

УДК 539.3

О.Г. Галаган, Ю.П. Глухов

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ С УЧЁТОМ СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Уравнения движения пластин, полученные в уточнённой постановке, сравнительно сложны. Классическая модель Кирхгофа существенно их упрощает, но не отражает, в должной мере, все свойства уточнённой модели, поэтому, в некоторых случаях, целесообразно использовать усовершенствованную теорию, учитывающую деформации сдвига и инерцию вращения [1]. Ряд постановок задач приводит к необходимости получить уравнения движения пластины не в декартовых, а в цилиндрических координатах r, θ, z . Опираясь на основные положения этой теории, изложенной в [1,2], получим уравнения движения пластины в цилиндрических координатах.

Используем при этом следующие гипотезы:

Составляющая напряжения σ_{zz} мала по сравнению с другими составляющими, поэтому полагаем $\sigma_{zz} \approx 0$.

Точки, лежащие в срединной плоскости пластины совершают перемещения w (вверх или вниз по направлению оси Oz), а перемещения u (в радиальном направлении) и v (в окружном направлении) считаются малыми и не учитываются.

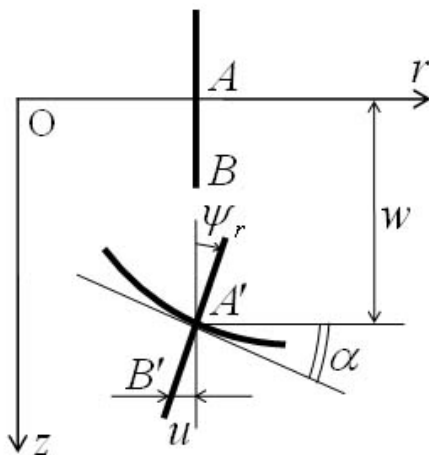


Рисунок 1

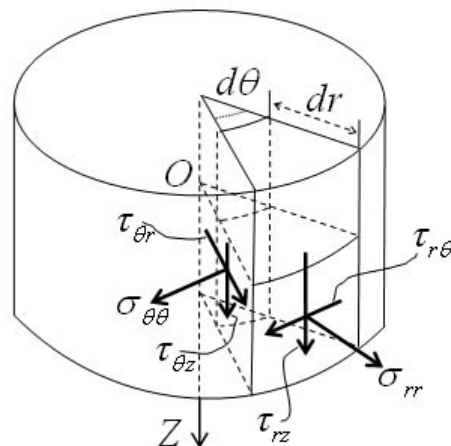


Рисунок 2

Прямолинейный нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости до деформации, не остаётся перпендикулярным к ней после деформации, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины (рис. 1). В соответствии с этой гипотезой можно принять

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \text{ Кроме того, можно записать}$$

$$u = z\psi_r(x, y, t), v = z\psi_\theta(x, y, t), w = w(x, y, t), \quad (1)$$

где функции ψ_r, ψ_θ можно интерпретировать как повороты относительно радиального и окружного направления.

Функция w также должна зависеть от z . Позднее эту зависимость учтём заменой модуля сдвига G на

$$G' = kG, \quad (2)$$

где k – сдвиговой коэффициент Тимошенко.

Рассмотрим пластину толщиной $2h$. Вырежем из пластины цилиндрический элемент (рис.2). Совместим его ось вращения с осью Oz . Пусть срединная плоскость пластины проходит через $z = 0$. При изгибе в пластине действуют нормальные напряжения – радиальное σ_{rr} и окружное $\sigma_{\theta\theta}$ и касательные $\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$. Напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{r\theta}$ изменяются по толщине пластины по линейному закону с наибольшими значениями вблизи внешних поверхностей пластины. Касательные напряжения $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ изменяются по толщине по параболическому закону. Ввиду отсутствия касательных нагрузок на внешних поверхностях $z = \pm h$ получим

$$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0. \quad (3)$$

Выделим из пластины элемент с размерами $2h, dr, rd\theta$. Обозначим элементарные площадки этого элемента: $dF_\theta = drdz$ – радиальную, $dF_r = rd\theta dz$ – окружную. Если ширина каждой площадки 1, то на площадке $dF_\theta = 1 \times dz$ действуют силы: $\sigma_{\theta\theta}dz, \tau_{\theta r}dz, \tau_{\theta z}dz$, а на $dF_r = 1 \times dz$ – силы $\sigma_{rr}dz, \tau_{r\theta}dz, \tau_{rz}dz$. Они создают бесконечно малые нормальные и касательные силы и моменты относительно осей $n \perp dF_r, s \perp dF_\theta$, задающих радиальное и окружное направления. Рассматривая силы и моменты, приходящиеся на единицу ширины площадки и суммируя их по толщине пластины, получим:

поперечные силы

$$Q_r = \int_{-h}^h \tau_{rz} dz, \quad Q_\theta = \int_{-h}^h \tau_{\theta z} dz; \quad (4)$$

изгибающие моменты

$$M_r = \int_{-h}^h \sigma_{rr} z dz, \quad M_\theta = \int_{-h}^h \sigma_{\theta\theta} z dz; \quad (5)$$

крутящие моменты

$$H_{r\theta} = H_{\theta r} = \int_{-h}^h \tau_{r\theta} z dz; \quad (6)$$

нормальные силы

$$N_r = \int_{-h}^h \sigma_{rr} dz, \quad N_\theta = \int_{-h}^h \sigma_{\theta\theta} dz; \quad (7)$$

сдвигающие силы

$$S_r = S_\theta = \int_{-h}^h \tau_{r\theta} dz. \quad (8)$$

Получим формулы позволяющие определять силы и моменты (4) – (8) через функции (1).

Согласно [3, 4] в цилиндрических координатах:

составляющие деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}; \quad \varepsilon_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \end{aligned} \quad (9)$$

закон Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{E} [\sigma_{rr} - \nu(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})]; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}; \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta\theta} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{zz})]; \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})]; \quad \varepsilon_{zr} = \frac{\tau_{zr}}{G}. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножим выражения (10) содержащие $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta}$ на $\frac{3}{2h^3} z$ и проинтегрируем по толщине пластины. Учитывая (5) и (6) и то, что $\sigma_{zz} \approx 0$, после преобразований получим

$$M_r = D(\Gamma_{rr} + \nu\Gamma_{\theta\theta}), \quad M_\theta = D(\Gamma_{\theta\theta} + \nu\Gamma_{rr}); \quad (11)$$

$$H_{r\theta} = \frac{(1-\nu)D}{2} \Gamma_{r\theta}, \quad (12)$$

где составляющие деформации пластины записаны в виде

$$(\Gamma_{rr}, \Gamma_{\theta\theta}, \Gamma_{r\theta}) = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^h (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta}) z dz; \quad (13)$$

D – цилиндрическая жесткость пластины

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}. \quad (14)$$

Учитывая (2) и (10), получим

$$\varepsilon_{\theta z} = G'\tau_{\theta z}, \quad \varepsilon_{rz} = G'\tau_{rz}. \quad (15)$$

Умножим выражения (15) на $\frac{1}{2h}$ и проинтегрируем по толщине пластины. Учитывая (4), получим

$$Q_\theta = 2hG'\Gamma_{\theta z}, \quad Q_r = 2hG'\Gamma_{rz}, \quad (16)$$

где

$$(\Gamma_{rz}, \Gamma_{\theta z}) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (\varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}) dz. \quad (17)$$

Из (10), учитывая, что $\sigma_{zz} \approx 0$, после преобразований получим

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{rr}). \quad (18)$$

Подставим (18) в (7) и учтём (9). Проинтегрировав, получим

$$N_r = 0, \quad N_\theta = 0. \quad (19)$$

Учитывая (9) и (10), вычислим интеграл (8). Получим

$$S_r = S_\theta = 0. \quad (20)$$

Также найдём интегралы (13) и (17), учитывая (9) и (10).

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr} &= \frac{\partial \psi_r}{\partial r}; \quad \Gamma_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r}; \quad \Gamma_{r\theta} = \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r}; \\ \Gamma_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \psi_r; \quad \Gamma_{\theta z} = \psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда выражения (11), (12) и (16) с учетом (21) примут вид

$$\begin{aligned} M_r &= D \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r} \psi_r \right); \\ M_\theta &= D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} + \nu \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right); \\ H_{r\theta} &= H_{\theta r} = \frac{(1-\nu)D}{2} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right); \\ Q_\theta &= 2hG' \left(\psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \\ Q_r &= 2hG' \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \psi_r \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнения движения в цилиндрических координатах имеют вид [3, 4]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Пусть обе внешние поверхности пластины параллельные срединной плоскости нормально нагружены, то есть

$$\sigma_{zz}|_{z=h} = q_1(x, y, t), \quad \sigma_{zz}|_{z=-h} = q_2(x, y, t). \tag{24}$$

Обозначим

$$q(x, y, t) = q_1(x, y, t) - q_2(x, y, t). \tag{25}$$

Умножим первые два уравнения (23) на z и проинтегрируем по толщине пластины, а третье уравнение (23) непосредственно проинтегрируем по толщине пластины с учетом (24) и (25). В результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{\theta r}}{\partial \theta} - Q_r + \frac{M_r - M_\theta}{r} &= \frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial H_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta + \frac{2}{r} H_{r\theta} &= \frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + q + \frac{1}{r} Q_r &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Преобразуем уравнения (1.26) с помощью соотношений (1.22). Получим уравнения движения пластины в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned}
\frac{D}{2} \left(2\nabla^2 \psi_r + \left(\frac{1-\nu}{r} - \frac{2}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{r} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta \partial r} - \frac{3-\nu}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \psi_r \right) - \\
- 2hG' \left(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) &= \frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2}; \\
\frac{D}{2} \left(2\nabla^2 \psi_\theta + \left(1-\nu + \frac{2\nu}{r} \right) \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta \partial r} - (1+\nu) \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \left(\frac{2}{r^2} + \frac{2-2\nu}{r} \right) \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \right. \\
\left. + \frac{1-\nu}{r^2} \psi_\theta \right) - 2hG' \left(\psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) &= \frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}; \\
2hG' \left(\nabla^2 w + \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} \right) &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Члены уравнений (27), содержащие G' , характеризуют поперечный сдвиг, а члены содержащие $\frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2}, \frac{2h^3 \rho}{3} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}$ – влияние инерции вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mindlin R.D.* Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates// Trans.ASME. Ser.E.J.Appl.Mech. – 1951.- 18, № 1. – P.31 – 38.
2. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы. – М.: Мир, 1971. – 557 с.
3. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – Москва: Объединённое научно-техническое издательство, 1935. – 675 с.
4. *Рекач В.Г.* Руководство к решению задач по теории упругости. – Москва: Высшая школа, 1966. – 228 с.

Получено 03.05.2008 г.

НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ИЗ ПРЯМОЛИНЕЙНО ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Одной из важнейших особенностей композитных материалов является существенная анизотропия механических свойств и, как следствие, с одной стороны возможность управление этой анизотропии в процессе изготовления конструкции, а с другой – появление дополнительной возможности при проектировании. Наряду с анизотропией композитные материалы также обладают разномодульностью, т.е. при растягивающих или сжимающих нагрузках их механические характеристики различные [1]. Поэтому для оценки прочности рассматриваемой конструкции необходимо в расчетах учитывать не только анизотропию механических свойств материала, но и различие прочностных характеристик материала при растяжении и при сжатии.

В отличие от ранее опубликованных работ [2-5], в которых приведены результаты исследования напряженного состояния составных тел вращения из прямолинейно ортотропных материалов без учета их разномодульности, ниже будет изложена конечно-элементная методика исследования термонапряженного состояния тел вращения, изготовленных из разномодульных на растяжение и сжатие упругих прямолинейно ортотропных материалов, при неосесимметричном нагружении и нагреве. При исследовании напряженного состояния элементов из композитных материалов будем пренебрегать их гетерогенной структурой и воспользуемся соотношениями анизотропной теории упругости.

Рассмотрим в цилиндрической системе координат z, r, φ состояние тела вращения произвольного меридионального сечения из упругого прямолинейно ортотропного материала при нагружении объемными $\vec{K}(K_z, K_r, K_\varphi)$ и поверхностными $\vec{t}_n(t_{nz}, t_{nr}, t_{n\varphi})$ силами и неравномерном нагреве. В качестве ортотропных материалов рассмотрим упруго деформирующиеся материалы, в которых главные

оси анизотропии теплофизических и механических характеристик совпадают с направлениями осей декартовой системы координат, одна из осей анизотропии совпадает с осью вращения тела.

Для такого ортотропного материала, в котором главные оси анизотропии механических и теплофизических характеристик материала совпадают с направлениями осей декартовой системы координат z, x, y , связь между компонентами деформаций и напряжений можно записать следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^T \\ \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^T \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_z} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{xx} \\ \dots \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

где E_i – модуль упругости в направлении главных осей анизотропии, совпадающих с выбранной системой координат; G_{ij} – модуль сдвига в соответствующей координатной плоскости; ν_{ij} – коэффициент Пуассона, характеризующей сжатие элемента в направлении оси j при растяжении его в направлении оси i ; $\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ii}^T (T - T_0)$, α_{ii}^T – коэффициент линейного теплового расширения материала вдоль соответствующего главного направления анизотропии.

В случае анизотропного материала с механическими характеристиками, одинаковыми при растяжении и сжатии, из условия существования положительно определенной функции потенциальной энергии следует, что матрица податливостей в соотношениях (1) является симметричной. Для разномодульного материала условия между коэффициентами Пуассона, модулями Юнга и модулями сдвига не выполняются, поэтому матрица податливостей остается несимметричной. Достичь симметричности матрицы податливостей можно путем задания определенных соотношений между постоянными материалами при растяжении и сжатии, которые бы позволяли удовлетворить известным преобразованиям теории упругости анизотропного тела. Однако введение этих соотношений между свойствами материалами при сжатии и

растяжении приводит к ограничению использования реальных технических материалов. Мы же будем пользоваться подходом, который заключается в сложении коэффициентов матрицы податливостей при растяжении и при сжатии пропорционально соответствующим сжимающим и растягивающим напряжением на соответствующих площадках. Это будет осуществляться путем введения некоторых весовых коэффициентов, учитывающих влияние знака соответствующих нормальных напряжений в двух перпендикулярных направлениях на соответствующие коэффициенты матрицы податливостей. Теоретического обоснования для такого подхода нет, но он позволяет сделать матрицу податливостей симметричной и воспользоваться при решении сформулированной задачи теорией упругости для анизотропного материала. При этом в зависимости от знака напряжений коэффициенты матрицы податливостей в (1) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & \text{если } \sigma_{zz} < 0, \text{ то } \frac{1}{E_z} = \frac{1}{E_z^-}; \quad \text{если } \sigma_{zz} > 0, \text{ то } \frac{1}{E_z} = \frac{1}{E_z^+}, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \text{если } \begin{matrix} \sigma_{zz} > 0 \\ \sigma_{xx} > 0 \end{matrix}, \text{ то } \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}^+}{E_z^+}; \quad \text{если } \begin{matrix} \sigma_{zz} < 0 \\ \sigma_{xx} < 0 \end{matrix}, \text{ то } \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}^-}{E_z^-}, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \text{если } \begin{matrix} \sigma_{zz} > 0 \\ \sigma_{xx} < 0 \end{matrix}, \text{ то } \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{|\sigma_{zz}|}{|\sigma_{zz}| + |\sigma_{xx}|} \frac{\nu_{zx}^+}{E_z^+} + \frac{|\sigma_{xx}|}{|\sigma_{zz}| + |\sigma_{xx}|} \frac{\nu_{xz}^-}{E_x^-}, \\
 & \text{если } \begin{matrix} \sigma_{zz} < 0 \\ \sigma_{xx} > 0 \end{matrix}, \text{ то } \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{|\sigma_{zz}|}{|\sigma_{zz}| + |\sigma_{xx}|} \frac{\nu_{zx}^-}{E_z^-} + \frac{|\sigma_{xx}|}{|\sigma_{zz}| + |\sigma_{xx}|} \frac{\nu_{xz}^+}{E_x^+}, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \text{если } \sigma_{zx} > 0, \text{ то } \frac{1}{G_{zx}} = \frac{1}{G_{zx}^+} = \frac{1}{E_{zx}^{45+}} - \left(\frac{1}{E_z^+} + \frac{1}{E_x^+} - \frac{\nu_{zx}^+}{E_z^+} \right), \\
 & \text{если } \sigma_{zx} < 0, \text{ то } \frac{1}{G_{zx}} = \frac{1}{G_{zx}^-} = \frac{1}{E_{zx}^{45-}} - \left(\frac{1}{E_z^-} + \frac{1}{E_x^-} - \frac{\nu_{zx}^-}{E_z^-} \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Разрешив систему уравнений (1) относительно компонентов напряжений, получим выражения для напряжений через компоненты деформаций для прямолинейно ортотропных материалов в системе координат z,x,y. Если теперь в последнем случае перейти по известным формулам преобразования от декартовой системы координат к цилиндрической, связь между компонентами напряжений и деформаций для таких материалов можно записать в виде:

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T). \quad (3)$$

Связь между компонентами напряжений и деформаций для ортотропного материала (3) представим в виде закона Гука для однородного материала. Для этого запишем коэффициенты A_{ijkl} в виде $A_{ijkl} = A_{ijkl}^0(1 - \omega_{ijkl})$, где A_{ijkl}^0 – некоторые независимые от температуры осредненные значения соответствующих коэффициентов, а $A_{ijkl}^0\omega_{ijkl}$ – функции, характеризующие изменение A_{ijkl} и учитывающая их зависимость от температуры и разномодульность материала. Тогда связь между напряжениями и деформациями примет вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \\ \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{z\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{zzzz}^0 & A_{zzrr}^0 & A_{zz\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{zzrr}^0 & A_{rrrr}^0 & A_{rr\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{zz\varphi\varphi}^0 & A_{rr\varphi\varphi}^0 & A_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{zrzr}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{z\varphi z\varphi}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{r\varphi r\varphi}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{zr} \\ \varepsilon_{z\varphi} \\ \varepsilon_{r\varphi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma_{zz}^* \\ \sigma_{rr}^* \\ \sigma_{\varphi\varphi}^* \\ \sigma_{zr}^* \\ \sigma_{z\varphi}^* \\ \sigma_{r\varphi}^* \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{zzzz} &= \Delta_{11}^*, \quad A_{zzr\varphi} = (\Delta_{13}^* - \Delta_{12}^*) \sin 2\varphi / 2, \\ \left. \begin{aligned} A_{zzrr} \\ A_{zz\varphi\varphi} \end{aligned} \right\} &= [\Delta_{12}^* + \Delta_{13}^* \pm (\Delta_{12}^* - \Delta_{13}^*) \cos 2\varphi] / 2, \\ \left. \begin{aligned} A_{rrrr} \\ A_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \end{aligned} \right\} &= [(2\Delta_{22}^* + 3\Delta_{33}^* + 2\Delta_{23}^* + 4G_{xy}) \pm 4(\Delta_{22}^* - \Delta_{33}^* \cos 2\varphi + \\ &\quad + (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) \cos 4\varphi] / 8, \\ A_{rr\varphi\varphi} &= [(\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* + 6\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) - (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) \cos 4\varphi] / 8 \\ \left. \begin{aligned} A_{rrr\varphi} \\ A_{\varphi\varphi r\varphi} \end{aligned} \right\} &= [2(\Delta_{33}^* - \Delta_{22}^*) \sin 2\varphi \pm (\Delta_{22}^* + \Delta_{33}^* - 2\Delta_{23}^* - 4G_{xy}) \sin 4\varphi] / 8, \\ \left. \begin{aligned} A_{zrzr} \\ A_{z\varphi z\varphi} \end{aligned} \right\} &= [(G_{zx} + G_{zy}) \pm (G_{zx} - G_{zy}) \cos 2\varphi] / 2, \\ A_{zzzr} &= A_{zzz\varphi} = \dots = A_{zrzr} = A_{zrrr} = A_{zr\varphi\varphi} = A_{zrr\varphi} = \dots = A_{r\varphi z\varphi} = 0; \\ \Delta_{ij}^* &= \Delta_{ij} / \Delta, \quad \Delta_{11} = \left(\frac{1}{E_y} - \frac{\nu_{xy}^2}{E_x} \right) / E_x, \quad \Delta_{12} = \left(\frac{\nu_{zy}^2}{E_x} + \frac{\nu_{zx}}{E_y} \right) / E_z, \\ \Delta_{13} &= (\nu_{zx}\nu_{xy} + \nu_{zy}) / (E_z E_x), \quad \Delta_{22} = \left(\frac{1}{E_y} - \frac{\nu_{zy}^2}{E_z} \right) / E_z, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Delta_{23} = \left(\nu_{zx} \frac{\nu_{zy}}{E_z} + \frac{\nu_{xy}}{E_x} \right) / E_z, \quad \Delta_{33} = \left(\frac{1}{E_x} - \frac{\nu_{zx}^2}{E_z} \right) / E_z,$$

$$\Delta = (\Delta_{11} - \nu_{zx} \Delta_{12} - \nu_{zy} \Delta_{13}) / E_z;$$

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij}^T (T - T_0), \quad (i, j = z, r, \varphi),$$

$$\left. \begin{matrix} \alpha_{rr}^T \\ \alpha_{\varphi\varphi}^T \end{matrix} \right\} = (\alpha_{xx}^T + \alpha_{yy}^T) / 2 \pm (\alpha_{xx}^T - \alpha_{yy}^T) \cos 2\varphi / 2, \quad (7)$$

$$\alpha_{r\varphi}^T = (\alpha_{yy}^T - \alpha_{xx}^T) \sin 2\varphi / 2, \quad \alpha_{zr}^T = \alpha_{z\varphi}^T = 0;$$

$$\sigma_{zz}^* = A_{zzzz}^0 \omega_{zzzz} \varepsilon_{zz} + A_{zzrr}^0 \omega_{zzrr} \varepsilon_{rr} + A_{zz\varphi\varphi}^0 \omega_{zz\varphi\varphi} \varepsilon_{\varphi\varphi} -$$

$$- 2 A_{zzr\varphi} (\varepsilon_{r\varphi} - \varepsilon_{r\varphi}^T) + A_{zzzz}^T \varepsilon_{zz}^T + A_{zzrr}^T \varepsilon_{rr}^T + A_{zz\varphi\varphi}^T \varepsilon_{\varphi\varphi}^T,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sigma_{r\varphi}^* = 2 A_{r\varphi r\varphi} \omega_{r\varphi r\varphi} + 2 A_{r\varphi r\varphi}^T \varepsilon_{r\varphi}^T - A_{zzr\varphi} (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^T) -$$

$$- A_{rrr\varphi} (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^T) - A_{\varphi\varphi r\varphi} (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^T). \quad (8)$$

В первом приближении в соотношениях (5) члены с сомножителями в виде тригонометрических функций входят в (8) как $A_{ijkl}^0 \omega_{ijkl}$, а A_{ijkl}^0 в уравнениях состояния (4) - не изменяющаяся в окружном направлении часть (5).

Поскольку свойства материала зависят от напряженного состояния, и наоборот, задача определения напряженно-деформированного состояния является задачей с неизвестными механическими характеристиками. Однако от этой неопределенности можно избавиться, воспользовавшись следующей итерационной процедурой. Сначала перемещения и напряжения определяются в цилиндрической системе координат с первоначально заданными в декартовой системе координат свойствами (например, средними значениями коэффициентов Пуассона и модулей при растяжении и сжатии). Затем определяются в декартовой системе координат соответствующие новые свойства материала с учетом знака напряжений, вычисленных на предыдущем шаге, и процесс вычислений повторяется, пока не будет достигнута требуемая точность. При этом следует иметь в виду, что поскольку задача решается в цилиндрической системе координат переход к компонентам напряжений в декартовой системе координат осуществляется по формулам:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr} \cos^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi - \sigma_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{rr} \sin^2 \varphi + \sigma_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi + \sigma_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zr} \cos \varphi - \sigma_{z\varphi} \sin \varphi, \quad (9)$$

$$\sigma_{zy} = \sigma_{zr} \sin \varphi + \sigma_{z\varphi} \cos \varphi,$$

$$\sigma_{xy} = (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cos \varphi \sin \varphi - \sigma_{r\varphi} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).$$

Методика построения решения неосесимметричной задачи термоупругости с использованием соответствующих вариационных уравнений и полуаналитического метода конечных элементов при записи определяющих уравнений в форме закона Гука (4) для однородного материала подробно описана в работах [4,5] и здесь не приводится.

Было исследовано напряженно-деформированное состояние седла клапана вдува ракетного двигателя как двухслойного тела вращения из изотропного неупруго деформирующегося материала и углерод-углеродного композитного материала при нагреве. Анализ результатов расчета показал, что учет разномодульности композита приводит к изменению напряжений до 15%. Таким образом, предложенная методика учета разномодульности прямолинейно ортотропного материала при исследовании напряженно-деформированного состояния составных тел вращения в процессе нестационарного нагрева приводит к уточнению результатов решения соответствующей краевой задачи термоупругопластичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones R.M. Stress – Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. – 1977. -V.15, N 1. – PP.16-23.
2. Савченко В.Г. Термонапряженное состояние слоистых тел вращения из изотропных и прямолинейно ортотропных материалов Прикл. механика.- 1995.- т.31, №4.- С.3 - 9.
3. Савченко В.Г. О влиянии направления главных осей анизотропии прямолинейно ортотропных материалов на напряженное состояние составных тел вращения при неосесимметричном нагреве Прикл. механика.- 2003.- т.39, №6.- С.101-109.
4. Механика композитов: В 12-ти т. / Под общ. ред А.Н.Гузя. Т.11. Численные методы / Я.М.Григоренко, Ю.Н.Шевченко,..., В.Г.Савченко и др. – К.: «А.С.К.», 2002. –448с.
5. Savchenko V.G., Shevchenko Yu.N. Nonaxisymmetric thermal stress state of laminated rotational bodies of orthotropic materials under nonisothermic loading // Mech. Compos. Mater. -2004. – т. 40, №6. - P.473-488.

Получено 03.05.2008 г.

УДК 517.5

Т.В. Крылова

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Введение. Исследование колебаний динамических систем приводят к задачам на собственные значения. В ряде случаев эти задачи являются нелинейными относительно параметра.

Постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу на собственные значения для дифференциального уравнения четвертого порядка с нелинейным вхождением параметра

$$y^{IV}(x) + f_1(\lambda)\rho(x)y''(x) + f_2(\lambda)q(x)y(x) = 0, \quad x \in (0; 1) \quad (1)$$

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0, \quad (2)$$

$$\rho(x), q(x) \in C_{[0;1]}.$$

Метод решения. Отыскание собственных значений λ будем проводить в три этапа.

На первом этапе определим область расположения собственных значений. Для этого используем интегральное представление [1]

$$y(x) = \int_0^1 M_x(t) y^{IV}(t) dt,$$

где

$$M_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} (1-x)^2 (-(2x+1)t^3 + 3t^2 - x), & t \in [0; x], \\ \frac{1}{6} (t-x)^3 - \frac{1}{6} t^3 (1-x)^2 (2x+1) + \frac{1}{2} t^2 x (1-x)^2, & t \in [x; 1]. \end{cases}$$

В результате получим, что собственные значения λ задачи (1), (2) находятся в области

$$A(f_1(\lambda))^2 + Bf_1(\lambda)f_2(\lambda) + C(f_2(\lambda))^2 \geq 1, \quad (3)$$

где

$$A = -\frac{11}{2100} \max_{x \in [0;1]} \rho^2(x),$$

$$B = -\frac{1}{9450} \max_{x \in [0;1]} (\rho(x) \cdot q(x)),$$

$$C = \frac{71}{1746300} \max_{x \in [0;1]} q^2(x).$$

На втором этапе для определения собственных значений приближенное решение $\bar{y}(x)$ задачи (1), (2) для разбиения

$$\Delta_N = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1\}$$

будем искать в виде полиномиального сплайна пятой степени

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i + \sum_{j=0}^{N-1} b_j (x - x_j)_+^5.$$

Для нахождения $N+5$ неизвестных коэффициентов a_i ($i=0,1,2,3,4$), b_j ($j=0,1,2,\dots,N-1$) используем краевые условия (2) и осуществим коллокацию в $N+1$ точках отрезка $[0;1]$. В качестве точек коллокации можно выбрать внутренние узлы x_k , $k=1,2,\dots,N-1$ сплайна и точки $x_0 + \varepsilon$, $x_N - \varepsilon$.

Приравниваем нулю определитель полученной системы $N+5$ алгебраических линейных однородных уравнений относительно $N+5$ неизвестных коэффициентов a_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$), получим уравнение относительно приближенных значений $\bar{\lambda}$. Далее проверяем, какие из $\bar{\lambda}$ находятся в области (3).

На третьем этапе для уточнения найденных значений $\bar{\lambda}$ из области (3), вычисляем для какого-нибудь значения $\bar{\lambda}_k$ (например, наименьшего положительного значения) соответствующие коэффициенты a_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), b_j ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$). Потом строим более тонкую сетку

$$\Delta_n^* = \{0 = x_0^* < x_1^* < \dots < x_n^* = 1\}, \text{ причем } n \gg N.$$

Асимптотически оптимальные узлы x_k^* , $k = 0, 1, \dots, n$ определяем из равенств [2,3]

$$\int_0^{x_k^*} \sqrt[6]{|\bar{y}^{VI}(x)|} dx = \frac{k}{n} \int_0^1 \sqrt[6]{|\bar{y}^{VI}(x)|} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{где } \bar{y}^{IV}(x_j) = \frac{\bar{y}^{IV}(x_{j-1}) - 2\bar{y}^{IV}(x_j) + \bar{y}^{IV}(x_{j+1}))}{h_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

На тех участках, где $\bar{y}''(x) \cdot \bar{y}^{IV}(x) < 0$, приближенное решение $\bar{y}(x)$ задачи (1), (2) представляем в виде интерполяционного тригонометрического сплайна, а на тех участках где $\bar{y}''(x) \cdot \bar{y}^{IV}(x) > 0$ - в виде интерполяционного напряженного сплайна [4,5,6]

$$\tilde{y}(x) = A_0 + \sum_{k=1}^n (A_k(x - x_{k-1}^*)_+ + B_k(x_k^* - x)_+ + C_k\varphi_k(x) + D_k\psi_k(x))$$

(для тригонометрического сплайна

$$\varphi_k(x) = \cos \gamma_k(x - t_k)_+,$$

$$\psi_k(x) = \sin \gamma_k(x - t_k)_+,$$

для напряженного сплайна

$$\varphi_k(x) = ch \Theta_k(x - t_k)_+,$$

$$\psi_k(x) = sh \Theta_k(x - t_k)_+,$$

где

$$\gamma_k = \sqrt{-\frac{\bar{y}^{IV}(t_k)}{\bar{y}''(t_k)}},$$

$$\Theta_k = \sqrt{\frac{\bar{y}^{IV}(t_k)}{\bar{y}''(t_k)}},$$

$$t_k = \frac{x_{k-1}^* + x_k^*}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Для отыскания $4n+1$ неизвестных коэффициентов $A_0, A_k, B_k, C_k, D_k, k = 1, 2, \dots, n$, как и на втором этапе, используем краевые условия (2) и коллокацию в $4n-1$ внутренних точках отрезка $[0;1]$. В результате получим уточненные приближенные собственные значения $\bar{\lambda}$ задачи (1), (2), находящиеся в области (3).

Если $\left| \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \right|$ больше допустимой точности вычислений, то процесс уточнения значений λ можно повторить.

Вывод. Метод применим и для решения краевых задач с непрерывно-дискретными коэффициентами уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылова Т.В., Лигун А.А. Области изменения собственных значений многопараметрических и нелинейных краевых задач // Приближение функций полиномами и сплайнами и суммирование рядов. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетровского ун - та. – 1990. – С. 38 - 44.
2. Крылова Т.В., Лигун А.А. О выборе узлов при приближенном решении краевых задач методом сплайн - коллокации // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т.20, № 9. – С. 1529 - 1534.
3. Крылова Т.В. Начала математического моделирования. К: Выща школа, 1998.- ч.2. – 177 с.
4. Крылова Т.В. Применение тригонометрических сплайнов для приближенного решения краевых задач // Матеріали VI міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. – К.: «Віпол». – 1997. – С. 228.
5. Крылова Т.В. Приближенное решение краевой задачи с помощью напряженных сплайнов // Тез. докл. междунар. конф. «Modelling and

- investigation of systems stability. Systems Investigation». – К.: ІБЦ
Мінстату України. – 1997. – С. 60.
6. Krylova T. Non-linear eigenvalues of boundary problem for differential
equation of six order // 77th Annual Meeting GAMM 2006, Berlin,
Germany, 2006. – P. 487 – 488.

Получено 04.05.2008 г.

Э.Д. Чихладзе, М.А. Веревичева, Л.Б. Кравцов

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТАЛЕБЕТОННЫХ КОЛОНН С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РАБОТЫ БЕТОННОГО ЯДРА

1. *Постановка задачи.* В работе [1] рассматривались цилиндрические колонны, находящиеся под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q и собственного веса. При изучении напряженно-деформированного состояния принималась гипотеза о том, что касательные напряжения $\tau_{rz} = 0$. Поэтому система уравнений равновесия сводилась к одному уравнению относительно радиального перемещения u_r с соответствующими граничными условиями. Решение этой задачи получено в аналитическом виде с учетом зависимости механических характеристик бетона от соотношения главных напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$. Эти напряжения определялись как функции перемещений с учетом контактной силы, возникающей на границе между бетонным ядром и стальной обоймой. В данной работе проводится проверка обоснованности вышеупомянутой гипотезы.

2. *Математическая модель.* В силу осевой симметрии колонны для решения поставленной задачи рассмотрим половину продольного сечения колонны, загруженной распределенной нагрузкой q и собственной массой (рис. 1).

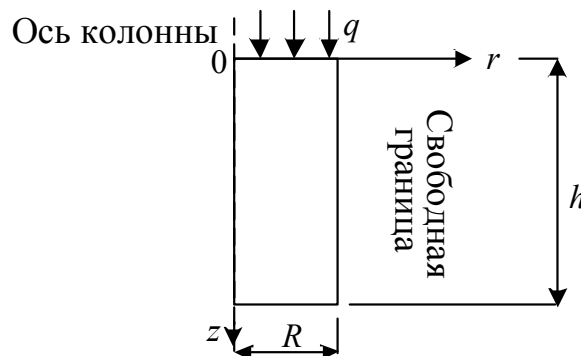


Рисунок 1 - Продольное сечение бетонной колонны

Зависимости между напряжениями и деформациями в бетоне принимаются в форме закона Гука [2] с переменными параметрами деформирования E и ν :

$$\sigma_r = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{u_r}{r}, \quad (1)$$

$$\sigma_z = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad (2)$$

где u_r, u_z - соответственно радиальное и вертикальное перемещения; λ, μ - коэффициенты Ляме.

Параметры деформирования E и ν : определяются в соответствии с методом А.В. Яшина [3]. Материал стальной обоймы считается обладающим свойствами идеальной упругопластичности.

Система уравнений равновесия в цилиндрических координатах имеет вид [2]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho g, \quad (3)$$

где ρ - плотность бетона, g - ускорение свободного падения.

Подставив в уравнения равновесия зависимости (1), (2), получим систему уравнений в перемещениях:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) = \rho g. \quad (6)$$

Для определения перемещений задаются граничные условия в зависимости от условий закрепления колонны.

Полученная задача решается численно путем разностной аппроксимации.

3. Численные исследования. Для сравнения двух методик расчета (приведенной в [4] и в данной статье) проведены численные исследования для различных классов бетонов и значений нагрузок.

В табл. 1 приведены результаты расчетов для консольной колонны из бетона В25 ($E_b = 30 \cdot 10^3$ МПа, $\nu_b = 0.2$, $\rho = 2350$ кг/м³) высотой $h = 5$ м и радиусом $R = 0.5$ м под действием нагрузки $q = 11,1$ МПа и $q = 14,8$ МПа (соответственно уровень напряженного состояния 0,6 и 0,8 $q_{\text{нec}}$).

Граничные условия для консольной колонны имеют вид:

на оси: $r = 0$: $u_r = 0, \partial u_r / \partial r = 0, \partial u_z / \partial z = 0$;

на свободной границе: $r = R$: $\sigma_r = 0$;

на верхней грани $z = 0$: $u_r = 0$, $\sigma_z = q$;
 на нижней грани $z = h$: $u_r = 0$, $u_z = 0$.

Результаты расчетов сравнивались с аналогичными результатами, полученными по методу [1] вблизи основания колонны, то есть в слое с максимальным напряжением σ_z .

Таблица 1

Сравнительные результаты расчетов перемещений

	$u_r \cdot 10^4$, м		$u_z \cdot 10^2$, м	
	С учетом τ_{rz}	Без учета τ_{rz}	С учетом τ_{rz}	Без учета τ_{rz}
$q = 11,1$ МПа	0,41	0,37	0,196	0,201
$q = 14,8$ МПа	0,47	0,49	0,280	0,282

Как видно из табл. 1, перемещения практически совпадают. Напряжения $\sigma_z(i,j)$ совпадают с точностью до второго знака после запятой. Напряжения $\sigma_r(i,j)$, равные ранее нулю по всему сечению, теперь, вследствие учета касательных напряжений, несколько отличны от нуля (порядка 10^{-2} МПа). Однако если перейти к решению контактной [1] задачи между ядром и обоймой, соотношение между $\sigma_r(i,j)$ и контактной силой сохраняется, т.е. $F_k \gg \sigma_r$. Поэтому полное радиальное напряжение в ядре, равное $F_k + \sigma_r$, останется прежним.

4. *Выводы.* Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии сталебетонной колонны без учета касательных напряжений дает практически тот же результат, что и решение с учетом касательных напряжений $\tau_{rz} = 0$ в точках колонны.

При оценке несущей способности колонны можно использовать аналитический метод [1], в основу которого положены следующие предпосылки: поверхность поперечного сечения колонны после деформации остается перпендикулярной всем продольным волокнам; обойма и ядро в продольном направлении работают совместно вплоть до разрушения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чихладзе Э.Д., Веревичева М.А. Работа сталебетонных цилиндрических колонн при статическом кратковременном нагружении // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. научн. тр. «Инновационные технологии диагностики, ремонт и

- восстановление объектов строительства и транспорта» – Днепропетровск: ПГАСА, 2005. – Вып. 35. Часть 3. – С. 47 – 54.
2. Годфри Д. Теория упругости и пластичности. Киев: Будівельник, 1969. – 311с.
 3. Яшин А.В. Теория деформирования бетона при простом и сложном нагружении // Бетон и железобетон. – 1986. – №8. – С. 39 – 42.

Получено 03.05.2008 г.

УДК 539.3

П.А.Стеблянко

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНИКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ

Введение. Предложен ориентированный на использование метода покомпонентного расщепления вариант математической модели количественного описания термомеханических процессов в электропроводных телах, находящихся под воздействием квазиустановившихся электромагнитных полей, с учетом температурной зависимости свойств материалов, упруго-пластического характера деформирования и нелинейности зависимостей индукций электрического и магнитного полей от соответствующих напряженностей и температуры. Модель основана на теории взаимодействия электромагнитного поля и материального континуума, уравнениях Максвелла для термочувствительных намагничивающихся и поляризующихся тел, зависимостях теории теплопроводности и неизотермической термоупругопластичности. Влияние поля учтено через объемные тепловыделения, пондеромоторные силы и моменты.

Постановка задачи. Электромагнитное поле электропроводного тела и внешней среды описывает система уравнений Максвелла [1-3].

Для области тела

$$\vec{\nabla} \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + j, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot D = \Omega, \quad r \in V \quad (3)$$

и внешней среды

$$\vec{\nabla} \times H^0 = \frac{\partial D^0}{\partial t} + j^0, \quad (4)$$

$$\vec{\nabla} \times E^0 = -\frac{\partial B^0}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot D^0 = \Omega^0, \quad r \in E^3 / V, \quad t \in [0, \tau_*]. \quad (6)$$

Уравнение теплопроводности можно записать так

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) + W. \quad (7)$$

Здесь T – температура; $c = c(T)$ – объемная теплоемкость; $\lambda = \lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности; W – мощность источников тепла; H, E – векторы напряженностей магнитного и электрического полей; B, D – магнитная и электрическая индукции; j – плотность токов; Ω – объемная плотность электрических зарядов; j^0 и Ω^0 – заданные функции координат и времени; $\vec{\nabla}$ – оператор Гамильтона; r – радиус-вектор точки; $\left(\vec{\nabla} \times \right), \left(\vec{\nabla} \cdot \right)$ обозначают соответственно операции ротора и дивергенции.

Основной задачей нестационарной теории термоупругопластичности является определение перемещений (скоростей перемещений) и компонент тензоров напряжений и деформаций, возникающих в пространственном теле в процессе его нагружения, когда некоторые элементы тела работают за пределом упругости материала. Процесс нагружения, в том числе и при помощи электромагнитных факторов, будем рассматривать развивающимся во времени. Механические характеристики материала задаются в виде мгновенных диаграмм растяжения образцов.

Исходя из перечисленного, необходимо определить двенадцать составляющих электромагнитного поля, температуру, три составляющие вектора скорости перемещений, шесть компонент тензора напряжений и шесть компонент тензора деформаций. Следовательно, подлежат определению 28 неизвестных функций времени и трех координат. Для этого необходимо воспользоваться уравнениями Максвелла, уравнением теплопроводности, уравнениями движения, геометрическими и физическими уравнениями [3,5,9]. При решении нестационарной задачи теории пластичности в тех частях тела, где возникают необратимые деформации, будем пользоваться определяющими уравнениями, описывающими процессы нагружения как по прямолинейным траекториям, так и по траекториям деформирования малой кривизны.

Полная система уравнений в частных производных решается при определенных начальных и граничных условиях.

Метод решения. Приведем полную систему уравнений к виду

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 A_{1i} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_i} + \sum_{i=1}^3 A_{2i} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_i^2} + \vec{C}, \quad (8)$$

где $\vec{W}$ - вектор, компонентами которого будут:

- составляющие векторов напряженностей магнитного и электрического полей ($w_{01}=H_1; w_{02}=H_2; w_{03}=H_3; w_{04}=E_1; w_{05}=E_2; w_{06}=E_3$.);

- составляющие векторов магнитной и электрической индукции ($w_{07}=B_1; w_{08}=B_2; w_{09}=B_3; w_{10}=D_1; w_{11}=D_2; w_{12}=D_3$);

- температура ($w_{13}=T$);

- скорости перемещений ($w_{14}=v_1; w_{15}=v_2; w_{16}=v_3$.);

- составляющие тензоров напряжений и деформаций ($w_{17}=\sigma_{11}; w_{18}=\sigma_{22}; w_{19}=\sigma_{33}; w_{20}=\tau_{12}; w_{21}=\tau_{13}; w_{22}=\tau_{23}; w_{23}=\varepsilon_{11}; w_{24}=\varepsilon_{22}; w_{25}=\varepsilon_{33}; w_{26}=\varepsilon_{12}; w_{27}=\varepsilon_{13}; w_{28}=\varepsilon_{23}$.).

Для решения векторного уравнения (8) используем метод покомпонентного расщепления [4, 5]. Введем в рассмотрение сетку по времени ω_r с учетом дробного шага.

$$\omega_r = \left\{ \begin{array}{l} t_p; t_{p+1/3} = t_p + \tau_1; t_{p+2/3} = t_{p+1/3} + \tau_2; t_{p+1} = t_{p+2/3} + \tau_3; \\ \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3; t_0 = 0; p = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right\} \quad (9)$$

Схема расщепления векторного уравнения (8) Писмана, Рэчфорда, Дугласа может быть представлена так [6-8].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left[A_{11} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_1} + A_{21} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_1^2} + A_{12} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_2} + A_{22} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_2^2} \right] + \gamma_1 \vec{C}, & t \in [t_p; t_{p+1/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left[A_{12} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_2} + A_{22} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_2^2} + A_{13} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_3} + A_{23} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_3^2} \right] + \gamma_2 \vec{C}, & t \in [t_{p+1/3}; t_{p+2/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left[A_{13} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_3} + A_{23} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_3^2} + A_{11} \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha_1} + A_{21} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial \alpha_1^2} \right] + \gamma_3 \vec{C}, & t \in [t_{p+2/3}; t_{p+1}] \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и далее $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$.

Решение расщепленной системы (10) будем определять при помощи следующего интерполяционного выражения

$$\vec{W}(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \vec{W}_{ij} \cdot F_{ij}(x, y). \quad (11)$$

Здесь $x = \alpha_1, y = \alpha_2$ - на первом дробном шаге по времени, $x = \alpha_2, y = \alpha_3$ - на втором дробном шаге по времени и $x = \alpha_3, y = \alpha_1$ - на третьем дробном шаге по времени. Через $\vec{W}_{ij}$ обозначены значения искомых функций в узлах координатной сетки. Выражения для

функций $F_{ij}(x, y)$ приведены в работах [6-8] как для случая использования интерполяционных сплайнов третьей степени по каждой из координат, так и для случая применения напряженных сплайнов.

Частные производные первого и второго порядков по координатам на каждом дробном шаге интегрирования по времени определяются на основании выражения для двухмерного сплайна. Тогда для дифференциальных операторов, входящих в состав векторных уравнений (10) можно записать такие выражения

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_1(\bar{W})}{h_1} &\equiv \frac{\partial \bar{W}(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \bar{W}_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{\lambda_2(\bar{W})}{h_2} &\equiv \frac{\partial \bar{W}(x, y)}{\partial y} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \bar{W}_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{\mu_1(\bar{W})}{h_1^2} &\equiv \frac{\partial^2 \bar{W}(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \bar{W}_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x, y)}{\partial x^2}, \\ \frac{\mu_2(\bar{W})}{h_2^2} &\equiv \frac{\partial^2 \bar{W}(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \bar{W}_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x, y)}{\partial y^2}\end{aligned}\quad (12)$$

Отметим, что по аналогии с результатами работы [5], формулы (12) позволяют вычислять частные производные по координатам первого и второго порядка в областях расположенных непосредственно на границе тела $x \in [x_0; x_1], y \in [y_0; y_1], x \in [x_{N-1}; x_N], y \in [y_{M-1}; y_M]$ и соседних с ними областях $x \in [x_1; x_2], y \in [y_1; y_2], x \in [x_{N-2}; x_{N-1}], y \in [y_{M-2}; y_{M-1}]$. Во всех остальных ячейках пространственной сетки для этой цели нужно пользоваться линейной комбинацией (полу суммой) соответствующих выражений из (12), записанных в соседних областях.

