевского технологического университета.

Аникьев И.И. – к.т.н., с.н.с., Институт механики НАНУ.

Михайлова М.И. – д.т.н.,с.н.с., Институт механики НАНУ.

Сущенко Е.А. – к.т.н., с.н.с., Институт механики НАНУ.

Бабич С.Ю. - д.т.н., проф. Институт механики им.С.П. Тимошенко НАН Украины.

Глухов Ю.П. - к.т.н., доц. Кременчугский государственный политехнический университет.

Быстров В.М. - к.ф.-м.н., с.н.с. Институт механики НАН.

Зеленский В.С. - к.ф.-м.н., с.н.с. Институт механики НАН.

Глухов Ю.П. - Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины.

Дерец Е.В. - к.ф.-м.н., доц. ДДТУ.

Кирилах Н.Г. – асс. Кременчуцький державний політехнічний університет ім. М. Остроградського.

Кошель В.И. - асп. Институт механики НАНУ.

Чернета С.О. - студ. ДДТУ.

Солод В.Ю. - к.т.н., доц. ДДТУ.

Гречаник Є.М. - ассистент ДДТУ.

Чернета О.Г. - к.т.н., доц. ДДТУ.

Бєлова М.О. - асс., Національний транспортний університет.

Чехов В.Н. - д.т.н. Институт механики НАН Украины.

Ткаченко Э.А. - к.т.н. Институт механики НАН Украины.

Билоус Е.И. - аспирант ДДТУ.

Нельга А.Т. - к.т.н., доц. ДДТУ.

Бельмас А.Л. - д.т.н., проф. ДДТУ.

Сторожук Е.А. - д.ф.-м.н., проф. Инст. мех НАНУ.

Ткаченко А.С. – д.т.н., проф. кафедры теоретической механики, НМетАУ.

Колесник И.А. – д.т.н., проф. кафедры строительной механики, НМетАУ.

Рохманов Сулейман Рахманович – старший преподаватель кафедры теоретической механики, НМетАУ.