Рекуррентные формулы явной схемы метода расщепления для определения неизвестных величин можно записать так

$$\begin{aligned}(W_m)_k^{p+1/3} &= (W_m)_k^p + \frac{\tau}{2} \left(A_{11} \frac{\lambda_1(W_m)}{h_1} + A_{21} \frac{\mu_1(W_m)}{h_1^2} + A_{12} \frac{\lambda_2(W_m)}{h_2} + A_{22} \frac{\mu_2(W_m)}{h_2^2} \right)_{k-1}^{p+1/3} + \tau \gamma_1 C_m^p, \\ (W_m)_k^{p+2/3} &= (W_m)_k^{p+1/3} + \frac{\tau}{2} \left(A_{12} \frac{\lambda_1(W_m)}{h_1} + A_{22} \frac{\mu_1(W_m)}{h_1^2} + A_{13} \frac{\lambda_2(W_m)}{h_2} + A_{23} \frac{\mu_2(W_m)}{h_2^2} \right)_{k-1}^{p+2/3} + \tau \gamma_2 C_m^{p+1/3}, \\ (W_m)_k^{p+1} &= (W_m)_k^{p+2/3} + \frac{\tau}{2} \left(A_{13} \frac{\lambda_1(W_m)}{h_1} + A_{23} \frac{\mu_1(W_m)}{h_1^2} + A_{11} \frac{\lambda_2(W_m)}{h_2} + A_{21} \frac{\mu_2(W_m)}{h_2^2} \right)_{k-1}^{p+1} + \tau \gamma_3 C_m^{p+2/3},\end{aligned}$$

Они позволяют получить соответственно третий порядок аппроксимации метода по координатам [6].

Выводы. Разработан с использованием метода покомпонентного расщепления и представления всех искомых величин в виде двухмерных сплайнов разностный алгоритм, который описывает электромагнитные, тепловые и механические процессы. Получены оценки границ применимости предложенного метода определения электромагнитного, температурного и механического полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Методика чисельного дослідження електромагнітних і температурних полів при індукційному нагріві електропровідних циліндричних тіл // Мат. методи та фізико-механічні поля. – 2001. – 44, № 4. – С. 140-148.
2. Дробенко Б.Д. Термонапряженное состояние электропроводных тел при воздействии внешнего квазиустановившегося электромагнитного поля // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 12. – С. 13-25.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – Москва: Наука, 1964. – 460 с.
4. Марчук Г. И. Методы расщепления. – Москва: Наука, 1988. – 263 с.
5. Стеблянко П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304 с.
6. Стеблянко П.А. Анализ вычислительной эффективности приближенных методов при исследовании нестационарного напряженно-деформированного состояния тел с использованием двухмерных сплайнов // Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць/ ДНУ.- Дніпропетровськ, 2005.- Вип. 7.- С 73-87.
7. Стеблянко П.А. Применение двухмерного кубического сплайна для описания геометрических объектов// Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 3 (44) .- Дніпропетровськ, 2006.- С. -107-111.
8. Стеблянко П.О. Застосування двовимірного напруженого сплайну в задачах механіки // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 5 (46) .- Дніпропетровськ, 2006.- С. -17-26.
9. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2. Термовязкопластичность. – Киев: Наукова думка, 1987. – 264 с.

Получено 04.05.2008 г.

УДК 517.5

М.О. Шульга

ПРО МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ДЕЯКИХ МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

В задачах механіки зустрічаються з необхідністю оперувати з не всюди диференційованими негладкими періодичними функціями чи їх похідними, ряди Фур'є яких є умовно збіжними або і зовсім розбіжними (прямокутний “синус”, пилкоподібна ламана та ін.), що може бути обумовлено односторонніми в'язями, здатністю сприймати деформацію тільки одного знаку та ін. В монографії [1] для пилкоподібних ламаних розвивається техніка опису, що базується на їх геометричній інтерпретації, названій автором ромбічними функціями ($\text{sir}\sigma$, $\text{cor}\sigma$ та ін.).

В написаній мною короткій передмові до [1] твердження, що “ромбічні функції задовольняють деякому звичайному диференціальному рівнянню другого порядку” (с. 7, [1]), є не зовсім точним. Це впливає з наступного.

Звернемось до рис.1. На ньому використані позначення: дуга

$$\cup b_0 c_1 = s_R, \quad s = \frac{s_R}{R}, \quad \sin s = \frac{C_1 c_1}{R}, \quad \cos s = \frac{C_1 O}{R}; \quad \text{пряма} \quad b_0 a_1 = \sigma_R,$$

$$\text{sir}\sigma = \frac{A_1 a_1}{R} = \frac{\sigma_R \sin \pi/4}{R} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \quad \text{cor}\sigma = \frac{A_1 O}{R} = \frac{R - \sigma_R \cos \pi/4}{R} = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}; \quad \text{в другому}$$

$$\text{квадранті ламана } b_0 a_1 b_1 a_2 = \sigma_R, \quad \text{sir}\sigma = 2 - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}, \quad \text{cor}\sigma = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \text{ і т.д.}$$

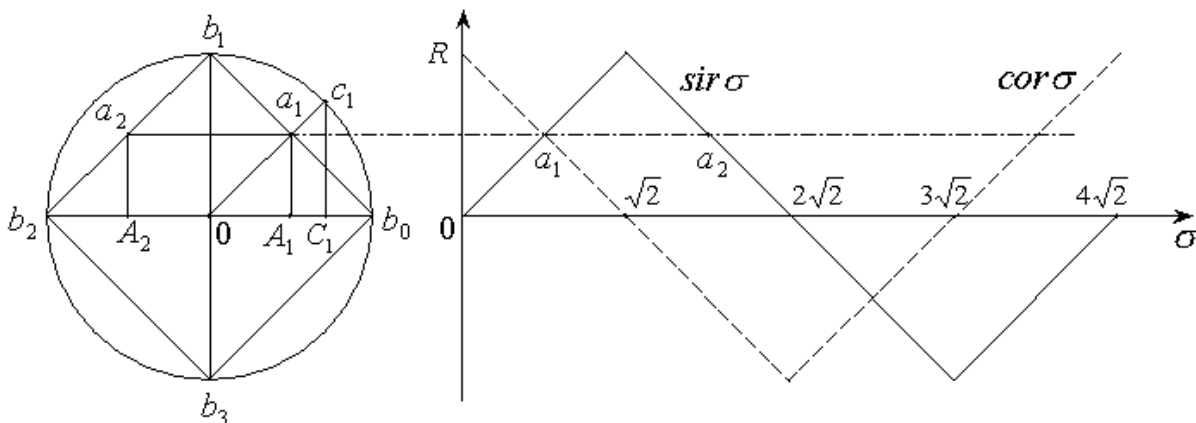


Рисунок 1

По рис.1 можна встановити, що функція $y = \text{sir}\sigma$ визначається формулами

$$y = \begin{cases} \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - 4n, & -\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < \sqrt{2} + 4\sqrt{2}n; \\ -\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + 4n + 2, & \sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n \end{cases} \quad (1)$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Тоді диференціальні рівняння для функції $y = \text{sir}\sigma$ будуть

$$\begin{aligned} \sigma y' - y &= 4n, & -\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < \sqrt{2} + 4\sqrt{2}n; \\ \sigma y' - y &= -4n - 2, & \sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n \end{aligned} \quad (2)$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (верхній (нижній) рядки (2) відповідають верхньому (нижньому) рядкам (1)) або $y''(\sigma) = 0$ при $\sigma \neq -\sqrt{2} + 2\sqrt{2}n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

З того ж рис.1 видно, що функція $z = \text{cor}\sigma$ визначається формулами

$$z = \begin{cases} -\frac{\sigma}{\sqrt{2}} + 4n + 1, & 4\sqrt{2}n < \sigma < 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n; \\ \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - 4n - 3, & 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n \end{cases} \quad (3)$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В цьому разі диференціальні рівняння для функції (3) будуть

$$\begin{aligned} \sigma z' - z &= -4n - 1, & 4\sqrt{2}n < \sigma < 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n; \\ \sigma z' - z &= 4n + 3, & 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n < \sigma < 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}n \end{aligned} \quad (4)$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (верхній (нижній) рядки (4) відповідають верхньому (нижньому) рядкам (3)) або $z''(\sigma) = 0$ при $\sigma \neq 2\sqrt{2}n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Зауважимо також, що перші похідні $y'(\sigma)$ та $z'(\sigma)$ є сталими, крім точок їх розриву $\sigma = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2}n$ (для $y'(\sigma)$) і $\sigma = 2\sqrt{2}n$ (для $z'(\sigma)$) $n = 0, \pm 1, \dots$. Другі похідні $y''(\sigma)$, $z''(\sigma)$ дорівнюють нулеві, крім точок в яких вони не визначені.

Між тригонометричними функціями $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ (α – довжина дуги кола одиничного радіусу, яку замітає рухомий радіус) та функціями $\text{sir}\sigma$, $\text{cor}\sigma$ (σ – довжина периметру вписаного в одиничне коло ромба (квадрату), який замітає рухомий радіус) справедливі також залежності:

в першому квадранті

$$\sin \sigma = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}, \quad \cos \sigma = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}; \quad (5)$$

в другому квадранті

$$\sin \sigma = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}, \quad \cos \sigma = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}; \quad (6)$$

в третьому квадранті

$$\sin \sigma = \frac{\sin \alpha}{-\sin \alpha - \cos \alpha}, \quad \cos \sigma = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha - \cos \alpha}; \quad (7)$$

в четвертому квадранті

$$\sin \sigma = \frac{\sin \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha}, \quad \cos \sigma = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha}. \quad (8)$$

В цей же час залежність $\tan \sigma = \tan \alpha$ справедлива [1] при довільних значеннях аргументу. Враховуючи знаки тригонометричних функцій в різних квадрантах, ці формули можна записати [1] у справедливому для всіх квадрантів вигляді

$$\sin \sigma = \frac{\sin \alpha}{|\sin \alpha| + |\cos \alpha|}, \quad \cos \sigma = \frac{\cos \alpha}{|\sin \alpha| + |\cos \alpha|}. \quad (9)$$

Періодичні з періодом $T = 4\sqrt{2}$ функції $y = \sin \sigma$ і $z = \cos \sigma$ розкладаються в ряди Фур'є

$$y = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin(2n-1) \frac{2\pi\sigma}{T}, \quad (10)$$

$$z = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1) \frac{2\pi\sigma}{T}. \quad (11)$$

Графіки функції (11) та її похідної

$$z' = -\frac{16}{\pi T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1) \frac{2\pi\sigma}{T} \quad (12)$$

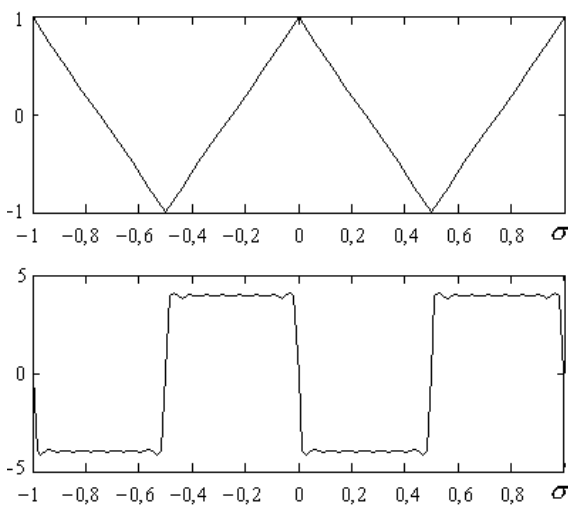


Рисунок 2

побудовані чисельно і показані на рис.2. Ряд (10) є абсолютно збіжним і для нього обґрунтоване застосування гармонічного аналізу, а ряд (12) може бути тільки умовно збіжним.

Друга формальна похідна ряду (11)

$$z'' = -\frac{32}{T^2} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1) \frac{2\pi\sigma}{T} \quad (13)$$

є розбіжним рядом, тоді як за означенням (3) друга похідна $z''(\sigma)$ дорівнює нулеві крім точок її невизначеності.

Графіки функції (10) та її похідної будуть зсунуті по вісі σ на чверть періоду.

ЛІТЕРАТУРА

1. Плахтієнко М.П. Ромбічні функції: початки теорії та прикладні задачі. – К.: ЗНДІЕП, 2005. – 136 с.

Получено 13.05.2008 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕРМООБРАБОТКИ ПОРИСТОГО ТЕПЛОИЗОЛЯЦИОННОГО МАТЕРИАЛА В ВИХРЕВОМ СЛОЕ

Введение. Эффективность процессов тепломассообмена во время сушки пористых материалов в вихревых аппаратах во многом определяется соотношением геометрических размеров данного устройства [1, 2], поскольку от них зависят гидродинамические показатели работы аппарата. Сушка материалов в вихревом аппарате происходит в период их витания в аппарате в результате их взаимодействия с воздушными потоками. Очевидно, чем более длительный данный процесс, тем он эффективнее.

Цель работы. Определить зависимость траектории движения частицы и времени ее пребывания в вихревом аппарате от места попадания частицы в рабочий объем аппарата и скорости потока газовой фазы.

Материалы и результаты исследований. С целью рационализации технологических параметров аппарата [1], а также определения его эффективности, важно знать параметры газовых потоков (компоненты скоростей, давления) во всём объеме аппарата.

На основании математической модели газодинамики потока в вихревом аппарате изложенной в работе [3], с помощью метода представления гидродинамических проектированием на них векторов скоростей, были получены графические изображения движения газового потока в различных сечениях аппарата [1].

На рис. 1 представлены расчетные поля направлений скоростей газа на трёх различных горизонтальных сечениях аппарата [1]: (а) на уровне присоединения тангенциального патрубка для подвода газа, (b) на середине высоты и (с) у питателя аппарата.

Из рис. 1 следует, что в результате вынужденного действия подводимого газа в верхней зоне цилиндрической части аппарата формируется мощный торроидальный вихрь (а), который по мере приближения к питателю деформируется (b), и у самого питателя распадается (с).

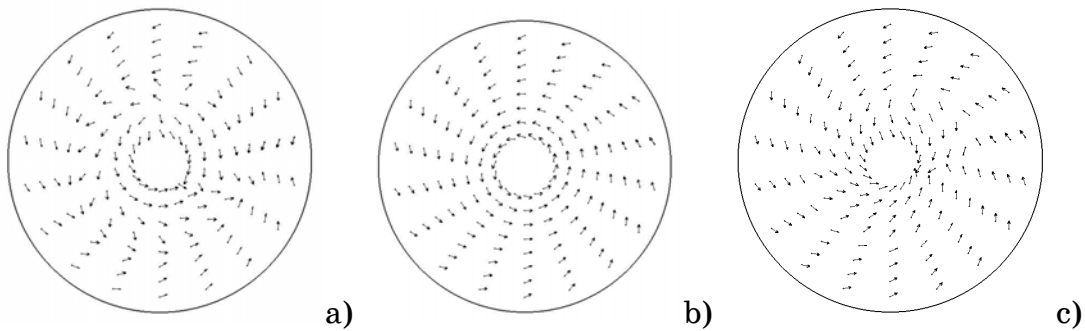


Рисунок 1 - Расчетные поля направлений скоростей газа на трёх различных горизонтальных сечениях аппарата

О характере гидродинамической картины в осевом сечении аппарата позволяет судить рис.2.

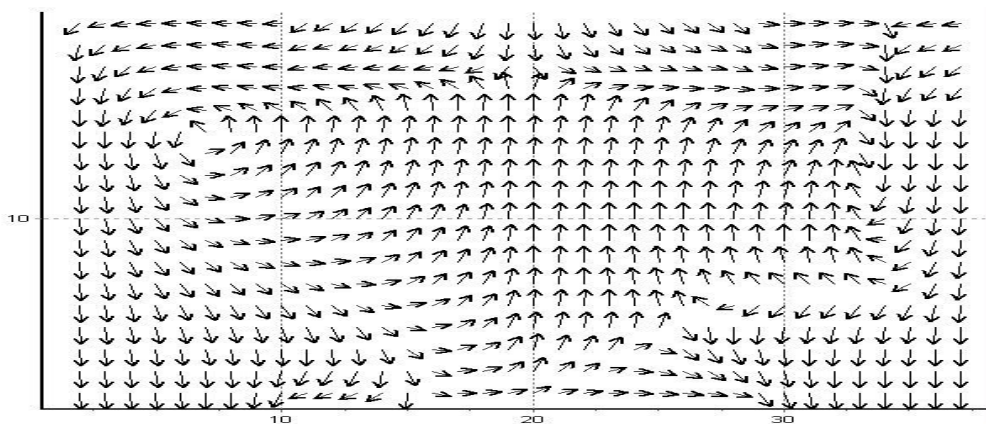


Рисунок 2 - Поля направлений проекций скоростей газа в осевом сечении аппарата

Из приведенного рисунка следует, что в зоне верхнего отверстия аппарата вследствие существования глобального вихря создается зона пониженного давления, что приводит к втягиванию через это отверстие окружающего воздуха. В нижней же части аппарата, у питателя, воздух покидает аппарат.

На основании полученных расчетных полей скоростей газовой фазы была построена модель траектории движения частицы пористого материала, изложенная в работе [4]. Прямое экспериментальное изучение движения материалов в вихревых аппаратах осложняется нелинейностью и нестационарностью процесса.

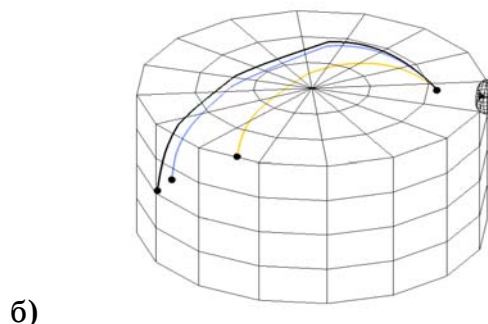
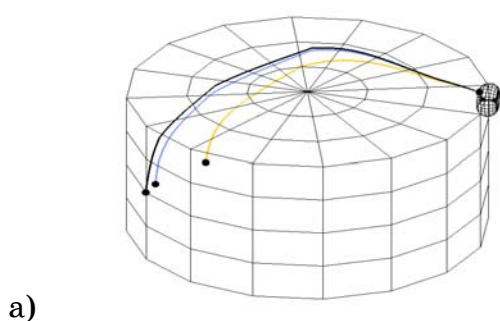
Проведена серия тестовых расчетов по модели траектории движения частицы, свидетельствующая о её качественной адекватности рассматриваемому процессу и полученным в работе [5] экспериментальным данным.

Для определения зависимостей между скоростью потока, местом введения частицы в аппарат и конкретной траекторией частицы нами были проведены тестовые расчеты. Исследовались траектории частицы при скорости газового потока 5, 10, 15 м/с и различном месте ввода материала в вихревую камеру в соответствии с математическими моделями, изложенными в работах [3, 4].

Из рис. 3а - 3в (желтая линия соответствует траектории частицы при скорости 5 м/с, синяя – 10 м/с, черная – 15 м/с) видно, что по мере удаления места введения частицы по оси от места подключения тангенциального патрубка к центру аппарата, время пребывания частицы в аппарате резко сокращается. Причем при одном и том же месте введения частицы, при меньшей скорости движения потока теплоносителя частицы быстрее покидает аппарат, следовательно, подвергается меньшему термическому воздействию.

Из рис. 3г, и рис. 3д видно, что по мере удаления места попадания частицы в объем вихревой камеры по оси от центра в противоположном от тангенциального патрубка направлении, траектории частиц укорачиваются, следовательно, уменьшается время пребывания частицы в аппарате. Это объясняется тем, что у стенки, противоположной месту присоединения патрубка, частицы в меньшей степени захватываются потоком теплоносителя.

На перпендикулярной оси (рис. 3е – 3з) картина практически аналогична, чем дальше от центра частица попадает в аппарат, тем длительнее ее пребывание в объеме рабочей камеры, только наблюдается симметрия траекторий по мере удаления от центра аппарата.



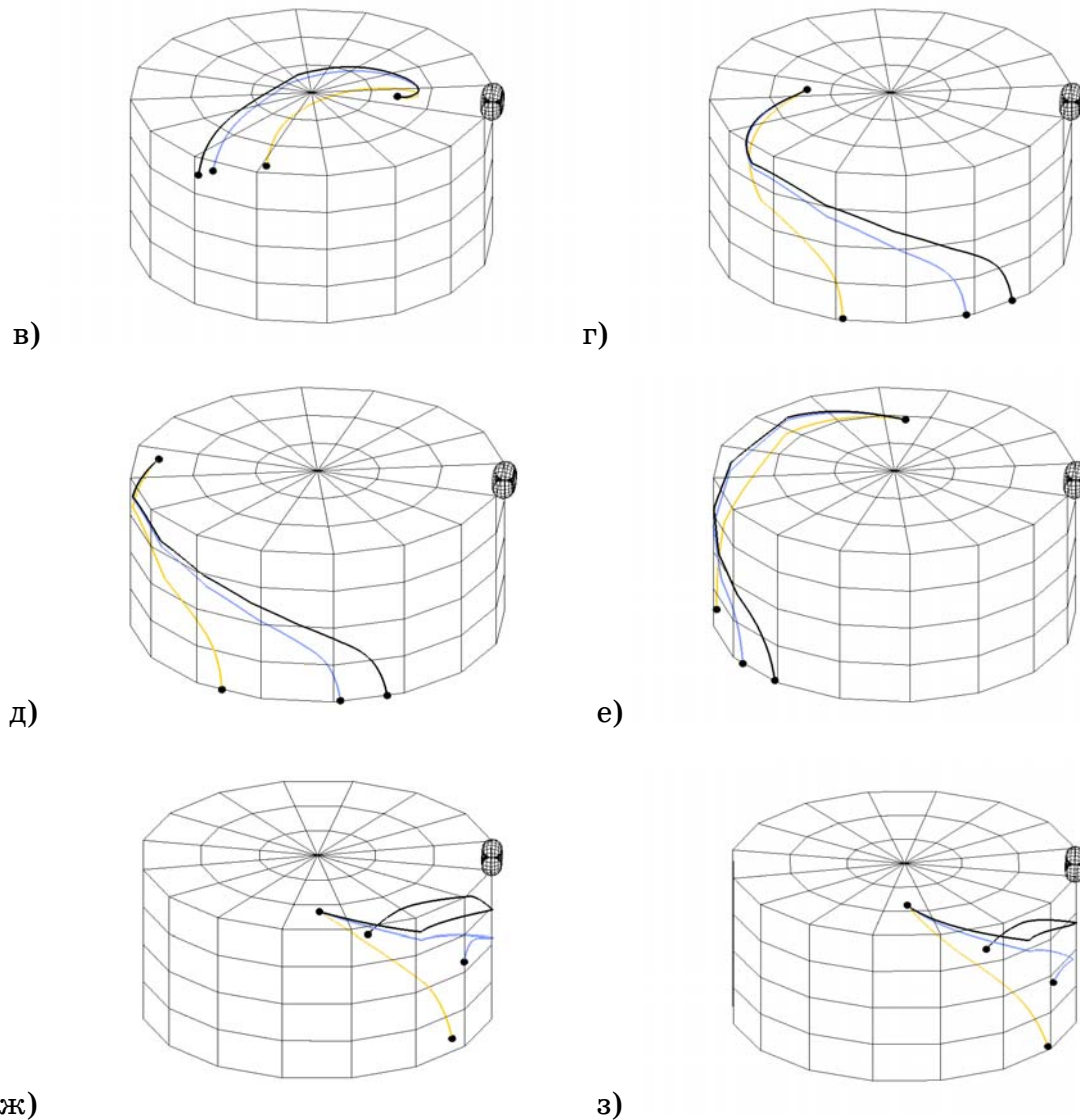


Рисунок 3 – Траектории движения частиц в вихревом аппарате

Вывод. Изучение результатов расчетов позволяет сделать качественный вывод о том, что в целом частицы, которые попадают в вихревой аппарат ближе к боковой стенке, дольше витают в его объеме, а, следовательно, и дольше подвергаются сушке, что предпочтительнее с технологической точки зрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пат. UA 26821 U. МПК F 26 В 17/10. Пристрій для отримання гранульованого наповнювача теплоізоляційного матеріалу. Павленко А.М., Соколовська І.Є., Кошлак Г.В., Клімов Р.А. у 2007 05035; Заявл. 07.05.2007; Опубл. 10.10.2007, Бюл. №16, 2007р.
2. Павленко А.М., Соколовская И.Е. К определению скорости и траектории движения частицы в потоке теплоносителя. Системные технологии. №4(51) 2007г.
3. Соколовская И.Е. Математическая модель газодинамики в вихревом аппарате // Математичне моделювання, 2007, № 1(16). – С. 113-116.

4. Соколовская И.Е. Математическая модель витания частиц в вихревом аппарате // Математичне моделювання, 2007, №2(17). – с. 128-130.
5. Соколовская И.Е., Кошлак А.В., Павленко А.М. Черниченко В.Е. Моделирование процесса производства пористого материала с заданными свойствами. Вісник КДПУ. – Кременчуг, 2007. - № 2(43). - Ч.1. – С.19-21.

Получено 25.03.2008 г.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПУСКА ДВУХПРИВОДНЫХ ЛЕНТОЧНЫХ КОНВЕЙЕРОВ

В работах [1-3] на основе метода припасовывания разработана математическая модель динамических процессов пуска одноприводных ленточных конвейеров с жестким и грузовыми натяжными устройствами, находящимися в головной или хвостовой части конвейера.

Однако для снижения натяжения ленты и уменьшения нагрузки, приходящейся на один привод, на горных предприятиях применяют двухприводные ленточные конвейеры с двумя и более приводами. В связи с этим ставится задача разработать математическую модель пуска многоприводного ленточного конвейера.

Рассмотрим построение математической модели динамики пуска двухприводного ленточного конвейера с приводами, расположенными в любом месте холостой ветви и в головной его части (рис. 1).

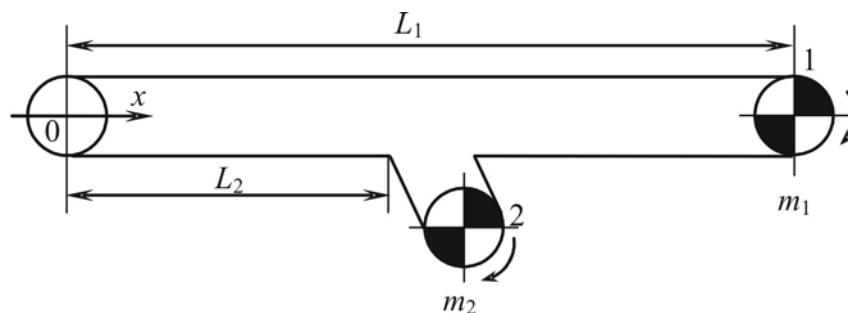


Рисунок 1 – Схема двухприводного конвейера

Для описания динамических процессов при пуске двухприводного ленточного конвейера принимаются следующие допущения:

- лента рассматривается как упругий стержень, подчиняющийся закону Гука;
- все вращающиеся массы вдоль конвейера приведены к распределенной погонной разгрузке;
- момент инерции хвостового барабана при пуске мал и не влияет на распределение натяжения в натяжном устройстве;
- инерция груза грузового устройства при пуске не учитывается;

- конвективная часть ускорения точек ленты при пуске не учитывается из-за малости скорости ленты конвейера по сравнению со скоростью упругих возмущений в ленте;

- скорость распространения упругих возмущений в ленте конвейера одинакова по всей длине конвейера и равна средней скорости a_c , определяемой по формуле

$$a_c = \frac{2a_r \cdot a_x}{a_r + a_x}, \quad (1)$$

где a_r , a_x – скорости распространения упругих возмущений на грузовых и холостых ветвях ленты соответственно, м/с.

Тогда система дифференциальных уравнений при пуске двухприводного ленточного конвейера (см. рис. 1) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial W_r}{\partial \varepsilon} = \rho_c a_c \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial W_r}{\partial \eta} = \frac{E}{a_c} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon}; \\ \frac{\partial W_x}{\partial \varepsilon} = \rho_c a_c \cdot \frac{\partial V_x}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial W_x}{\partial \eta} = \frac{E}{a_c} \cdot \frac{\partial V_x}{\partial \varepsilon}, \end{cases} \quad (2)$$

при начальных условиях при $\eta = 0$

$$V_r(\varepsilon, 0) = V_x(\varepsilon, 0) = 0; \quad W_r(\varepsilon, 0) = W_x(\varepsilon, 0) = 0, \quad (3)$$

где $W_r(\varepsilon, \eta)$, $W_x(\varepsilon, \eta)$ – динамические составляющие натяжения в ленте на грузовой и холостой ветвях соответственно, Н; $V_r(\varepsilon, \eta)$, $V_x(\varepsilon, \eta)$ – скорости точек грузовой и холостой ветвей ленты соответственно, м/с; ε , η – соответственно безразмерные координаты и время; ρ_c – эквивалентная погонная плотность ленты ($\rho_c = E/a_c^2$), кг/м³; E – эквивалентная жесткость ленты кг·м/с²;

Безразмерные координаты и безразмерное время определяются по формулам

$$\varepsilon = \frac{x}{L}; \quad \eta = \frac{a_c t}{L},$$

где x – координата, направленная вдоль ленты в направлении головного барабана, с центром на оси хвостового барабана конвейера, м, (см. рис. 1); t – текущее время, с; L – длина контура ленты конвейера ($L = 2L_1$), L_1 – длина конвейера, м.

Динамические составляющие натяжения W_r , W_x определяются из выражений

$$W_r = S_r - (q_r + q_l)x \sin \beta - (q_r + q_l + q'_p)x \omega_r \cos \beta - S_0;$$

$$W_x = S_x - q_l x \sin \beta - (q_l + q''_p)x \omega_x \cos \beta - S_0,$$

где S_r , S_x – соответственно натяжение ленты на грузовой и холостой ветвях ленты при пуске, Н; S_0 – натяжение ленты от натяжной станции, Н; β – угол наклона конвейера к горизонту, град; q_r – погонный вес груза, кГ/м; q_l – погонный вес ленты, кГ/м; q'_p , q''_p – приведенный вес вращающихся частей роlikоопор грузовой и холостой ветвей соответственно, кГ/м; ω_r , ω_x – коэффициенты сопротивления движению грузовой и холостой ветвей ленты конвейера соответственно.

Граничные условия на хвостовом и приводном барабанах зависят от типа натяжного устройства.

Для жесткого натяжного устройства (см. рис. 1) имеем:

на приводном барабане, находящемся в голове конвейера (при $\varepsilon = 1/2$)

$$V_r(1/2, \eta) = -V_x(1/2, \eta);$$

$$W_r(1/2, \eta) - W_x(1/2, \eta) = F_1(V_r) - G_1 - \frac{a_c m_1}{L} \cdot \frac{dV_r(1/2, \eta)}{d\eta}; \quad (4)$$

на приводном барабане, расположенном на холостой ветви и находящемся на расстоянии L_2 от хвостового барабана конвейера (при $\varepsilon = \bar{L}_2 = L_2/L$)

$$V_r(\bar{L}_2, \eta) = -V_x(\bar{L}_2, \eta);$$

$$W_r(\bar{L}_2, \eta) - W_x(\bar{L}_2, \eta) = F_2(V_r) - G_2 - \frac{a_c m_2}{L} \cdot \frac{dV_r(\bar{L}_2, \eta)}{d\eta}, \quad (5)$$

где $F_1(V_r)$, $F_2(V_r)$ – соответственно пусковые характеристики первого и второго привода конвейера в координатах F , V , Н; G_1 , G_2 – соответственно силы тяги на первом и втором приводных барабанах при стационарном движении ленты конвейера, Н; m_1 , m_2 – соответственно приведенные массы груза вращающихся частей первого и второго приводов ленточного конвейера, кг.

В силу линейности системы дифференциальных уравнений (2) и граничных условий (4), (5) к поставленной задаче пуска применим принцип суперпозиции, т.е. решение задачи пуска двухприводного

конвейера можно представить в виде суммы решений двух задач пуска одноприводных конвейеров. При этом у первого составляющего конвейера привод находится в головной части (рис. 2,а), а у второго привод находится на хвостовой ветви в том же месте, что и у двухприводного конвейера (рис. 2,б).

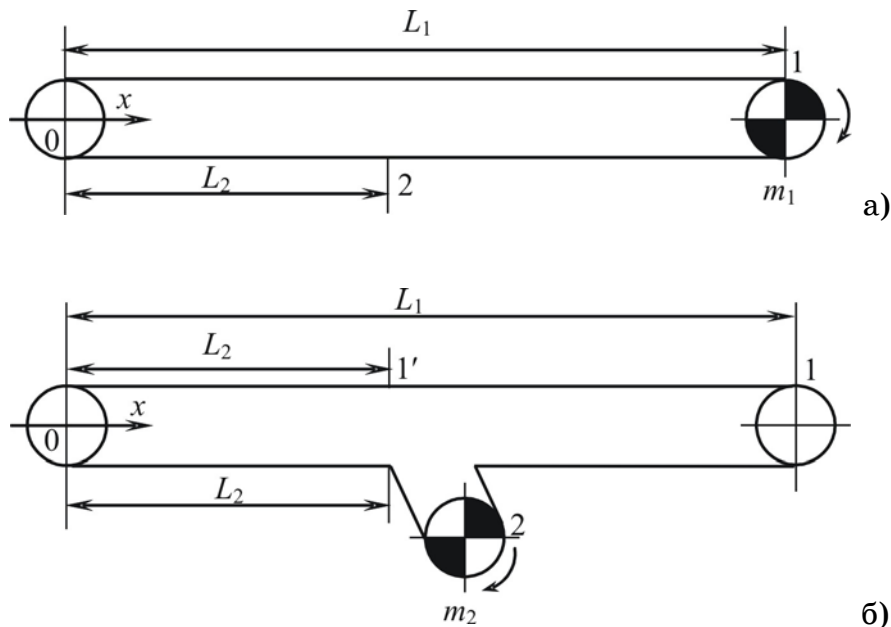


Рисунок 2 – Составляющие схемы двухприводного конвейера

Согласно работе [2], скорости и динамические усилия в ленте для одноприводного конвейера, у которого приводной барабан находится в головной части (см. рис. 2,а), определяются по формулам:

при $\varepsilon = 1/2$ (точка 1)

$$V'_{r1}(\eta_{j+1}) = \frac{L}{m_1 a_c} (N'_i - G_1) g'_i(\Delta\eta) + V'_{r1}(\eta_j) \lambda'_i(\Delta\eta) + \frac{2EL}{m_1 a_c^2} g'_i(\Delta\eta) \Pi'; \quad (6)$$

$$W'_{r1}(\eta_{j+1}) = \frac{E}{a} \sum_{k=0}^r (-1)^k [V'_{r1}(\eta_{j+1} - k) - V'_{r1}(\eta_{j+1} - k - 1)], \quad (7)$$

где $V'_{r1}(\eta) = V'_r(1/2, \eta)$; $W'_{r1}(\eta) = W'_r(1/2, \eta)$; $\Pi = 2 \sum_{k=0}^r (-1)^k V'_{r1}(\eta_j - k)$;

$r = [\eta_j]$ – целая часть η_j ; $g'_i(\Delta\eta) = \frac{1 - e^{-\alpha'_i \Delta\eta}}{\alpha'_i}$; $\lambda'_i(\Delta\eta) = e^{-\alpha'_i \Delta\eta}$;

$$\alpha'_i = \frac{2EL}{m_1 a_c^2} - \frac{q'_i L}{m_1 a_c};$$

$$i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n \cdot s, \quad \Delta\eta = \eta_{j+1} - \eta_j.$$

Здесь N'_i , q'_i – параметры линейных частей аппроксимированной характеристики первого привода, которая имеет в вид

$$F(V'_{r1}(\eta)) = \sum_{i=0}^n (N'_i + q'_i V'_{r1}(\eta)) \cdot [\sigma_0(\eta - \eta_i) - \sigma_0(\eta - \eta_{i+1})], \quad (8)$$

где $\sigma_0(\eta)$ – единичная функция Хевисайда.

Согласно [3], зная скорость ленты $V'_{r1}(\eta)$ одноприводного конвейера в точке ее набегания на приводной барабан в любой момент времени (см. рис. 2,а), можно определить скорость и динамическое усилие в любой точке ленты конвейера по формулам

$$V'_r(\varepsilon, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [V'_{r1}(\eta - (1/2 - \varepsilon) - k) + V'_{r1}(\eta - (1/2 + \varepsilon) - k)]; \quad (9)$$

$$W'_r(\varepsilon, \eta) = \frac{E}{a_c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [V'_{r1}(\eta - (1/2 - \varepsilon) - k) - V'_{r1}(\eta - (1/2 + \varepsilon) - k)]; \quad (10)$$

$$V'_x(\varepsilon, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [V'_{r1}(\eta - (1/2 - \varepsilon) - k) + V'_{r1}(\eta - (1/2 + \varepsilon) - k)]; \quad (11)$$

$$W'_x(\varepsilon, \eta) = \frac{E}{a_c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [V'_{r1}(\eta - (1/2 - \varepsilon) - k) - V'_{r1}(\eta - (1/2 + \varepsilon) - k)]. \quad (12)$$

Откуда, согласно формулам (11), (12), скорость и динамическое усилие на холостой ветви ленты в точке 2 одноприводного конвейера (см. рис. 2,а) определяются по формулам:

при $\varepsilon = \bar{L}_2 = L_2/L$ (точка 2)

$$V'_{x2}(\eta_{j+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [V'_{r1}(\eta_{j+1} - (1/2 - \bar{L}_2) - k) + V'_{r1}(\eta_{j+1} - (1/2 + \bar{L}_2) - k)]; \quad (13)$$

$$W'_{x2}(\eta_{j+1}) = \frac{E}{a_c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [V'_{r1}(\eta_{j+1} - (1/2 - \bar{L}_2) - k) - V'_{r1}(\eta_{j+1} - (1/2 + \bar{L}_2) - k)], \quad (14)$$

где $V'_{x2}(\eta) = V'_x(\bar{L}_2, \eta)$, $W'_{x2}(\eta) = W'_x(\bar{L}_2, \eta)$.

Для одноприводного конвейера с приводным барабаном, расположенном на холостой ветви ленты на расстоянии L_2 от хвостового барабана (см. рис. 2,б), определим скорости и динамические усилия в ленте в точках 1 и 2. Для этого переместим приводной барабан, расположенный на холостой ветви (точка 2), на место головного барабана (в точку 1). В результате придем к схеме ленточного конвейера с приводным барабаном, расположенным в голове конвейера. При этом точка 1 переместиться в точку 1' грузной ветви ленты, расположенной на расстоянии L_2 от хвостового барабана, а точка 2 переместится в точку 1 головной части конвейера (см. рис. 2,б). Применяя известные соотношения (6), (7) и (9), (10) для определения скоростей и динамических усилий в ленте для одноприводного конвейера (см. рис. 2,а), получим скорости и

динамические усилия в точках 1 и 2 ленты одноприводного конвейера с приводным барабаном на холостой весте, расположенным на расстоянии L_2 от хвоста конвейера (см. рис. 2,б):

при $\varepsilon = 1/2$ (точка 1)

$$V_{x2}''(\eta_{j+1}) = \frac{L}{m_2 a_c} (N_i'' - G_2) g_i''(\Delta\eta) + V_{x2}''(\eta_j) \lambda_i''(\Delta\eta) + \frac{2EL}{m_2 a_c^2} g_i''(\Delta\eta) \Pi''; \quad (15)$$

$$W_{x2}''(\eta_{j+1}) = \frac{E}{a_c} \sum_{k=0}^r (-1)^k [V_{x2}''(\eta_{j+1} - k) - V_{x2}''(\eta_{j+1} - k - 1)], \quad (16)$$

где $V_{x2}''(\eta) = V_x''(\bar{L}_2, \eta)$, $W_{x2}''(\eta) = W_x''(\bar{L}_2, \eta)$; $\Pi'' = 2 \sum_{k=0}^r (-1)^k V_{x2}''(\eta_j - k)$;

$r = [\eta_j]$ – целая часть η_j ; $g_i''(\Delta\eta) = \frac{1 - e^{-\alpha_i'' \Delta\eta}}{\alpha_i''}$; $\lambda_i''(\Delta\eta) = e^{-\alpha_i'' \Delta\eta}$;

$$\alpha_i'' = \frac{2EL}{m_2 a_c^2} - \frac{q_i'' L}{m_2 a_c};$$

$i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n \cdot s$, $\Delta\eta = \eta_{j+1} - \eta_j$;

при $\varepsilon = \bar{L}_2$ (точка 2)

$$V_{r1}''(\eta_{j+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [V_{x2}''(\eta_{j+1} - (1/2 - \bar{L}_2) - k) + V_{x2}''(\eta_{j+1} - (1/2 + \bar{L}_2) - k)]; \quad (17)$$

$$W_{r1}''(\eta_{j+1}) = \frac{E}{a_c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [V_{x2}''(\eta_{j+1} - (1/2 - \bar{L}_2) - k) - V_{x2}''(\eta_{j+1} - (1/2 + \bar{L}_2) - k)], \quad (18)$$

где $V_{r1}''(\eta) = V_r''(\bar{L}_2, \eta)$, $W_{r1}''(\eta) = W_r''(\bar{L}_2, \eta)$.

Здесь N_i'' , q_i'' – параметры линейных частей аппроксимированной характеристики первого привода, которая имеет вид

$$F_2(V_{x2}''(\eta)) = \sum_{i=0}^n (N_i'' + q_i'' V_{x2}''(\eta)) \cdot [\sigma_0(\eta - \eta_i) - \sigma_0(\eta - \eta_{i+1})]. \quad (19)$$

Согласно принципу суперпозиции, скорости и динамические усилия двухприводного ленточного конвейера в точках в точках 1 и 2 (см. рис. 1) набегания ленты на приводные барабаны определяются по формулам:

при $\varepsilon = 1/2$ (точка 1)

$$\begin{aligned} V_{r1}(\eta_{j+1}) &= V'_{r1}(\eta_{j+1}) + V''_{r1}(\eta_{j+1}); \\ W_{r1}(\eta_{j+1}) &= W'_{r1}(\eta_{j+1}) + W''_{r1}(\eta_{j+1}), \end{aligned} \quad (20)$$

где $V'_{r1}(\eta_{j+1})$, $W'_{r1}(\eta_{j+1})$ и $V''_{r1}(\eta_{j+1})$, $W''_{r1}(\eta_{j+1})$ определяются по формулам (6), (7) и (17), (18) соответственно;

при $\varepsilon = \bar{L}_2$ (точка 2)

$$V_{x2}(\eta_{j+1}) = V'_{x2}(\eta_{j+1}) + V''_{x2}(\eta_{j+1});$$

$$W_{x2}(\eta_{j+1}) = W'_{x2}(\eta_{j+1}) + W''_{x2}(\eta_{j+1}), \quad (21)$$

где $V'_{x2}(\eta_{j+1})$, $W'_{x2}(\eta_{j+1})$ и $V''_{x2}(\eta_{j+1})$, $W''_{x2}(\eta_{j+1})$ определяются по формулам (13), (14) и (15), (16) соответственно.

Если приводные барабаны двухприводного ленточного конвейера находятся в головной части конвейера, то в соотношения (13), (14) и (17), (18) необходимо подставить $\bar{L}_2 = 1/2$.

В результате получим

$$V'_{x2}(\eta_{j+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [V'_{r1}(\eta_{j+1} - k) + V'_{r1}(\eta_{j+1} - k - 1)]; \quad (22)$$

$$W'_{x2}(\eta_{j+1}) = \frac{E}{a_c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [V'_{r1}(\eta_{j+1} - k) - V'_{r1}(\eta_{j+1} - k - 1)]; \quad (23)$$

$$V''_{r1}(\eta_{j+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [V''_{x2}(\eta_{j+1} - k) + V''_{x2}(\eta_{j+1} - k - 1)]; \quad (24)$$

$$W''_{r1}(\eta_{j+1}) = \frac{E}{a_c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [V''_{x2}(\eta_{j+1} - k) - V''_{x2}(\eta_{j+1} - k - 1)]. \quad (25)$$

Если один приводной барабан двухприводного ленточного конвейера находится в головной части конвейера, а другой – в хвостовой части, то, подставляя в формулы (13), (14) и (17), (18) $\bar{L}_2 = 0$, получим:

при $\varepsilon = 1/2$ (в точке 1)

$$\begin{aligned} V_{r1}(\eta_{j+1}) &= V'_{r1}(\eta_{j+1}) + V''_{r1}(\eta_{j+1}); \\ W_{r1}(\eta_{j+1}) &= W'_{r1}(\eta_{j+1}); \end{aligned} \quad (26)$$

при $\varepsilon = 0$ (в точке 2)

$$\begin{aligned} V_{x2}(\eta_{j+1}) &= V'_{x2}(\eta_{j+1}) + V''_{x2}(\eta_{j+1}); \\ W_{x2}(\eta_{j+1}) &= W''_{x2}(\eta_{j+1}), \end{aligned} \quad (27)$$

где $V'_{r1}(\eta_{j+1})$, $W'_{r1}(\eta_{j+1})$ и $V''_{x2}(\eta_{j+1})$, $W''_{x2}(\eta_{j+1})$ определяются по формулам (6), (7) и (15), (16), а $V''_{r1}(\eta_{j+1})$, $V'_{x2}(\eta_{j+1})$ определяются по формулам

$$V''_{r1}(\eta_{j+1}) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [V''_{x2}(\eta_{j+1} - 1/2 - k)]; \quad (28)$$

$$V'_{x2}(\eta_{j+1}) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [V'_{r1}(\eta_{j+1} - 1/2 - k)]. \quad (29)$$

Полученные соотношения справедливы также для двухприводных ленточных конвейеров, у которых грузовое натяжное устройство расположено в хвостовой части конвейера. Если у двухприводного ленточного конвейера грузовое натяжное устройство находится около одного из приводных барабанов, то, согласно [2], в полученных

соотношениях коэффициенты $\frac{2EL}{m_1 a_c^2}$ и $\frac{2EL}{m_2 a_c^2}$ уменьшаются вдвое, а аргументы $\eta_{j+1} - (1/2 - \varepsilon) - k$ и $\eta_{j+1} - (1/2 + \varepsilon) - k$ в формулах (9)-(12) заменяются соответственно на $\eta_{j+1} - (1/2 - \varepsilon) - 2k$ и $\eta_{j+1} - (1/2 + \varepsilon) - 2k - 1$. При этом остальные соотношения (7), (13), (14), (16), (17), (18) получаются из формул (9)-(12) подстановкой $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon = 1/2$ или $\varepsilon = \bar{L}_2$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бужинский И.А. Определение рациональных пусковых характеристик привода наклонного ленточного конвейера / И.А. Бужинский, Р.В. Кирия // Машины для предприятий горной промышленности. - Киев: Наукова думка, 1986. - С.30-38.
2. Кирия Р.В. Влияние типа натяжного устройства и места его установки на динамику пуска ленточного конвейера / Р.В. Кирия, В.Ю. Максютенко, И.А. Бужинский // Сб. науч. тр. “Геотехническая механика”. - Днепропетровск: ИГТМ НАНУ. - 2006. - Вып. № 67. - С. 73-83.
3. Кирия Р.В. Моделирование динамических процессов пуска ленточных конвейеров // Вісник Дніпропетровського Університету: Механіка: Зб. наук. пр. / ДНУ. - Дніпропетровськ, 2007. - №11. - Т.2. - С.

Получено 03.05.2008 г.

УДК 517.272:97

В.А. Максимюк

ПРО ПОСЛІДОВНЕ ВИКЛЮЧЕННЯ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

Вступ. Метод невизначених множників Лагранжа є ефективним засобом постановки й розв’язування математичних задач на умовний екстремум. Він використовується для формулювання варіаційних принципів та побудови функціоналів з додатковими умовами, зокрема в теорії оболонок [1,2]. Метод є доцільним, коли додатковими умовами прямо скористатись неможливо або небажано. Подібне може виникнути при розв’язуванні задач на умовний екстремум чисельними методами, навіть, якщо додаткові умови задані явно. Явна ж форма додаткових умов дозволяє зразу аналітично визначити множники Лагранжа й виключити їх та звести задачу до знаходження абсолютного екстремуму без збільшення кількості рівнянь, що є доцільним з погляду чисельних методів. Класичний варіант [3] виключення кількох множників Лагранжа в деяких випадках наштовхується на труднощі. Покажемо це на простому алгебраїчному прикладі.

Суть проблеми. Нехай потрібно знайти екстремум функції

$$u = u(x, y, z) \quad (1)$$

при додаткових умовах

$$y = y(x), \quad z = z(x). \quad (2)$$

Відзначимо, що явна підстановка додаткових умов (2) в (1) дає рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y' + \frac{\partial u}{\partial z} z' = 0 \quad (3)$$

для координати x точки екстремуму (x, y, z) , інші координати впливають з (2).

Введемо згідно з [3] допоміжну функцію

$$v(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = u(x, y, z) + \lambda_1 [y - y(x)] + \lambda_2 [z - z(x)]. \quad (4)$$

Зразу ж з необхідних умов екстремуму $\partial v / \partial y = \partial v / \partial z = 0$ знайдемо множники

$$\lambda_1 = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \lambda_2 = -\frac{\partial u}{\partial z}, \quad (5)$$

підставимо їх у (4) і отримаємо нову функцію від трьох змінних

$$w(x, y, z) = u(x, y, z) - \frac{\partial u}{\partial y} [y - y(x)] - \frac{\partial u}{\partial z} [z - z(x)]. \quad (6)$$

Таку процедуру називатимемо паралельним виключенням множників Лагранжа.

Застосуємо до функції (6) необхідні умови абсолютного екстремуму

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} [y - y(x)] + \frac{\partial u}{\partial y} y' - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} [z - z(x)] + \frac{\partial u}{\partial z} z' = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} [y - y(x)] - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} [z - z(x)] = 0; \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} [y - y(x)] - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} [z - z(x)] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Останні два рівняння утворюють замкнену систему, однозначним розв'язком якої є додаткові умови (2) при умові, що визначник цієї системи відмінний від нуля:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \neq 0. \quad (8)$$

Тоді рівняння (7) еквівалентні рівнянням (2) і (3), а абсолютний екстремум функції (6) збігається з умовним екстремумом задачі (1-2). Проте умови типу (8) обмежують область застосування паралельного виключення множників Лагранжа, наприклад, для широкого класу функцій виду $u = u(x + y + z)$.

Альтернативний підхід. Перейдемо до викладу пропонованої процедури послідовного виключення множників Лагранжа. З умови $\partial v / \partial y = 0$ знайдемо перший множник λ_1 . Звичайно, він буде такий, як у (5). Підставимо його у (4), тоді

$$v_1(x, y, z, \lambda_2) = u(x, y, z) - \frac{\partial u}{\partial y} [y - y(x)] + \lambda_2 [z - z(x)]. \quad (9)$$

З умови $\partial v_1 / \partial z = 0$ знайдемо другий множник

$$\lambda_2 = -\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} [y - y(x)],$$

який вже відрізняється від множника у (5). Підставимо λ_2 їх у (9) і отримаємо нову, відмінну від (6) функцію від трьох змінних

$$w(x, y, z) = u(x, y, z) - \frac{\partial u}{\partial y} [y - y(x)] - \frac{\partial u}{\partial z} [z - z(x)] + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} [y - y(x)] [z - z(x)]. \quad (10)$$

Застосувавши до функції (10) необхідні умови абсолютного екстремуму, отримаємо систему трьох рівнянь, з яких два останні зводяться до таких

$$\begin{aligned} [y - y(x)] \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} [z - z(x)] - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\} &= 0; \\ [z - z(x)] \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} [y - y(x)] - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

що мають однозначний розв’язок (2) і разом з першим рівнянням є еквівалентними рівнянням (2) і (3), а абсолютний екстремум функції (10) збігається з умовним екстремумом задачі (1-2).

Звичайно, послідовне виключення теж має обмеження. Наприклад, нехай $\partial^2 u / \partial y^2 \neq 0$, а $\partial^2 u / \partial z^2 = 0$, тоді друге рівняння в (11) перетворюється в тотожність. Тим самим нехтується друга додаткова умова в (2). Проте таке обмеження в порівнянні з (8) стосується значно вужчого класу функцій, в даному прикладі – лінійних по z функцій.

Зауважимо, що послідовне виключення можна виконати шляхом почергового введення однієї додаткової умови за допомогою одного множника з подальшим його виключенням і введенням наступної додаткової умови. У наведеному випадку простих додаткових умов (2) процедура виключення практично не зміниться, проте у випадку складніших додаткових умов вона може значно спростити постановку й розв’язання задач на умовний екстремум.

Висновок. Запропонована процедура послідовного виключення множників Лагранжа може бути поширена для побудови функціоналів і знаходження екстремалей з додатковими умовами або додатковими незалежними функціями. Приклад такого застосування можна знайти в задачах [2] теорії оболонок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542с.
2. Максимюк В.А. Про застосування методу множників Лагранжа в задачах статички композитних оболонок // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С.75–79.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т.1. – 480 с.

Получено 18.03.2008 г.

УДК 534-21

К.В. Медведєв, В.М. Шульга, В.Ф. Корнієнко, І.О. Ластівка

ДИСПЕРСІЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ КІЛОГЕРЦЕВОГО ДІАПАЗОНУ В ФІБРИЛЬНИХ НИТКАХ

Акустичні методи дослідження фізико-механічних властивостей полімерних і композитних матеріалів належать до найбільш інформативних і охоплюють широкий частотний інтервал. Ідентифікація результатів вимірювань, що спирається на фізичні моделі хвильових процесів, залежить від ступеня неоднорідності матеріалу і частот збурення. Теорія поширення акустичних хвиль кілогерцевого діапазону в фібрильних нитках ґрунтується на принципі гомогенізації композитних матеріалів і теорії пружності анізотропного твердого тіла.

Фібрильна нитка є суцільним круговим циліндром з діаметром $2r_2$. В циліндричній системі координат $or\theta z$, вісь oz якої співпадає з віссю циліндру, рівняння осесиметричних коливань деформацій твердого тіла мають вигляд

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}.\end{aligned}\quad (1)$$

При довжинах хвиль, що значно перевищують розміри неоднорідності структури матеріалу, справедливий континуальний опис його деформативних властивостей [2, 3]. В такому випадку фізичні компоненти тензора напружень пов'язані з фізичними компонентами тензора деформацій матеріальними співвідношенням

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{11} \frac{u_r}{r} + c_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{zz} &= c_{13} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + c_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{rz} &= c_{55} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).\end{aligned}\quad (2)$$

Рівняння (1) і (2) виконуються у всіх внутрішніх точках суцільного циліндра $0 \leq r < r_2$, а на його боковій поверхні мають місце однорідні граничні умови.

$$\sigma_{rr}(r_2, z, t) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_2, z, t) = 0. \quad (3)$$

Модулі пружності c_{ij} і густина ρ конкретних матеріалів знаходяться експериментально, для композитних матеріалів макроскопічні пружні властивості і густина композиції як однорідного матеріалу визначаються теоретично по властивостям компонент і його геометричній структурі [2, 3].

Теорія хвиль, що поширюються вздовж осі циліндру, заснована на представленні хвилі виразами

$$\begin{aligned} u_r(r, z, t) &= r_2 \operatorname{Re} u_1(r/r_2) \exp i(kz - \omega t), \\ u_z(r, z, t) &= r_2 \operatorname{Re} u_3(r/r_2) \exp i(kz - \omega t - \pi/2) \end{aligned} \quad (4)$$

для переміщень u_r і u_z . Кругова частота ω і постійна поширення k пов'язані з фазовою швидкістю v_ϕ формулою $kv_\phi = \omega$ (при дійсному хвильовому числі k).

Після підстановки формул (4) в співвідношення (2), (1) і (3) одержимо систему двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} c_{11} \left(u_1'' + \frac{1}{\bar{r}} u_1' - \frac{1}{\bar{r}^2} u_1 \right) + (\rho \omega^2 - c_{55} k^2) u_1 + \bar{k} (c_{13} + c_{55}) u_3' &= 0, \\ -\bar{k} (c_{13} + c_{55}) \left(u_1' + \frac{1}{\bar{r}} u_1 \right) + c_{55} \left(u_3'' + \frac{1}{\bar{r}} u_3' \right) + (\rho \omega^2 - c_{33} k^2) u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

відносно амплітудних функцій $u_1(\bar{r})$ і $u_3(\bar{r})$ і граничні умови до них

$$c_{11} u_1'(1) + c_{12} u_1(1) + \bar{k} c_{13} u_3(1) = 0, \quad c_{55} (u_3'(1) - \bar{k} u_1(1)) = 0. \quad (6)$$

В залежностях (5), (6) штрихом позначені похідні по безрозмірній радіальній координаті $\bar{r} = r/r_2$ і використані безрозмірні частота $\bar{\omega} = \omega r_2 \sqrt{\rho_0/c_0}$, постійна поширення $\bar{k} = kr_2$, пружні сталі $\bar{c}_{ij} = c_{ij}/c_0$ і густина $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$. Параметри c_0 і ρ_0 мають розмірності пружної сталої і густини відповідно, риска зверху в безрозмірних величинах $\bar{c}_{ij}$ та $\bar{\rho}$ опущена (на використання безрозмірних $\bar{c}_{ij}$ та $\bar{\rho}$ вказують безрозмірні $\bar{\omega}$ і $\bar{k}$).

Розв'язок рівнянь (5) можна виразити через циліндричні функції, проте простішим і ефективнішим є безпосереднє розкладання функцій $u_1(\bar{r})$ і $u_3(\bar{r})$ в степеневі ряди по радіальній координаті [4, 5, 6].

У рівняннях (5) змінна координата $\bar{r}$ змінюється в межах $0 \leq \bar{r} < 1$ і тому їх коефіцієнти мають особливу точку типу полюс при $\bar{r} = 0$. Оскільки ця особлива точка є регулярною, то розв’язок системи (5) в області $0 \leq \bar{r} < 1$ потрібно шукати у вигляді узагальнених степеневих рядів

$$u_1(\bar{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(1)} \bar{r}^{n+s}, \quad u_3(\bar{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(3)} \bar{r}^{n+s}. \quad (7)$$

Підставимо ряди (7) в рівняння (5), зберемо коефіцієнти при однакових степенях $\bar{r}$ і прирівняємо їх нулеві. В результаті отримаємо алгебраїчні залежності

$$\begin{aligned} ((n+s)^2 - 1)c_{11}B_n^{(1)} + (n+s-1)(c_{13} + c_{55})\bar{k}B_{n-1}^{(3)} + (\rho\bar{\omega}^2 - c_{55}\bar{k}^2)B_{n-2}^{(1)} &= 0, \\ (n+s)^2 c_{55}B_n^{(3)} - (n+s)(c_{13} + c_{55})\bar{k}B_{n-1}^{(1)} + (\rho\bar{\omega}^2 - c_{33}\bar{k}^2)B_{n-2}^{(3)} &= 0, \\ B_{-2}^{(j)} \equiv A_{-1}^{(j)} \equiv 0, \quad j=1,3, \quad n=0,1,2,\dots, \end{aligned} \quad (8)$$

з яких визначається характеристичний показник s і коефіцієнти рядів $B_n^{(1)}$ і $B_n^{(3)}$, $n=0,1,2,\dots$.

З граничних умов (6) внаслідок підстановки в них рядів (7) одержимо два рівняння

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} ((c_{11}(n+s) + c_{12})B_n^{(1)} + c_{13}\bar{k}B_{n-1}^{(3)}) &= 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_{55}(-\bar{k}B_{n-1}^{(1)} + (n+s)B_n^{(3)}) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Перейдемо до визначення характеристичних параметрів s і коефіцієнтів $B_n^{(1)}$ і $B_n^{(3)}$ рядів. Поклавши в формулах (8) індекс $n=0$, отримаємо

$$c_{11}(s^2 - 1)B_0^{(1)} = 0, \quad c_{55}s^2B_0^{(3)} = 0. \quad (10)$$

Звідси випливає, що при $s_1=1$ і $s_4=-1$ постійна $B_0^{(1)} \neq 0$, а $B_0^{(3)}=0$, тоді як при $s_2=s_3=0$ постійна $B_0^{(1)}=0$, а $B_0^{(3)} \neq 0$.

При $s=0$ рекурентна система (8) набирає вигляду

$$\begin{aligned} c_{11}(n^2 - 1)B_n^{(1)} + (n-1)(c_{13} + c_{55})\bar{k}B_{n-1}^{(3)} - (\rho\bar{\omega}^2 - c_{55}\bar{k}^2)B_{n-2}^{(1)} &= 0, \\ c_{55}n^2B_n^{(3)} - n(c_{13} + c_{55})\bar{k}B_{n-1}^{(1)} - (\rho\bar{\omega}^2 - c_{33}\bar{k}^2)B_{n-2}^{(3)} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

а граничні умови (9) запишуться так

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(nc_{11} + c_{12})B_n^{(1)} + c_{13}\bar{k}B_{n-1}^{(3)}] = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (nB_n^{(3)} - \bar{k}B_{n-1}^{(1)}) = 0. \quad (12)$$

З формул (11) при $n=0$, як і з формул (10) при $s=0$, випливає, що сталі $B_0^{(1)}=0$ і $B_0^{(3)} \neq 0$. При $n=1$ з (11) маємо два рівняння $0 \cdot B_1^{(1)} + 0 \cdot B_0^{(3)} = 0$, $c_{33}B_1^{(3)} - (c_{13} + c_{55})\bar{k} \cdot B_0^{(1)} = 0$. Перше з них буде виконуватися при довільних $B_1^{(1)} \neq 0$ і $B_0^{(3)} \neq 0$, тоді як з другого

рівняння маємо $B_1^{(3)} = 0$ при $B_0^{(1)} = 0$. Всі наступні сталі $B_2^{(j)}, B_3^{(j)}, \dots$ визначаються з рекурентних формул (11) через $B_0^{(3)}$ і $B_1^{(1)}$. Очевидно, що переміщення u_r розкладається по непарних степенях $\bar{r}$, а переміщення u_z – по парних степенях $\bar{r}$.

Алгоритм виведення дисперсійного співвідношення в загальному випадку полягає в наступному. По формулах (11) при $n = 2, 3, \dots$ виражаємо коефіцієнти $B_3^{(1)}, B_5^{(1)}, \dots, B_2^{(3)}, B_4^{(3)}, \dots$ через два перших $B_0^{(3)}$ і $B_1^{(1)}$, так як $B_0^{(1)} = B_1^{(3)} = 0$. Підставляємо одержані вирази в граничні умови (12) з врахуванням рівностей $B_0^{(1)} = B_2^{(1)} = \dots = 0$, $B_1^{(3)} = B_3^{(3)} = \dots = 0$. В результаті одержимо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$m_{11}B_0^{(3)} + m_{12}B_1^{(1)} = 0, \quad m_{21}B_0^{(3)} + m_{22}B_1^{(1)} = 0. \quad (13)$$

Умова сумісності однорідної системи (13)

$$\det\{m_{\alpha\beta}(c_{ij}, \rho, \varepsilon, \bar{k}, \bar{\omega})\} = 0, \quad (14)$$

є дисперсійним співвідношенням, що дозволяє при заданих пружних постійних і густині знайти залежність постійної поширення $\bar{k}$ від частоти $\bar{\omega}$, а потім фазову $v_\phi = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \sqrt{\rho_0/c_0}$ та групову

$v_{gr} = \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{k}} \sqrt{\rho_0/c_0}$ швидкості хвиль в фібрильній нитці. Форма хвилі по радіальній координаті $\bar{r}$ визначається по відповідному нетривіальному розв’язку однорідної системи алгебраїчних рівнянь (13), рекурентних залежностях (11), рядах (7), формулах (4) і (2).

Викладений розв’язок має таку ж загальність, точність і можливість аналізу спектральних властивостей суцільного циліндру, як і розв’язок в циліндричних функціях. Єдине ускладнення виникає при великих частотах і великих значеннях постійної поширення, коли обчислювальний процес по створеному алгоритму може стати нестійким. При кількісному аналізі поширення хвиль в фібрильних нитках така ситуація може мати місце в мегагерцевому діапазоні.

Зупинимося більш детально на аналізі дисперсійного співвідношення (14) для циліндрів з діаметрами малих хвильових розмірів (при $\bar{k} \ll 1$).

Залишимо в рядах (7) члени, що містять степені $\bar{r}$ не вище другої

$$u_1(\bar{r}) = B_1^{(1)}\bar{r}, \quad u_3(\bar{r}) = B_0^{(3)} + B_2^{(3)}\bar{r}^2 \quad (15)$$

і відповідні цьому розкладу члени в граничних умовах (12)

$$(c_{11} + c_{12})B_1^{(1)} + c_{13}\bar{k}B_0^{(3)} = 0, \quad -\bar{k}B_1^{(1)} + 2B_2^{(3)} = 0. \quad (16)$$

Дисперсійне співвідношення (14) в прийнятому наближенні набуває вигляду

$$(c_{11} + c_{12})\rho\bar{\omega}^2 - \bar{k}^2[c_{33}(c_{11} + c_{12}) + 2c_{13}^2] = 0. \quad (17)$$

Якщо в рівнянні (17) перейти до розмірних величин, виразити пружні модулі c_{ij} через технічні модулі і замінити хвильове число через частоту і фазову швидкість, то одержимо залежність $v = \sqrt{E_3/\rho}$. Таким чином при низьких частотах в нитці поширюється поздовжня хвиля зі стержневою швидкістю. При більш високих частотах формула $v = \sqrt{E_3/\rho}$ незастосовна. В такому випадку в граничних умовах (12) і рекурентних залежностях (11) необхідно утримувати більшу кількість невідомих $B_n^{(j)}$, що потребує застосування комп'ютерних засобів.

Для композиції, матриця якої армована однонаправленою системою волокон, відповідно теорії сумішей [2, 3] макроскопічний поздовжній модуль Юнга і густина визначаються за формулами

$$E_3 = c_m E_m + c_f E_f, \quad \rho = c_m \rho_m + c_f \rho_f. \quad (18)$$

Властивості матриці позначені через E_m , v_m , ρ_m , властивості армуючих волокон – через E_f , v_f , ρ_f , а їх об'ємна концентрація відповідно через c_m і c_f ($c_m + c_f = 1$).

Використовуючи вирази (18) для ефективного значення модуля Юнга і густини фібрильної нитки, формулу $v = \sqrt{E_3/\rho}$ приведемо до остаточного вигляду

$$v = \sqrt{(E_m c_m + E_f c_f) / (\rho_m c_m + \rho_f c_f)}. \quad (19)$$

В реальних умовах акустична хвиля поширюється із затуханням внаслідок поглинання енергії, механізми якого різноманітні і важко піддаються послідовному кількісному опису. Будемо виходити з способу врахування дисипативних властивостей матеріалу при гармонічних процесах за допомогою комплексних модулів для матриці і наповнювача

$$E_m = E'_m (1 - i\delta_m), \quad 0 \leq \delta_m \ll 1; \quad E_f = E'_f (1 - i\delta_f), \quad 0 \leq \delta_f \ll 1.$$

Тоді з рівняння руху площини рівних фаз плоскої хвилі і формули (19) для швидкості хвилі v' і коефіцієнта затухання α одержимо вирази

$$v' = \sqrt{\frac{E'_m c_m + E'_f c_f}{\rho_m c_m + \rho_f c_f}}, \quad \alpha = \frac{\delta_m E'_m c_m + \delta_f E'_f c_f}{E'_m c_m + E'_f c_f}. \quad (20)$$

Оскільки для швидкостей і коефіцієнтів затухання хвиль в компонентах справедливі залежності $v'_m = \sqrt{E'_m / \rho_m}$, $\alpha_m = \omega \delta_m / 2v'_m$, $v'_f = \sqrt{E'_f / \rho_f}$, $\alpha_f = \omega \delta_f / 2v'_f$, то макроскопічний коефіцієнт затухання хвилі в композиції можна виразити через коефіцієнти затухання хвиль α_m і α_f в компонентах

$$\alpha = \frac{\alpha_m v'_m E'_m c_m + \alpha_f v'_f E'_f c_f}{E'_m c_m + E'_f c_f}. \quad (21)$$

В таблиці наведені розраховані за формулою (19) значення швидкості поширення акустичної хвилі в фібрильній нитці з полікапроаміду (індекс m), що наповнений поліетиленом (індекс f)

Таблиця 1

c_f	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
v	2638	2622	2605	2588	2571	2554	2536	2517
	1144	1141	1138	1135	1132	1129	1126	1123

Верхній рядок відповідає орієнтованому випадку, коли властивості полікапроаміду і поліетилену приймають значення $E_m = 8031 \text{ МПа}$, $\rho_m = 1140 \text{ кг/м}^3$, $E_f = 5000 \text{ МПа}$, $\rho_f = 980 \text{ кг/м}^3$, а нижній рядок – неорієнтованому випадку, коли $E_m = 1500 \text{ МПа}$, $\rho_m = 1140 \text{ кг/м}^3$, $E_f = 1140 \text{ МПа}$, $\rho_f = 980 \text{ кг/м}^3$. З таблиці видно, що при орієнтованому наповненні швидкості хвиль більш ніж в два рази більші від випадку неорієнтованого наповнення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Медведєв К.В., Шульга В.М., Корнієнко В.Ф., Ластівка І.О. Поширення акустичних хвиль кілогерцевого діапазону в фібрильних нитках // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – Вип. 80. – С. 82-88.
2. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т. Т.1. Механика материалов. – Киев: Наукова думка, 1982. – 368 с. Т.2. Механика элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1983. – 464 с.
3. Механика композитов. В 12-и т. Т.9. Динамика элементов конструкций. – Киев: “А.С.К.”, 1999. – 379 с.
4. Шульга Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропом полой цилиндре. – Прикл. механика. – 1974. – 10, № 9. – С. 14-18.

5. Шульга Н.А. Об электроупругих волнах в сплошном пьезокерамическом цилиндре с продольной поляризацией // Прикл. механика. – 1986. – 22, № 11. – С. 17-21.
6. Шульга Н.А., Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л. Осе симметричные волны в сплошном ортотропном цилиндре // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1986. – № 5, С. 41-44.

Получено 03.05.2008 г.

УДК 539.3

С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов, В.Ф.Лазар

ПОВЕДЕНИЕ ПЛАСТИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЕННОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

В данной работе приведены результаты исследования влияния начальных напряжений на изгибающий момент в пластине, лежащей на предварительно-напряженном полупространстве, при воздействии подвижной нагрузки.

Общая постановка плоских задач об установившемся движении упругого двухслойного полупространства, состоящего из пластины, уравнения движения которой записываются с учетом сдвига и инерции вращения, и подстилающего ее, подверженного предварительному однородному деформированию полупространства из сжимаемого или несжимаемого материалов при подвижной нагрузке приведена в работе [1].

Изгибающий момент в пластине в подвижной системе координат определяется по формуле

$$M = \frac{4 G_1 h^3}{3(1-\nu_1)} \frac{d\varphi}{dy_1}. \quad (1)$$

Поставленные краевые задачи решаются с помощью преобразования Фурье по переменной y_1 .

В качестве примера исследовалось напряженно-деформированное состояние пластины, лежащей на полупространстве из сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа и полупространстве из несжимаемого материала с упругим потенциалом типа Бартенева-Хазановича. При этом предполагалось, что начальное деформированное состояние является плоским, поверхностная нагрузка отсутствует, и на свободную поверхность пластины действует линейная нагрузка, составляющие которой определяются по формулам

$$P_1 = P\delta(y_1)\cos\alpha; \quad P_2 = P\delta(y_1)\sin\alpha; \quad P = G_1, \quad (2)$$

где α – угол наклона нагрузки к оси Oy_1 .

Основные параметры имели значение: $\rho/\rho_1 = 0,5$; $\mu/G_1 = 0,5$; $\kappa = 0,845$; $\nu = 0,3$; $\nu_1 = 0,25$; $\alpha = \pi/2$.

Для полупространства из сжимаемого материала с потенциалом гармонического типа вычисления проводились при дозвуковых (и докритических) $v < v^* < c_{12}$, трансзвуковых $c_{12} < v < c_{11}$ и сверхзвуковых $v > c_{11}$ скоростях движения нагрузки. Здесь через c_{11} и c_{12} обозначены скорости распространения в направлении оси Oy_1 соответственно продольных и поперечных поляризованных волн в неограниченном теле с начальными напряжениями.

Для полупространства из несжимаемого материала с потенциалом типа Бартенева-Хазановича исследовались скорости движения нагрузки в диапазонах $v < v^* < c_1$ и $v > c_1$. Здесь через c_1 обозначена скорость распространения поперечных волн в направлении оси Oy_1 в неограниченном несжимаемом теле с начальными напряжениями.

Значения критических скоростей v^* для различных λ_1 и условий контакта при данных значениях основных параметров приведены в [2,3].

Отметим, что при данных значениях основных параметров при $\lambda_1 = 1$ для несжимаемого полупространства $c_1 = c_s$, где c_s - скорость сдвиговых волн в пластине.

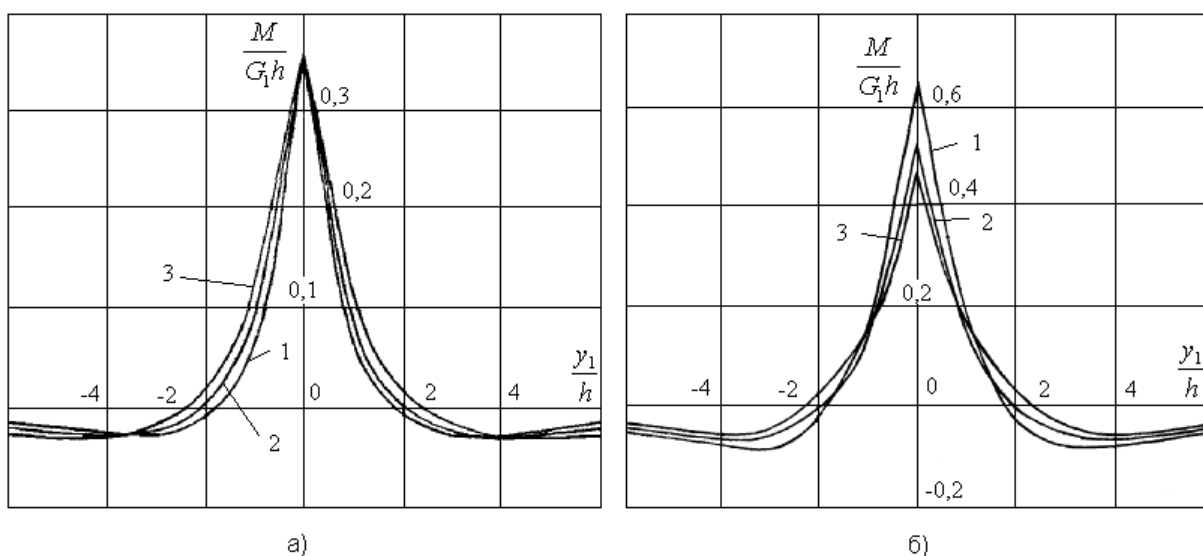


Рисунок 1

На рис.1 и 2. (а – жесткий контакт, б – нежесткий контакт) приведены эпюры для изгибающего момента в пластине на глубине $y_2 = -h/2$ для скорости движения нагрузки $v^2 = 0,1c_s^2$ (дозвуковая скорость). Рис.1 соответствует подстилающему полупространству из материала с потенциалом гармонического типа, а рис.2 – полупространству из материала с потенциалом типа Бартенева-Хазановича. Кривые 1 на рис. 1 и 2 соответствуют значению $\lambda_1 = 0,8$, кривые 2 – значению $\lambda_1 = 1$ и кривые 3 – значению $\lambda_1 = 1,2$.

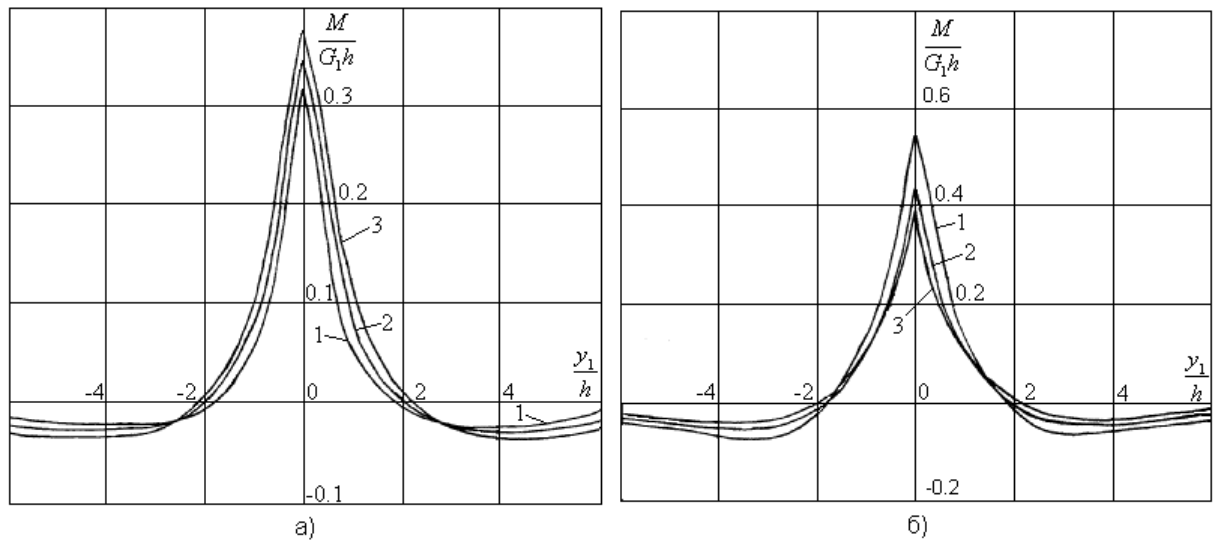


Рисунок 2

Как видно из рис. 1 и 2 для таких скоростей движения нагрузки имеется полная симметрия характеристик напряженно-деформированного состояния относительно точки приложения нагрузки.

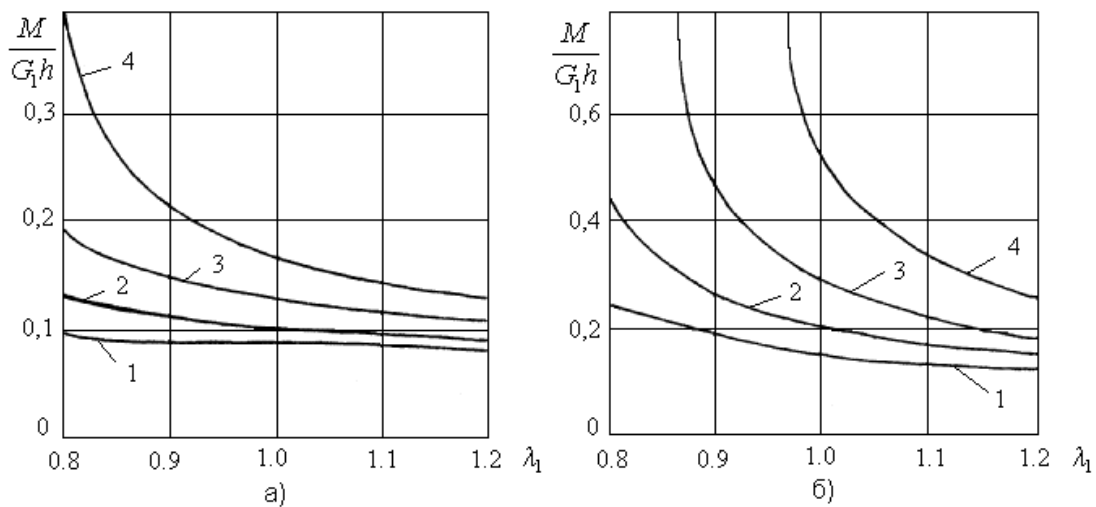


Рисунок 3

На рис. 3 (гармонический потенциал) и 4 (потенциал Бартенева-Хазановича) показана зависимость изгибающего момента в пластине в точке $y_1 = -\lambda_1 h$; $y_2 = -h/2$ от начальных напряжений при различных докритических скоростях движения нагрузки. Кривые 1 на рис. 2 соответствует скорости движения нагрузки $v^2 = 0,1c_s^2$, кривые 2 – скорости $v^2 = 0,2c_s^2$, кривые 3 – скорости $v^2 = 0,3c_s^2$, кривые 4 – скорости $v^2 = 0,4c_s^2$.

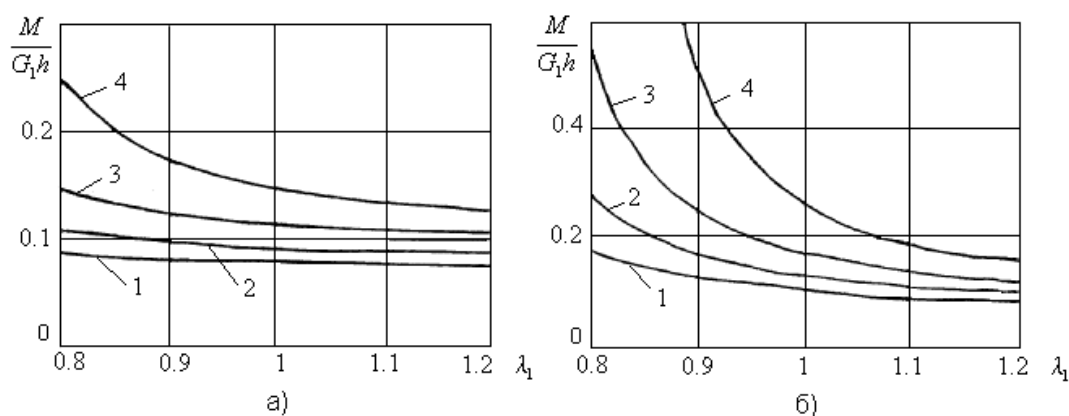


Рисунок 4

На основании полученных численных результатов для докритических скоростей движения поверхностной нагрузки можно сделать следующие выводы. При жестком контакте изгибающий момент в пластине меньше, чем при нежестком. Значение изгибающего момента в конкретной точке пластины зависит как от начальных напряжений в подстилающем полупространстве, так и от ее координат. При этом в исследуемом диапазоне значений λ_1 темп роста амплитуды изгибающего момента при сжатии больше, чем при растяжении. Затухание с удалением от точки приложения нагрузки при сжатии происходит медленнее, чем при растяжении.

Влияние начальных напряжений значительно увеличивается с ростом скорости движения нагрузки. Особенно это проявляется при предварительном сжатии.

При жестком контакте влияние скорости и начальных напряжений менее существенно, чем при нежестком контакте.

Изменение изгибающего момента в пластине на глубине $y_2 = -h/2$ в пластине в зависимости от расстояния до точки приложения нагрузки показано на рис. 5 для скорости $v^2 = 2c_s^2$

(трансзвуковая скорость, гармонический потенциал). На рис. 5 применяются те же обозначения, что и на рис. 1 и 2.

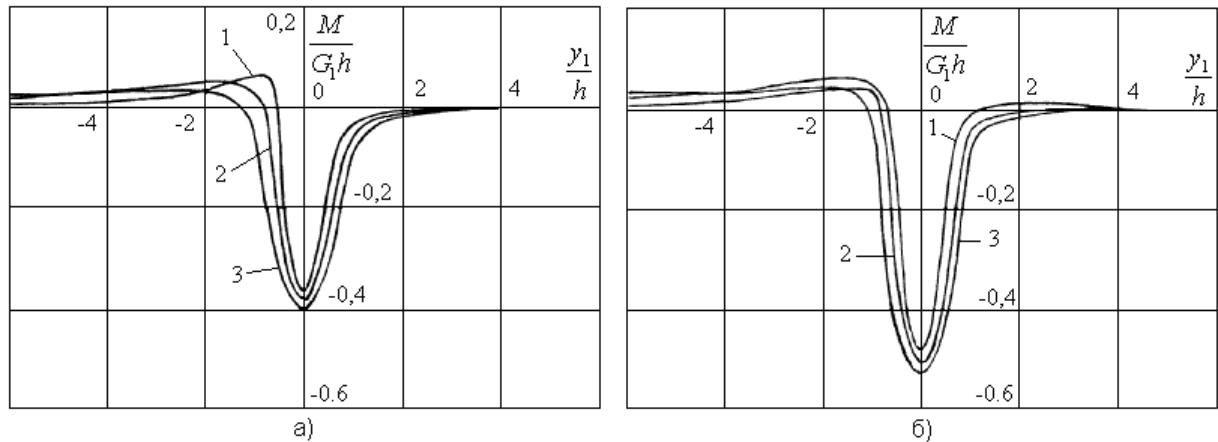


Рисунок 5

Если условно назвать напряжения впереди и позади нагрузки прямой и обратными волнами, то из рис. 5 видно, что при данной скорости движения нагрузки симметрия относительно начала координат нарушается и прямая волна затухает быстрее обратной. Анализ графиков на рис. 5 показывает, что наличие начальных напряжений оказывает существенное влияние на изгибающий момент в пластине. Это влияние различно в зависимости от положения рассматриваемой точки слоистого тела относительно точки приложения нагрузки.

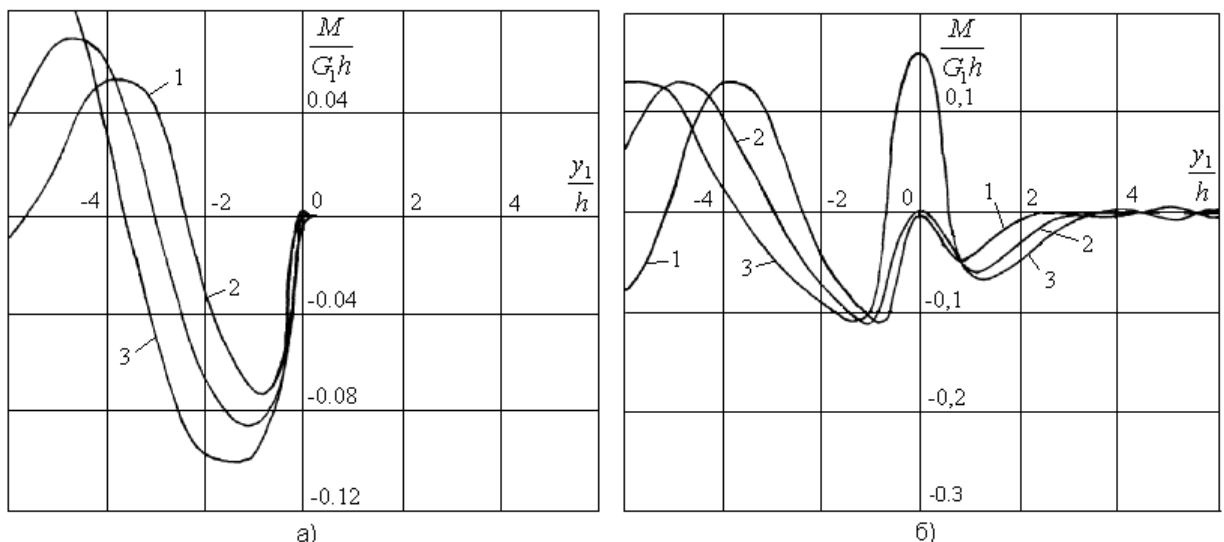


Рисунок 6

На рис. 6 (гармонический потенциал) и 7 (потенциал Бартенева-Хазановича) приведены результаты для скорости $v^2 = 6c_s^2$

(сверхзвуковая скорость). Из графиков видно, что с ростом скорости симметрия все больше нарушается, причем прямая волна затухает намного быстрее и для сверхзвукового случая практически отсутствует. Однако она полностью не исчезает. Это объясняется, по-видимому, слоистостью среды.

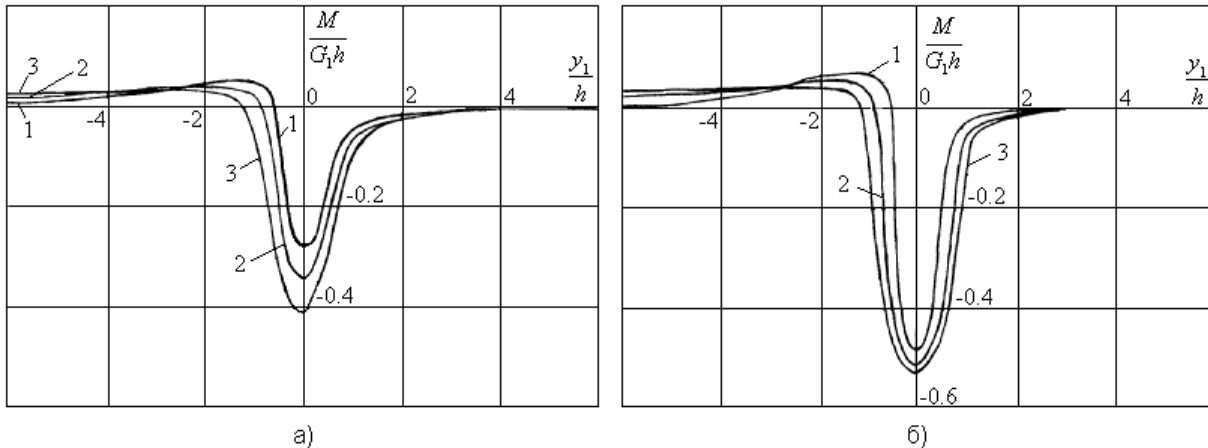


Рисунок 7

В случае жесткого контакта прямая волна затухает намного быстрее, чем при нежестком контакте. Как и при трансзвуковом случае движения нагрузки изгибающий момент в пластине зависит от начальных напряжений и удаления от точки приложения нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Об одной задаче о воздействии подвижной нагрузки на слоистое полупространство с начальными напряжениями. - Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Випуск 4 (51). - Дніпропетровськ, 2007. -С. 53 – 58.
2. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Динамика слоистого сжимаемого предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. - 1986. - 22, №9.-С. 8-15.
3. Глухов Ю.П. К определению критических скоростей движения нагрузки по пластине, лежащей на несжимаемом предварительно деформированном полупространстве// Прикл. механика. - 1986. - 22, №10.-С. 57-62.

Получено 03.05.2008 г.

УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Є.М. Борисов, Л.Є. Борисова

ДЕФОРМАЦІЯ ПРУЖНОЇ НЕОДНОРІДНОЇ СФЕРИ ПРИ ЧАСТИННОМУ ВИДІ НАВАНТАЖЕННЯ

Розглядається внутрішня просторова задача для пружної неоднорідної сфери при симетричному навантаженні. Відповідні однорідні задачі розв’язані аналітично точно в роботах [1], [2], при цьому компоненти переміщень та напружень мають вигляд рядів по поліномам Лежандра. Неоднорідність матеріалу суттєво ускладнює розв’язання просторових задач теорії пружності, а отримати аналітичні розв’язки, як правило, вдається при деяких обмеженнях або при застосуванням наближених методів [3].

В роботі представлено розв’язок задачі для неоднорідної сфери при ідеальному контакті між півсферами. Досліджено напружено-деформівний стан неоднорідної сфери у випадку, коли на її поверхні задано симетричне навантаження. Отримані результати порівнюються із відомими [1].

Розглянемо пружну сферу, що розділена площиною $\theta = \frac{\pi}{2}$ на дві півсфери (верхню та нижню), між якими виконуються умови ідеального контакту. Введемо сферичну систему координат R, θ, φ , при цьому: $0 \leq R \leq R_0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. У випадку симетрично навантаженого тіла обертання явище деформації відбувається однаково у всіх меридіанних площинах ($\varphi = \text{const}$). Тоді компоненти напружень та переміщень не будуть залежати від кута φ . При цьому вважатимемо, що верхній півсфері відповідає пружний матеріал зі сталими m_1, G_1 , а нижній – m_2, G_2 , де m - число Пуассона, G - модуль зсуву.

Виходячи з розв’язків рівнянь теорії пружності у формі Папковича-Нейбера, запишемо вирази проекцій переміщень на осі сферичної системи координат у вигляді:

$$\begin{aligned} u_R &= \frac{4(m-1)}{m} B_R - \frac{\partial}{\partial R} (R B_R + B_0), \\ u_\theta &= \frac{4(m-1)}{m} B_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} (R B_R + B_0). \end{aligned} \quad (1)$$

де B_R, B_θ - функції, що мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned} B_R &= R^n \left(A \frac{dP_n}{d\theta} \sin \theta + A^* \cos \theta P_n \right), \\ B_\theta &= R^n \left(A \frac{dP_n}{d\theta} \cos \theta - A^* \sin \theta P_n \right). \end{aligned} \quad (2)$$

А функцію B_0 в даній роботі пропонується вибрати у наступному вигляді:

$$B_0 = -BR^{n+1}P_{n+1},$$

де $P_n = P_n(\cos \theta)$ - поліном Лежандра n -го порядку ($n = 0, 1, 2, \dots$):

$$P_n(p) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dp^n} (p^2 - 1)^n, \quad p = \cos(\theta),$$

а A, A^*, B - невідомі сталі.

Запишемо формули, які дають вирази для напружень у сферичній системі координат, коли переміщення u_R, u_θ не залежать від кута φ :

$$\begin{aligned} \sigma_R &= 2G \frac{\partial u_R}{\partial R}, \quad \sigma_\theta = 2G \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} u_R \right), \quad \sigma_\varphi = 2G \frac{1}{R} (u_\theta \operatorname{ctg} \theta + u_R), \\ \sigma_{R\theta} &= G \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{u_\theta}{R} \right) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Нехай на площині $\theta = \frac{\pi}{2}$ виконуються умови ідеального контакту, які запишемо у вигляді:

$$u_R^1 = u_R^2; \quad \sigma_\theta^1 = \sigma_\theta^2; \quad (4)$$

$$u_\theta^1 = u_\theta^2; \quad \sigma_{R\theta}^1 = \sigma_{R\theta}^2 \quad (5)$$

В цих виразах тут і далі верхні індекси 1 та 2 вказують на компоненти переміщень та напружень, які відносяться до верхньої та нижньої півсфер відповідно.

Розглянемо випадок, коли на поверхні сфери задано навантаження в такому вигляді:

$$\overline{\sigma_R^1} \Big|_{R=R_0} = -q \cos^2 \theta; \quad \overline{\sigma_R^2} \Big|_{R=R_0} = -q \cos^2 \theta, \quad (6)$$

$$\overline{\sigma_{R\theta}^1} \Big|_{R=R_0} = \frac{1}{2} q \cos \theta \sin \theta; \quad \overline{\sigma_{R\theta}^2} \Big|_{R=R_0} = \frac{1}{2} q \cos \theta \sin \theta, \quad (7)$$

де $\overline{\sigma_R^1}, \overline{\sigma_{R\theta}^1}$ - напруження, які задані на верхній півсфері, а $\overline{\sigma_R^2}, \overline{\sigma_{R\theta}^2}$ - на нижній. В цих формулах q - довільна стала. При цьому напруження $\sigma_R, \sigma_{R\theta}$ вважаються додатними, коли навантаження направлено в бік зростання R (від центра сфери) і відповідно кута θ .

Якщо у виразах (1), (2) покласти $n=1$, то отримаємо

$$u_R^{1(2)} = R \left[\cos^2 \theta \left((A^{1(2)} + A^{*1(2)}) \left(\frac{4(m_{1(2)} - 1)}{m_{1(2)}} - 2 \right) + 3B^{1(2)} \right) - A^{1(2)} \left(\frac{4(m_{1(2)} - 1)}{m_{1(2)}} - 2 \right) - B^{1(2)} \right]; \quad (8)$$

$$u_\theta^{1(2)} = -R \cos(\theta) \sin(\theta) \left((A^{1(2)} + A^{*1(2)}) \left(\frac{4(m_{1(2)} - 1)}{m_{1(2)}} - 2 \right) + 3B^{1(2)} \right). \quad (9)$$

Вирази для напружень знаходимо підставивши (8), (9) в (3).

При цьому, умови контакту будуть виконуватись, якщо у виразі (8) покласти

$$A^{1(2)} \left(\frac{4(m_{1(2)} - 1)}{m_{1(2)}} - 2 \right) + B^{1(2)} = 0. \quad (10)$$

Граничні умови (6), (7) будуть виконуватись при умові

$$\begin{aligned} 2G_1 \left((A^1 + A^{*1}) \left(\frac{4(m_1 - 1)}{m_1} - 2 \right) + 3B^1 \right) &= -q, \\ 2G_2 \left((A^2 + A^{*2}) \left(\frac{4(m_2 - 1)}{m_2} - 2 \right) + 3B^2 \right) &= -q. \end{aligned} \quad (11)$$

Розв'язавши рівняння (10), (11), отримаємо наступні частинні розв'язки

$$\begin{aligned} u_R^1 &= -R \cos^2 \theta \frac{q}{2G_1}; \quad u_R^2 = -R \cos^2 \theta \frac{q}{2G_2} \\ u_\theta^1 &= R \cos \theta \sin \theta \frac{q}{2G_1}; \quad u_\theta^2 = R \cos \theta \sin \theta \frac{q}{2G_2} \\ \sigma_R^1 &= \sigma_R^2 = -q \cos^2 \theta; \\ \sigma_{R\theta}^1 &= q \cos \theta \sin \theta; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sigma_{R\theta}^2 &= q \cos \theta \sin \theta; \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \\ \sigma_\theta^1 &= \sigma_\theta^2 = -q \sin^2 \theta; \end{aligned} \quad (12)$$

Як видно з приведених виразів, напруження в даному випадку не залежать від радіуса R і залишаються для кожного фіксованого кута θ однаковими (по модулю) для верхньої та нижньої півсфер. Однак, переміщення для верхньої та нижньої півсфер залежать як від кута θ , так і від радіуса і відрізняються одне від одного (при кожному фіксованому значенні θ та R) на величину, яка залежить від модуля зсуву матеріалу. Якщо, наприклад, $G_1 > G_2$, то переміщення для верхньої півсфери будуть меншими на величину, що пропорційна $q \frac{G_1 - G_2}{G_1 G_2}$ від переміщень нижньої півсфери, що відповідає механічним властивостям матеріалу.

Розглянемо ще один частинний випадок. Якщо у виразах (1), (2) покласти $n=0$, то по аналогії до [1] отримаємо другий частинний розв’язок:

$$u_R^{1(2)} = \cos \theta \left(A^{*1(2)} \left(\frac{4(m_{1(2)} - 1)}{m_{1(2)}} \right) - A^{*1(2)} + B^{1(2)} \right);$$

$$u_\theta^{1(2)} = -\sin \theta \left(A^{*1(2)} \left(\frac{4(m_{1(2)} - 1)}{m_{1(2)}} \right) - A^{*1(2)} + B^{1(2)} \right),$$

що являє собою жорстке зміщення. І не важко переконатись, що відповідні напруження будуть дорівнювати нулю. Умови контакту будуть виконуватись, якщо в останніх виразах покласти:

$$A^{*1(2)} \left(\frac{4(m_{1(2)} - 1)}{m_{1(2)}} \right) - A^{*1(2)} = 0. \quad (13)$$

Тоді, з врахуванням (13) вирази для переміщень співпадають з результатами, що отримані в роботі [1].

При цьому, слід відмітити, що система напружень, яка розподілена по поверхні сфері $R = R_0$ статично еквівалентна нулю. Для цього достатньо переконатись, що проекція головного вектора на вісь z дорівнює нулю:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (\sigma_R \cos(\theta) - \sigma_{R\theta} \sin(\theta)) R_0^2 \sin(\theta) d\theta =$$

$$= 2\pi R_0^2 \left(\int_{-1}^0 (\sigma_R^2 \cos(\theta) - \sigma_{R\theta}^2 \sin(\theta)) d \cos(\theta) + \int_0^1 (\sigma_R^2 \cos(\theta) - \sigma_{R\theta}^2 \sin(\theta)) d \cos(\theta) \right).$$

Підставивши (12) в останній вираз, неважко переконатися, що даний інтеграл дорівнює нулю.

Таким чином, в роботі отримано частинний розв’язок задачі про деформацію симетрично навантаженої неоднорідної пружної сфери при ідеальному контакті між півсферами. Отримані результати показують, що переміщення для верхньої та нижньої півсфер залежать від пружних властивостей матеріалу, з яких виготовлені півсфери. В частинному випадку отримані результати співпадають з відомими [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Лур’є А.И. Пространственные задачи теории упругости.- М. Гостехиздат, 1955.
2. Подильчук Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости. –Киев Наукова думка, 1979., -240 с.
3. Е. Н. Борисов О нелинейно упругом равновесии прямоугольной многослойной плиты/ Прикладная механика. – 2002. - 38 , № 4. – С. 87-92.

Получено 03.05.2008 г.

УДК 539.3

Р.С.Мусій, Н.Б.Мельник, Н.Б.Гіссовська, К.В.Шиндер

ВИЗНАЧЕННЯ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ ЗА ДІЇ ІМПУЛЬСНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ

При виготовленні багатьох технічних приладів і пристроїв широко використовуються елементи конструкцій у вигляді електропровідних тіл канонічної форми – пластин, циліндрів і куль, як однорідних, та і біметалевих. Під час експлуатації пристроїв їх конструктивні елементи зазнають дії різноманітних фізичних факторів, зокрема, імпульсного електромагнітного поля (ЕМП). Тому виникає проблема збереження несучої здатності конструктивних елементів за такої дії, від чого залежить надійність роботи пристроїв.

Для вирішення даної проблеми необхідно визначити інтенсивність напружень σ_i за різних часових та амплітудно-частотних параметрів імпульсного ЕМП і порівняти їх з межею пружної деформації σ_d матеріалу однорідного чи матеріалів складових $p=1, 2$ шарів біметалевого тіла. Несуча здатність буде зберігатись за умови, що $\sigma_i < \sigma_d$ [1] для однорідного і $\sigma_i^{(p)} < \sigma_d^{(p)}$ для біметалевого тіла. Фізико-механічні характеристики матеріалу електропровідного тіла приймаються сталими.

Інтенсивності напружень σ_i чи $\sigma_i^{(p)}$ в розглядуваних тілах визначаються на основі відомої розрахункової схеми визначення термонапруженого стану електропровідних тіл [2], яка складається з трьох етапів. На першому етапі записуються співвідношення для визначення параметрів ЕМП і вирази для джоулевого тепла Q і пондеромоторних сил $\vec{F}$. Якщо за ключову функцію вибрано вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}$, то питомі густини джоулевого тепла і пондеромоторних сил визначаються формулами

$$Q = \frac{1}{\sigma} (\text{rot} \vec{H})^2, \quad \vec{F} = \mu \cdot \text{rot} \vec{H} \times \vec{H}, \quad (1)$$

де σ - коефіцієнт електропровідності, μ - магнітна проникливість матеріалу електропровідного тіла. На другому етапі за відомим

розподілом джоулевого тепла Q з рівняння теплопровідності за врахування умов конвективного теплообміну на зовнішніх поверхнях тіла визначається температура T в тілі. На третьому етапі за відомими виразами пондеромоторних сил $\vec{F}$ і температури T із рівнянь динамічної термопружності в напруженнях [3] визначаються компоненти σ_{ik} ($i, k = \overline{1,3}$) тензора напружень $\hat{\sigma}$, які подаються у вигляді суми двох складових $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^Q + \sigma_{ik}^F$. Тут σ_{ik}^Q - напруження, зумовлені джоулевым теплом Q , а σ_{ik}^F - дією пондеромоторних сил $\vec{F}$. Зауважимо, що у випадку біметалевих тіл приймається, що в області з'єднання складових p шарів виконуються умови ідеального електромагнітного, теплового і механічного контактів. За знайденими компонентами σ_{ik} тензора сумарних напружень $\hat{\sigma}$ визначаються інтенсивності цих напружень $\sigma_i = \sqrt{(3I_2(\hat{\sigma}) - I_1^2(\hat{\sigma}))/2}$. Тут $I_j(\hat{\sigma})$, ($j = 1, 2$) - j -ий інваріант тензора напружень в тілі. Після знаходження σ_i аналізуються параметри імпульсного ЕМП, за яких виконується умова $\sigma_i < \sigma_d$.

Згідно прийнятої розрахункової схеми вихідне рівняння на відповідну компоненту H_i вектора $\vec{H}$ буде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) H_i - \sigma \mu \frac{\partial H_i}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

Тут: $i = y$, $m = 0$, $r \equiv z$ - для пластин; $i = z$, $m = 1$ - для циліндрів; $i = \varphi$, $m = 2$ - для куль. Початкова умова за відсутності ЕМП в даному тілі при $t = 0$ буде $H_i(r, 0) = 0$. За знайденою функцією $H_i(r, t)$ вирази питомих густин джоулевих тепловиділень і пондеромоторних сил записуються формулами (1).

Температура T і напруження σ_{jj}^Q визначаються зі системи рівнянь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) T - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{Q}{\lambda} = 0, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \sigma_{rr}^Q - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^Q}{\partial t^2} = \alpha \rho \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1 - \nu} \cdot \frac{l}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\varphi\varphi}^Q}{\partial t^2} + \frac{2c_2^2}{1-\nu} \frac{p}{r^2} \sigma_{\varphi\varphi}^Q = \frac{2c_2^2}{1-\nu} \cdot \frac{p}{r^2} \frac{\partial(r\sigma_{rr}^Q)}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^Q}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\sigma_{zz}^Q = \nu(\sigma_{rr}^Q + \sigma_{\varphi\varphi}^Q) - \alpha E T, \quad \sigma_{\theta\theta}^Q \equiv \sigma_{\varphi\varphi}^Q \quad (6)$$

за початкових умов

$$T(r,0)=0, \quad \sigma_{jj}^Q(r,0)=0, \quad \frac{\partial \sigma_{jj}^Q(r,0)}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial T(r,0)}{\partial t}. \quad (7)$$

Тут: $j = x, y, z$; $\kappa = 0$; $l = 0$; $\sigma_{rr}^Q = \sigma_{zz}^Q$; $\sigma_{xx}^Q = \sigma_{yy}^Q = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{zz}^Q - \frac{\alpha E}{1-2\nu} T$ – для

пластин і σ_{zz}^Q визначається з рівняння (4); $j = r, \varphi, z$; $\kappa = 3$; $l = 1$; $p = 1$ – для циліндрів, а напруження σ_{jj} знаходяться на основі рівнянь (4), (5) і першого співвідношення (6); $j = r, \theta, \varphi$; $\kappa = 4$; $l = 2$; $p = 2$ – для куль, а напруження σ_{jj} – на основі рівнянь (4), (5) і другого співвідношення (6).

Напруження σ_{jj}^F описуються системою рівнянь

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\kappa}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \sigma_{rr}^F - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^F}{\partial t^2} = -\frac{n}{1-\nu} \frac{F_r}{r} - \frac{\partial F_r}{\partial r},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\varphi\varphi}^F}{\partial t^2} + \frac{2c_2^2}{1-\nu} \cdot \frac{p}{r^2} \sigma_{\varphi\varphi}^F = \frac{2c_2^2}{1-\nu} \left[\frac{p}{r^2} \frac{\partial(r\sigma_{rr}^F)}{\partial r} + \frac{F_r}{r} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^F}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$\sigma_{zz}^F = \nu(\sigma_{rr}^F + \sigma_{\varphi\varphi}^F), \quad \sigma_{\theta\theta}^F \equiv \sigma_{\varphi\varphi}^F,$$

а початкові умови будуть $\sigma_{jj}^F(r,0)=0, \quad \frac{\partial \sigma_{jj}^F(r,0)}{\partial t} = 0$. Тут: $j = x, y, z$;

$\kappa = 0$; $n = 0$; $s = 0$; $\sigma_{rr}^F = \sigma_{zz}^F$; $\sigma_{xx}^F = \sigma_{yy}^F = (\nu \sigma_{zz}^F)/(1-\nu)$ – для пластин; $j = r, \varphi, z$; $\kappa = 3$; $n = 2-\nu$; $p = 1$; $s = 1$ – для циліндрів; $j = r, \theta, \varphi$; $\kappa = 4$; $p = 2$; $s = 2$ – для куль. Записані вище системи рівнянь на напруження σ_{jj}^Q і σ_{jj}^F розв’язуються за умов відсутності силових поверхневих навантажень граничних поверхонь розглядуваних тіл.

Як приклад досліджено термомеханічну поведінку і несучу здатність однорідних та біметалевих пластин і довгих порожнистих циліндрів за дії електромагнітного імпульса. Встановлено критичні значення параметрів імпульсного ЕМП, за яких втрачається несуча здатність.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ионов В.Н., Огибалов П.М. Напряжения в телах при импульсном нагружении. – М.: Высшая школа, 1975. – 463 с.
2. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В. Термоупругость электропроводных тел. - К.: Наукова думка, 1977. - 247 с.
3. Мусій Р.С. Рівняння в напруженнях три- дво- та одновимірних динамічних задач термопружності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. - № 2. – С.

Получено 03.05.2008 г.

ФОРМИ КОЛИВАНЬ НА ГРАНИЦЯХ ЗОН ПРОПУСКАННЯ ОБ'ЄМНИХ ХВИЛЬ ЗСУВУ В ДВОКОМПОНЕНТНИХ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТАХ З МІЖФАЗНИМИ НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ

Перебіг хвильових процесів в композитних матеріалах визначається механічними властивостями матриці і наповнювача та якістю границь розділу наповнювач-матриця [2]. В теоретичних дослідженнях безперечно перевага надається [3] ідеальній моделі, в якій композит розглядається як досконалий хімічний дисконтинуум і досконалий хімічний континуум. Відповідно до цієї концепції НДС компонент (фаз) описується співвідношеннями механіки деформування твердих тіл, а на поверхнях розділу виконуються умови досконалого механічного контакту $\sigma_n^+ = \sigma_n^-$, $u^+ = u^-$. Для моделювання міжфазних недосконалостей в тонкому міжфазному прошарку з неповністю визначеними фізико-механічними властивостями і підвищеною дефектністю вводиться [3, 4] гіпотетична міжфазна поверхня з контактними умовами $\sigma_n^+ = \sigma_n^-$, $u^+ = u^- + \eta_n \cdot \sigma_n^-$. При вивченні поширення хвиль довільного частотного діапазону в шаруватих композитах використовується структурна (кусково-однорідна) модель при досконалому механічному міжфазному контакті. Основні результати цих досліджень висвітлені в монографії [3]. Узагальнення досліджень про поширення хвиль в рамках структурної моделі при недосконалому механічному контакті викладаються в роботах [1, 4, 5, 6 та ін.], продовженням яких є дана стаття.

Розглянемо двокомпонентний регулярно-шаруватий композит з міжфазними недосконалостями та дефектами, механічні властивості ортотропних компонент якого позначимо через $c_{ij,1}$, ρ_1 для шарів товщиною h_1 і $c_{ij,2}$, ρ_2 для шарів товщиною h_2 . Координатні вісі x_1 , x_2 , x_3 направимо вздовж головних напрямів ортотропії шарів. Для хвиль зсуву $u_1(0, x_2, x_3, t) \neq 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ або $u_1 = 0$, $u_2(x_1, 0, x_3, t) \neq 0$, $u_3 = 0$ необхідно знайти розв'язок системи рівнянь

$$\rho(x_3) \frac{\partial^2 u_{6-m}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{6-m,m-3}}{\partial x_{m-3}} + \frac{\partial \sigma_{3,6-m}}{\partial x_3}, \quad (1)$$

$$\sigma_{3,6-m} = c_{mm}(x_3) \frac{\partial u_{6-m}}{\partial x_3}, \quad \sigma_{12} = c_{66}(x_3) \frac{\partial u_{6-m}}{\partial x_{m-3}}, \quad m = 4, 5. \quad (2)$$

На міжфазних площинах $x_3 = x_{3,2n-2+q}$ ($q = 1, 2$, n – ціле число) з недосконалим механічним контактом повинні виконуватися [1, 5] умови спряження

$$\begin{aligned} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0) &= \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0), \\ u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0) &= u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0) + \eta_{3,6-m} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Запишемо розв’язок рівняння (1), (2) для кожного із шарів у вигляді біжучих хвиль

$$\begin{aligned} u_{6-m} &= h \operatorname{Re} \left[A_{2n-1}^{(1)} \frac{\sin \alpha_{mm,1}(x_3 - nh + h)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{\alpha}_{mm,1}} + A_{2n-1}^{(2)} \cos \alpha_{mm,1}(x_3 - nh + h) \right] e^{i(kx_{m-3} - \omega t)}, \\ &\quad (n-1)h < x_3 < (n-1)h + h_1; \\ u_{6-m} &= h \operatorname{Re} \left[A_{2n}^{(1)} \frac{\sin \alpha_{mm,2}(x_3 - nh + h_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{\alpha}_{mm,2}} + A_{2n}^{(2)} \cos \alpha_{mm,2}(x_3 - nh + h_2) \right] e^{i(kx_{m-3} - \omega t)}, \\ &\quad (n-1)h + h_1 < x_3 < nh. \end{aligned} \quad (4)$$

В формулах (4) і далі використовуються позначення $\bar{\rho}_q \rho_{00} = \rho_q$, $\bar{c}_{mm,q} c_{00} = c_{mm,q}$, $\alpha_{mm,q}^2 = (\rho_q \omega^2 - k^2 c_{66,q}) / c_{mm,q}$; $\bar{\alpha}_{mm,q} = h \alpha_{mm,q}$, $\bar{k} = kh$, де ρ_{00} , c_{00} , h – нормуючі параметри.

Розв’язок (4) записаний при $\alpha_{mm,q}^2 \geq 0$. Якщо $\alpha_{mm,q}^2 = -\beta_{mm,q}^2 < 0$, то в формулах (4) і наступних треба прийняти $\alpha_{mm,q} = i\beta_{mm,q}$, $\sin i\beta_{mm,q}(\dots) = ish\beta_{mm,q}(\dots)$, $\cos i\beta_{mm,q}(\dots) = ch\beta_{mm,q}(\dots)$.

З контактних умов (3) на межах $x_3 = x_{3,2n-1} \equiv (n-1)h + h_1$ між $(2n-1)$ -им і $2n$ -им шарами і на межах $x_3 = x_{3,2n} \equiv nh$ між $2n$ -им і $(2n+1)$ -им шарами одержимо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{A}_{2n+1} = \mathbf{M}_{mm}(h_2) \mathbf{A}_{2n}, \quad \mathbf{A}_{2n} = \mathbf{M}_{mm}(h_1) \mathbf{A}_{2n-1}, \quad (5)$$

в яких введені вектор-стовпці $\mathbf{A}_n = \operatorname{col}[A_n^{(1)}, A_n^{(2)}]$ і матриці $\mathbf{M}_{mm}(h_q)$ з елементами

$$M_{mm}^{(11)}(h_q) = \cos \alpha_{mm,q} h_q, \quad M_{mm}^{(12)}(h_q) = -\bar{c}_{mm,q} \bar{\alpha}_{mm,q} \sin \alpha_{mm,q} h_q,$$

$$M_{mm}^{(21)}(h_q) = \frac{\sin \alpha_{mm,q} h_q}{\bar{c}_{mm,q} \bar{\alpha}_{mm,q}} + \bar{\eta}_{3,6-m} \cos \alpha_{mm,q} h_q,$$

$$M_{mm}^{(22)}(h_q) = \cos \alpha_{mm,q} h_q - \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{c}_{mm,q} \bar{\alpha}_{mm,q} \sin \alpha_{mm,q} h_q,$$

причому $\bar{\eta}_{3,6-m} = \eta_{3,6-m} c_{00} / h$.

Якщо розв’язок нескінченної системи (5) представити [1, 3-6] у вигляді

$$A_{2n} = \chi_{mm}^n M_{mm}(h_1) X_{mm}, \quad A_{2n-1} = \chi_{mm}^n X_{mm}, \quad (6)$$

то для визначення скаляру χ_{mm} і вектора X_{mm} одержимо систему однорідних алгебраїчних рівнянь

$$(M_{mm}(h_2, h_1) - \chi_{mm}^{-1} I_2) X_{mm} = 0. \quad (7)$$

Тут I_2 – одинична матриця другого порядку, $M_{mm}(h_2, h_1) = M_{mm}(h_2) M_{mm}(h_1)$ – передаточна матриця для двох шарів товщини h_1 і h_2 .

З умови існування нетривіального розв’язку однорідної системи (7) одержимо характеристичне рівняння

$$\chi_{mm}^2 - 2b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) \chi_{mm} + 1 = 0, \quad (8)$$

оскільки безпосередніми перетвореннями знаходимо, що $\det M_{mm}(h_2, h_1) = 1$, а коефіцієнт $b_{mm} = 0,5 \text{Spur} M_{mm}(h_2, h_1)$.

Кожному з нерівних між собою характеристичних чисел $\chi_{mm,1}$, $\chi_{mm,2}$ відповідають лінійно незалежні між собою власні вектори $X_{mm,1}$, $X_{mm,2}$ і невідомі A_n в розв’язку (6) будуть суперпозицією

$$\begin{aligned} A_{2n} &= Q_1 \chi_{mm,1}^n M_{mm}(h_1) X_{mm,1} + Q_2 \chi_{mm,2}^n M_{mm}(h_1) X_{mm,2}, \\ A_{2n-1} &= Q_1 \chi_{mm,1}^n X_{mm,1} + Q_2 \chi_{mm,2}^n X_{mm,2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Невідомі сталі Q_1 , Q_2 повинні бути визначені з граничних умов.

Аналіз рівняння (8) показує, що розв’язок (9) буде обмеженим при $n \rightarrow \pm\infty$ ($-\infty < x_3 < +\infty$), якщо дисперсійне рівняння (8) матиме рівні за модулем одиниці комплексні корені. Це матиме місце при умові

$$-1 < b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) < +1, \quad (10)$$

яка і визначає зони пропускання хвиль поперек структури матеріалу.

Для ідентифікації експериментальних вимірювань важливо знати також просторові форми хвиль. Для частот, які обмежують зони пропускання хвиль, тобто при $b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = \pm 1$, аналіз розв’язків системи (5) дозволяє установити просторові форми хвиль [4].

На межах $b_{mm}(\bar{\alpha}_{mm,2}, \bar{\alpha}_{mm,1}) = +1$ зон пропускання (10) відбуваються симетричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (SS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(2)} C_2(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(2)} C_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (11)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(2)}$, $\tilde{A}_2^{(2)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(2)} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) + \tilde{A}_2^{(2)} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(2)} (C_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1)) - \tilde{A}_2^{(2)} (C_2(H_2) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2)) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

та антисиметричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (АА-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(1)} S_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(1)} S_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (13)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(1)}$, $\tilde{A}_2^{(1)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(1)} C_1(H_1) - \tilde{A}_2^{(1)} C_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(1)} (S_1(H_1) + \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} C_1(H_1)) + \tilde{A}_2^{(1)} (S_2(H_2) + \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} C_2(H_2)) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

На межах $b_{mm}(\bar{a}_{mm,2}, \bar{a}_{mm,1}) = -1$ зон пропускання (10) відбуваються симетричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (SA-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(2)} C_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(1)} S_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (15)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(2)}$, $\tilde{A}_2^{(1)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(2)} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) + \tilde{A}_2^{(1)} C_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(2)} (C_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1)) + \tilde{A}_2^{(1)} (\bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) + \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} C_2(H_2)) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

та антисиметричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (AS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(1)} S_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(2)} C_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (17)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(1)}$, $\tilde{A}_2^{(2)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(1)} C_1(H_1) - \tilde{A}_2^{(2)} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(1)} (S_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} C_1(H_1)) - \tilde{A}_2^{(2)} (C_2(H_2) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2)) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В формулах (17)-(24) використовуються позначення

$$\bar{a}_{mm,q} = \bar{c}_{mm,q} \bar{\alpha}_{mm,q}, \quad S_q(x_3 - x_{3q}) = \bar{a}_{mm,q}^{-1} \sin \alpha_{mm,q}(x_3 - x_{3q}),$$

$$C_q(x_3 - x_{3q}) = \cos \alpha_{mm,q}(x_3 - x_{3q}), \quad x_{31} = H_1, \quad x_{32} = h_1 + H_2, \quad 2H_q = h_q.$$

При кількісному аналізі основна увага зверталася на вплив міжфазних параметрів $\eta_{3,6-m}$ на дисперсійні і амплітудні характеристики. Розглядався композит з механічними властивостями шарів $\bar{\rho}_1 = 1$, $\bar{c}_{44,1} = \bar{c}_{55,1} = \bar{c}_{66,1} = 1$, $\bar{\rho}_2 = 2$, $\bar{c}_{44,2} = \bar{c}_{55,2} = \bar{c}_{66,2} = 20$ при нормуючих параметрах $\rho_{00} = \rho_1$, $c_{00} = c_{66,1}$. Товщини шарів приймалися рівними $h_1 = 0,3h$ і $h_2 = 0,7h$. Міжфазний параметр $\bar{\eta}_{31} = \bar{\eta}_{32} = 0,0$ (міжфазні недосконалості відсутні); 0,1; 0,5; 1,0; 5,0.

Проведений аналіз показав, що в матеріалах з міжфазними недосконалостями на відміну від матеріалів з досконалим сполученням компонент не існує напрямку, в якому проходять хвилі всіх частот. Найбільш характерною особливістю впливу міжфазного параметру на структуру зон пропускання хвиль є їх сильне звуження при збільшенні. Виявити ці вузькі зони, особливо при високих частотах, можливо тільки по аналізу типів коливань на межах зон пропускання об'ємних хвиль. При збільшенні міжфазних параметрів границі зон пропускання асимптотично наближаються до дисперсійних кривих для нормальних хвиль зсуву в шарах товщиною h_1 і h_2 .

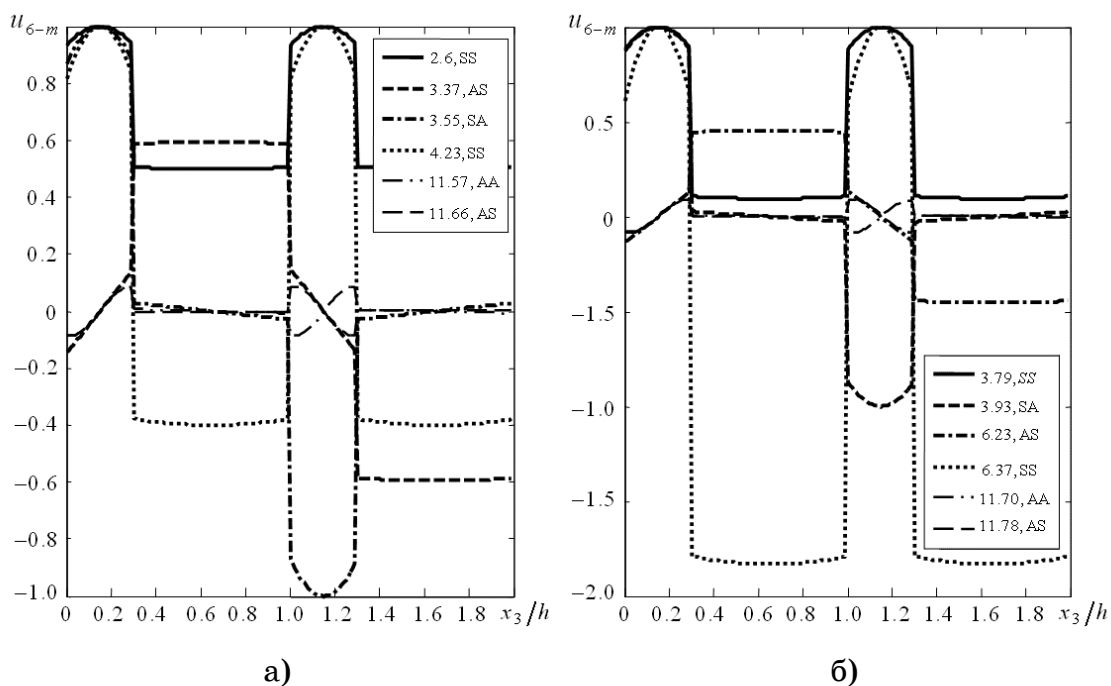


Рисунок 1

На рис.1 наведені результати розрахунку форм хвиль для того ж матеріалу при $\bar{k}=0,96$ (рис.1,а) та $\bar{k}=1,92$ (рис.1,б) на граничних частотах зон пропускання на двох періодах структури. На рис.1,а крива 1 відповідає нижній границі першої зони пропускання ($\bar{\omega}_1=2,601746$, SS-коливання), крива 2 – верхній границі першої зони пропускання ($\bar{\omega}_2=3,369278$, AS-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_3=3,556016$, SA-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_4=4,230742$, SS-коливання), крива 5 – нижній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_5=11,572015$, AA-коливання), крива 6 – верхній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_6=11,658619$, AS-коливання). На рис.1,б крива 1 відповідає нижній границі першої зони пропускання ($\bar{\omega}_1=3,799316$, SS-коливання), крива 2 – верхній границі першої зони пропускання ($\bar{\omega}_2=3,929859$, SA-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_3=6,234196$, AS-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\bar{\omega}_4=6,374857$, SS-коливання), крива 5 – нижній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_5=11,706880$, AA-коливання), крива 6 – верхній границі третьої зони пропускання ($\bar{\omega}_6=11,782537$, AS-коливання).

Варто відзначити також, що форми коливань на верхній границі першої зони пропускання і на нижній границі другої зони пропускання міняються місцями: при $\bar{k}=0,96$ це будуть відповідно AS- та SA-коливання, а при $\bar{k}=1,92$ стають відповідно SA- та AS-коливаннями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баженов В.А., Шульга Н.Д. Распространение объемных волн сдвига в слоистых композитах с межфазными дефектами // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1994. – Вып. 61. – С. 33-38.
2. Композиционные материалы. В 8-и т. Т.1. Поверхности раздела в металлических композитах. – Москва: Мир, 1978. – 438 с. Т.6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – Москва: Мир, 1978. – 294 с.
3. Механика композитов. В 12 т. Т.2. Динамика и устойчивость материалов. – Киев: Наукова думка, 1993. – 431 с. Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах. – Киев: ПТОО «А.С.К.», 1997. – 394 с.

4. Шульга М.О., Шульга Н.Д. Вплив міжфазних недосконалостей на структуру зон пропускання хвиль зсуву в шаруватих композитах // Деп. в ДНТБ України 13.02.1995 р. № 310 – Ук. 95 (Донецький ун-т. – Донецьк, 1994). – 39 с.
5. Шульга Н.Д. Частоти пропускання і граничні форми об’ємних хвиль поперек структури двокомпонентних шаруватих композитів з міжфазними недосконалостями // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2006. – Вип. 79. – С. 109-117.
6. Шульга Н.Д. Форми коливань на границях зон пропускання одномірних хвиль в двокомпонентних шаруватих композитах з міжфазними недосконалостями // Системні технології. – 2007. – Вип. 4(51). – С. 44-49.

Получено 17.03.2008 р.

УДК 534-21:537.226.86

Л.О. Григор'єва

**ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ
ДОСЛІДЖЕННІ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ
КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО ШАРУ ПРИ
ЕЛЕКТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

В даній роботі методом характеристик побудовано аналітичний розв'язок задачі про товщинні коливання плоского п'єзокерамічного шару при нестационарних електричних навантаженнях. Для розв'язання диференціального рівняння для продовження функцій розв'язку використовується чисельний метод, що дозволяє суттєво збільшити інтервал розв'язку по часовій координаті.

Коливання поляризованого по товщині п'єзокерамічного шару товщиною $2h$ описуються рівнянням руху та рівнянням Гауса [3]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

при матеріальних співвідношеннях

$$\sigma_x = c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad D_x = e_{33} \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2)$$

На зовнішніх електродованих вільних від механічних навантажень поверхнях $x = \pm h$ задається різниця електричного потенціалу $2V(t)$:

$$\varphi(\pm h, t) = \pm V(t); \quad \sigma_x(\pm h, t) = 0. \quad (3)$$

Початкові умови для переміщень та їх швидкостей приймаємо нульовими:

$$u(x, t=0) = 0; \quad \dot{u}(x, t=0) = 0. \quad (4)$$

Диференціальні рівняння (1) з врахуванням матеріальних співвідношень (2) можна звести до рівнянь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (5)$$

$$\varepsilon_{33}^S \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - e_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (6)$$

Тут постійна $c_1 = \sqrt{(c_{33}^E + e_{33}^2 / \varepsilon_{33}^S) / \rho}$ – швидкість поширення електропружної хвилі в напрямку поляризації.

Інтегруючи (6) при електричних граничних умовах з (3), отримуємо вираз для електричного потенціалу через переміщення

$$\varphi(x, t) = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} \left(u(x, t) - \frac{x}{h} u(h, t) \right) + \frac{x}{h} V(t). \quad (7)$$

З (2) з врахуванням (7) маємо вираз для механічних напружень:

$$\sigma_x(x, t) = \left(c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}} \right) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S h} u(h, t) + \frac{e_{33}}{h} V(t). \quad (8)$$

Електрична індукція постійна по товщині шару і визначається виразом

$$D_x = \frac{e_{33}}{h} (f(c_1 t + h) - f(c_1 t - h)) - \frac{\varepsilon_{33}}{h} V(t). \quad (9)$$

В співвідношеннях (1)-(9) вводяться безрозмірні величини [3]

$$\bar{x} = x/h, \quad \bar{t} = t/t_h, \quad \bar{u} = u/h, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/c_{00}, \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_{00},$$

$$\bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00} h^2}}, \quad \bar{D}_i = \frac{D_i}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}^S}{\varepsilon_{00}},$$

де $\rho_{00} = \rho$, $c_{00} = c_{33}^E$, $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{33}^S$, $t_h = h \sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ – нормуючі величини.

Для загальності розв’язку параметр h не виключаємо, а приймаємо $\bar{h} = 1$. Надалі знаки безрозмірності опущені, і всі результати представлені в безрозмірному вигляді.

Так як в задачі (1)–(4) механічні переміщення антисиметричні, а напруження симетричні відносно серединної площини, то розв’язок будемо шукати в області $x \in [0, h]$ при граничних умовах

$$u(0, t) = 0;$$

$$\left(c_{33} + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}} \right) \frac{\partial u}{\partial x}(x=h, t) - \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S h} u(x=h, t) + \frac{e_{33}}{h} V(t) = 0. \quad (11)$$

Таким чином, задача (1)–(4) звелась до задачі (5) (11) при початкових умовах (4). Загальний розв’язок хвильового рівняння (5) представляється [2] формулою Даламбера

$$u(x, t) = f(c_1 t + x) + g(c_1 t - x), \quad (12)$$

де $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ – довільні функції. Підставляючи (12) в першу граничну умову з (11), виражаємо одну шукану функцію через іншу:

$$f(c_1 t) + g(c_1 t) = 0 \Rightarrow g(z) = -f(z).$$

Тепер переміщення будемо шукати в вигляді

$$u(x, t) = f(c_1 t + x) - f(c_1 t - x). \quad (13)$$

З початкових умов

$$f(x) - f(-x) = 0 \Rightarrow f'(x) + f'(-x) = 0 \text{ при } x \in [0, h].$$

$$\begin{aligned} c_1(f'(x) - f'(-x)) = 0 &\Rightarrow f'(z) = 0 \text{ при } z \in [-h, h]. \\ \Rightarrow f(z) = \text{const} = 0 &\text{ при } z \in [-h, h]. \end{aligned} \quad (14)$$

Друга гранична умова (10) з врахуванням (13) приймає вигляд

$$\rho c_1^2(f'(c_1 t + h) + f'(c_1 t - h)) - \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^s h}(f(c_1 t + h) - f(c_1 t - h)) + \frac{e_{33}}{h}V(t) = 0. \quad (15)$$

Якщо ввести сталі $a = \frac{e_{33}^2}{\rho c_1^2 \varepsilon_{33}^s h}$, $b = \frac{e_{33}}{\rho c_1^2 h}$, $d = \frac{1}{\rho c_1^2}$ і заміну змінних

$z = c_1 t + h$, звідки $t = (z - h)/c_1$, то диференціальне рівняння (15) для визначення функції $f(z)$ при $z > h$ приймає вигляд:

$$f'(z) - a f(z) = -f'(z - 2h) - a f(z - 2h) - b V((z - h)/c_1). \quad (16)$$

Інтегруючи рівняння (16) по ділянках $(2n - 1)h \leq z < (2n + 1)h$, знаходимо функцію $f(z)$ на інтервалі $z \in [h, c_1 T + h]$, де T – довжина інтервалу часу, що розглядається. Механічні переміщення знаходяться за (13), електричний потенціал, механічні напруження і електричну індукцію – за (7)-(9) відповідно.

Аналітичний розв’язок звичайного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку (16) при конкретних функціях навантаження є досить трудомістким завданням, що пов’язано з суттєвим ускладненням правої частини рівняння з зростанням інтервалу часу, що розглядається. Застосування методу послідовних наближень до розглядання коливань п’єзокерамічних тіл ускладнено необхідністю використання великої кількості наближень. Таким чином, оптимальним способом знаходження розв’язку на досить великих інтервалах часу при довільних навантаженнях є чисельне інтегрування рівняння (16). Для цього введемо розбиття інтервалу $z \in [-h, (2n - 1)h]$, де n – найменше ціле число, що задовольняє нерівність $c_1 T + h \leq (2n - 1)h$:

$$\omega_z = \{z_i = (i - 1)\Delta z - h \mid \Delta z = h/k, k \in Z, i = 1, \dots, 2nk + 1\}.$$

Розв’язок будемо шукати в точках розбиття $f_i = f(z_i)$.

З (14) маємо, що при $1 \leq i \leq 2k + 1$ $f_i = 0$. При $i > 2k + 1$ для розв’язання можна скористатися як явною $f'_i = (f_{i+1} - f_i)/\Delta z$, так і неявною $f'_{i+1} = (f_{i+1} - f_i)/\Delta z$ схемою. Так як представлені методи мають перший порядок точності, для достатньої точності обчислень обома методами вибираємо досить велику кількість точок розбиття, наприклад, $k = 50$.

В якості прикладу розглядається п'єзокерамічний шар з кераміки PZT-4 [3], якому відповідають безрозмірні сталі $e_{33} = 0.59$, $c_{33} = 1$, $\rho = 1$, $\varepsilon_{33} = 1$. До зовнішніх електродованих поверхонь шару миттєво прикладається постійний електричний потенціал $V(t) = V_0 H(t)$, $V_0 = 1$, де $H(t)$ – функція Хевісайда.

Рис. 1 ілюструє зміну переміщень на зовнішній поверхні $x = -1$ (а) та зміну механічних напружень в серединній поверхні $x = 0$ (б) на інтервалі $t \in [0, 60]$, що є значно більшим за інтервал часу, що розглядається в [1].

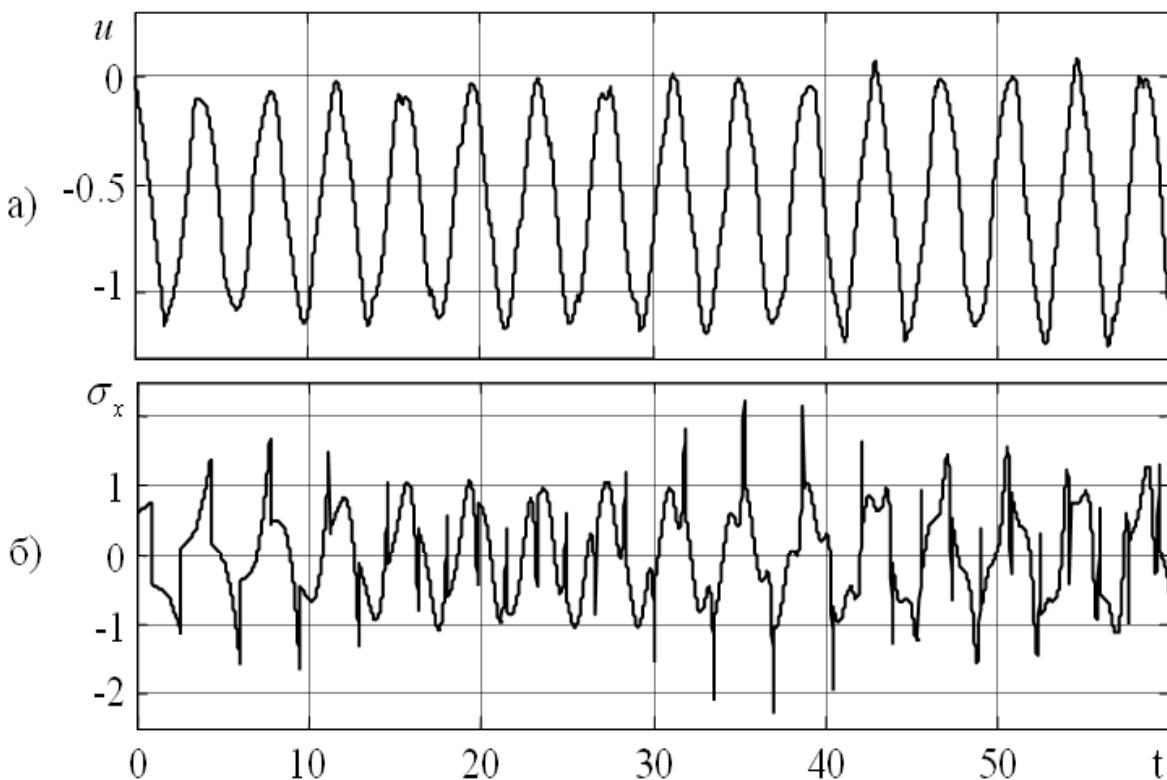


Рисунок 1

Бачимо, що на розглянутому інтервалі амплітуда кривих переміщень змінюється майже на 40%, при чому максимальні переміщення виникають при $t > 40$. Зміна напружень в часі більш значна, і максимальні стискуючі напруження $\sigma_{x\max} = 2.2$ виникають при $t = 37$.

При переході до розмірних змінних необхідно враховувати, що коефіцієнт навантаження не повинен перевищувати безрозмірного значення $V_0 = 10^{-4}$. При такому коефіцієнті максимальні розмірні значення механічних напружень досягають $\sigma_{\max} = 30.58 \text{ МПа}$, а

відповідні їм максимальні переміщення в шарі товщиною $2h = 2\text{мм}$ рівні $u_{\max} = 1.35 \cdot 10^{-4} \text{мм}$. Розглянуто інтервал часу $0 \leq t \leq 1.53 \cdot 10^{-4} \text{с}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В. М., Улитко А. Ф. Исследование динамического поведения пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении // Прикл. механика. – 1975. – 11, №1. – С. 22–27.
2. Положий Г. М. Рівняння математичної фізики. – К.: Радянська школа, 1959. – 480 с.
3. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К: Наук. думка, 1990. – 228 с.

Получено 03.05.2008 г.

ТОВЩИННІ НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ КУЛІ ПРИ ЕЛЕКТРИЧНОМУ ЗБУРЕННІ

Дана робота присвячена побудові чисельного методу розв'язання та аналізу радіальних нестационарних коливань порожнистої п'єзокерамічної поляризованої по товщині кулі при електричних збуреннях. Нехай внутрішній радіус кулі $r_1 = R - h$, зовнішній – $r_2 = R + h$. Коливання кулі описуються рівнянням руху і квазістатичним рівнянням для електричних змінних [2]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} + 2 \frac{D_r}{r} = 0 \quad (1)$$

при матеріальних співвідношеннях

$$\sigma_{rr} = c_{33}^E \frac{\partial u}{\partial r} + 2c_{13}^E \frac{u}{r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \sigma_{\alpha\alpha} = c_{13}^E \frac{\partial u}{\partial r} + (c_{11}^E + c_{21}^E) \frac{u}{r} + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial r};$$

$$D_r = e_{33} \frac{\partial u}{\partial r} + 2e_{13} \frac{u}{r} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad (2)$$

Початкові умови накладаються на переміщення та їх швидкості [3]

$$u(x, 0) = u^0(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = u^1(x). \quad (3)$$

На зовнішніх вільних від механічних навантажень електродованих поверхнях сфери задається електричний потенціал. Маємо граничні умови в вигляді:

$$\sigma_{rr}(R \pm h, t) = 0; \quad \varphi(R \pm h, t) = \pm V(t). \quad (4)$$

Початково-крайову задачу (1)-(4) зводимо до безрозмірного вигляду за допомогою позначень

$$r = R + x, \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_h}, \quad \bar{u} = \frac{u}{h}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{c_{00}}, \quad \bar{\varphi} = \varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_{00}}{c_{00} h^2}},$$

$$\bar{D}_i = \frac{D_i}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{00} \varepsilon_{00}}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{00}}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}^E}{c_{00}}, \quad \bar{\varepsilon}_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}^S}{\varepsilon_{00}}, \quad \varepsilon = \frac{h}{R}, \quad (5)$$

де ρ_{00} , c_{00} , ε_{00} , $t_h = h \sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ – нормуючі величини. Введення параметра кривизни ε дозволяє в частинному випадку при $\varepsilon = 0$ знаходити розв'язок задачі про коливання плоского п'єзокерамічного шару [1]. Надалі знаки безрозмірності опускаються.

Маємо систему рівнянь електропружності (1), (2) в безрозмірному вигляді

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon x} (\sigma_{rr} - \sigma_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial x} + \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon x} D_r = 0; \quad (6)$$

$$\sigma_{rr} = c_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{13} \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon x} u + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \sigma_{\alpha\alpha} = c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + (c_{11} + c_{21}) \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x} u + e_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x};$$

$$D_r = e_{33} \frac{\partial u}{\partial x} + e_{13} \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon x} u - \varepsilon_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (7)$$

Початкові і граничні умови (3)(4) не змінюють свого вигляду.

Для розв’язання початково-крайової задачі (6)(7)(3)(4) будується чисельна схема на основі сіткових апроксимацій і різницевих схем. В інтервалі інтегрування $x \in [-1, 1]$ вводиться розбиття Ω таким чином, що крайні точки розбиття знаходяться на відстані $\Delta x / 2$ від кінців інтервалу:

$$\Omega = \{x_i = (i - n - 0.5)\Delta x; \quad i = 0, 1, \dots, 2n + 1; \quad \Delta x = 1/n\}.$$

Механічні переміщення та електричний потенціал будемо шукати в вузлах розбиття, а механічні напруження і електрична індукція – в центрах комірок розбиття. Різницева форма рівнянь електропружності (6) записується для внутрішніх точок розбиття і приймає вигляд:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_i} (\sigma_{i+0.5}^{rr} + \sigma_{i-0.5}^{rr} - \sigma_{i+0.5}^{\alpha\alpha} - \sigma_{i-0.5}^{\alpha\alpha}) + \frac{1}{\Delta x} (\sigma_{i+0.5}^{rr} - \sigma_{i-0.5}^{rr}),$$

$$\frac{1}{\Delta x} (D_{i+0.5}^r - D_{i-0.5}^r) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_i} (D_{i+0.5}^r + D_{i-0.5}^r) = 0. \quad (8)$$

Матеріальні співвідношення (7) записуємо в центрах комірок розбиття:

$$\sigma_{i+0.5}^{rr} = \left(\frac{c_{33}}{\Delta x} + c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_{i+0.5}} \right) u_{i+1} + \left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_{i+0.5}} - \frac{c_{33}}{\Delta x} \right) u_i + \frac{e_{33}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i);$$

$$\sigma_{i+0.5}^{\alpha\alpha} = \left(\frac{c_{13}}{\Delta x} + \frac{\varepsilon(c_{11} + c_{21})}{2(1+\varepsilon x_{i+0.5})} \right) u_{i+1} + \left(c_{11} \frac{\varepsilon(c_{11} + c_{21})}{2(1+\varepsilon x_{i+0.5})} - \frac{c_{13}}{\Delta x} \right) u_i + \frac{e_{13}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i); \quad (9)$$

$$D_{i+0.5}^r = \left(\frac{e_{33}}{\Delta x} + e_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_{i+0.5}} \right) u_{i+1} + \left(e_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_{i+0.5}} - \frac{e_{33}}{\Delta x} \right) u_i - \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta x} (\varphi_{i+1} - \varphi_i).$$

Значення переміщень та електричного потенціалу в законтурних точках розбиття виключаються з рівнянь за допомогою різницевої форми граничних умов. Отримуємо наступні вирази:

$$\varphi_0 = -\varphi_1 - 2V_0(t);$$

$$\varphi_{2n+1} = -\varphi_{2n} + 2V_0(t);$$

$$\begin{aligned}
u_0 &= -\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x}\right)^{-1} \left(\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{c_{33}}{\Delta x}\right) u_1 + 2e_{33} \frac{\varphi_1 + V_0(t)}{\Delta x} \right); \\
u_{2n+1} &= -\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{c_{33}}{\Delta x}\right)^{-1} \left(\left(c_{13} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{c_{33}}{\Delta x}\right) u_{2n} + 2e_{33} \frac{V_0(t) - \varphi_{2n}}{\Delta x} \right). \quad (10)
\end{aligned}$$

Розв’язуючу систему рівнянь отримуємо шляхом підстановки в (8) співвідношень (9), (10). Для інтегрування по часу вводимо розбиття ω_i інтервалу часу $t \in [0, T]$ з кроком Δt . Розв’язок шукається за допомогою явної різницевої схеми

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\Delta t^2}, \quad (11)$$

або методом Ньюмарка

$$\ddot{u}^{k+1} = \frac{\dot{u}^{k+1} - \dot{u}^k}{\xi \Delta t} - \frac{1-\xi}{\xi} \ddot{u}^k; \quad \dot{u}^{k+1} = \frac{u^{k+1} - u^k}{\xi \Delta t} - \frac{1-\xi}{\xi} \dot{u}^k, \quad (12)$$

де ξ – параметр схеми.

При використанні схеми Ньюмарка (12) маємо систему $M \cdot U^{k+1} = F^{k+1}$, з якої всі шукані величини знаходяться одночасно. При застосуванні явної схеми (11) механічні переміщення на $k+1$ -му часовому шарі знаходяться через значення параметрів електромеханічного стану на попередніх часових шарах за допомогою стандартних виразів методу, тоді як електричний потенціал знаходиться з системи алгебраїчних рівнянь, що отримується з різницевої форми квазістатичного рівняння для електричної індукції.

Проаналізувавши результати обчислень, встановлено, що для метода Ньюмарка оптимальним є значення параметра $\xi = 0.5$. Розв’язки обома методами співпали з точністю 99% при $n=31$, $\Delta t = 0.0125$. Відмітимо, що метод Ньюмарка як абсолютно стійкий метод дає достатню збіжність і при значно більших ($\Delta t = 0.0250$) значеннях кроку по часовій координаті, ніж явна схема.

Розглянемо задачу про вимушені нестационарні коливання кулі з кераміки PZT-4 [2] з параметром кривизни $\varepsilon = 0.1$ при нульових початкових умовах та навантаженні електричним потенціалом, що описується функцією $V(t) = V_0 H(t)$, де $H(t)$ – функція Хевісайда. За нормуючі величини вибрано ρ , c_{33}^E , ε_{33}^S , $t_h = h\sqrt{\rho/c_{33}^E}$. При переході до розмірних величин для фізичності задачі вважаємо $V_0 = 10^{-4}$, $h = 1 \text{ мм}$.

На рис. 1 представлена динаміка зміни радіальних переміщень u різних точок стінки кулі. Бачимо, що коливання серединної поверхні $x=0$ описуються гладкими кривими з періодом $T_u \approx 43$, а переміщення зовнішніх поверхонь, крім коливань з періодом T_u , здійснюють коливання відносно серединної поверхні з періодом, що є подвоєним часом пробігу електропружної хвилі товщини стінки кулі. Період коливань серединної поверхні залежить від параметра кривизни ε . Відмітимо, що прикладене навантаження викликає періодичне розширення кулі з максимальним розмірним відхиленням серединної поверхні $u_{\max} = 11 \cdot 10^{-4} \text{ мм}$.

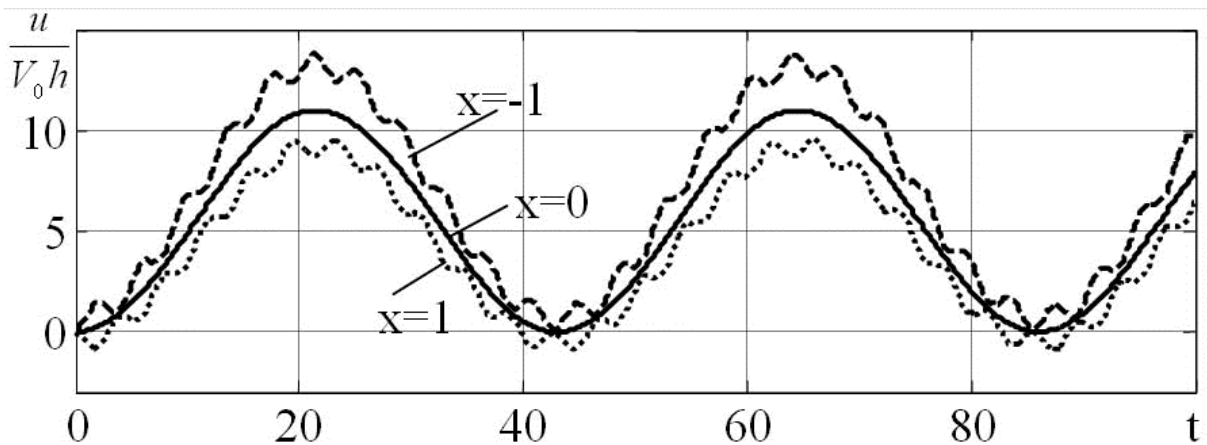


Рисунок 1

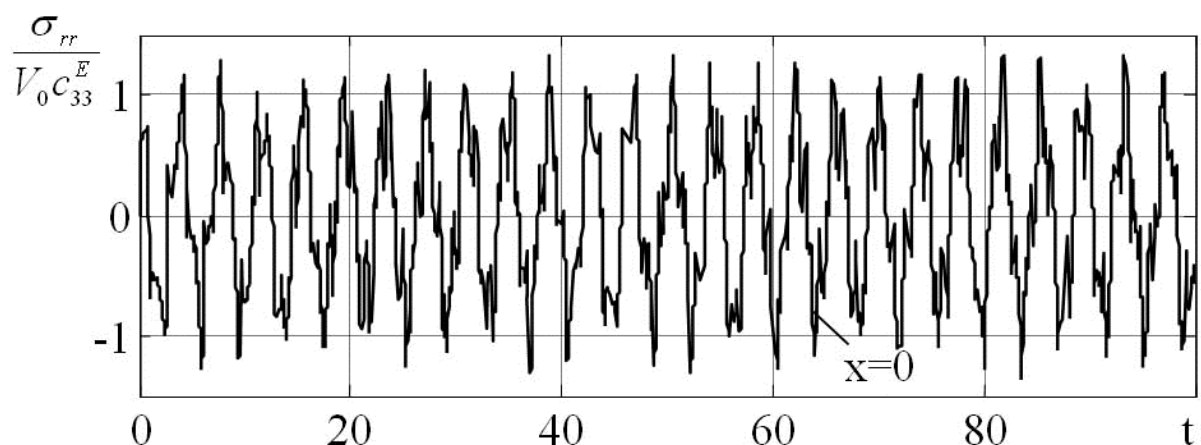


Рисунок 2

Радіальні напруження максимальні на серединній поверхні. Рис. 2 ілюструє зміну радіальних напружень при $x=0$. Бачимо, що

напруження в перерізі виникають миттєво згідно до розподілу електричного потенціалу в момент прикладання навантаження, і з часом досягають максимального розмірного значення $\sigma_{\max} = 18 \text{ МПа}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Жарий О. Ю., Улитко А. Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. К.: Выща школа, 1989. – 184 с.
2. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К: Наук. думка, 1990. – 228 с.
3. Шульга М. О. Про варіаційний принцип Гамільтона-Остроградського і початково-крайові динамічні задачі електропружності // Доп. НАН України.—2008. – № 6.—С. 36-45.

Получено 26.03.2008 г.

УДК 534.21:537.226.86:537.634

В.В. Левченко, Л.П. Зинчук

ОБЪЕМНЫЕ ВОЛНЫ СДВИГА В МЕТАЛЛИЗИРОВАННЫХ ФЕРРИТ-ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Введение. Развитие современной техники обуславливает необходимость исследования физических процессов в структурах с усложненными физико-механическими свойствами. В частности, это касается композиционных материалов, образованных чередованием пьезоэлектрической и магнитострикционной компонент. Сочетание ферритмагнитных и пьезоэлектрических слоев в радиоэлектронных устройствах обеспечивает дополнительные способы управления распространением сигналов, в первую очередь, благодаря взаимодействию механической, электрической и магнитной составляющей.

Значительная часть работ по изучению акустических свойств слоистых сред посвящена исследованию объемных и поверхностных колебаний в регулярно-слоистых системах, обзор которых можно найти в [7,8,10]. Магнитоупругие и электроупругие сдвиговые волны в слоисто-периодических структурах рассматривались в [1-5,9]. В [6] построены дисперсионные уравнения для нормальных волн, распространяющихся в структурах феррит-пьезоэлектрик. Целью настоящей работы является исследование влияния металлизации и геометрических параметров порождающего пакета слоев на условия существования магнитоэлектроупругих объемных волн сдвига в регулярно-слоистых феррит-пьезоэлектрических средах.

Постановка задачи и метод решения. Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ рассматриваемая слоистая структура моделируется периодическим повторением вдоль оси ox «порождающего пакета», состоящего из трех слоев: пьезоэлектрического слоя класса $6mm$ толщины h_{p1} , слоя феррита кубической симметрии толщины h_f и второго пьезоэлектрического слоя того же класса толщины h_{p2} . Предполагается, что поверхности пакета металлизированы, при этом механические свойства поверхностей не учитываются, а принимается во внимание лишь их экранирующий эффект. Ось ox декартовой системы координат совмещена с соответствующими

кристаллографическими осями феррита и пьезоэлектрика и перпендикулярна плоскостям раздела слоев, а плоскость oz совпадает с границей первого слоя в пакете. Предположим, что волна в исследуемом пространстве распространяется вдоль оси oy . Постоянное магнитное поле H_0 направлено вдоль оси oz , которая является и осью симметрии для пьезоэлектрика. Волновой процесс в слоях феррита и пьезоэлектрика описывается соответственно линеаризированными системами уравнений магнито- и электроупругости.

В безобменном и магнитостатическом приближениях распространение гармонических (предполагается зависимость по времени $\exp(-i\omega t)$) магнитоэлектроупругих волн сдвига в пьезоэлектрических слоях описывается системой [3]

$$\rho_p \partial_t^2 u_p = c_{44,p}^* \Delta u_p, \quad \Delta \psi_p = 0, \quad \Delta \varphi_{p0} = 0. \quad (1)$$

а в слоях феррита соответственно системой [4]

$$\rho_f \partial_t^2 u_f = c_{44,f}^* \Delta u_f, \quad \Delta \psi_f = 0, \quad \Delta \varphi_{f0} = 0. \quad (2)$$

В системах уравнений (1) и (2) приняты обозначения:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_H(\omega_H + \omega_M)}, \quad c_{44,f}^* = c_{44,f} \left(1 + \gamma^2 b^2 H_0 / \left(c_{44,f} M (\omega^2 - \omega_0^2) \right) \right),$$

$$c_{44,p}^* = c_{44,p} + e_{15,p}^2 / \varepsilon_{11,p}, \quad \omega_H = \gamma H_0, \quad \omega_M = 4\pi\gamma M, \quad \gamma - \text{гиромангнитная}$$

постоянная, M – намагниченность насыщения феррита,

$$\psi_f = \varphi_f - \left(4\pi\gamma^2 b H_0 / (\omega^2 - \omega_0^2) \right) u_f, \quad \psi_p = \varphi_p - (e_{15,p} / \varepsilon_{11,p}) u_p, \quad b -$$

магнитоупругая постоянная, φ_f, φ_{f0} – магнитные потенциалы

соответственно в феррите и пьезоэлектрике, φ_p, φ_{p0} –

электростатические потенциалы соответственно в пьезоэлектрике и

феррите. В дальнейшем будем обозначать параметры,

соответствующие различным пьезоэлектрическим слоям в пакете,

соответственно с индексами $p1, p2$ и $f0,1, f0,2$.

Решение системы уравнений (1)–(2) в каждом из слоев будем искать в виде

$$u_{p1} = B_{p1,n}^{(1)} \sin \Omega_{p1} \left(x - x_{n,p1}^* \right) + B_{p1,n}^{(2)} \cos \Omega_{p1} \left(x - x_{n,p1}^* \right),$$

$$\varphi_{f0,1} = A_{p1,n}^{(1)} \operatorname{sh} k \left(x - x_{n,p1}^* \right) + A_{p1,n}^{(2)} \operatorname{ch} k \left(x - x_{n,p1}^* \right),$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{p1} &= D_{p1,n}^{(1)} \operatorname{sh} k \left(x - x_{n,p1}^* \right) + D_{p1,n}^{(2)} \operatorname{ch} k \left(x - x_{n,p1}^* \right), \\
 x_{n-1,p2}^* &< x < x_{n,p1}^*; \\
 u_f &= B_{f,n}^{(1)} \sin \Omega_f \left(x - x_{n,f}^* \right) + B_{f,n}^{(2)} \cos \Omega_f \left(x - x_{n,f}^* \right), \\
 \psi_f &= A_{f,n}^{(1)} \operatorname{sh} k \left(x - x_{n,f}^* \right) + A_{f,n}^{(2)} \operatorname{ch} k \left(x - x_{n,f}^* \right), \\
 \varphi_{p0} &= D_{f,n}^{(1)} \operatorname{sh} k \left(x - x_{n,f}^* \right) + D_{f,n}^{(2)} \operatorname{ch} k \left(x - x_{n,f}^* \right), \\
 x_{n,p1}^* &< x < x_{n,f}^*; \\
 u_{p2} &= B_{p2,n}^{(1)} \sin \Omega_{p2} \left(x - x_{n,p2}^* \right) + B_{p2,n}^{(2)} \cos \Omega_{p2} \left(x - x_{n,p2}^* \right), \\
 \varphi_{f0,2} &= A_{p2,n}^{(1)} \operatorname{sh} k \left(x - x_{n,p2}^* \right) + A_{p2,n}^{(2)} \operatorname{ch} k \left(x - x_{n,p2}^* \right), \\
 \psi_{p2} &= D_{p2,n}^{(1)} \operatorname{sh} k \left(x - x_{n,p2}^* \right) + D_{p2,n}^{(2)} \operatorname{ch} k \left(x - x_{n,p2}^* \right), \\
 x_{n,f}^* &< x < x_{n,p2}^*; \\
 n &= 0, \pm 1, 2, \dots,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где $x_{n,p1}^* = (n-1)h + h_{p1}$, $x_{n,f}^* = (n-1)h + h_{p1} + h_f$, $x_{n,p2}^* = nh$,
 $h = h_{p1} + h_f + h_{p2}$, $\Omega_f = \sqrt{k_f^2 - k^2}$, $k_f^2 = \omega^2 / c_f^2$, $c_f^2 = c_{44,f}^* / \rho_f$,
 $\Omega_{pj} = \sqrt{k_{pj}^2 - k^2}$, $k_{pj}^2 = \omega^2 / c_{pj}^2$, $c_{pj}^2 = c_{44,pj}^* / \rho_{pj}$, ($j=1,2$).

В решениях (3) множитель $\exp(i\delta ky - i\omega t)$ опущен. Величина $\delta = \pm 1$, что соответствует распространению волн в положительном или отрицательном направлении оси oy соответственно.

Будем предполагать, что на внутренних плоскостях раздела свойств пакета выполняются условия [3,5]:

(граница пьезоэлектрик – феррит)

$$\begin{aligned}
 c_{44,f}^* \partial_x u_f + b^* \partial_x \psi_f &= c_{44,pj}^* \partial_x u_{pj} + b^* \partial_x \varphi_{f0} + e_{15,pj} \partial_x \psi_{pj}, \quad u_f = u_{pj}, \\
 \psi_f + C^{(4)} u_f &= \varphi_{f0,j}, \quad C_0^{(1)} \partial_x \psi_f + C_0^{(2)} \partial_y \psi_f + C_0^{(3)} \partial_y u_f = \partial_x \varphi_{f0,j}, \\
 \varphi_{p0} &= \varphi_{pj}, \quad \varepsilon_{11,f} \partial_x \varphi_{p0} = \varepsilon_{11,p} \partial_x \psi_{pj}, \quad (j=1,2);
 \end{aligned} \tag{4}$$

(граница пьезоэлектрик 1 – металл – пьезоэлектрик 2)

$$\begin{aligned}
 c_{44,p1}^* \partial_x u_{p1} + e_{15,p1} \partial_x \psi_{p1} &= c_{44,p2}^* \partial_x u_{p2} + e_{15,p2} \partial_x \psi_{p2}, \\
 u_{p1} = u_{p2}, \quad \varphi_{pj} &= 0, \quad \partial_x \varphi_{f0,j} = 0 \quad (j=1,2).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя решения (3) в граничные условия (4), (5), получим систему уравнений относительно неизвестных $\vec{B}_{p1,n} = \text{col}\left(B_{p1,n}^{(1)}, B_{p1,n}^{(2)}\right)$, $\vec{B}_{p2,n} = \text{col}\left(B_{p2,n}^{(1)}, B_{p2,n}^{(2)}\right)$, $\vec{B}_{f,n} = \text{col}\left(B_{f,n}^{(1)}, B_{f,n}^{(2)}\right)$, $\vec{A}_{p1,n} = \text{col}\left(A_{p1,n}^{(1)}, A_{p1,n}^{(2)}\right)$, $\vec{A}_{p2,n} = \text{col}\left(A_{p2,n}^{(1)}, A_{p2,n}^{(2)}\right)$, $\vec{A}_{f,n} = \text{col}\left(A_{f,n}^{(1)}, A_{f,n}^{(2)}\right)$, $\vec{D}_{p1,n} = \text{col}\left(D_{p1,n}^{(1)}, D_{p1,n}^{(2)}\right)$, $\vec{D}_{p2,n} = \text{col}\left(D_{p2,n}^{(1)}, D_{p2,n}^{(2)}\right)$, $\vec{D}_{f,n} = \text{col}\left(D_{f,n}^{(1)}, D_{f,n}^{(2)}\right)$ вида

$$\begin{aligned} & N(a_{p1}; \theta_{p1}) \vec{B}_{p1,n} + N_u(e_{15,p1}; \tilde{k}_{p1}) \vec{D}_{p1,n} + N_{u2}(b^*; \tilde{k}_{p1}) \vec{A}_{p1} = \\ & = N(a_f; 0) \vec{B}_{f,n} + N_{u2}(b^*; 0) \vec{A}_{f,n}, \\ & N(a_f; \theta_f) \vec{B}_{f,n} + N_{u2}(b^*; \tilde{k}_f) \vec{A}_{f,n} = \\ & = N(a_{p2}; 0) \vec{B}_{p2,n} + N_u(e_{15,p2}; 0) \vec{D}_{p2,n} + N_{u2}(b^*; 0) \vec{A}_{p2,n}, \quad (6) \\ & N(a_{p2}; \theta_{p2}) \vec{B}_{p2,n} + N_u(e_{15,p2}; \tilde{k}_{p2}) \vec{D}_{p2,n} = \\ & = N(a_{p1}; 0) \vec{B}_{p1,n+1} + N_u(e_{15,p1}; 0) \vec{D}_{p1,n+1}, \\ & M_{p1}(\tilde{k}_{p1}) \vec{A}_{p1,n} = M_f(b; 0) \vec{A}_{f,n} + N_{fu}(b; 0) \vec{B}_{f,n}, \\ & M_f(b; \tilde{k}_f) \vec{A}_{f,n} + N_{fu}(b; \theta_f) \vec{B}_{f,n} = M_{p2}(0) \vec{A}_{p2,n}, \\ & \vec{M}_{p2}^{(2)}(\tilde{k}_{p2}) \vec{A}_{p2,n} = 0, \quad \vec{M}_{p1}^{(2)}(0) \vec{A}_{p1,n+1} = 0, \\ & E(\varepsilon_{11,p1}; \tilde{k}_{p1}) \vec{D}_{p1,n} + N_{pu}(e_{15,p1}; \tilde{k}_{p1}) \vec{B}_{p1,n} = E(\varepsilon_{11,f}; 0) \vec{D}_{f,n}, \\ & E(\varepsilon_{11,f}; \tilde{k}_f) \vec{D}_{f,n} = E(\varepsilon_{11,p2}; 0) \vec{D}_{p2,n} + N_{pu}(e_{15,p2}; 0) \vec{B}_{p2,n}, \\ & \vec{E}^{(2)}(\varepsilon_{11,p1}; 0) \vec{D}_{p1,n+1} + \vec{N}_{pu}^{(2)}(e_{15,p1}; 0) \vec{B}_{p1,n+1} = 0, \\ & \vec{E}^{(2)}(\varepsilon_{11,p2}; \tilde{k}_{p2}) \vec{D}_{p2,n} + \vec{N}_{pu}^{(2)}(e_{15,p2}; \theta_{p2}) \vec{B}_{p2,n} = 0, \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} & N(a_{pj}; \theta_{pj}) = \begin{bmatrix} a_{pj} \cos \theta_{pj} & a_{pi} \sin \theta_{pj} \\ -\sin \theta_{pj} & \cos \theta_{pj} \end{bmatrix}, \\ & N_u(e_{15,pj}; \tilde{k}_{pj}) = \begin{bmatrix} ke_{15,pj} ch \tilde{k}_{pj} & -ke_{15,pj} sh \tilde{k}_{pj} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ & N(a_f; \theta_f) = \begin{bmatrix} a_f \cos \theta_f & -a_f \sin \theta_f \\ -\sin \theta_f & \cos \theta_f \end{bmatrix}, \quad N_{u2}(b^*; \tilde{k}_f) = \begin{bmatrix} kb^* ch \tilde{k}_f & -kb^* sh \tilde{k}_f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$N_{pu}(e_{15,pj};\theta_{pj})=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{e_{15,pj}}{\varepsilon_{11,pj}}\sin\theta_{pj} & \frac{e_{15,pj}}{\varepsilon_{11,pj}}\cos\theta_{pj} \end{bmatrix},$$

$$E(\varepsilon_{11,pj};\tilde{k}_{pj})=\begin{bmatrix} \varepsilon_{11,pj}ch\tilde{k}_{pj} & -\varepsilon_{11,pj}sh\tilde{k}_{pj} \\ sh\tilde{k}_{pj} & ch\tilde{k}_{pj} \end{bmatrix},$$

$$M_f(b;\tilde{k}_f)=\begin{bmatrix} C^{(1)}ch\tilde{k}_f-C^{(2)}sh\tilde{k}_f & -C^{(1)}sh\tilde{k}_f+C^{(2)}ch\tilde{k}_f \\ -sh\tilde{k}_f & ch\tilde{k}_f \end{bmatrix},$$

$$M_{pj}(\tilde{k}_{pj})=\begin{bmatrix} kch\tilde{k}_{pj} & -ksh\tilde{k}_{pj} \\ -sh\tilde{k}_{pj} & ch\tilde{k}_{pj} \end{bmatrix}, \quad N_{fu}(b;\theta_f)=\begin{bmatrix} -C^{(3)}\sin\theta_f & C^{(3)}\cos\theta_f \\ -C^{(4)}\sin\theta_f & \cos\theta_f \end{bmatrix},$$

$$a_{pj}=c_{44,pj}^*\Omega_{pj}, \quad \tilde{k}_{pj}=kh_{pj}, \quad (j=1,2), \quad a_f=c_{44,f}^*\Omega_f, \quad \tilde{k}_f=kh_f,$$

$b^*=b/4\pi M$, $C^{(1)}=kC_0^{(1)}$, $C^{(2)}=i\sigma kC_0^{(2)}$, $C^{(3)}=i\sigma kC_0^{(3)}$. Векторы-строки $\vec{E}^{(i)}$, $\vec{N}_{pu}^{(i)}$, $\vec{M}_{p1}^{(i)}$, $\vec{M}_{p2}^{(i)}$ – образованы i -й строкой соответствующей матрицы, а коэффициенты $C_0^{(1)}$, $C_0^{(2)}$, $C_0^{(3)}$, $C^{(4)}$ представлены в работе [5].

Выполнив ряд преобразований, можно установить следующие соотношения между неизвестными

$$\vec{D}_{p1,n}=P_{11}\vec{B}_{p1,n}+P_{12}\vec{B}_{p2,n}, \quad \vec{D}_{p2,n}=P_{21}\vec{B}_{p1,n}+P_{22}\vec{B}_{p2,n},$$

$$\vec{A}_{p1,n}=P_{p1}\vec{B}_{f,n}, \quad \vec{A}_{p2,n}=P_{p2}\vec{B}_{f,n}, \quad \vec{A}_{f,n}=P_f\vec{B}_{f,n},$$

где элементы матриц P_f, P_{p1}, P_{p2} введены в [5], P_{lm}^{ij} , элементы матриц P_{lm} , имеют вид

$$\vec{P}_{11}^{(1)}=\frac{1}{\varepsilon_{11,p1}E_{pe}^{21}}\left\{\vec{E}^0-\vec{E}_{p2}^{(2)}E_0N_{pu}\left(e_{15,p1}^*;\theta_{p1}\right)\right\},$$

$$\vec{P}_{12}^{(1)}=\frac{1}{\varepsilon_{11,p1}E_{pe}^{21}}\left\{\vec{E}_{p2}^{(2)}N_{pu}\left(e_{15,p2}^*;0\right)-\vec{N}_{pu}^{(2)}\left(e_{15,p2}^*;\theta_{p2}\right)\right\},$$

$$P_{11}^{21}=P_{12}^{21}=P_{12}^{22}=0, \quad P_{11}^{22}=-e_{15,p1}^*e_{15,pj}^*=\frac{ke_{15,pj}}{\varepsilon_{11,pj}},$$

$$P_{21}=E^{-1}(\varepsilon_{11,p2};0)E_0E(\varepsilon_{11,p1};\tilde{k}_{p1})P_{11}+N_{pu}\left(e_{15,p1}^*;\theta_{p1}\right),$$

$$P_{22}=E^{-1}(\varepsilon_{11,p2};0)\left(E_0E(\varepsilon_{11,p1};\tilde{k}_{p1})P_{12}-N_{pu}\left(e_{15,p2}^*;0\right)\right),$$

$$E_{pe}=E_{p1}E_0E_{p2}, \quad E_{pj}=E(\varepsilon_{11,pj};\tilde{k}_{pj})E^{-1}(\varepsilon_{11,pj};0),$$

$$E_0 = E(\varepsilon_{11,f}; \tilde{k}_f) E^{-1}(\varepsilon_{11,f}; 0), \quad \bar{E}^{(0)} = [0; 1],$$

а векторы-строки $\bar{E}_{pj}^{(i)}$, $\bar{N}_{pu}^{(i)}$, $\bar{P}^{(i)}$ – образованы i -й строкой соответствующей матрицы.

Это позволяет свести систему уравнений (6) к виду

$$\begin{aligned} N^*(a_{p1}; \theta_{p1}) \bar{B}_{p1,n} &= N^*(a_f; 0) \bar{B}_{f,n}, \\ N^*(a_f; \theta_f) \bar{B}_{f,n} &= N^*(a_{p2}; 0) \bar{B}_{p2,n}, \\ N^*(a_{p2}; \theta_{p2}) \bar{B}_{p2,n} &= N^*(a_{p1}; 0) \bar{B}_{p1,n+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned} N^*(a_{p1}; \theta_{p1}) &= N(a_{p1}; \theta_{p1}) + N_u(e_{15,p1}; \tilde{k}_{p1}) P_{11} + N_u(e_{15,p1}; \tilde{k}_{p1}) P_{12} K, \\ N^*(a_{p1}; 0) &= N(a_{p1}; 0) + N_u(e_{15,p1}; 0) P_{11} + N_u(e_{15,p1}; \tilde{k}_{p1}) P_{21} K^{-1}, \\ N^*(a_{p2}; \theta_{p2}) &= N(a_{p2}; \theta_{p2}) + N_u(e_{15,p2}; \tilde{k}_{p2}) P_{22} + N_u(e_{15,p2}; \tilde{k}_{p2}) P_{21} K^{-1}, \\ N^*(a_{p2}; 0) &= N(a_{p2}; 0) + N_u(e_{15,p2}; 0) P_{22} + N_u(e_{15,p2}; \tilde{k}_{p2}) P_{12} K, \\ K &= (N(a_f; \theta_f) (N(a_f; 0))^{-1} N(a_{p1}; \theta_{p1}) - N_u(e_{15,p2}; 0) P_{21}) \times \\ &\times (N(a_{p2}; 0) - N(a_f; \theta_f) (N(a_f; 0))^{-1} N_u(e_{15,p1}; \tilde{k}_{p1}) P_{12})^{-1}, \\ N^*(a_f; \theta_f) &= N(a_f; \theta_f) + N_{u2}(b^*; \tilde{k}_f) P_f - N_{u2}(b^*; 0) P_{p2}, \\ N^*(a_f; 0) &= N(a_f; 0) + N_{u2}(b^*; 0) P_f - N_{u2}(b^*; \tilde{k}_{p1}) P_{p1}. \end{aligned}$$

Такое представление системы уравнений дает возможность применить подход, развитый в [7], и позволяет свести вопрос о существовании объемных волн в рассматриваемой структуре к исследованию свойств характеристического уравнения матрицы второго порядка вида

$$N_{pf} = N^*(a_{p1}; \theta_{p1}) \left(N^*(a_{p1}; 0) \right)^{-1} N^*(a_f; \theta_f) \left(N^*(a_f; 0) \right)^{-1} N^*(a_{p2}; \theta_{p2}) \left(N^*(a_{p2}; 0) \right)^{-1}.$$

Анализ результатов и выводы. В общем случае $\det N_{pf} \neq 1$, а это означает, что характеристическое уравнение матрицы N_{pf} не будет возвратным. Невозвратность характеристического уравнения обусловлена наличием в пакете слоя с магнитоупругими свойствами. В работах [4,5,7] показано, что необходимым условием существования объемных волн в структурах, подобных рассматриваемой, является требование равенства единице определителя передаточной матрицы порождающего пакета слоев.

Анализ выражения $\det N_{pf}$ показал, что в случае равенства толщин пьезоэлектрических слоев $h_{p1} = h_{p2}$ значение $\det N_{pf} = 1$, а характеристическое уравнение матрицы N_{pf} становится возвратным. При этом совпадения механических свойств пьезоэлектрических слоев не требуется. В этих случаях условие существования объемных магнитоэлектрорупругих волн имеет вид

$$|b_{pf}| \leq 1, b_{pf} = \text{Spur} N_{pf} / 2.$$

Отметим также, что при равенстве толщин обрамляющих пьезоэлектрических слоев распространение магнитостатических волн обладает свойством взаимности. Таким образом, можно заключить, что характеристическое уравнение передаточной матрицы для магнитоэлектрорупругих волн будет возвратным, если распространение магнитостатических волн в структуре будет взаимным.

Анализ выражения $\det N_{pf}$ в общем случае позволяет заключить, что отличие $\det N_{pf}$ от единицы зависит от несимметричности свойств пакета относительно плоскости $x = h_{p1} + h_f / 2$, а величина $|\det N_{pf} - 1|$ отличается от единицы в 3-5 знаке после запятой во всем диапазоне частот, за исключением окрестностей частот взаимодействия волн, где отличие от единицы существенно.

Для понимания особенностей распространения волн, обусловленных наличием спектров упругих и магнитостатических волн, важно знать характер формирования этих спектров в рассматриваемых структурах. Отметим, что решение дисперсионных уравнений для магнитостатических волн в нашем случае локализовано в диапазоне частот $\left[\omega_H + \frac{\omega_M}{2}; \omega_H + \omega_M \right]$. При отсутствии металлизации в структуре будут существовать объемные магнитостатические волны, локализованные в интервале $\left[\omega_0; \omega_H + \frac{\omega_M}{2} \right]$. Если $h_{pi} \rightarrow 0$, то дисперсионные кривые для магнитостатических волн вырождаются в прямую $\omega = \omega_H + \omega_M$. Объемные магнитоупругие волны будут существовать и при нулевых толщинах пьезоэлектрических слоев, а основные эффекты

взаимодействия волн будут иметь место в окрестности частоты $\omega_H + \omega_M$. В этом проявляется один из эффектов металлизации. В случае роста отношения h_{pi}/h_f дисперсионная кривая для магнитостатических волн зарождается при частотах все более близких к частоте $\omega_H + \frac{\omega_M}{2}$.

Анализ результатов позволяет выявить ряд особенностей распространения объемных волн. В магнитоэлектростатическом случае дисперсионная кривая для магнитостатических волн распадается на две кривые $b_{pf}=1$ и $b_{pf}=-1$. Вне окрестностей границ зон пропускания эти кривые практически сливаются. В окрестности этих зон происходит их расщепление, и кривые, соответствующие одинаковому значению b_{pf} , взаимодействуют. После расталкивания высшая дисперсионная кривая переходит в низшую, и с удалением от точки расталкивания принимает наклон (групповую скорость) низшей.

Таким образом, в работе получены дисперсионные соотношения для объемных магнитоэлектростатических волн сдвига и исследовано влияние металлизации и геометрических параметров порождающего пакета слоев на условия существования таких волн в регулярно-слоистых феррит-пьезоэлектрических средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зинчук Л.П., Подлипенец А.Н., Шульга Н.А. Электроупругие сдвиговые волны в стратифицированной периодической среде // Прикл. мех. – 1988. – 24, № 3. – С. 45–51.
2. Зинчук Л.П., Левченко В.В., Шульга Н.А. Распространение объемных электроупругих волн сдвига в регулярно-слоистой среде типа металл – пьезоэлектрик // Мат. методы и физ. – мех. поля. – 1989. – Вып. 30. – С.4–8.
3. Зинчук Л.П., Подлипенец А.Н. Поверхностные сдвиговые волны в слоистых композициях “металл-пьезокерамика” // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 11. – С.54–61.
4. Левченко В.В. Магнитоупругие объемные волны сдвига в регулярно-слоистых феррит-диэлектрических структурах // Прикл. механика. -1990. –26, №2. –С. 36–41.
5. Левченко В.В. О влиянии металлизации на распространение объемных магнитоупругих волн сдвига в периодических структурах // Прикл. механика. -2003. –38, № 12. –С. 53–60.
6. Левченко В.В., Зинчук Л.П. Распространение магнитоэлектростатических сдвиговых волн в слоисто-периодических структурах типа «феррит-пьезоэлектрик» // Системні технології.

- Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Вип. 4 (51). – Дніпропетровськ, 2007. – С. 21–26.
7. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
 8. Шульга Н.А., Подлипенец А.Н. Объемные волны в слоистых композитах // Динамика и устойчивость материалов – К.: Наук. думка, 1993. – С. 35–83. (Механика композитов: В 12 т. Т.2).
 9. Шульга М.О., Левченко В.В. Поверхневі магнітопружні хвилі в ферит-метал-діелектричній регулярно-шаруватій структурі // Доп. НАНУ– 1996. – № 6. – С. 63 – 67.
 10. Шульга Н.А. Распространение связанных волн в периодически-неоднородных средах при взаимодействии с электромагнитным полем // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 10. – С. 38 – 68.

Получено 17.04.2008 г.

УДК 534.01;62.4.01

И.И. Аникьев, М.И. Михайлова, А.Т. Забуга, Н.П. Плахтиенко,
Е.А. Сущенко**О КОЛЕБАНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ
ДЕМПФЕРОМ В МЕХАНИЗМЕ СЕЙСМОИЗОЛЯЦИИ**

Введение. Со второй половины 20 столетия для защиты сооружений от землетрясений стали использоваться механизмы сейсмоизоляции (МС) [1–5]. Такие механизмы предназначены для уменьшения жесткости связи защищаемых объектов с грунтом и внесения дополнительных элементов диссипации энергии сейсмических возмущений. В последние десятилетия прошлого столетия стали развиваться подходы для сейсмозащиты сооружений, основанные на использовании в МС управляемых демпферов полуактивного типа.

Управляемое демпфирующее воздействие достаточно простой конструкции можно реализовать используя демпфирующие устройства, содержащие соленоиды с ферромагнитными сердечниками. В предлагаемой работе теоретико-экспериментальным способом устанавливается характеристика контактной силы взаимодействия сердечника соленоида с ферромагнитным телом и строится математическая модель вынужденных колебаний системы с управляемым электромагнитным фрикционным демпфером объекта с одной степенью свободы при двух различных законах управления током соленоида.

Расчетная схема и модель колебательной системы с электромагнитным фрикционным демпфером, управляемым по способу обратной связи. На рис. 1 изображена колебательная система, состоящая из твердого тела, имеющего сферические выемки радиуса R , установленного на сферические опорные элементы радиуса $r < R$, позволяющие вертикальные и горизонтальные перемещения несомого тела по горизонтальной ферромагнитной поверхности несущей платформы. Тело несет соленоид с ферромагнитным сердечником, свободно скользящим по вертикальной направляющей и контактирующим с шероховатой горизонтальной поверхностью.

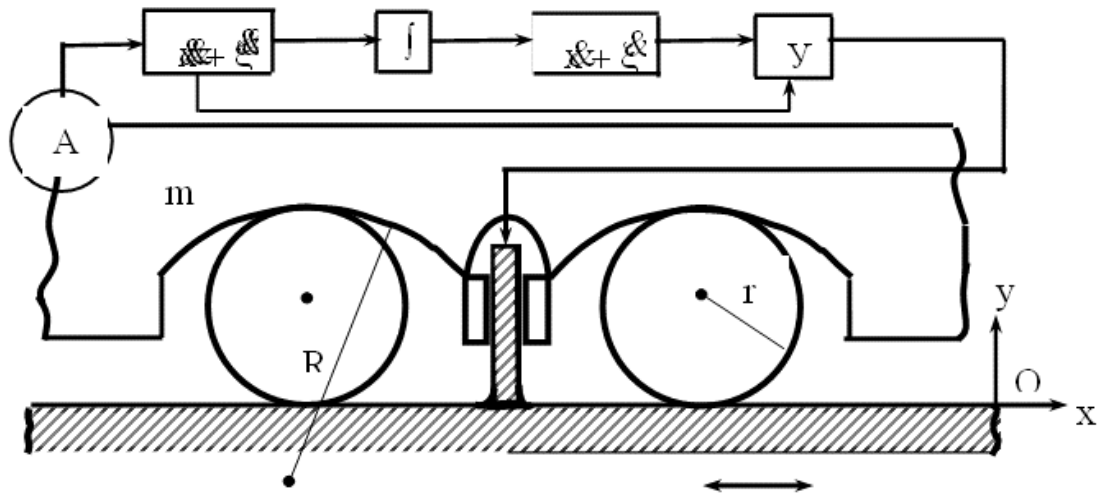


Рисунок 1

При наличии тока I в обмотке соленоида его башмак прижимается к плоскости скольжения с силой $N(I)$. В результате при движении массы возникает сила трения скольжения F_T , направленная против вектора горизонтальной скорости перемещения массы

$$F_T = f N(I) \operatorname{sign} \dot{x}, \quad (1.1)$$

где f – коэффициент трения скольжения, $N(I) = N(-I)$ – непрерывная четная функция аргумента I , $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ – горизонтальная составляющая скорости перемещения тела. С помощью системы управления с контуром обратной связи [3], содержащем акселерометр, интегратор и усилитель, величина тока в обмотке соленоида может быть сделана пропорциональной абсолютному ускорению или скорости. Для получения прозрачных результатов будем считать его апериодическим звеном первого порядка [3] и содержащим один идеальный интегратор. В этом случае связь между током в соленоиде и измеряемым параметром движения твердого тела представима в виде

$$T \frac{dI}{dt} + I = \begin{cases} K_v \frac{d}{dt}(x + \xi(t)), \\ K_a \frac{d^2}{dt^2}(x + \xi(t)), \end{cases} \quad (1.2)$$

где $T, K_a(K_v)$ – постоянные времени и коэффициент усиления сигнала акселерометра (велосиметра) контура системы управления током, $\xi(t)$ – известный закон переносного движения несущей платформы. Первое соотношение (1.2) отвечает управлению по скорости, второе – по ускорению. Дополним соотношения (1.2) контура управления дифференциальным уравнением горизонтального движения системы тел

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f N(I) \operatorname{sign} \frac{dx}{dt} + cx = -m \frac{d^2 \xi}{dt^2}, \quad (1.3)$$

где m – приведенная к горизонтальной оси масса всех подвижных элементов системы, $c = \frac{gm_0}{4(R-r)}$, m_0 – масса твердого тела, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Эта формула следует из [5].

Система уравнений (1.2), (1.3) при $T \neq 0$ может быть численно проинтегрирована при функции $N(I)$, удовлетворяющей условию Липшица.

Таким образом, для расчета колебаний тела, согласно уравнений (1.2), (1.3), необходимо выбрать характеристику силы $N(I)$ контактного взаимодействия соленоида с поверхностью несущей платформы.

Экспериментальное определение силы притяжения соленоида к ферромагнитному телу. Для магнитов и соленоидов произвольной формы никаких простых зависимостей силовых характеристик от магнитной проницаемости магнетика и индукции указать нельзя [4]. Это положение прежде всего касается силы притяжения соленоидом ферромагнитных тел. Поэтому определение сил взаимодействия соленоидов с ферромагнитными конструктивными элементами может быть выполнено исключительно экспериментально только для объектов заданной геометрической формы. Для иллюстрации описанной ситуации построим экспериментально характеристику $N(I)$ силы притяжения конкретным соленоидом ферромагнитных тел в зависимости от протекающего в нем тока. Схема опытов приведена на рис. 2.

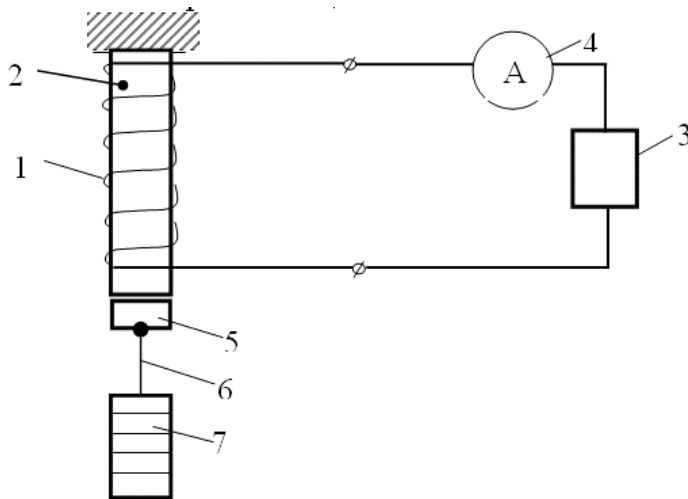


Рисунок 2

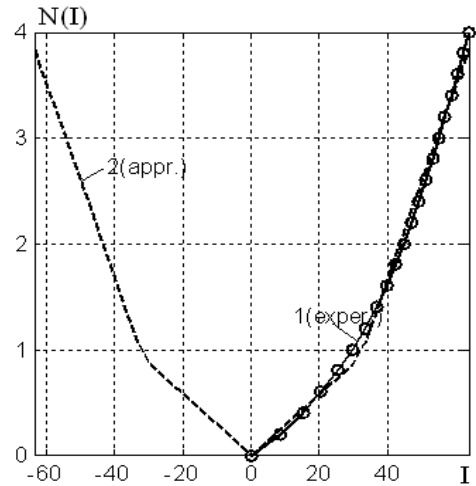


Рисунок 3

Электромагнит (соленоид), состоящий из катушки (1) и магнитомягкого стального сердечника (2) фиксировался в неподвижном держателе в вертикальном положении. Катушка подключалась к источнику питания постоянного тока Б5-47 (3), сила тока в цепи катушки измерялась с помощью цифрового прибора Щ 4313 (4). Вес соленоида составлял 1 Н.

К начальному грузу в виде стального диска, непосредственно контактирующему с сердечником соленоида (5), с помощью нити (6) крепились пробные грузы (7). Вес грузов составлял 0,5, 1,0, 1,5, 2,0, 3,0, 4,0 Н.

В начале каждого опыта по катушке пропускается ток, при котором заданный груз заведомо удерживался в контакте с сердечником соленоида. Затем ток постепенно снижался до значения, при котором происходило падение груза. Ниже в таблице представлены результаты средних измерений по 7 опытам веса N от тока I в катушке.

Таблица 1.

$N, \text{ Н}$	0	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0
$I, \text{ мА}$	0	18,2	31,1	36,8	43,8	57,1	63,5

Об аппроксимации зависимости от тока контактной силы притяжения соленоида

Зависимость контактной силы притяжения соленоида с магнитомягким сердечником ферромагнитных тел может быть также выражена кусочно-линейной функцией, обладающей свойством

четности. В качестве координатных функций для кусочно-линейной аппроксимации зависимости контактной силы притяжения $N(I)$ используем четные периодические с периодом $4\sqrt{2}$ ромбические гармоники кратного аргумента [4].

$$\text{cor}\sigma = \begin{cases} 1 - |\bar{\sigma}|/q & \text{при } |\bar{\sigma}| \leq 2, \\ |\bar{\sigma}|/q - 3 & \text{при } 2q < |\bar{\sigma}| \leq 4q; \end{cases} \quad (3.1)$$

$q = \sqrt{2}$, $\bar{\sigma} = \sigma - E(\sigma/4/q)4q$, $E(x)$ – целая часть числа x , σ – действительное число. Аппроксимативную формулу метода наименьших квадратов для искомой зависимости $N(I)$ представим в форме

$$N(I) = \sum_{\ell=1}^n b_{\ell} (1 - \text{cor}^{\ell} \sigma(I)), \quad \sigma(I) = 2qI/I_{\max}, \quad (3.2)$$

обращающейся в ноль при $I=0$, что отвечает физическому содержанию задачи.

Для кривой знакопостоянной кривизны типа параболы в этой формуле можно ограничиться двумя членами ряда, содержащим b_1, b_2 . Такую аппроксимацию экспериментальных данных назовем биромбопараболоидальной. На рис. 3 представлена биромбопараболоидальная аппроксимация контактной силы, полученная при $I_{\max}=63,5$ мА. В этом случае $b_1=1,9$; $b_2=-0,5$. Имеющаяся здесь точка излома характеризует начало интенсивной ориентации молекулярных токов сердечника соленоида по его вектору магнитной напряженности.

Численным интегрированием нелинейных уравнений (1.2), (1.3) вычислим коэффициент динамичности по ускорению

$$\mu = \max_t |\ddot{x}(t) + \ddot{\xi}(t)| / \max_t |\ddot{\xi}(t)|,$$

характеризующий усиление переносного ускорения колебательной системой. Переносное ускорение представим в виде суперпозиции затухающих гармоник

$$\ddot{\xi}(t) = - \sum_{k=1}^M a_k e^{-\lambda_k t} [\lambda_k \cos(v_k t + \alpha_k) + v_k \sin(v_k t + \alpha_k)].$$

Численные значения параметров выбираем такими:

$$f/m = 0,5, \quad a_k = a = 1, \quad \alpha_k = \frac{2\pi}{M}(k-1), \quad \lambda_k = \lambda = 0,05, \quad v_k = \frac{\omega}{M}k, \quad (k = \overline{1, M}), \quad M = 4,$$

$$K_v \in [0,5 \quad 1,5], \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \rho, \quad \rho \in [0,1 \quad 1].$$

Начальные условия примем нулевыми $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 0$; $I(0) = 0$. На рис. 4 представлена поверхность $\mu_v = \mu(K_v, \rho)$. Как видим, с увеличением коэффициента усиления K_v и уменьшением постоянной времени $T(\rho)$ коэффициент μ уменьшается.

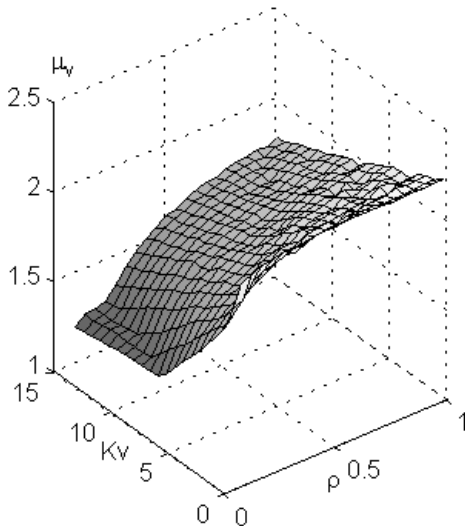


Рисунок 4

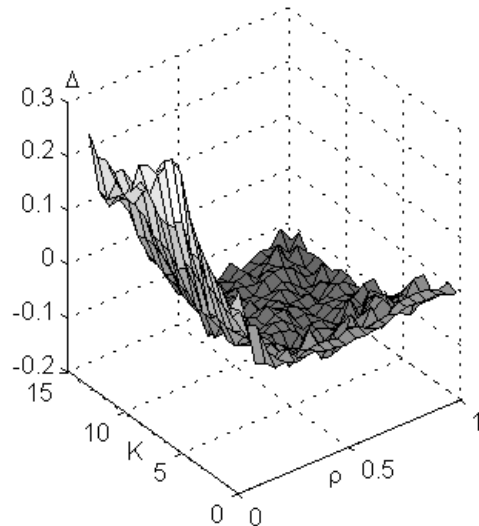


Рисунок. 5

Вычислим функцию $\mu = \mu_a(K_a, \rho)$ при управлении демпфером по ускорению для тех же значений ρ и $K_a = K_v = K$ и составим разность $\mu_v(K_v, \rho) - \mu_a(K_a, \rho) = \Delta(K, \rho)$.

На рис. 5 представлена поверхность $\Delta(K, \rho)$, характеризующая количественное различие влияния законов управления (1.2) на гашение вынужденных колебаний рассматриваемой системы. Из рис. 5 видно, что разность Δ является знакопеременной величиной. Это означает, что при малой постоянной времени более эффективным является управление по скорости. Наоборот, с увеличением постоянной T контура обратной связи управление по ускорению становится предпочтительнее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назин В.В. Новые сейсмостойкие конструкции и железобетонные механизмы сейсмоизоляции зданий и сооружений. – М.: Стройиздат, 1993. – 133 с.
2. Плахтієнко М.П. Ромбічні функції: початки теорії та прикладні задачі. Київ. – 2005. – 132 с.
3. Теория автоматического управления. / Под ред. Пугачева В.С. М.: Физматгиз. – 1963. 646 с.

4. Фриш С.Ф., Тиморева А.В. Курс общей физики. М.: Физматгиз. – 1962. 514 с.
5. Plakhtienko N.P. Nonlinear One-Dimensional Seismodynamic Model of a Solid with Shock Absorbing Support // Int. Appl.Mech. – 2003. – 41, N 3. – P. 336–345.

Получено 03.05.2008 г.

СУТЬ ПРОБЛЕМИ СТІЙКОСТІ МАСИВА З ГОРИЗОНТАЛЬНОЮ ВИРОБКОЮ, ОБУМОВЛЕНОЮ НАЯВНІСТЮ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ

Вступ. Дослідження пружно-деформованого стану гірничого масиву біля виробок, а також оцінка його з позицій теорії міцності є основними в механіці гірничих порід. Однак питання про стійкість стану рівноваги масивів біля виробок вивчаються недостатньо, незважаючи на те, що локальна втрата стійкості дуже напружених часток масиву біля виробок може бути початковим етапом процесу руйнування, особливо при пластичних деформаціях, в зв'язку з суттєвою концентрацією стискаючих напружень.

Вперше дослідження стійкості масиву біля гірничих виробок, в основі якого було застосовано приблизний підхід в теорії стійкості деформованих тіл, виконано Л.В.Єршовим [1].

Більш строгий підхід при дослідженні задач стійкості гірничих виробок, який базується на використанні тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформованих тіл, запропоновано О.М.Гузем [2].

Постановка задачі. В даній роботі на основі лінеаризованої теорії досліджується стійкість пружно-пластичного нестисливого масиву з циліндричною шаровою порожниною радіуса R . Про стійкість тривимірних пружно-пластичних тіл при неоднорідних докритичних деформаціях будемо судити, виходячи з поведінки малих збуджень в рамках лінеаризованої тривимірної задачі теорії малих пружно-пластичних деформацій $\sigma_i = A\varepsilon_i^k$ при незмінних зонах розгрузки, які з'являються в докритичному стані, тобто будемо слідувати узагальненій концепції продовжуючого навантаження [2].

Метод. Для рішення задачі про стійкість горизонтальної виробки, коли виконуються умови затухання на нескінченності, використаємо варіаційний метод. Використання варіаційного методу розв'язку дозволяє звести задачу до дослідження функціоналу [2]

$$J(u, p) = \int_V \left(\frac{1}{2} \chi^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha + p g^{ij} \right) \nabla_i u_j dV \quad (1)$$

на екстремум, де p - збурення гідростатичного тиску, $\chi^{ij\alpha\beta}$ - компоненти тензора четвертого рангу, які знаходяться в залежності від вибору теорії пластичності. В зв'язку з відсутністю поверхні розділу зон пружності та пластичності вирази для компонент тензора $\{\chi\}$ мають місце для всього простору. В разі теорії текучості необхідно врахувати наявність пружної та пластичної зон, в яких компоненти $\chi^{ij\alpha\beta}$ (1) визначаються на основі різних співвідношень.

Втрата стійкості пружно-пластичного масива по обом теоріям досліджена в рамках плоскої деформації. При розгляді пружно-пластичного масива з виробкою докритичний стан буде неоднорідним і розв'язок запишемо у вигляді степеневих та тригонометричних рядів.

Результати. Отримані характеристичні рівняння для визначення параметрів критичного навантаження для порожнини, яка досліджується. В табл. 1 та 2 наведені деякі результати обчислення критичних навантажень в разі використання деформаційної теорії (для $k=1; 0,9; 0,8; 0,5$) та теорії текучості (для аргіліту та песчаника).

Таблиця 1

Значення q/E_c .

N	K			
	1,0	0,9	0,8	0,5
2	0,558	0,663	0,756	1,275
3	0,561	0,639	0,729	1,125
4	0,528	0,585	0,654	1,002
5	0,513	0,558	0,600	0,894

Значення максимальних критичних деформацій ε^* для значень $k=1; 0,9; 0,8; 0,5$ відповідно дорівнюють 0,257; 0,251; 0,240; 0,224.

Таблиця 2

N	Аргіліт							Песчаник		
	q_0^*	r_{s0}^*	ε^*	q_0^{*e}	ε^{*e}	q_0^{*def}	ε^{*def}	q_0^*	r_{s0}^*	ε^*
2	0,481	8,349	0,380	0,588	0,294	0,528	0,302	0,496	0,703	0,373
3	0,445	8,062	0,350	0,561	0,281	0,513	0,292	0,454	6,725	0,341
4	0,431	7,885	0,339	0,528	0,264	0,470	0,262	0,440	6,610	0,329
5	0,424	7,812	0,333	0,513	0,257	0,439	0,240	0,432	6,552	0,323

Аналіз наведених в табл.1 та 2 результатів дозволяють зробити висновки, що варіаційний метод рішення достатньо ефективний. Значення параметрів критичних навантажень, отриманих із застосуванням обох теорій, якісно согласуються між собою. Має місце незначна (менше 5%) розбіжність критичних навантажень для аргіліта($k=0,751$). При цьому критичні деформації, отримані в разі застосування теорії текучесті, відрізняються від критичних деформацій, отриманих по деформаційній теорії, приблизно на 30%.

Таким чином, зони розділу фізико-механічних властивостей порід можуть суттєво впливати на стійкість виробки. Представляється доцільним при дослідженні виробки в пружно-пластичному масиві значення критичних навантажень обчислювати в рамках деформаційної теорії, так як це значно спрощує цю сторону рішення задачі, а максимальні критичні деформації визначаються по отриманим навантаженням на основі формул для визначення докритичного стану, отриманого в рамках теорії текучесті.

Отримані в рамках деформаційної теорії результати для пружно-пластичних моделей гірничих порід свідчать про суттєвий вплив пластичних властивостей матеріала при визначенні критичних навантажень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ёршов Л.В. О постановке задачи устойчивости горных выработок.- ДАН СССР, 1962, 143 №2, с.305-307.
2. Гузь А.Н. О построении трехмерной теории устойчивости деформируемых тел //Прикл.механика.-2001.-37,№1.-С.3-44.

Получено 03.05.2008 г.

УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Е.Н. Борисов, В.Г. Овсиенко

К ТЕОРИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ УПРУГОГО СЖИМАЕМОГО СЛОЯ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В работах [1-2] рассмотрены некоторые контактные задачи кручения предварительно напряженных тел, для которых существует аналогия с соответствующими задачами классической теории упругости (для тел без начальных напряжений). Эта аналогия имеет место, когда тело загружено только вдоль оси Oy_3 , то есть:

$$S_{11}^0 = S_{22}^0 = 0; \quad S_{33}^0 \neq 0. \quad (1)$$

Здесь же рассматривается статическая контактная задача кручения для сжимаемого упругого слоя с однородным начальным состоянием. Предполагается, что соотношения (1) не имеют места и изотропный в естественном состоянии материал слоя подвергнут статической однородной деформации при таких условиях

$$S_{11}^0 = S_{22}^0 \neq 0; \quad S_{33}^0 = 0. \quad (2)$$

Исследуем упругий слой толщиной h , одна граничная плоскость которого $z_3 = -h$ закреплена, а другая $z_3 = 0$ подвергается скручиванию по площадке $0 \leq r < a$ жестким цилиндрическим штампом, который поворачивается на угол ε вокруг оси Oz_3 .

Согласно [5], в этом случае имеют место соотношения

$$\chi = 0; \quad \Psi = \Psi(r, z_3); \quad u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad (3)$$

$$\tilde{Q}_{\theta|z_3} = \text{const} = \lambda_3 \mu_{13} \frac{\partial u_\theta}{\partial z_3}$$

и уравнение для определения функции Ψ в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\lambda_3^2 \mu_{13}}{\lambda_1^2 \mu_{12} + S_{11}^0} \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \Psi = 0. \quad (4)$$

Введем замену

$$z = \Delta z_3, \quad (5)$$

где

$$\Delta = \sqrt{(\lambda_3^2 \mu_{13})^{-1} (\lambda_1^2 \mu_{12} + S_{11}^0)}. \quad (6)$$

Для данной задачи имеем такие граничные условия:

$$\text{при } z_3 = 0, (z = 0) \quad u_\theta = \varepsilon \cdot r, (r < a); \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = 0, (r > a); \quad (7)$$

$$\text{при } z_3 = -h, (z = -h\Delta) \quad u_\theta = 0. \quad (8)$$

Уравнение (4) с учетом (5) принимает вид [1], а соотношения (3) с учетом (5) и (6) будут такими

$$u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad \tilde{Q}_{\theta|z=\text{const}} = \sqrt{\mu_{13}(\lambda_1^2 \mu_{12} + S_{11}^0)} \frac{\partial u_\theta}{\partial z}. \quad (9)$$

Таким образом, необходимо найти решение уравнения (4) в случае отсутствия начальных напряжений при граничных условиях (7) и (8).

Решения уравнения (4) (без начальных напряжений) ищем в виде интегрального разложения Ханкеля по функциям $J_1(\lambda r)$.

$$u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \int_0^\infty A(\lambda) \frac{sh\lambda(z+h\Delta)}{sh\lambda h\Delta} J_1(\lambda r) d\lambda. \quad (10)$$

Выбирая решение в виде (10), автоматически удовлетворяем дифференциальному уравнению (4) и граничному условию (8). Если подставить (10) в граничные условия (7), то приходим к двум интегральным уравнениям относительно одной неизвестной функции $A(\lambda)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda &= \varepsilon \cdot r, \quad (0 \leq r < a); \\ \int_0^\infty \lambda A(\lambda) ch\lambda h\Delta J_1(\lambda r) d\lambda &= 0, \quad (0 < r < \infty). \end{aligned} \quad (11)$$

Представим искомую величину $A(\lambda)$ в виде интеграла от новой неизвестной функции [4]

$$A(\lambda) = th\lambda h\Delta \int_0^a \varphi(t) \sin \lambda t dt. \quad (12)$$

Пользуясь методикой, развитой в работе [4], парные интегральные уравнения (11) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма II рода

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t-x) - G(t+x)] dt = \frac{4}{\pi} \varepsilon x, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (13)$$

где

$$G(y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda h \Delta}}{ch \lambda h \Delta} \cos \lambda y \, d\lambda. \quad (14)$$

Таким образом, решение поставленной задачи дается формулами (10) и (12), причем функция $\varphi(t)$ должна быть найдена из интегрального уравнения (13).

Входящий в решение неизвестный угол поворота штампа ε можно выразить через заданное значение крутящего момента M таким образом:

$$M = - \int_0^a \int_0^{2\pi} \tilde{Q}_{\theta}|_{(z=0, r<a)} r^2 dr d\theta. \quad (15)$$

Значение крутящего момента M представим через функцию $\varphi(t)$ в виде

$$M = -4\pi \sqrt{\mu_{13}(\lambda_1^2 \mu_{12} + S_{11}^0)} \int_0^a t \varphi(t) dt. \quad (16)$$

Введем вместо $\varphi(t)$ безразмерную функцию

$$\begin{aligned} \omega(\xi) &= \frac{\pi}{4a\varepsilon} \varphi(x); & \xi &= \frac{x}{a}; & \tau &= \frac{t}{a}; \\ x, t &\in [0, a]; & \xi, \tau &\in [0, 1]. \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая (16) и (17), получим

$$M = -16a^3 \varepsilon \sqrt{\mu_{13}(\lambda_1^2 \mu_{12} + S_{11}^0)} \int_0^1 \tau \omega(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Формула для коэффициента a , характеризующего связь угла поворота ε с приложенным моментом M , будет иметь вид:

$$a = \frac{\int_0^1 \tau \omega(\tau) d\tau}{- \frac{M}{16a^3 \varepsilon \sqrt{\mu_{13}(\lambda_1^2 \mu_{12} + S_{11}^0)}}}. \quad (19)$$

Для получения численных результатов необходимо получить решение основного интегрального уравнения (13), которое с учетом (17) может быть представлено в безразмерной форме

$$\omega(\xi) = \xi + \frac{P_\sigma}{\pi} \int_0^1 \omega(\xi) [K(\tau - \xi) - K(\tau + \xi)] d\tau \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad (20)$$

где

$$P_\sigma = \frac{p}{\Delta}; \quad p = \frac{a}{h}; \quad K(u) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu}}{ch\mu} \cos P_\sigma u \mu d\mu. \quad (21)$$

Отметим, что при $h \rightarrow \infty$ ($p \rightarrow 0$) имеем

$$\omega(\xi) = \xi; \quad a = \frac{1}{3}. \quad (22)$$

В случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (случай отсутствия начальных напряжений) получим формулу из [4]. Аналогично [4], заменяя значение интеграла в (20) его приближенным значением по квадратурной формуле трапеций, приводим задачу определения функции $\omega(\tau)$ к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Здесь ограничимся случаем сжимаемого слоя. Рассмотрим в качестве примера слой из материала, свойства которого описываются упругим потенциалом гармонического типа. Для коэффициента Пуассона $\nu = 0,25$ и $p = 1$, получаем результаты, приведенные в таблице

ξ	$\omega(\xi)$				
	λ_1				
	0,9	0,95	1,0	1,05	1,1
0	0	0	0	0	0
0,1	0,1163	0,1108	0,1076	0,1056	0,1033
0,2	0,2322	0,2212	0,2150	0,2111	0,2066
0,3	0,3471	0,3312	0,3221	0,3164	0,3097
0,4	0,4606	0,4404	0,4288	0,4213	0,4164
0,5	0,5723	0,5486	0,5348	0,5260	0,5200
0,6	0,6820	0,6556	0,6401	0,6301	0,6233
0,7	0,7896	0,7614	0,7447	0,7338	0,7263
0,8	0,8948	0,8660	0,8485	0,8369	0,8289
0,9	0,9979	0,9692	0,9514	0,9395	0,9312
1,0	1,0958	1,0672	1,0540	1,0415	1,0330
a	0,3756	0,3630	0,3556	0,3507	0,3471

Анализ приведенных в таблице данных показывает, что при предварительном сжатии материала слоя влияние начальных напряжений более существенное, чем при предварительном растяжении. В случае отсутствия начальных напряжений ($\lambda_1 = 1$) полученные результаты совпадают с [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. О контактных задачах для упругих сжимаемых тел с начальными напряжениями// Докл. АН УССР. Сер. А.- 1980.- №6.-с. 48-52.

2. Гузь А. Н. К теории контактных задач для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями// Докл. АН УССР. Сер. А.-1980.-№7.-с. 42-45.
3. Гузь А. Н. О представлении общих решений линеаризированной теории упругости сжимаемых тел // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. - №2. – с. 1092-1095.
4. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л. : Наука, 1967. – 403 с.
5. Guz A. N., Babich S. Yu., Rudnitsky V. B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research.- Applied Mechanics Reviews, vol 51, no 5, 1998, p. 343-371.

Получено 03.05.2008 г.

УДК 539.3

К.І. Шнеренко, В.Ф. Годзула

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ЗМІНИ МІЖШАРОВОГО ЗСУВУ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН КОМПОЗИТНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ОТВОРОМ

Постановка задачі. Розглянемо рівновагу шаруватої циліндричної оболонки радіуса R , товщини h , послабленої круговим отвором радіуса r_0 і навантаженої внутрішнім тиском інтенсивності p_0 . Вважаємо, що в оболонці виникають пружні деформації, а композитний матеріал ортотропний з однорідними властивостями. Для всього пакету оболонки можуть бути знайдені приведені жорсткісні характеристики відносно розтягу – стиску, згину, кручення і між шарового зсуву. Така розрахункова схема може бути застосована для більшості композитних матеріалів, що використовуються в сучасній техніці.

Віднесемо серединну поверхню оболонки до полярної напівгеодезичної системи координат (ρ, θ) з початком в центрі отвору. При цьому параметри Ламе і кривизни оболонки запишемо в вигляді

$$A=1, \quad B=\rho, \quad k_1=\frac{1-\cos 2\theta}{2R}, \quad k_2=\frac{1+\cos 2\theta}{2R}, \quad k_{12}=-\frac{\sin 2\theta}{2R}. \quad (1)$$

Однорідна система рівнянь рівноваги непологої оболонки в зусиллях в обраній системі координат і з врахуванням (1) запишеться у вигляді [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial S_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} (T_\rho - T_\theta) + \frac{\sin^2 \theta}{R} Q_\rho + \frac{\sin 2\theta}{2R} Q_\theta &= 0, \\ \frac{\partial S_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{\rho} S_{\rho\theta} + \frac{\sin 2\theta}{2R} Q_\rho + \frac{\cos^2 \theta}{R} Q_\theta &= 0, \\ -\frac{\sin^2 \theta}{R} T_\rho - \frac{\sin 2\theta}{R} S_{\rho\theta} - \frac{\cos^2 \theta}{R} T_\theta + \frac{\partial Q_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} Q_\rho &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} (G_\rho - G_\theta) - Q_\rho &= 0, \\ \frac{\partial H_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{\rho} H_{\rho\theta} - Q_\theta &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Геометричні співвідношення між деформаціями, змінами кривизн і узагальненими переміщеннями будуть

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\sin^2 \theta}{R} w, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho} + \frac{\cos^2 \theta}{R} w, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\rho} + \frac{\sin 2\theta}{R} w, \\ \varepsilon_{13} &= \gamma_\rho + \frac{\partial w}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{23} = \gamma_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \chi_1 = \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho}, \quad \chi_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\gamma_\rho}{\rho}, \\ 2\chi_{12} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \rho} - \frac{\gamma_\theta}{\rho}.\end{aligned}\quad (3)$$

Співвідношення пружності для ортотропного матеріалу оболонки подамо в вигляді [1]

$$\begin{aligned}T_i &= B_{1i} \varepsilon_1 + B_{2i} \varepsilon_2 + B_{3i} \varepsilon_{12}, \quad G_i = D_{1i} \chi_1 + D_{2i} \chi_2 + D_{3i} 2\chi_{12}, \quad (i=1,2,3) \\ Q_i &= K_i \varepsilon_{13} \quad (i=1,2),\end{aligned}\quad (4)$$

де B_{ji}, D_{ji}, K_i узагальнені жорсткості матеріалу оболонки.

Основний напружений стан, що виникає в непослабленій отвором оболонці, визначається за безмоментною теорією і для розглядуваного навантаження буде мати вигляд

$$T_\rho^0 = \frac{q}{2}(3 - \cos 2\theta), \quad S_{\rho\theta}^0 = \frac{q}{2} \sin 2\theta, \quad T_\theta^0 = \frac{q}{2}(3 + \cos 2\theta), \quad G_\rho^0 = G_\theta^0 = H_{\rho\theta}^0 = 0, \quad (5)$$

де $q = \frac{p_0 R}{2}$.

Збурений напружений стан для непологої оболонки, що породжується наявністю отвору, знаходиться з рівнянь загальної теорії оболонок [1].

Граничні умови на контурі отвору при $\rho = \rho_0$ мають вигляд

$$T_\rho = \frac{3}{4} p_0 R - \frac{1}{4} p_0 R \cos 2\theta, \quad S_{\rho\theta} = \frac{1}{4} p_0 R \sin 2\theta, \quad G_\rho = 0, \quad H_{\rho\theta} = 0, \quad Q_\rho = \frac{p_0 r_0}{2}. \quad (6)$$

Метод розв'язку задачі. Будемо виходити з застосування варіаційно-різницевого методу [2]. Згідно принципу можливих переміщень Лагранжа достовірні переміщення перетворюють функцію Лагранжа Π в відносний мінімум

$$\delta \Pi = 0, \quad (7)$$

що еквівалентно рівності нулю всіх частинних похідних по незалежних змінних. Тут $\Pi = V - A$, V - потенціальна енергія деформації, A - сума робіт зовнішніх сил на незалежних переміщеннях оболонки.

Потенційну енергію запишемо через пружний потенціал Φ [3]

$$V = \int_G \Phi dG, \quad (8)$$

де G - область, яку займає серединна поверхня оболонки.

Геометричні співвідношення (3) подамо в компактному вигляді

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{15} N_{ik} U_k, \quad (9)$$

де $U_k (k = \overline{1,15})$ - деякі узагальнені переміщення, а компоненти матриці

$N_{ik} (i = \overline{1,8}; k = \overline{1,15})$ знаходяться з (3). Тут незалежних узагальнених переміщень лише п'ять:

$$U_l (l = \overline{1,4,7,10,13}); \quad (U_1 = u, U_4 = v, U_7 = w, U_{10} = \gamma_\rho, U_{13} = \gamma_\theta)$$

а решта пов'язані з ними залежностями:

$$U_{l+1} = \frac{\partial U_l}{\partial \alpha}; \quad U_{l+2} = \frac{\partial U_l}{\partial \beta} \quad (l = \overline{1,4,7,10,13}).$$

Після підстановки (9) в вираз для пружного потенціалу Φ [4] отримаємо

$$\Phi = \sum_{k=1}^{15} \left(\sum_{r=1}^{15} P_{kr} U_r - R_k \right) U_k, \quad (10)$$

де P_{kr} і R_k залежать від N_{jk} [2].

Варіаційну задачу для відносних зміщень замінимо варіаційною задачею для дискретних їх значень у вузлах основної та допоміжної сіток однакової розмірності. Вузли основної сітки позначаються цілими індексами (s, t) , а допоміжної, що лежать посередині між вузлами основної, - дробовими індексами $(s + \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2})$.

Вузли перетину обох сіток позначаються змішаними індексами $(s + \frac{1}{2}, t)$ і

$(s, t + \frac{1}{2})$. Основна сітка по координаті ρ має крок $\lambda_\rho(s)$ ($s = \overline{1, m}$), а по

координаті θ - $\lambda_\theta(t)$ ($t = \overline{1, n}$). Тут m - кількість вузлів сітки по координаті ρ , n - по координаті θ .

Таким чином, отримуємо дискретний аналог функції Лагранжа Π . Поверхневий інтеграл в (8) поданий в вигляді подвійної суми [4]

$$V = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^n \Phi^{st} G^{st}, \quad (11)$$

де $\Phi^{st} = \Phi(\rho_s, \theta_t)$ – значення пружного потенціалу в точці (ρ_s, θ_t) ; G^{st} – вагова функція, що являє собою частину площі чотирикутної ячейки з центром в точці (ρ_s, θ_t) і сторонами

$$\frac{1}{2}[\lambda_\rho(s-1) + \lambda_\rho(s)], \quad \frac{1}{2}[\lambda_\theta(t-1) + \lambda_\theta(t)],$$

які належать області S .

З умов (7) отримуємо систему лінійних рівнянь відносно дискретних значень переміщень серединної поверхні і функцій зсуву U_l ($l = 1, 4, 7, 10, 13$) [4]

$$\sum_{a=i-1}^{i+1} \sum_{b=j-1}^{j+1} \sum_{k=1}^{13} P_{kl}^{ab} U_k^{ab} = Q_l^{ij} \quad (l, k = 1, 4, 7, 10, 13; \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (12)$$

Тут P_{kl}^{ab} – значення коефіцієнтів в вузлі a, b при відомій величині U_k^{ab} в рівнянні для U_l^{ij} , який є функцією геометричних і механічних параметрів оболонки; Q_l^{ij} – значення в вузлі (i, j) l -х компонент силового навантаження[2]. Матриця системи рівнянь (12) симетрична, додатньо визначена, і має стрічкову структуру, що дозволяє скоротити обсяг використаної пам'яті при розрахунках на ЕОМ.

Числові результати. За викладеною методикою визначався напружено-деформований стан композитної циліндричної оболонки з круговим отвором, навантаженої внутрішнім тиском. При розрахунках розглядались такі параметри оболонки і матеріалу:

$$r/R = 0,2; \quad h/R = 0,04; \quad E/G_{12} = 50; \quad \nu = 0,3.$$

В таблиці наведені значення коефіцієнтів концентрації напружень $k_{1\theta} = T_\theta/p$, $k_{2\theta} = 6G_\theta/ph$ ($p = p_0 R$) в залежності від зміни параметра зсуву E/G_{13} в точках $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$. Зауважимо, що зміна параметра зсуву в розглянутому інтервалі ($2,5 \div 200$) приводить до зміни найбільших значень коефіцієнтів концентрації напружень $\theta = \pi$ відповідно на 28% і 22%.

Таблица 1

E/G	0		$\pi/2$		π	
	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$
0,25	-1,23	0,53	3,78	-0,25	-0,59	1,38
10	-1,25	0,49	3,84	-0,24	-0,59	1,45
100	-1,29	0,39	4,02	-0,20	-0,54	1,47
200	-1,31	0,36	4,14	-0,18	-0,52	1,46

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов ВАЛ.Н., Чехов Вик.Н., Шнеренко К.И. Методы расчета оболочек. Т.1: Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями..-Киев.:Наук.думка, 1980.-636 с.
2. Годзула В.Ф., Гузь А.Н., Шнеренко К.И. К задачам статики непологих анизотропных оболочек с отверстиями//Прикл.механика.-1988.-Т.24,№9.-С.22-30.
3. Godzula V.F., Shnerenko K.I. The stress-strain State of a Composite Spherical Shell with Two Polar Openings// Int.Appl. Mech.-2002.-38,№3.-P.341-344.
4. Shnerenko K.I., Godzula V.F. Stress state of a Composite Cylindrical Shell with Sizeable Circular Hole// Int.Appl.Mech.-2003.-39,№11.-P.1323-1327.

Получено 03.05.2008 г.

УДК 539.3

Г.И.Щурук

ВЛИЯНИЕ ПЛОТНОСТИ ЖИДКОСТИ НА ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС В ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЕ ОБОЛОЧКА-ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

Введение. Существенной особенностью задач гидроупругости является необходимость совместного решения уравнений движения оболочки и уравнений гидродинамики жидкой среды. В результате движение системы оболочка-жидкость описывается сложной системой уравнений, получить решение которой в общем случае представляется весьма затруднительно. Поэтому при построении решений задачи необходимо привлекать те или иные модели для жидкости и оболочки.

Широкое применение в инженерной практике находят композиционные материалы, обладающие анизотропией деформативных и прочностных свойств, низкой сдвиговой жесткостью, конструктивной неоднородностью. Они не укладываются в рамки обычной изотропной классической модели. Это относится также к трехслойным оболочкам, средний слой которых весьма податлив по отношению к сдвигу, где нельзя пренебрегать деформациями, соответствующими касательным напряжениям вдоль нормали. Во всех этих случаях целесообразно вести исследования на основе уточненных теорий оболочек. При выборе конкретной модели, адекватно описывающей реальные жидкостные наполнители, необходимо рассматривать модель вязкой сжимаемой жидкости.

При исследовании волновых процессов в гидроупругой системе для оболочки необходимо выбрать такую модель, уравнения движения для которой более полно описывают явление распространения волн. Кроме того, вязкая жидкость передает стенке оболочки не только нормальное давление, но и касательные усилия. Поэтому в данной задаче уместно учесть деформации поперечного сдвига и инерцию вращения нормальных элементов. Это приводит к теории оболочек типа С.П.Тимошенко. Для жидкой среды используется линеаризованная модель ньютоновской покоящейся вязкой сжимаемой жидкости.

Метод решения. Рассмотрим процесс распространения осесимметричных волн в системе ортотропная оболочка (радиуса R и толщины $2h$) – вязкая сжимаемая жидкость. Используем линейные уравнения теории оболочек типа С.П.Тимошенко [1] и линеаризированные уравнения Навье-Стокса для покоящейся вязкой сжимаемой жидкости [2]. В рамках этих моделей система уравнений, описывающая совместные колебания гидроупругой системы, в цилиндрической системе координат (z, r, θ) будет иметь вид:

$$L\bar{u} = \bar{q}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \bar{v} + \frac{1}{\rho_o^*} \text{grad} p - \frac{\nu^*}{3} \text{grad} \text{div} \bar{v} = 0; \quad \frac{1}{\rho_o^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \text{div} \bar{v} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_o^2, \quad a_o = \text{const}; \quad \dot{u}_r = v_r; \quad \dot{u}_z = v_z; \quad q_r = -p_{rr}; \quad q_z = -p_{rz}; \quad (3)$$

$$p_{rr} = -p + \lambda^* \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) + 2\mu^* \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad p_{rz} = \mu^* \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \quad (4)$$

Здесь в уравнениях (1): L -матрица дифференциальных операторов теории оболочек типа С.П.Тимошенко [1]; $\bar{u} = \bar{u}(u_z, u_r)$ -вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки; $\bar{q}$ -вектор усилия внешней нагрузки, приведенный к срединной поверхности оболочки. В уравнениях (2-4): $\bar{v}$ -вектор скорости частиц жидкости; ρ^* и p -возмущения плотности и давления в жидкости; ρ_o^* и a_o -плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; ν^* , μ^* -кинематический и динамический коэффициенты вязкости; p_{rr}, p_{rz} -составляющие тензора напряжений в жидкости. Уравнения (3) – соответственно кинематические и динамические граничные условия, которые, в силу тонкостенности оболочки, будем удовлетворять на срединной поверхности ($r=R$). Соотношения (1)-(4) представляют замкнутую систему соотношений гидроупругости для ортотропной цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость.

Для решения этой системы соотношений используем представления общих решений уравнений гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости через скалярные потенциалы [2]. Подставляя выражения для искомых функций в виде бегущих волн в уравнения исходной системы, используя условия на колеблющейся стенке (3),

после ряда преобразований получим систему трех линейных однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд. Из условия существования нетривиального решения такой системы получаем дисперсионное уравнение

$$\det \|A_{mn}\| = 0, \quad (m, n=1, 2, 3), \quad (5)$$

где $A_{mn} = A_{mn}(c, \Omega, \gamma, \rho_o^*, a_o^*, v^*, E_i, G_{ik}, v_{ij}, \rho_{об}, \frac{2h}{R}, J_n(\eta_j R), \eta_j)$, $(i, j=1, 2; k=2, 3)$,

c -фазовая скорость; Ω -частота; γ -коэффициент затухания волн; E_i, G_{ik} -модули упругости при растяжении и сдвиге; v_{ij} -коэффициенты Пуассона; $J_n(\eta_j R)$ -функции Бесселя n -го порядка первого рода комплексного аргумента $\eta_j R$ [2].

Дисперсионное уравнение (5) является многопараметрическим трансцендентным уравнением и описывает процесс распространения осесимметричных волн в исследуемой гидроупругой системе.

Анализ результатов. Уравнение (5) позволяет исследовать влияние многих параметров оболочки и характеристик жидкости на фазовые скорости и коэффициенты затухания волн в системе. Ограничимся исследованием влияния на дисперсионные кривые такой характеристики жидкой среды, как ее плотность.

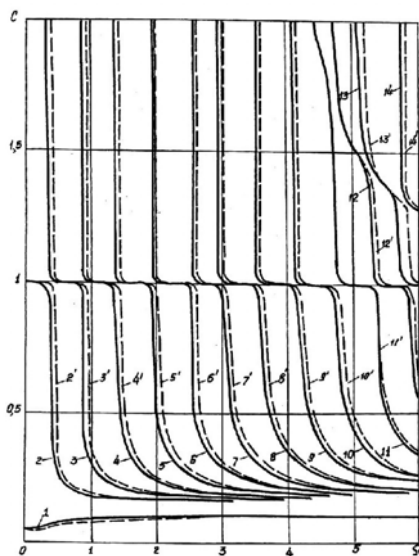


Рис.1

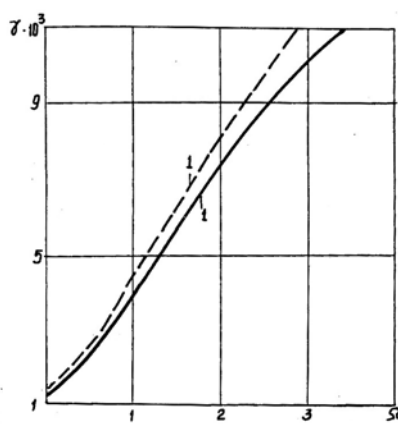


Рис.2

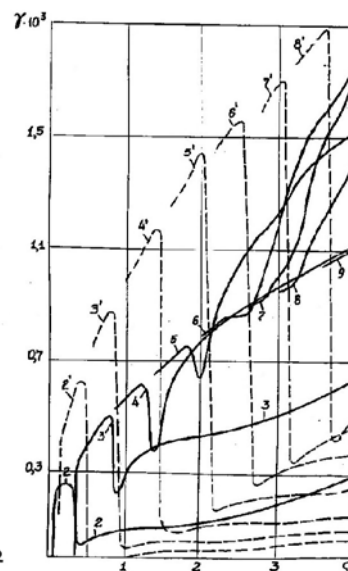


Рис.3

На рис.1 показано влияние относительной плотности вязкой жидкости (отношение $\bar{\rho}_0^* = \frac{\rho_0^*}{\rho_{об}}$) на характер дисперсионных кривых ортотропной оболочки (боропластик). Увеличение относительной плотности жидкости (сплошные линии соответствуют $\bar{\rho}_0^* = 0,6$; а штриховые – $\bar{\rho}_0^* = 2$) приводит к увеличению значений критических частот. Фазовая скорость первой моды при этом для низких частот ($\Omega_1 < 2$) уменьшается, фазовые скорости высших мод увеличиваются в окрестностях критических частот.

Характер влияния относительной плотности жидкости на зависимость коэффициента затухания γ от частоты Ω представлен на рис.2 (для первой моды) и на рис.3 (для 2^{ой} и 8^{ой} мод). Для первой моды характерна прямая зависимость γ от относительной плотности жидкости. Для мод более высокого порядка влияние $\bar{\rho}_0^*$ зависит от интервала частот. Существуют области частот, где увеличение $\bar{\rho}_0^*$ приводит к увеличению значений коэффициентов затухания (области критических частот), а также области частот, где увеличение $\bar{\rho}_0^*$ приводит к уменьшению значений коэффициентов затухания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швец Р.К., Марчук Р.А. Колебания ортотропной цилиндрической оболочки типа Тимошенко, соприкасающейся со слоем жидкости // Мат. методы и физ.-мех. поля. – Киев: Наук. думка. – 1975. – Вып. I. – С. 135-140.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.2. Закономерности распространения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 536с.

Получено 03.05.2008 г.

УДК 539.3

В.Ф. Мейш, Н.В. Арнаута

**ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ П'ЯТИШАРОВИХ КОНІЧНИХ
ОБОЛОНОК З ВРАХУВАННЯМ ДИСКРЕТНОСТІ РОЗМІЩЕННЯ
РЕБЕР ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

Вступ. Нестаціонарні коливання неоднорідних по товщині оболонкових конструкцій розглядалися багатьма авторами. Зокрема, ґрунтовний огляд літератури з даного питання викладений в роботі [1]. Значний внесок в вивчені даної проблеми зробили автори монографії [2]. Нелінійні осесиметричні коливання тришарових оболонок обертання при імпульсних навантаженнях розглянуто в роботі [3], де розрахункова схема приймається з врахуванням незалежних кінематичних і статичних апроксимацій до кожного шару. Тришарові оболонки обертання з врахуванням дискретності ребристого наповнювача при нестаціонарних навантаженнях розглянуто в [4]. Вивчення нестаціонарних коливань п'ятишарових циліндричних оболонок обертання з врахуванням впливу дискретності ребер приведено в роботі [5].

В даній роботі розглядається постановка задачі нестаціонарної поведінки п'ятишарових конічних оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер, побудова чисельного алгоритму із застосуванням апроксимацій типу Річардсона та розв'язування вказаних задач і аналіз отриманих результатів.

Постановка задачі. Дискретно-неоднорідна по товщині пружна структура конічного типу являє собою систему, що складається з багатошарової підкріпленої конічної оболонки з врахуванням дискретності ребер. Вважається, що багатошарова підкріплена конічна конструкція навантажена внутрішнім розподіленим нестаціонарним нормальним навантаженням $P_3(s, t)$, де s і t – просторова і часова координати.

При розгляді осесиметричних коливань конічних оболонок звичайно використовується система координат s, t , причому координата s відраховується від вершини конуса. В деяких випадках, зокрема для зрізаних конічних оболонок, більш зручним є

використання координати s_1 , де координата s_1 відраховується від краю оболонки.

Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатної поверхні записуються наступним чином:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = R_s, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \cos \alpha / R_s,$$

де α – кут конусності; s_1 – текуча координата; $R_s = R_0 + s_1 \sin \alpha$.

За допомогою варіаційного принципу Рейсснера для динамічних процесів отримано наступні системи рівнянь:

в гладкій області

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s_1} (RT_{11}) - \frac{\sin \alpha}{R_s} T_{22} &= \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s_1} (R\bar{T}_{13}) - \frac{\cos \alpha}{R_s} T_{22} + P_3(s_1, t) &= \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s_1} (RM_{11}) - \frac{\sin \alpha}{R_s} M_{22} - T_{13} &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Співвідношення між величинами зусиль-моментів та відповідними величинами деформацій мають вигляд

$$\begin{aligned} (T_{11}, T_{22}, T_{13}) &= \sum_k \int_z (\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}) dz; \\ (M_{11}^*, M_{22}^*) &= \sum_k \int_z (z \sigma_{11}^{kz}, z \sigma_{22}^{kz}) dz; \\ (M_{11}, M_{22}) &= (M_{11}^*, M_{22}^*) \pm h_{ck} (T_{11}, T_{22}); \\ \bar{T}_{13} &= T_{13} + T_{11} \theta_1; \\ I_1 &= \sum_k \rho_k h_k; \quad I_2 = \sum_k \pm \rho_k h_k h_{ck}; \quad I_3 = \sum_k \rho_k \frac{h_k^3}{12}; \end{aligned} \quad (2)$$

Співвідношення між величинами деформацій та величинами узагальнених векторів переміщень записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^k &= \frac{\partial u_1^k}{\partial s_1} + \frac{1}{2} [\theta_1^k]^2, \\ \varepsilon_{22}^k &= \frac{\sin \alpha}{R_s} u_1^k + \frac{\cos \alpha}{R_s}, \quad \varepsilon_{13}^k = \varphi_1^k + \frac{\partial u_3^k}{\partial s_1}, \\ \theta_1^k &= \frac{\partial u_3^k}{\partial s_1}, \quad \kappa_{11}^k = \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial s_1}, \quad \kappa_{22}^k = \frac{\sin \alpha}{R_s} \varphi_1^k. \end{aligned} \quad (3)$$

На лініях розривів рівняння коливань записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 T_{11}^{i\pm} &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}, \quad \sum_{i=1}^2 \bar{T}_{13}^{i\pm} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}, \\ \sum_{i=1}^2 (M_{11}^{i\pm} \mp h_j T_{11}^{i\pm}) &= \rho_j I_{\kappa pj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

В рівняннях (4.14) величини $T_{11}^{i\pm}, \bar{T}_{13}^{i\pm} = T_{11}^{i\pm} + \theta_{11}^{i\pm}, M_{11}^{i\pm}$ ($i = 1, 2$) відповідають зусиллям–моментам, які діють на j -й дискретний елемент на лінії розриву $s_1 = s_{1j}$. Рівняння коливань (1)–(4) доповнюються відповідними граничними та початковими умовами.

Чисельний алгоритм. Для побудови чисельного алгоритму розв’язку нестационарних задач теорії неоднорідних багат шарових оболонок використовується інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевої схем [6] для гіперболічних рівнянь. В силу вихідної постановки задач чисельний розв’язок шукається в гладкій області пружної структури (для багат шарової оболонки між ребрами) та на лініях розташування відповідних ребер.

Для побудови більш ефективних алгоритмів застосовується підхід, що базується на знаходженні наближених розв’язків по Річардсону [7]. Причому, при фіксованому різницевому кроку по часовій координаті, використовується послідовність наближених апроксимацій по просторовій координаті. При цьому, процедура екстраполяції формується згідно формул

$$\widetilde{U}_{l(\Delta s)}^n = \frac{4}{3} \bar{U}_{l(\Delta s/2)}^n - \frac{1}{3} \bar{U}_{l(\Delta s)}^n, \quad (5)$$

де $\bar{U}_{l(\Delta s/2)}^n$ і $\bar{U}_{l(\Delta s)}^n$ - чисельні розв’язки рівнянь коливань відповідно з дискретними кроками по просторовій координаті $\Delta s/2$ і Δs , $s = A_1 \alpha_1$.

Неважко показати, що різницеві рівняння (5) апроксимують вихідні рівняння коливань (1) в гладкій області з четвертим порядком точності по координаті s .

Результати розрахунків. Як числовий приклад, розглядалася задача динамічного деформування п’ятишарової конічної оболонки з жорстко защемленими торцями під дією внутрішнього розподіленого навантаження $P_3(s, t)$. Граничні умови при $s = s_0$, $s = s_N$ мають вигляд: $u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0$.

Нестационарне імпульсне навантаження задавалося у вигляді

$$P_3(s_1, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

де A – амплітуда навантаження, T – тривалість навантаження. В розрахунках покладалося $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Розрахунки

проводились при наступних геометричних та фізико-механічних параметрах:

$$E_1^1 = E_1^3 = E_1^5 = E_j = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; E_1^1 / E_1^{\text{зан}} = 10 \div 1000;$$

$$v_1^1 = v_1^3 = v_1^5 = 0,3; v_1^{\text{зан}} = 0,4;$$

$$\rho_1 = \rho_3 = \rho_5 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \rho_1 / \rho_{\text{зан}} = 7;$$

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5; h_1 = h_3 = h_5 = 10^{-3} \text{ м}; h_2 = h_4; h_2 / h_1 = 3;$$

$$R_0 = 0,1 \text{ м}; h / h_j = 9 / 20; F_j = 10^{-4} \text{ м}^2; \alpha_1 = \pi / 3; \alpha_2 = \pi / 4; \alpha_3 = \pi / 6$$

Дискретні підкріплюючі елементи розташовано в точках $s_j = 0,25s_N j$, $j = \overline{1,3}$

Отримані чисельні результати дозволяють проводити аналіз напружено-деформованого стану п'ятишарової підкріпленої пружної структури конічного типу в будь який момент часу (розрахунки проводилися при $0 \leq t \leq 40T$). Зокрема, на рис. 1 та рис. 2 приведено залежності величин u_3 і напруження σ_{22} від просторової координати s в залежності від величини кутів конусності в момент часу $t=4T$ і $t=5,5T$.

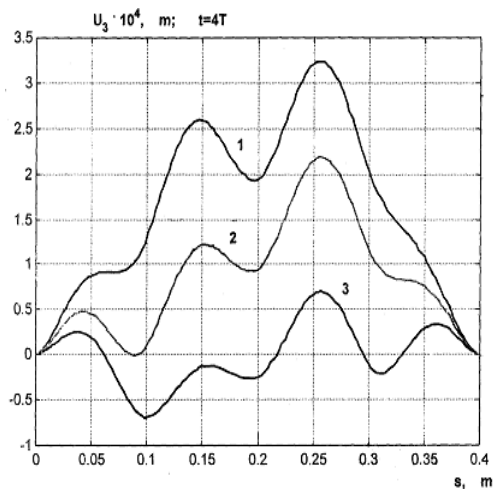


Рисунок 1 - Залежність величини U_3 від просторової координати S в момент часу $t=4T$

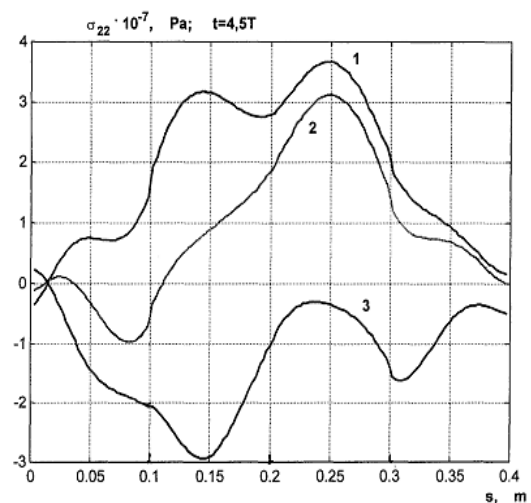


Рисунок 2 - Залежність величини σ_{22} від просторової координати S в момент часу $t=4,5T$

Крива з індексом 1 відповідає куту конусності $\alpha_1 = \pi / 3$; крива з індексом 2 – $\alpha_2 = \pi / 4$, крива з індексом 3 – $\alpha_3 = \pi / 6$. Розглядається випадок $E_1^1 / E_1^{\text{зан}} = 100$. Виходячи з представленого графічного матеріалу можна візуально визначити вплив конусності структури на антисиметричність розподілу величин u_3 і σ_{22} по просторовій

координаті (як частинний випадок, для циліндричної оболонки у випадку $\alpha = 0$ спостерігається симетрична картина відносно осі s_1).

ЛІТЕРАТУРА

1. Луговой П.З. Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках // Прикладная механика. – Т.37, №5. – 2001. – С.44-74.
2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – Киев: Издат. – полиграф. центр «Киевский университет», 2005. – 536с.
3. Шульга Н.А., Мейш В.Ф., Хамренко Ю.А. Нелинейные осесимметричные колебания трехслойных оболочек вращения при импульсных нагружениях // Теорет. и прикладная механика. 2001. Вып. 33. С. 159 – 163.
4. Мейш В.Ф., Штанцель С.Э. Решение динамических задач теории трехслойных оболочек вращения с дискретным наполнителем при нестационарных нагрузках // Прикладная механика. - №12. – Т.38, 2002. С. 103 – 110.
5. Мейш В.Ф., Кравченко Н.В. До розрахунку напружено-деформованого стану багатошарових оболонок з дискретними неоднорідностями при нестационарних навантаженнях // Вісник Київського університету. Серія Фіз. – мат. науки. - №3, 2002. С. 223 – 228.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - 656 с.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 454с.

Получено 03.05.2008 г.

УДК 622.28.044:622.831

Г.І. Ларіонов

**ДО ПИТАННЯ ПРО ЗМІНУ ДІАМЕТРУ МЕТАЛОПОЛІМЕРНОГО
АНКЕРА**

Актуальність. Незалежність України у енергетичній сфері вимагає як найширшого використання енергоресурсів власного видобутку. Оскільки Україна має потужні запаси вугілля то необхідно збільшити видобуток власного вугілля. Донецький вугільний басейн містить достатній об’єм якісного вугілля, але його потрібно видобувати на великих глибинах.

Застосування рамного кріплення гірських виробок на великих глибинах, як показує практика, стало економічно недоцільним і таким, що не забезпечує необхідний рівень безпеки на вугільних шахтах України. Сучасний вид кріплення гірських виробок - анкерне кріплення в змозі ефективно вирішити перелічені проблеми і забезпечити значно більші темпи видобутку [1].

На вугільних шахтах України анкерне кріплення здійснюється згідно з стандартами України, які базуються на стандартах Великобританії [1]. Виходячи з нормативних документів прийнятих в Україні застосування набули анкерні штанги довжиною 2,4 м та номінальних діаметрів 22; 24; 27; 30 мм відповідно. Найбільшого поширення набули анкерні штанги номінальним діаметром 25 мм при діаметрі шпура 32 мм та фіксуюча суміш виробництва ЗАО „Карбо і Кріплення” з максимальним опором на стискання 60 – 80 МПа. Застосування таких комплектуючих анкерного кріплення підтвердили свою ефективність на багатьох шахтах України з різними гірничо-геологічними умовами.

Ефективність анкерного кріплення протидіяти гірському тиску у великій мірі залежить від забезпечення технології його зведення. Параметри бурового обладнання, яке використовується і для встановлення анкерів, мають суттєвий вплив на забезпечення правильної технології зведення анкерного кріплення, а так і ефективності його роботи.

Останньою тенденцією у застосуванні анкерного кріплення на вугільних шахтах України стало використання анкерних штанг

найменшого із ряду рекомендованих нормативними документами діаметру 21 мм.

Як на наш погляд, це пов'язано з налагодженням виробництва прокату для анкерних штанг з більшою міцністю, з можливістю зменшити металоємність систем анкерного кріплення та позбавитись технологічної операції з нарізання різьбової ділянки у хвостовій частині анкерної штанги.

Оскільки основним видом навантаження є розтяг, то основним критерієм зміни номінального діаметру штанги було обрано незмінність максимальної несучої здатності анкерної штанги на розрив.

Але як свідчить практичний досвід використання анкерного кріплення сталого значення міцності на розрив анкерної штанги замало.

Справа в тім, що важливість вибору величини діаметру анкерної штанги, а відповідно і анкерного шпура, обумовлена значним впливом товщини оболонки фіксуючої суміші на якість і міцність її закріплення. А як відомо [3] товщина оболонки із фіксуючої суміші істотно впливає на ефективність роботи як окремо зафіксованого анкера так і системи анкерного кріплення в цілому.

Таким чином, на вибір діаметру анкерної штанги і відповідно анкерного шпура під металополімерний анкер одночасно впливають два чинники. З одного боку, бурове обладнання повинно забезпечувати необхідну якість перемішування фіксуючої суміші (згідно з [1] величина крутного моменту бурового обладнання при встановленні анкерної штанги у шпур повинна забезпечити швидкість обертання її не менше 450 об/хв. на протязі 30 секунд), а з іншого боку, бути в змозі створити таку товщину оболонки з фіксуючої суміші, яка б забезпечила найефективнішу передачу зусиль від гірського масиву до анкерної штанги. Зрозуміло, що вирішення такої задачі можливо лише в рамках постановки такої задачі як задачі оптимального проектування.

Являє інтерес питання: чи змінюється механізм роботи анкерної штанги у системі анкерна штанга – фіксуюча суміш – гірська порода? Як впливає зменшення діаметру анкерної штанги на роботу системи анкерного кріплення?

Постановка задачі може бути сформульована наступним чином:

Знайти такий діаметр шпура під полімерний анкер, який забезпечив би найсприятливіші умови роботи оболонки із фіксуєючої суміші за наявності бурового обладнання з обмеженим крутним моментом, або інакше

забезпечити мінімум цільовій функції

$$F = \int_0^L \sigma(\xi) d\xi; \quad (1)$$

де: L – довжина зафіксованої частини анкера; σ – зусилля, що виникають у тілі оболонки із фіксуєючої суміші.

за наявності обмежень міцності оболонки фіксуєючої суміші

$$\sigma_{\text{фікс.суміш}} < \sigma_{\text{гранич.}}; \quad (2)$$

за наявності технологічних обмежень

$$M_{\text{крути}} = \frac{2\pi^2 \mu N d_a^2 d_{\text{обол}}^2 L}{d_{\text{обол}}^2 - d_a^2} < M_{\text{буров.обл}}; \quad (3)$$

та конструктивних обмежень:

$$d_{\min} \leq d_{\text{обол}} \leq d_{\max}; \quad (4)$$

Врахування обмеженої міцності матеріалу з якого складається фіксуєюча суміш на розрив призвело до появи обмеження задачі у вигляді формули (2), де:

$\sigma_{\text{фікс.суміш}}$ та $\sigma_{\text{гранич.}}$ являють собою зусилля, що виникають в оболонці фіксуєючої суміші та граничні зусилля на розрив відповідно; $M_{\text{крути}}, M_{\text{буров.обл}}$ – необхідний крутний момент для забезпечення постановки анкера у шпур та максимальний для бурового обладнання, що використовується для введення анкера у шпур [2];

μ – густина фіксуєючої суміші [н · хв./м]; N – швидкість обертання виконавчого органу бурового обладнання [об/хв]; $d_a, d_{\text{обол}}$ – діаметри анкерної штанги та оболонки фіксуєючої суміші(або шпура);

L – довжина частини анкерної штанги, яку зафіксовано у масив гірської породи; $d_{\min}, d_{\max}$ – мінімально та максимально допустимі діаметри шпура.

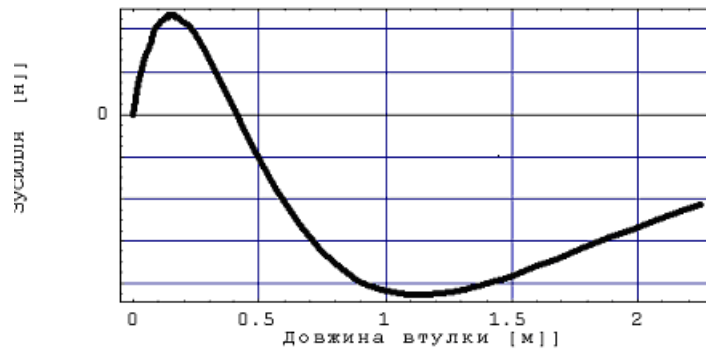


Рисунок 1 - Типовий закон розподілення зусиль у поперечних перерізах оболонки фіксууючої суміші

Зараз на шахтах Україні експлуатується широкий спектр бурового обладнання для вибурювання анкерних шпурів, та встановлення анкерного кріплення. Проблеми вибору бурового обладнання яке може забезпечити необхідний спектр значень параметрів не існує. Найпоширенішим критерієм вибору бурового обладнання, за звичай, є ціновий. Цим можна пояснити найбільше розповсюдження бурового обладнання для буріння анкерних шпурів та постановки анкерів виробництва Китаю, наприклад, *MQT-120*, *MQT-35* тощо. Максимальний крутний момент цього бурового обладнання не перевищує $M_{\text{крутн}} = 120$ н м. Як свідчить [2], величина цього параметру у значній степені визначає можливість та правильність виконання технології встановлення штанги анкера у шпур і забезпечує якість перемішування фіксууючої суміші, а відповідно і максимально спроможну його міцність. В той же час практичний досвід використання різних видів бурового обладнання показав, що якість перемішування істотно не зменшується навіть у діапазоні $170 \div 250$ об/хв. Тому у подальших обчисленнях використано найменшу з цього діапазону швидкість 170 об/хв.

Використання узагальненої задачі Н.М. Жуковського, що довела свою ефективність при визначенні силових параметрів для системи гірський масив – оболонка фіксууючої суміші – анкерна штанга [3] і було використано при вирішенні задачі (1 – 4). Схема навантаження системи подана на рис. 2, а розрахункова схема на рис. 3.

Основні елементи навантаження видно з наведеного вище рисунка.

Основними параметрами представленими на рис. 3 є:

Q – осьове навантаження анкерної штанги;

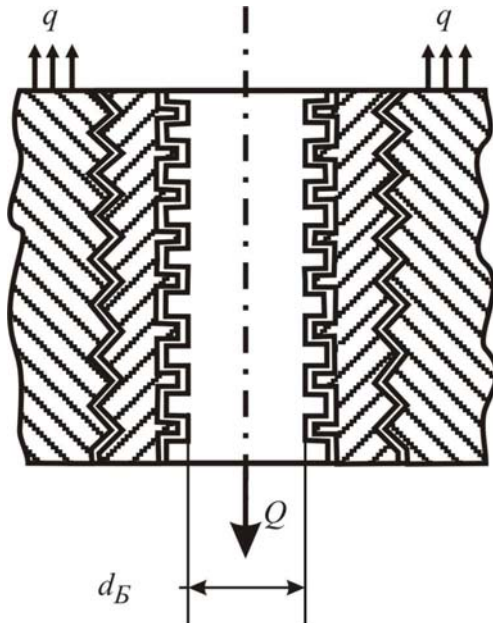


Рисунок 2 - Схема навантаження системи гірський масив – оболонка фіксуючої суміші – анкерна штанга

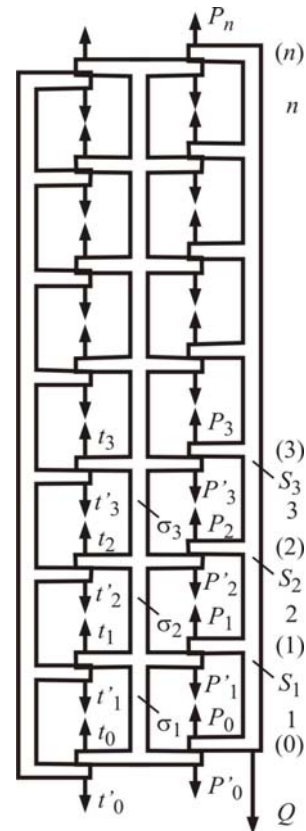


Рисунок 3 - Розрахункова схема узагальненої задачі М.Є. Жуковського

p_i - сили взаємодії, що виникають на контакті анкерна штанга – фіксуюча суміш;

t_i - сили взаємодії, що виникають на контакті фіксуюча суміш – гірський масив;

S_i - зусилля, що виникають у поперечних перерізах анкерної штанги;

σ_i - зусилля, що виникають у поперечних перерізах оболонки із фіксуючої суміші;

Для визначення зусиль, що виникають у поперечних перерізах анкерної штанги та оболонки фіксуючої суміші використано розв’язки узагальненої задачі М.Є. Жуковського [4] які представлені наведеними нижче формулами:

Зусилля, що виникають у тілі оболонки фіксуючої суміші та сили, що виникають на контактах гірська порода – фіксуюча суміш та анкерна штанга – фіксуюча суміш визначаються за формулами (5-6) відповідно:

$$\sigma_k^B = \sum_{i=0}^{k-1} (p_i^B - t_i) = \sum_{i=0}^{k-1} (p_i - t_i), \quad (5)$$

де:

$$t_k = \frac{\lambda_1 \lambda_3 Q}{8 \operatorname{sh} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}} \left[\frac{e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta_2}}{\operatorname{sh} \frac{\beta_2}{2}} - \frac{e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta_1}}{\operatorname{sh} \frac{\beta_1}{2}} \right];$$

$$p_k = \frac{\lambda Q}{2 \operatorname{sh} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}} \left[\operatorname{sh} \frac{\beta_1}{2} e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta_1} - \operatorname{sh} \frac{\beta_2}{2} e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta_2} \right] + t_k; \quad (6)$$

Зусилля, що виникають у поперечних перерізах оболонки фіксуючої суміші та анкерної штанги обчислюються за формулами відповідно:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{k+1}^r &= \frac{1}{\lambda_3} (t_k - t_{k+1}); \\ s_{k+1}^B &= \frac{1}{\lambda_1} (p_k - p_{k+1}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_3} (t_k - t_{k+1}); \end{aligned} \right\}$$

де:

$$\operatorname{ch} \beta_1 = 1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{4} + \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{4}\right)^2 - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{4}};$$

$$\operatorname{ch} \beta_2 = 1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{4} - \sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{4}\right)^2 - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{4}};$$

$$\lambda = \frac{h_B}{E_B F_B (c_B + c_G^{пав})}; \lambda_2 = \frac{h_r}{E_r F_r (c_B + c_G^{пав})}; \lambda_3 = \frac{h_r}{E_r F_r (c_r^{пес} + c_C)}.$$

h_B, h_r – відстань між виступами на штанзі анкера і поверхні шпура відповідно;

$E_B F_B; E_r F_r$ – модулі пружності та площі поперечного перерізу анкера та оболонки із фіксуючої суміші відповідно;

$(c_B + c_G^{пав}), (c_r^{пес} + c_C)$ – суми коефіцієнтів пропорційності на контактах анкерна штанга – оболонка фіксуючої суміші та оболонка фіксуючої суміші – гірська порода відповідно. Зміст коефіцієнтів пропорційності визначаються із формули: $f_i = c \cdot p_i$, де: f_i – переміщення поперечного перерізу під дією сили p_i . Коефіцієнт пропорційності приймається сталим для пари контактуючих поверхонь.

Для визначення коефіцієнтів $c_B, c_G^{пав}, c_r^{пес}$, можна скористатися [5].

Як впливає із формул (5-6) зусилля, що виникають у поперечних перерізах оболонки із фіксуючої суміші являють собою

різницю між силами на контактах анкер – фіксує суміш та фіксує суміш – поверхня анкерного шпура. Оскільки вони виникають на різних, але коаксіальних поверхнях, які знаходяться на відстані рівній товщині оболонки із фіксує суміші, то вони призводять до зміни форми об’єму матеріалу фіксує суміші, а як відомо навантаження подібного типу є небезпечними для збереження цілостності матеріалу.

Зрозуміло також, що значення цієї різниці не відображає абсолютних значень дотичних напружень на контактуючих поверхнях.

Для отримання нижньої оцінки оптимальних параметрів поставленої задачі вибрано мінімально можливу швидкість обертання анкерної штанги у шпурі $N = 170$ об/хв. та крутного моменту для найбільш поширеного бурового станка *MQT-120* ($M_{\text{крутн}} = 120$ нм). Для того щоб усвідомити динаміку змін параметрів, що досліджуються, графіки представлено одночасно для двох різних швидкостей обертання виконавчого органу бурового обладнання: $N = 170$ та 180 об/хв.

Оскільки для розрахунків у подальшому необхідно мати значення модуля пружності для анкерної штанги номінальним діаметром 21 мм, а відомо лише те, що розривні зусилля анкерної штанги не менше за матеріал анкерної штанги номінальним діаметром 25 мм, то модуль пружності для розрахунків приймався виходячи з рівності жорсткості на розрив:

$$E_{25} F_{25} = E_{21} F_{21};$$

де: $E_{25} F_{25}$; $E_{21} F_{21}$ – модулі пружності та площі поперечних перерізів анкерних штанг номінальних діаметрів 25 і 21 мм відповідно.

Результати розв’язку задачі (1 – 4) отримано за наступних даних:

$$Q = 5 \cdot 10^4 \text{ Н}; L = 2,25 \text{ м}; \sigma_{\text{гран}} = 60 \text{ МПа}; \mu = 500 - 700 \frac{\text{Нсек}}{\text{М}}; d_a = 0,021 \text{ м};$$

$$h_a = 0,009 \text{ м}; d_a = 0,025 \text{ м}; h_a = 0,0165 \text{ м}; N = 170 \text{ та } 180 \text{ об/хв.};$$

$$d_{\text{max}} = 0,060 \text{ м}; h_r = 0,006 \text{ м}; E_a = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; E_r = 9,0 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2.$$

На рис. 4 представлені графічні залежності параметрів для анкерної штанги з оптимальним діаметром шпура та з модулем пружності фіксує суміші та діаметрів 32 мм та 34 мм з модулем

пружності фіксуючої суміші, яка за звичай використовується при спорудженні анкерного кріплення на вугільних шахтах.

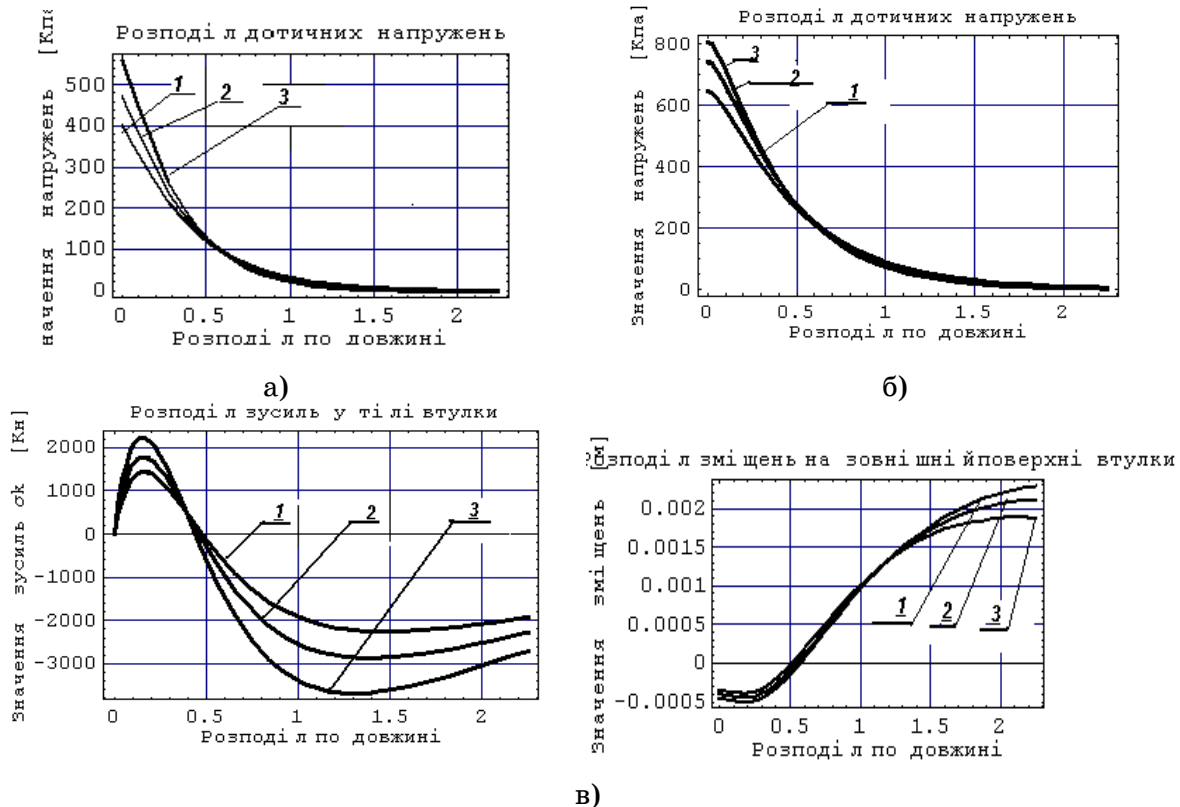
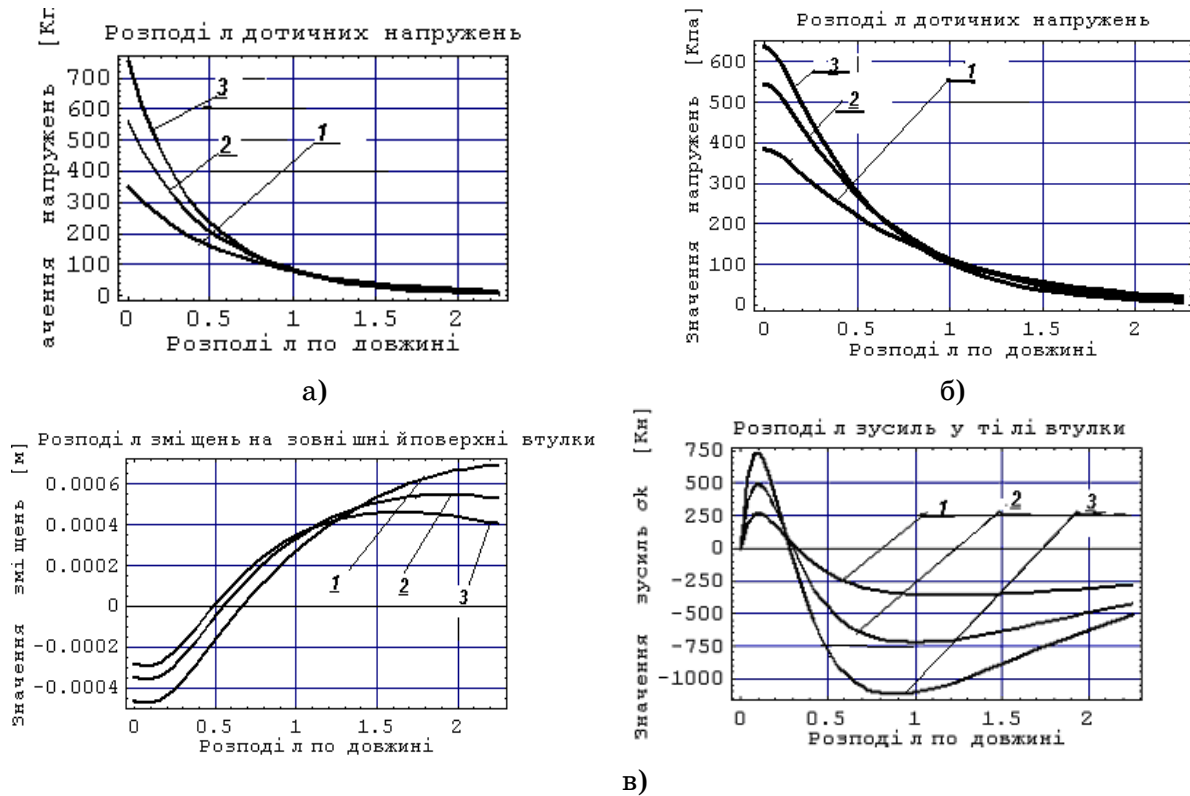


Рисунок 4 - Розподіл параметрів для номінального діаметру анкерної штанги $d_{\text{ш}} = 0.025$ м

а) дотичних напружень на контакті анкер – оболонка, б) дотичних напружень на контакті оболонка – шпур, в) зусиль у поперечних перерізах оболонки із фіксуючої суміші та переміщень поперечних перерізів за $M_{\text{кр}} = 120$ нм, де: 1 – для оптимальних значень діаметру шпура та $E = 6.0 \cdot 10^9$ н/м²; 2 – для $d_{\text{ш}} = 0.032$ м та $E = 7.8 \cdot 10^9$ н/м²; 3 – для $d_{\text{ш}} = 0.034$ м та $E = 7.8 \cdot 10^9$ н/м²

На рис. 5 представлені графічні залежності параметрів для анкерної штанги з оптимальним діаметром шпура та з модулем пружності фіксуючої суміші та діаметрів шпура 27 мм та 30 мм з модулем пружності фіксуючої суміші, яка за звичай використовується при спорудженні анкерного кріплення на вугільних шахтах України



а) дотичних напружень на контакті анкер - оболонка б) дотичних напружень на контакті оболонка - шпур в) зусиль у поперечних перерізах оболонки із фіксуючої суміші та переміщень поперечних перерізів за $M_{кр} = 120$ нм

Рис. 5 - Розподіл параметрів для номінального діаметру анкерної штанги $d_w = 0.021$ м

де: 1 – для оптимальних значень діаметру шпура та $E = 6.0 \cdot 10^9$ н/м²;

2 – для $d_w = 0.027$ м та $E = 7.8 \cdot 10^9$ н/м²; 3 – для $d_w = 0.030$ м та $E = 7.8 \cdot 10^9$ н/м²

Оскільки динамічна густина μ змінюється у процесі постановки анкерної штанги у шпур від значень 500,0 до повного затвердіння для отримання графічних залежностей параметрів вибрано найменше значення динамічної густини $\mu = 500,0$. Зрозуміло, що у такому разі відшукується нижня межа оптимальних параметрів. Тобто, якщо за таких наявних обмежень максимальних крутних моментів бурового обладнання неможливо забезпечити нормативні параметри технології наприклад на протязі 30 секунд забезпечити 170 об/хв, то отримане значення діаметру шпура не буде витримано і за більших значень динамічної густини фіксуючої суміші.

Дослідження проблеми використання анкерної штанги номінальним діаметром 25 мм (дивись табл. 1 та рис. 4) дає підстави для наступних висновків.

Таблиця 1

Параметри оптимальних проектів для $n=170$ та 180 об/хв

Динамічна густина [н сек/м]	$D_{ш} 10^{-2}$ [м]	$E_{ф.с} 10^9$ [н/м ²]	σ_{max} [н/м ²] 10^6	цільова функція 10^3	$D_{ш} 10^{-2}$ [м]	$E_{ф.с} 10^9$ [н/м ²]	σ_{max} [н/м ²] 10^6	цільова функція 10^3
500	3,2	6,0	4,58	2,828	3,2	6,0	4,58	2,828
600	3,21	6,0	4,58	2,848	3,27	6,0	4,57	3,1846
700	3,4	6,0	4,44	3,7179	3,49	6,0	4,36	4,1715

Оптимальне значення модуля пружності фіксуючої суміші менше початкового $7,8 \cdot 10^9$ н/м² і складає $6,0 \cdot 10^9$ н/м² (див. табл. 1). Графічні залежності отриманих параметрів на рис. 4 демонструють тенденцію створення більш сприятливих умов у роботі оболонки із фіксуючої суміші за меншою величиною модуля пружності. За оптимальних значень діаметру оболонки із фіксуючої суміші (тобто діаметру шпура) і модуля пружності покращується розподіл дотичних напружень як на внутрішній (рис. 1а) так і на зовнішній поверхнях (рис. 1б). Розподіл зусиль у поперечних перерізах оболонки із фіксуючої суміші та переміщень зовнішнього шару втулки зображено на рис. 4в). З аналізу графіків випливає - за менших значень модуля пружності зусилля у поперечних перерізах оболонки розподілені більш рівномірно, а переміщення у зоні замкової частини анкерної штанги збільшуються, що відповідає загальним уявленням механіки деформованого твердого тіла.

Аналіз результатів чисельних досліджень анкерної штанги номінального діаметру 21 мм (дивись табл. 2 та рис. 5) дає підстави для наступних висновків.

Таблиця 2

Параметри оптимальних проектів для $n = 170$ та 180 об/хв

Динамічна густина [н сек/м]	$D_{ш} 10^{-2}$ [м]	$E_{ф.с} 10^9$ [н/м ²]	σ_{max} [н/м ²] 10^6	цільова функція 10^3	$D_{ш} 10^{-2}$ [м]	$E_{ф.с} 10^9$ [н/м ²]	σ_{max} [н/м ²] 10^6	цільова функція 10^3
500	2,5	6,0	1,8	0,5287	2,5	6,0	1,8	0,5287
600	2,5	6,0	1,8	0,5287	2,5	6,0	1,8	0,5287
700	2,556	6,0	1,728	0,602	2,6	6,0	1,77	0,654

Розподіл дотичних напружень, що виникають на внутрішній та зовнішніх поверхнях оболонки із фіксуючої суміші (рис. 5а, б)), стає більш рівномірним на зовнішній поверхні (рис. 5б) у порівнянні з внутрішньою. Більш навантаженою є внутрішня поверхня

оболонки(рис. 5а). Зусилля, що виникають на контактi анкер – фіксуєча суміш на 15% більше ніж на контактi фіксуєча суміш – поверхня шпура. Причому, розподіл дотичних напружень за оптимальних параметрів ($d_{ш} = 0,025$ мм та $E_{ф.с.} = 6,0 \cdot 10^9$ н/м²) є більш рівномірним, а максимальне значення дотичних напружень на 53% менше ніж за неоптимальних значень($d_{ш} = 0,03$ мм та $E_{ф.с.} = 7,8 \cdot 10^9$ н/м²);

Порівняння розподілу зусиль у поперечних перерізах оболонки із фіксуєчої суміші (дивись рис. 5в) дає підстави стверджувати, що збільшення міцності матеріалу фіксуєчої суміші і діаметру шпура призводить до більшої неоднорідності зусиль по довжині анкерної штанги. Переміщення поперечних перерізів оболонки з фіксуєчого матеріалу більшої міцності (крива 3) є меншими (дивись рис. 5в), що підтверджує вже відомий факт. Зміна номінальних діаметрів анкерних штанг з 25 мм на 21 мм призводить до суттєвих змін у розподілі навантажень, що діють на внутрішніх і зовнішніх контактних поверхнях. Зокрема, за номінального діаметру анкерної штанги 25 мм більшого навантаження зазнає зовнішня контактна поверхня фіксуєча суміш – поверхня шпура у порівнянні з внутрішньою і різниця складає 30%. За номінального діаметру анкерної штанги 21 мм більшого навантаження зазнає внутрішня контактна поверхня анкер - фіксуєча суміш у порівнянні із зовнішньою і різниця складає не менше 13%. Аналізуючи перерозподіл навантаження викликаний зміною номінальних діаметрів анкерних штанг та враховуючи той факт, що різниця між модулями пружності фіксуєчої суміші і гірської породи менша ніж пари анкер – фіксуєча суміш, можна стверджувати, що слабою ланкою у цій конструкції є пара анкер – фіксуєча суміш. А цей факт означає, що при підвищенні навантаження ймовірність відмови конструкції анкерного кріплення за рахунок пари анкер – фіксуєча суміш є вищою, ніж пари фіксуєча суміш – гірська порода.

За прийнятої функції цілі оптимальні проекти визначаються розташуванням незалежної змінної (модуля пружності) на нижній границі обмеження. Це означає ніщо інше як тенденцію використання фіксуєчої суміші з меншим можливим модулем пружності (враховуючи кореляційну залежність між модулем пружності та межею міцності) з меншою міцністю.

Крім того, слід зазначити, що конструктивною особливістю анкерних штанг номінальним діаметром 21 мм, що отримують широке розповсюдження, є відсутність різьбової частини. Наявність різьбової ділянки для анкерних штанг з номінальним діаметром 25 мм була викликана необхідністю створення попереднього навантаження. Для створення попереднього навантаження анкерних штанг номінальним діаметром 21 мм використовується зовнішня гвинтова навивка прокату. Розрахунки проведені в ІГТМ НАН України показують, що максимальне попереднє навантаження, за таких конструктивних особливостей прокату і бурового обладнання з крутним моментом, що не перевищує 150 нм, не перевищує 2 т проти 5 т за нормативними документами [1].

Для отримання відповіді про необхідність попереднього навантаження і використання анкерних штанг номінальним діаметром 20 мм в умовах вугільних шахт України (на ш. „Білоріченська” ДВАТ „Луганськвугілля”) ” у 2007 році було проведено українсько-американський експеримент. Він підтвердив необхідність і важливість створення попереднього навантаження. Крім того, засвідчив важливість не тільки повздовжньої жорсткості, а й поперечної. Іншими словами, одностайно було зроблено висновок про неефективність застосування анкерного кріплення з американською технологією її зведення і високу ефективність анкерного кріплення, з номінальним діаметром анкерних штанг 25 мм і попереднім навантаженням, яке використовується на вугільних шахтах України.

Як свідчить проведений експеримент та практичний досвід застосування анкерного кріплення на Україні, врахування поперечної жорсткості стає вкрай необхідним у випадку слабких порід покрівлі гірської виробки. За сталої величини попереднього навантаження, рівність поперечної жорсткості пропорційна рівності сумарних площ встановлених анкерів в ряду.

Іншими словами:

$$N_{25}F_{25} = N_{21}F_{21},$$

звідки

$$N_{21} = N_{25}F_{25} / F_{21} = d_{25}^2 / d_{21}^2 N_{25} = 1.417 N_{25}.$$

де: N_{25} , N_{21} та F_{25} , F_{21} – відповідно кількості анкерів номінальних діаметрів 25 та 21 мм у ряду та їх площі поперечних перерізів.

Тобто, для забезпечення рівня зміцнення покрівлі гірської виробки з допомогою 9 анкерів номінального діаметру 25 мм поставлених у ряд необхідно поставити 13 анкерів номінального діаметру 21 мм. Отже зміна діаметру анкерних штанг для кріплення гірських виробок потребує зміни паспортів кріплення, а це у свою чергу натикається на відсутність практичного досвіду їх застосування.

Висновки:

- ефективність та надійність роботи анкерного кріплення залежить від міцності фіксуючих сумішей, що використовуються, міцності прокату з якого виготовлені анкерні штанги, їх діаметрів та діаметрів шпурів ;
- зміна номінальних діаметрів анкерних штанг з 25 мм на 21 мм призводить до суттєвих змін у розподілі навантажень, що діють на внутрішніх і зовнішніх контактних поверхнях;
- для забезпечення високого рівня безпеки видобутку вугілля у складних гірничо-геологічних умовах вугільних шахт України необхідно використовувати анкерне кріплення з номінальним діаметром штанг не менше 25 мм з метричною різьбовою частиною для забезпечення попереднього навантаження у відповідності з діючими нормативними документами;
- використання анкерних штанг діаметру 21 мм можливе у виробках за більш сприятливих гірничо-геологічних умов та у виробках з невеликим терміном існування як то розрізні печі, квершлагги тощо;
- для підвищення стійкості гірських виробок та безпеки видобутку вугілля на високих глибинах замість спроб переходу на менший діаметр анкерних штанг з сумнівною ефективністю, необхідно збільшувати міцність та довжину анкерів номінального діаметру 25 мм.

ЛІТЕРАТУРА

1. Булат А.Ф., Виноградов В.В. Опорно-анкерне кріплення гірничих виробок вугільних шахт / Ін-т геотехнічної механіки НАН України. – Дніпропетровськ, 2002. – С. 372.
2. Головка С.А., Буліч Ю.Ю., Ларіонов Г.І. Щодо вибору обладнання для встановлення металополімерних анкерів. Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць / Ін-т геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України. - Дніпропетровськ, 2005. - Вип. 56. – С. 157-165.

3. Ларионов Г.И. О применении решения обобщенной задачи Н.Е. Жуковского к исследованию качества закрепления металлополимерного анкера. Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць / Ін-т геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України. - Дніпропетровськ, 2007. - Вип. 68. - С. 90-98.
4. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. – М-Л.: Гос. изд. техн-теор. лит., 1951. – 432 с.
5. Биргер И. А., Иоселевич Г.Б. Резьбовые и фланцевые соединения. – М.: Машиностроение, 1990. – 368.

Получено 17.04.2008 г.

А.В.Артамонова, В.А.Долодаренко, С.З.Полищук, В.Н.Полторацкая,
В.В.Фалько, А.В.Полищук

ОПЫТНО-ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО РИСКА ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ВЫБРОСОВ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ

Введение. В работах [1-4] разработаны математические модели задачи оценки составляющей экологического риска от точечного источника выбросов загрязняющих веществ в атмосферу при прогнозе (расчетах) или по данным измерений в заданной точке местности концентраций этих веществ. Величина суммарного риска оценивается как вероятность превышения в наихудших условиях [5] концентраций C_j хотя бы одного j -го $j = \overline{1, n}$ загрязняющего вещества своей максимальной разовой предельно допустимой концентрации $ПДК_{мрj}$ [6]

$$\alpha = \int_{ПДК_{мр1}}^{\infty} \dots \int_{ПДК_{мрn}}^{\infty} f(C_1, C_2, \dots, C_n) dC_1 \cdot dC_2 \dots dC_n. \quad (1)$$

Риск от каждого j -го загрязняющего вещества рассматривается как вероятность превышения в тех же условиях концентрацией этого вещества своей $ПДК_{мрj}$

$$\alpha_j = \int_{ПДК_{мрj}}^{\infty} f_j(C_j) dC_j \quad (2)$$

В (1) и (2) f и f_j - плотности распределения случайных изменений системы $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ концентраций и каждой концентрации $C_j, j = \overline{1, n}$ в отдельности, зависящих от возмущающих факторов $\lambda_{gj}, \lambda_g, g = \overline{1, m_1}$ - проектных параметров источника и характеристик внешней среды [1]. На основании предельных теорем теории вероятностей плотности f, f_j представлены в виде нормальных распределений [7]. Числовые характеристики этих распределений при прогнозных расчетах получают на основании метода линеаризации [1, 7] или с использованием метода статистических испытаний [2], а при оценках риска по данным измерений концентраций – с помощью статистической обработки.

На практике могут встречаться случаи, в которых измерения концентраций производится не для всех $j = \overline{1, n}$ загрязняющих веществ, а только для основных $j = \overline{1, n_1}$. В связи с этим возникает необходимость решения задачи для такого случая.

Постановка задачи. В рассматриваемом случае числовые характеристики плотностей распределения f и f_j не могут быть получены только по данным измерений. В связи с этим возникает идея постановки и решения задачи, состоящая в объединении задач [1,2] прогнозной оценки риска для загрязняющих веществ, приземные концентрации которых не измеряются, с задачей [4] апостериорной оценки риска для загрязняющих веществ, приземные концентрации которых измеряются. Полученная таким образом комплексная задача будет давать искомую опытно-теоретическую оценку риска.

При постановке задачи считаются заданными для экстремальных условий [5] следующие величины и зависимости:

1. Проектные параметры источника:

а) геометрические

H_o , м - высота источника выброса над уровнем земли;

D_o , м - диаметр устья источника выброса;

x_f , м - f -ое расстояние от основания источника до точки на прилегающей к источнику поверхности земли, в которой оценивается искомая составляющая экологического риска;

z_f , м - превышение точки, в которой производится оценка искомой составляющей экологического риска, над основанием источника;

б) технологические:

M_j , г/с - масса j -го загрязняющего вещества, выбрасываемая в атмосферу в единицу времени;

F_j - безразмерный коэффициент, учитывающий скорость ожидания вредных веществ в атмосферном воздухе;

ω_o , м/с - средняя скорость выхода газовой смеси (ГВС) из устья источника выброса.;

T_e °С - температура выбрасываемой ГВС;

ΔC_j - погрешность методики определения концентраций.

2. Характеристики внешней среды:

A – коэффициент, зависящий от температурной стратификации атмосферы;

η – безразмерный коэффициент, учитывающий рельеф местности;

T_e °С – температура окружающего атмосферного воздуха;

u , м/с – величина скорости ветра;

φ , рад – изменение азимута вектора скорости;

$C_{\phi j}$, мг/м³ – фоновая концентрация j -го загрязняющего вещества;

3. Среднеквадратические отклонения σ_{gj}, σ_g случайных изменений проектных параметров и характеристик внешней среды (индекс j относится к величинам, зависящим от вида загрязняющих веществ: $M_j, F_j, C_{\phi j}, \Delta C_j$).

4. Зависимость концентраций C_j j -ых загрязняющих веществ от проектных параметров и характеристик внешней среды λ_{gj}, λ_g [5]

$$C_j = C_j(\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{4j}, \lambda_5, \dots, \lambda_{m_1}), \quad (3)$$

где $\lambda_{1j} = M_j, \lambda_{2j} = F_j, \lambda_{3j} = C_{\phi j}, \lambda_{4j} = \Delta C_j$ – характеристики, зависящие от вида загрязняющего вещества;

$\lambda_5, \dots, \lambda_{m_1}$ – характеристики, не зависящие от вида загрязняющего вещества.

5. Данные подфакельных и сопровождающих их измерений:

а) при опасном направлении ветра φ_{on} (направление «источник-точка измерений») и наихудших величинах M_j, ω_o [5]:

измеренные в $\kappa = \overline{1, m}$ опытах концентрации n_1 загрязняющих веществ, выбрасываемых источником, C_{jk} ;

перечень загрязняющих веществ в количестве n_2 , выбрасываемых источником, для которых измерения не производились;

скорость ветра u_κ (м/с) при измерениях;

температура воздуха $T_{e\kappa}$ °С при измерениях;

б) при измеренном направлении ветра φ_κ , рад, отличном от опасного, или величинах M_{jk}, ω_{ok} , отличных от наихудших;

кроме перечисленных в предыдущем пункте а) задаются измеренные величины направления скорости ветра φ_κ , рад, а также

измеренные величины текущего расхода массы j -ых загрязняющих веществ M_{jk} , $j = \overline{1, n_1}$, $k = \overline{1, m}$ и скорости выхода ГВС из устья источника $\omega_{ок}$, $k = \overline{1, m}$.

6. Состав $j = \overline{1, n}$ j -ых загрязняющих веществ и наличие групп суммации вредного действия их.

Необходимо определить в заданной точке местности на расстоянии x_f от основания источника в наихудших условиях [5] составляющую экологического риска для человека от загрязнения атмосферы отдельными загрязняющими веществами α_j , $j = \overline{1, n}$ и от загрязнения атмосферы всеми загрязняющими веществами α .

Метод решения. При рассмотренной постановке задачи опытно-теоретический метод решения ее будет заключаться в приведении в соответствие с [4] измеренных концентраций C_{jk} к наихудшим условиям и статистической обработке приведенных концентраций C_{jk}^{np} , $k = \overline{1, m}$, в результате которой получают числовые характеристики плотностей распределения f и f_j для части измеряемых концентраций загрязняющих веществ:

математические ожидания

$$C_j^* = \frac{\sum_{k=1}^m C_{jk}^{np}}{m}, \quad j = \overline{1, n_1}, \quad (4)$$

среднеквадратические отклонения

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^m (C_{jk}^{np} - C_j^*)^2}{m-1}}, \quad j = \overline{1, n_1}, \quad (5)$$

корреляционные моменты K_{jp} и коэффициенты корреляции r_{jp} между концентрациями j -го и p -го загрязняющих веществ

$$K_j = \frac{\sum_{k=1}^m (C_{jk}^{np} - C_j^*)(C_{pk}^{np} - C_p^*)}{m-1}, \quad j = \overline{1, n_1}; \quad p = \overline{1, n_1}, j \neq p, \quad (6)$$

$$r_{jp} = \frac{K_{jp}}{\sigma_j \sigma_p}.$$

Числовые характеристики плотностей распределения не измеряемых концентраций загрязняющих веществ определяются с использованием метода линеаризации [1]:

математические ожидания

$$C_j^* = C_j(\lambda_{1j}^*, \lambda_{2j}^*, \dots, \lambda_{m_1}^*), \quad j = \overline{n_1 + 1, n}, \quad (7)$$

среднеквадратические отклонения

$$\sigma_j = \sqrt{\sum_{g=1}^4 \left(\frac{\partial C_j}{\partial \lambda_{gj}} \sigma_{\lambda_{gj}} \right)^2 + \sum_{g=5}^{m_1} \left(\frac{\partial C_j}{\partial \lambda_g} \sigma_{\lambda_g} \right)^2}, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}, \quad (8)$$

корреляционные моменты K_{jp} и коэффициенты корреляции r_{jp} между j -ым и p -ым загрязняющими веществами, включая множество J индексов j, p между измеряемыми и не измеряемыми концентрациями ($j \in J$)

$$K_{jp} = \sum_{g=5}^{m_1} \frac{\partial C_j}{\partial \lambda_g} \cdot \frac{\partial C_p}{\partial \lambda_g} \sigma_{\lambda_g}^2, \quad (9)$$

$$r_{jp} = \frac{K_{jp}}{\sigma_j \sigma_p}, \quad j \in J, p \in J, j \neq p.$$

Здесь $\frac{\partial C_j}{\partial \lambda_g} \cdot \frac{\partial C_p}{\partial \lambda_g}$ - первые частные производные зависимости

концентраций от возмущающих факторов [1,8];

При необходимости учета нелинейностей в зависимости концентраций от возмущающих факторов для получения числовых характеристик (7)-(9) целесообразно использовать метод статистических испытаний [2].

В связи с вычислительными трудностями определения α при большом числе загрязняющих веществ оценка величин риска $\alpha(1)$ производится с использованием приближенной зависимости, предложенной в [9,10]

$$\alpha = 1 - \prod_{j=1}^n F_j - \frac{1}{n(n-1)\pi} \sum_{j \neq p} \sum_p \arcsin r_{jp} \cdot (F_{\min} - \prod_{j=1}^n F_j), \quad (10)$$

где

$$F_j = 1 - \alpha_j; \quad F_{\min} = \min_j (1 - \alpha_j). \quad (11)$$

При этом при большом числе измерений ($m \geq 100$) величины α_j (2) для загрязняющих веществ с измеренными концентрациями определяются приближенно по частоте [7]

$$\alpha_j = \frac{m_j}{m},$$

где m_j - число превышений приведенных к наихудшим условиям измеренных концентраций своей ПДК_{мрj}.

В случае малого числа измерений или для загрязняющих веществ с неизмеренными концентрациями величины α_j (2) определяют таблично [7] или с помощью ряда [11]

$$\alpha_j = Z(h_j)(b_1 t_j + b_2 t_j^2 + \dots + b_5 t_j^5),$$

где

$$h_j = \frac{ПДК_{мрj} - C_j^*}{\sigma_j}; \quad Z(h_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} h_j^2\right);$$

$$t_j = \frac{1}{1 + p h_j}, \quad p = 0,2316419, \quad b_1 = 0,31938153,$$

$$b_2 = 0,356563782, \quad b_3 = 1,781477937,$$

$$b_4 = -1,821253978, \quad b_5 = 1,330274429.$$

Выводы. Полученная опытно-теоретическая оценка составляющей экологического риска для человека от точечного источника выбросов загрязняющих веществ в атмосферу позволяет определить суммарный риск и его составляющие от загрязнения отдельными веществами в часто встречающемся на практике случае, в котором по тем или иным причинам не производится измерения приземных концентраций всех загрязняющих веществ.

Дальнейшие работы должны быть направлены на разработку алгоритма и программы решения задачи с целью использования их в экологическом мониторинге предприятий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Применение методов системного анализа, аэродинамики приземного слоя и теории надежности для оценки экологического риска / Артамонова А.В., Долодаренко В.А., Фалько В.В. и др. // Екологія і природокористування.- 2003. - № 6. - с. 194-199.
2. Разработка стохастической математической модели загрязнения атмосферного воздуха с использованием метода статистических испытаний и ее применение для оценки экологического риска. / Артамонова А.В., Долодаренко В.А., Фалько В.В. и др. // Екологія і природокористування. - 2003. - №5. - с.231-236.
3. Фалько В.В. К вопросу оценки экологического риска для человека в проектах строительства предприятий // Вісник Сумського держ.ун-ту, серія Технічні науки, № 6. - Сумы, 2006, - с. 96-104.
4. Разработка математической модели оценки экологического риска по данным измерений приземных концентраций загрязняющих атмосферу веществ / Артамонова А.В., Долодаренко В.А., В.Н.Полторацкая и др. // Системні технології. - 2007. - № 5 (52) - с. 112-120.
5. ОНД-86. Методика расчета концентраций в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий. - Л.: Гидрометеоздат, 1987. - 94 с.
6. Предельно допустимые концентрации (ПДК) и ориентированные безопасные уровни воздействия загрязняющих веществ (ОБУВ) в атмосферном воздухе населенных мест. - Донецк, УкрНТЭК, 1998. - 139 с.

7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Учебник для вузов, 6-е изд. – М.: Высш.школа, 1998. – 576 с.
8. Влияние случайных возмущающих факторов внешней среды на концентрации в атмосферном воздухе вредных веществ, содержащихся в выбросах предприятий химической промышленности / Артамонова О.В., Артамонова А.В., Долодаренко В.А., Фалько В.В. Вісн.Дніпропетровського нац.ун-ту. – 2006. № 8. – С. 140-150.
9. Волков Е.Б., Судаков Р.С., Сырицын Т.А. Основы теории надежности ракетных двигателей. – М.: Машиностроение, 1974. – 393 с.
10. Надежность технических систем. Монография / Переверзев Е., Алпатов А., Даниев Ю., Новак П. – Днепропетровск, Пороги, 2002. – 396 с.
11. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке БЕЙСИК для персональных ЭВМ: Справочник. – М.: Наука, 1987. – 240с.

Получено 05.05.2008 г.

УДК 621.876.212.

В.И. Кузьменко, П.Н. Кирьязов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ЗУБЧАТОГО СОЕДИНЕНИЯ ЛЕНТ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ПРИВОДНЫМ БАРАБАНОМ ЛЕНТОЧНОГО КОНВЕЙЕРА

Введение. Известно, что при движении в контуре ленточного конвейера лента и ее соединения испытывают различные нагрузки как по величине, так и по виду их приложения. Одним из характерных видов нагружения, существенно влияющим на напряженное состояние соединения, является одновременное нагружение растягивающими и изгибающими нагрузками с касательным приложением тягового усилия от приводного барабана к поверхности ленты, контактирующей с ним. При этом известно, что тяговое усилие от приводного барабана к ленте по длине дуги обхвата прикладывается неравномерно [1, 2].

Постановка задачи. Цель настоящей работы – определить напряжения в связующем слое соединения зубчатой конструкции при взаимодействии с приводным барабаном ленточного конвейера.

Метод и результаты исследования. Задача решалась в нелинейной (физической и геометрической) постановке методом конечных элементов с использованием вычислительного комплекса «Лира 9.4» [3].

Конечно-элементная расчетная схема (на примере четырехпрокладочной ленты с резинотканевым каркасом на основе ткани ТК-200) представляет собой девятислойную модель, состоящую из четырех слоев тканевых прокладок толщиной, равной $\delta=1$ мм; трех резиновых прослоек, лежащих между тканевыми прокладками, толщиной $s=1$ мм; двух слоев – рабочей и нерабочей резиновых обкладок.

Тканевые прокладки, связующий слой между соединяемыми поверхностями и резиновые прослойки между тканевыми прокладками моделировались физически нелинейными элементами с экспоненциальными зависимостями между напряжениями и деформациями « σ – ε ». Принятые в расчетах характеристики

резиновых прослоек и связующего слоя: модуль упругости $E_p = 10 \text{ Н/мм}^2$; коэффициент Пуассона $\mu_p = 0,4$. Характеристики тканевых прокладок: модуль упругости $E_t = 1000 \text{ Н/мм}^2$; коэффициент Пуассона $\mu_t = 0,275$. Конструктивные параметры соединения приняты следующие: длина $l = 500 \text{ мм}$; угол среза боковых граней зубьев равен 45° ; ширина зуба $b = 50 \text{ мм}$; толщина связующего слоя $s = 1 \text{ мм}$. Напряженно-деформированное состояние зубчатого соединения определялось для положения, когда стык полностью располагался на приводном барабане диаметром 400 мм , т.е. угол обхвата равен 180° .

Нагрузка прикладывалась как равномерно распределенная по поперечным сечениям тканевых прокладок в набегающей ветви ленты с интенсивностью 20 Н/мм^2 , в сбегавшей ветви – 5 Н/мм^2 . Кроме того, по поверхности контакта ленты с барабаном приложена переменная касательная нагрузка. Упрощенный закон изменения касательной нагрузки по поверхности контакта ленты с приводным барабаном принят на основании работы [1]. На рисунке 1 показан принятый в расчетах линеаризованный закон распределения касательной нагрузки по поверхности контакта ленты с приводным барабаном.

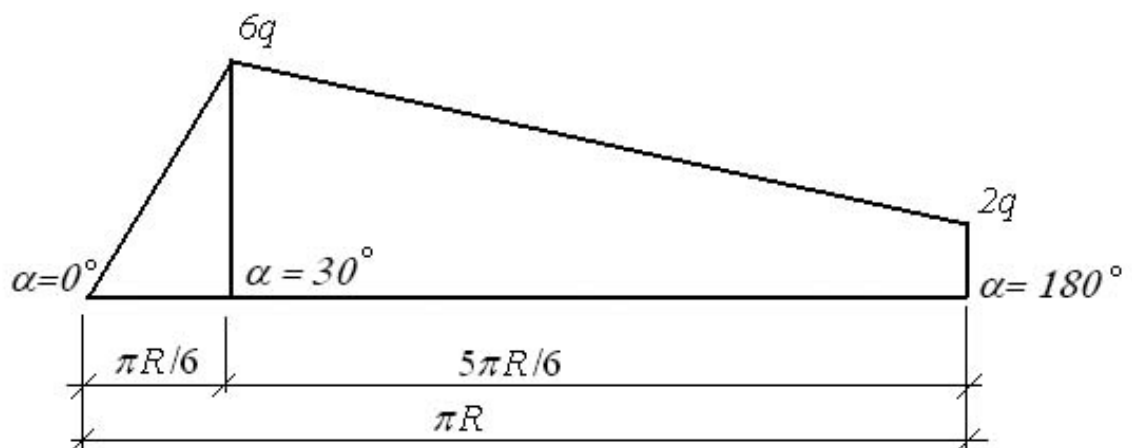


Рисунок 1 - Закон распределения касательной нагрузки по поверхности контакта

Равнодействующая касательной нагрузки на площадке шириной 1 мм и длиной, равной длине поверхности контакта, составляет 60 Н , т.е. параметр нагрузки $q = 0.025 \text{ Н/мм}^2$.

Общий вид конечно-элементной расчетной схемы зубчатого соединения при взаимодействии с приводным барабаном представлен на рис. 2 (где 1 – лента; 2 – приводной барабан; 3 – тяги,

пригибающие ленту к барабану), а на рис. 3 представлена деформированная схема соединения на приводном барабане.

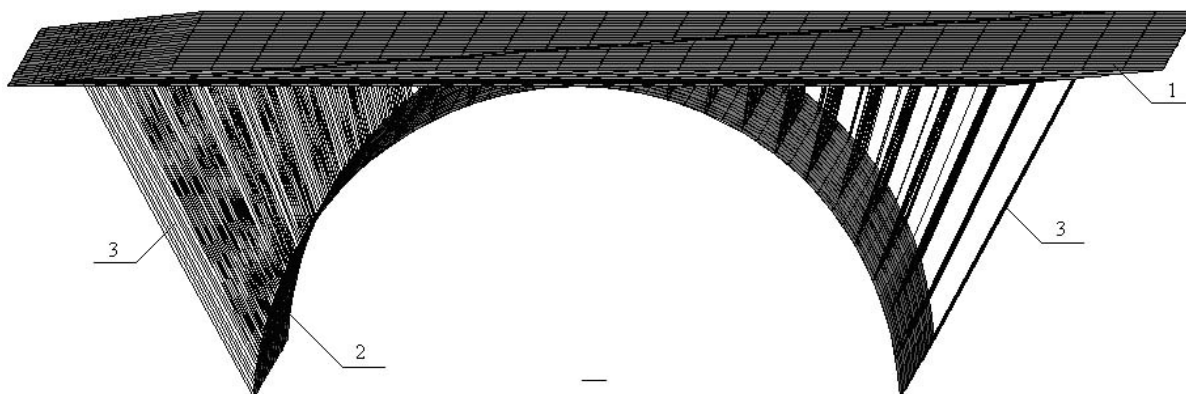


Рисунок 2 - Общий вид конечно-элементной расчетной схемы зубчатого соединения на приводном барабане.



Рисунок 3 - Деформированная схема зубчатого соединения на приводном барабане

Результаты исследования напряженного состояния связующего слоя зубчатого соединения ленты при взаимодействии с приводным барабаном ленточного конвейера представлены на рис. 4-9 в виде графических зависимостей компонент нормальных (N_x , N_y , N_z) и касательных (T_{xy} , T_{yz} , T_{xz}) напряжений по длине соединения.

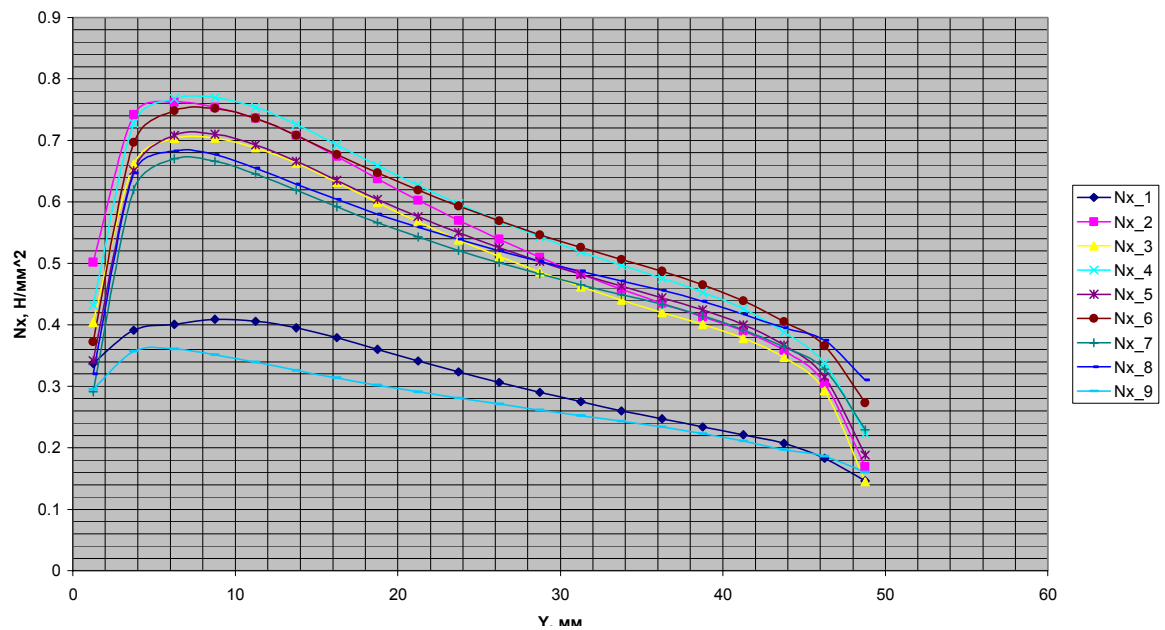


Рисунок 4 - Напряжения N_x в связующем слое зубчатого соединения ленты при взаимодействии с приводным барабаном

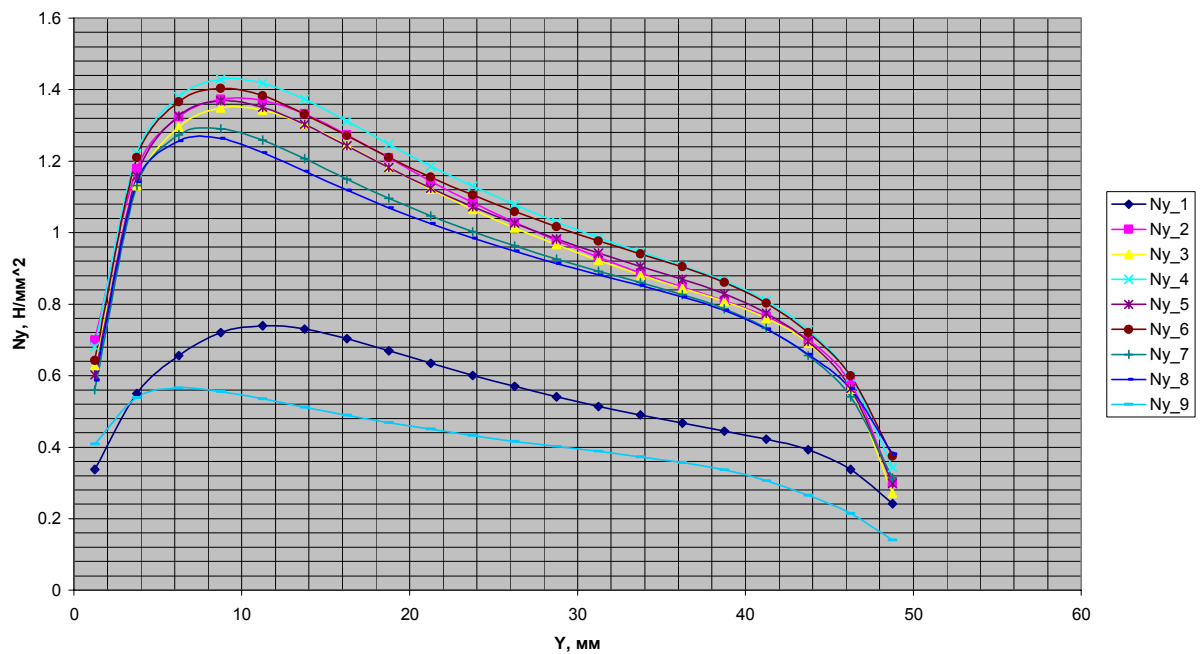


Рисунок 5 - Напряжения N_y в связующем слое зубчатого соединения ленты при взаимодействии с приводным барабаном

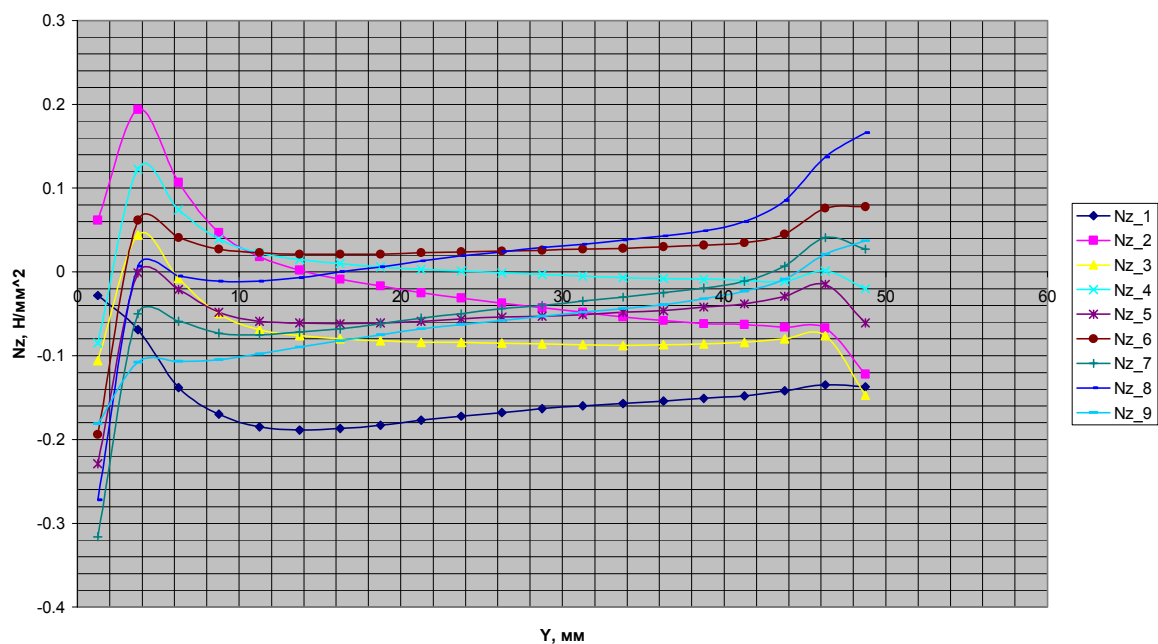


Рисунок 6 - Напряжения N_z в связующем слое зубчатого соединения ленты при взаимодействии с приводным барабаном

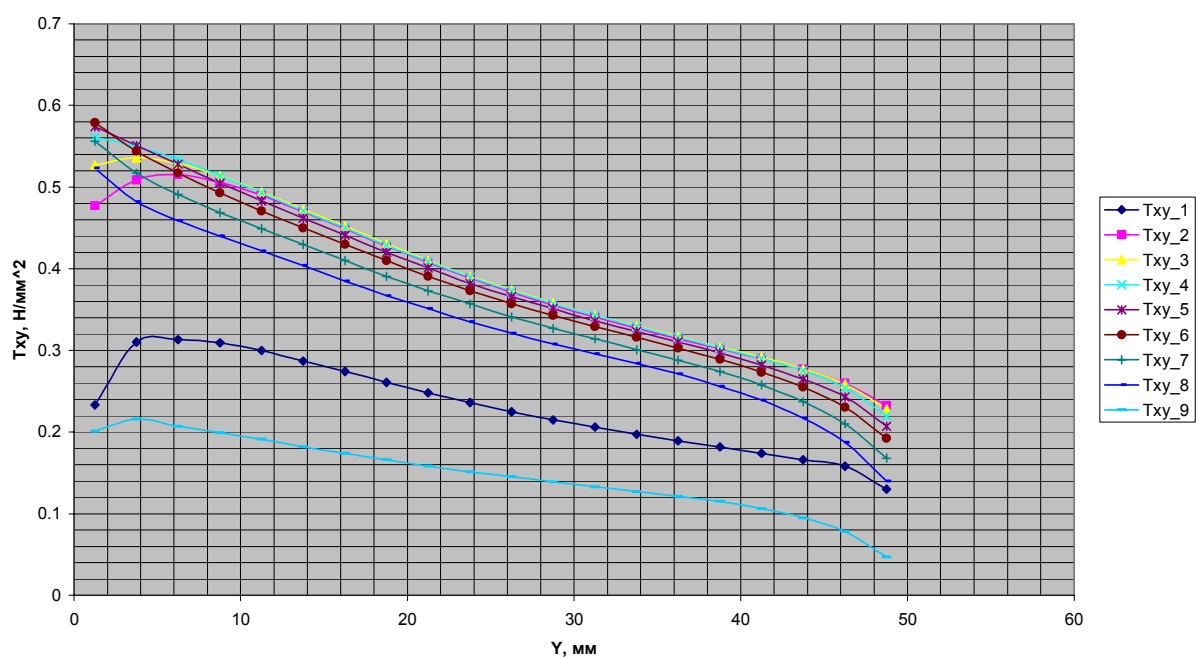


Рисунок 7 - Напряжения T_{xy} в связующем слое зубчатого соединения ленты при взаимодействии с приводным барабаном

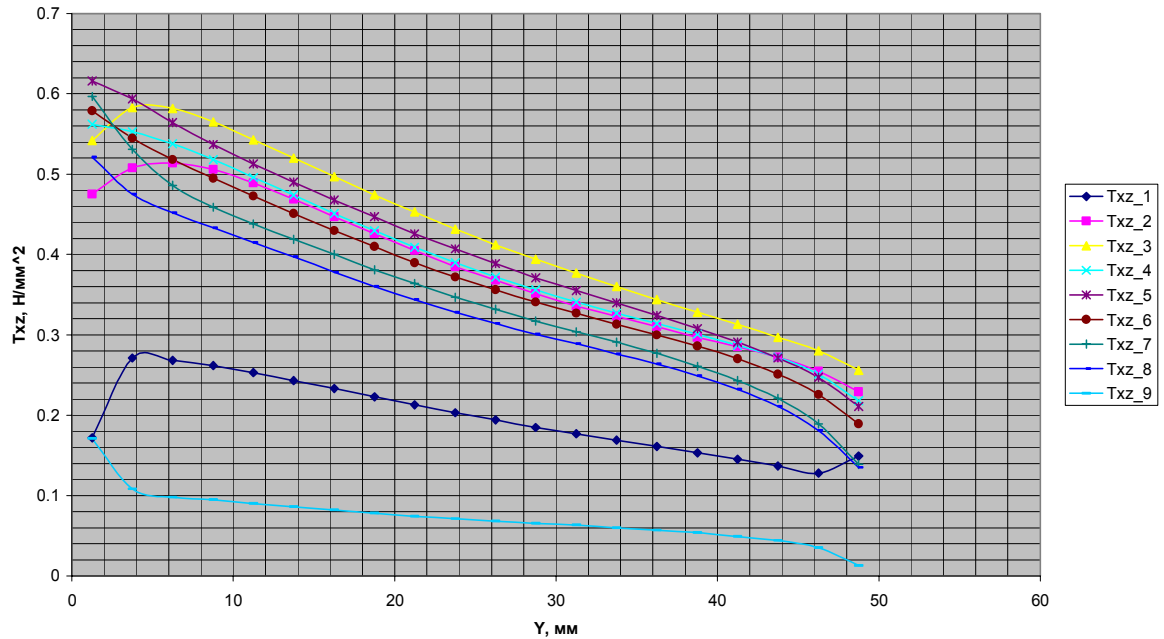


Рисунок 8 - Напряжения T_{xz} в связующем слое зубчатого соединения ленты при взаимодействии с приводным барабаном

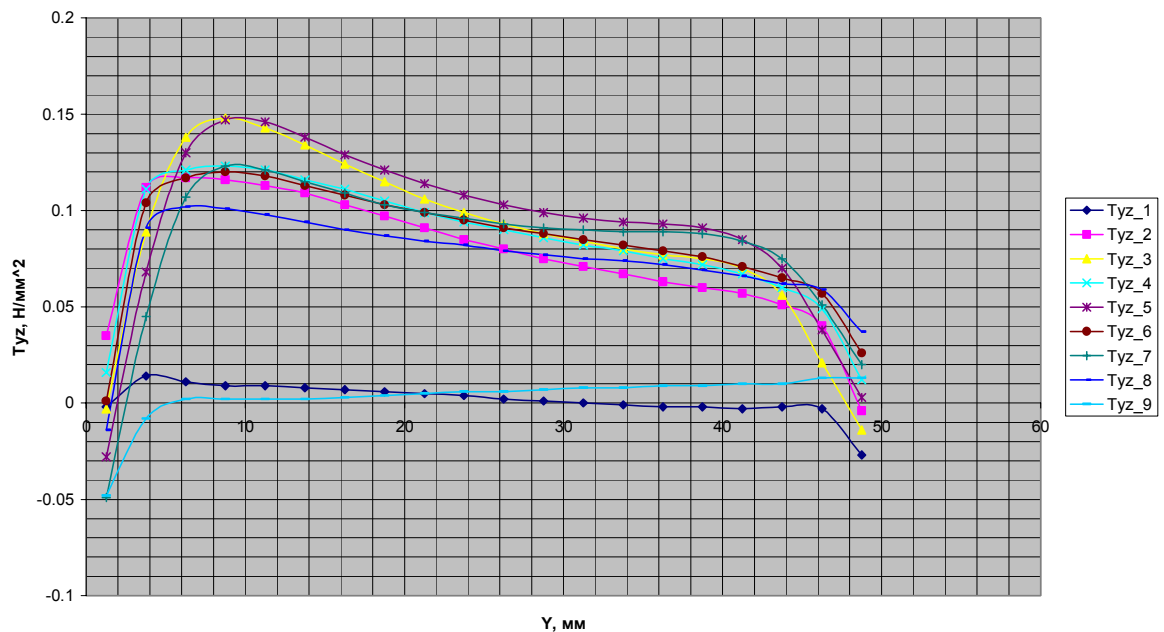


Рисунок 9 - Напряжения T_{yz} в связующем слое зубчатого соединения ленты при взаимодействии с приводным барабаном

Из сравнения компонент нормальных напряжений в связующем слое (рис. 4-6) видно, что максимальные значения напряжений возникают в зоне набегания на приводной барабан. На примере слоя №6: $N_y = 1,4$ МПа, $N_x = 0,76$ МПа, $Z - N_z = 0,08$ МПа. При этом по толщине соединения напряжения изменяются незначительно. Наименее напряженными слоями являются слои №1 и №9. В

сбегающей ветви ленты с приводного барабана ленточного конвейера величины нормальных напряжений в связующем слое соединения значительно ниже: $N_x = N_y = 0,38 \text{ МПа}$, $N_z = 0,06 \text{ МПа}$.

Компоненты касательных напряжений в связующем слое (рис. 7-9) имеют максимальные значения в зоне набегания ленты на приводной барабан на примере слоя №6: $T_{xy} = T_{xz} = 0,85 \text{ МПа}$, $T_{yz} = 0,12 \text{ МПа}$. В точке сбегания с приводного барабана эти напряжения значительно ниже и составляют $T_{xy} = T_{xz} = 0,2 \text{ МПа}$, а $T_{yz} = 0,03 \text{ МПа}$. Как и в случае нормальных напряжений, в слоях №2 – №8 по толщине соединения касательные напряжения отличаются друг от друга незначительно, а слои №1 и №9 также являются наименее нагруженными.

С целью сравнительного анализа напряженных состояний связующего слоя зубчатого соединения конвейерной ленты для различных случаев ее нагружения (растяжение на прямолинейном участке ленточного конвейера, растяжение с изгибом на неприводном барабане [4], растяжение с изгибом на приводном барабане) были определены эквивалентные напряжения по энергетической теории прочности. Графики эквивалентных напряжений приведены на рис. 10 (N04_R – для случая растяжения стыка на прямолинейном участке, N04_OB и N04_PB – для случаев растяжения с изгибом, соответственно, на неприводном и приводном барабанах)

Сравнительный анализ этих зависимостей показывает, что максимальные эквивалентные напряжения в связующем слое зубчатого соединения имеют место при его взаимодействии с неприводным барабаном и составляют $\sigma_{\text{экв.}(OB)} = 2,1 \text{ МПа}$. При растяжении соединения на прямолинейном участке конвейера максимальные эквивалентные напряжения равняются $\sigma_{\text{экв.}(R)} = 1,8 \text{ МПа}$, а при взаимодействии с приводным барабаном $\sigma_{\text{экв.}(PB)} = 1,7 \text{ МПа}$.

Выводы. Полученные результаты исследований напряженного состояния зубчатого соединения при его взаимодействии с приводным барабаном ленточного конвейера позволил установить:

– по толщине соединения все компоненты напряженного состояния в связующем слое изменяются незначительно, при этом

наименее нагруженными являются слои у наружных поверхностей ленты;

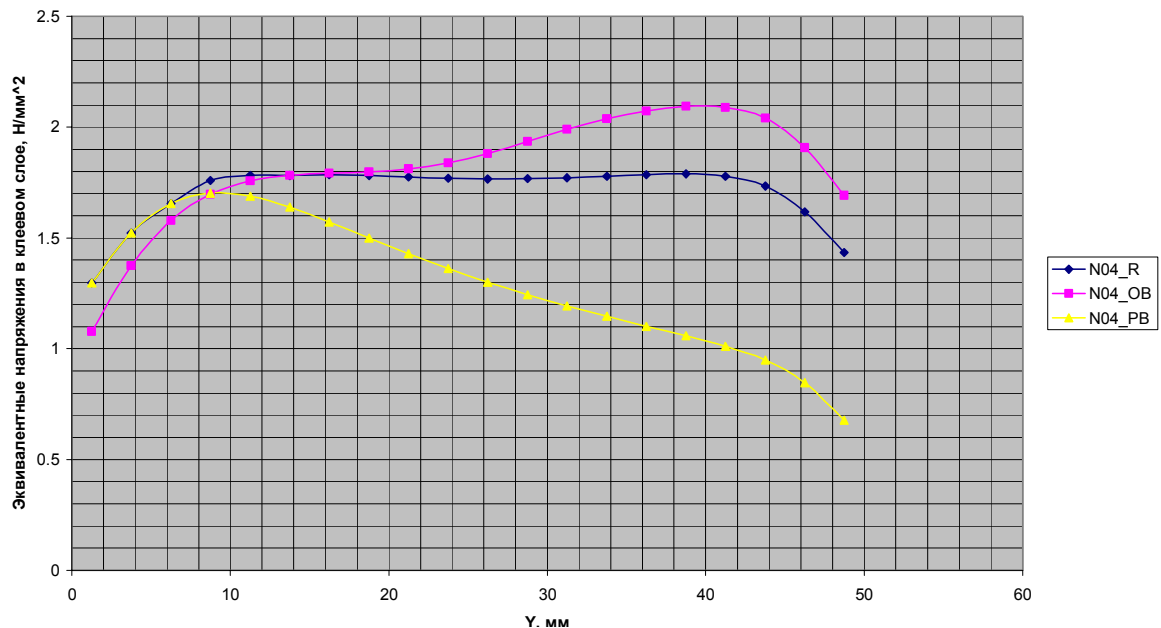


Рисунок 10 - Сравнение эквивалентных напряжений в связующем слое зубчатого соединения для различных расчетных схем его нагружения

– максимальные напряжения в связующем слое соединения имеют место в зоне набегания ленты на приводной барабан, которые в 2,4 раза превышают напряжения, возникающие в связующем слое в зоне сбегавшей ветви ленты;

–наибольшие эквивалентные напряжения в связующем слое зубчатого соединения ленты имеют место при взаимодействии с неприводным барабаном ленточного конвейера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А.В. Некоторые вопросы физики работы ленточного конвейера /А.В. Андреев // Горные машины и автоматика. – М., Недра, 1967. – Вып. III. – С. 224-230.
2. Андреев А.В. Передача трением / А.В. Андреев – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1978. – 176 с.
3. Городецкий А.С. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций./ А.С. Городецкий, В.С. Шмуклер, А.В. Бондарев. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2003. – 889 с.
4. Кузьменко В.И. Расчет напряженного состояния зубчатых соединений лент ленточных конвейеров при растяжении и изгибе на неприводном барабане / В.И. Кузьменко, П.Н. Кирьязов // Подъемно-транспортная техника.– 2008. – №3.

Получено 05.05.2008 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЫШЛЕНИЯ КАК ПУТЬ ПОВЫШЕНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И СИСТЕМ

Введение

Современные компьютеры хорошо приспособлены к решению ряда ограниченных и хорошо формализованных задач, трудных для человека, таких, как сложные математические вычисления. Многие виды интеллектуальной активности не требуют человеческого разума – его может заменить быстрый перебор вариантов. Однако современные компьютеры испытывают трудности при решении огромного числа задач, легких для человека. Никакой компьютер или программа не может делать большинство вещей, которые делает ребенок. Даже при отсутствии знаний человек действует – например, по аналогии [6], тогда как традиционный компьютер стопорится. Недостаток современных программ в том, что у них есть информация о том, что и как (какие операции) надо делать, но нет информации о целях (зачем). Соответственно, у компьютера нет средств узнать, достигнуты ли цели, и если да, какой ценой и насколько хорошо.

Такие специалисты в области искусственного интеллекта (ИИ), как Николай Амосов, Марвин Минский, Дуг Ленат высказывали мнение, что задачи, которые плохо решают современные компьютеры – это задачи, требующие здравого смысла ([1, 2], [9], [8]). Мы считаем, что путь преодоления проблем существующих систем ИИ может лежать в создании крупномасштабных баз знаний здравого смысла в сочетании с механизмами эффективного поиска и извлечения из таких баз информации об известных примерах решения задач или поведения в ситуациях, и использования этой информации для решения новых входных задач.

Необходимость знаний здравого смысла

Существующие компьютерные программы проектируются для работы в определенных узких областях, пользуются одним методом.

© РАЧКОВСКИЙ Д.А., 2008

Редколлегия, принимая решение о публикации предлагаемой статьи в данном сборнике, обращает внимание на ее междисциплинарность и важность поднятой автором статьи проблемы повышения интеллектуальности научных исследований.

Соответственно, если метод не срабатывает, программа выдает «странные» результаты. У компьютеров нет “общих знаний”, “здорового смысла” (common sense knowledge), поэтому они не «понимают», что от них требуется в конкретной ситуации. Структура программ обычно излишне процедуральна, в том смысле, что программы главным образом выполняют predetermined процедуры, не анализируя, когда, в какой ситуации эти процедуры применимы.

Существующие программы решают изолированные специализированные задачи, в то время как люди обучаются десяткам тысяч навыков. Если бы у программы было множество способов принятия решения, она бы при возникновении проблем переключалась на другой подход. Этого можно добиться, снабдив программу большими базами общих знаний – знаний здравого смысла – и многочисленными методами их использования – то есть, предоставив программам больше “схем мышления”.

Механизмы повышения интеллектуальности

Итак, для систем ИИ требуется знания здравого смысла и механизмы их использования.

База знаний здравого смысла. В современных системах, даже основанных на знаниях, фрагменты знаний зачастую изолированы и не “привязаны” к целям. В то же время человек способен по-разному представлять и оценивать одну и ту же ситуацию в зависимости от цели, и каждая такая “точка зрения” может дать альтернативные пути достижения цели.

Требуются различные типы знаний и различные способы их представления. Каждый объект следует представлять разными способами. Причем переключение от одного представления к другому должно происходить достаточно легко и решение о таком переключении при возникновении проблем система должна принимать самостоятельно. Для эффективного переключения представлений нужно иметь хорошие способы принятия решения о том, когда использовать каждый тип представления, а также сохранять и использовать результаты уже проделанной работы.

Нужна память – база знаний (БЗ), которая ищет то, что требуется в текущей ситуации, поскольку заранее не известно, что именно потребуется. БЗ должна включать взаимосвязанные

представления эпизодов-ситуаций, задач и целей, процедур обучения и использования.

Цели и задачи должны включать цели, задачи, ограничения, при которых следует (или не следует) использовать такую базу; сведения о релевантности эпизодов-фрагментов базы ситуациям, контекстам, подцелям; сведения о том, как эпизоды применялись в прошлом и насколько эффективно было это применение.

Процедуры должны включать знания о том, куда приложить фрагмент знаний; каких действий не предпринимать, чтобы не сделать ситуацию хуже; как действовать, когда обычные методы не работают; как применять старые знания к новой ситуации.

Знания об особенностях применения эпизода знаний должны включать сведения о затратах на применение, побочных эффектах, исключениях – в каких контекстах, какие альтернативы могут оказаться полезными.

Должна присутствовать информация об источнике знания, его надежности, как скоро знание может устареть, кто еще имеет знания о целевой ситуации и куда можно обратиться с запросом о таком знании.

Мышление на основе здравого смысла. Вторая задача – дать компьютерам способность к рассуждениям на основе здравого смысла, пути использования (базы) знаний здравого смысла для решения разнообразных задач. База знаний с миллионами фактов (эпизодов) необходима, но не достаточна. Необходимо предоставить системе ИИ множество различных путей использования этого знания для мышления: различные пути рассуждений, планирования, объяснения, прогнозирования, и других ментальных способностей, аналогичных тем, которые использует человек. Например:

Если есть задача, найти прошлую ситуацию, когда решалась подобная.

Если выполняется действие, предвидеть, что может случиться далее.

Если решение неудачно, предложить другие пути решения задачи.

Если наблюдается событие, определить, что вызвало его.

Если наблюдается объект, определить, кому он принадлежит.

Если объект действует, определить, какая может быть цель действия.

Все это – особый тип знаний, но не о внешнем, а о внутреннем мире. Это знания о путях использования знаний для рассуждения о мире с целью эффективного решения задач.

Необходимо иметь множество схем мышления, т.е. оперирования знаниями. Кроме того, необходимо иметь метазнания о том, какой способ оперирования знаниями подходит для конкретной ситуации.

Система ИИ должна быть

Реактивной – оперировать представлениями реальных ситуаций.

Планирующей – оперировать представлениями будущих реакций.

Рефлексивной – оперировать представлениями планов.

Само-рефлексивной – оперировать представлениями рефлексий.

Представления должны быть обобщенными, абстрагированными. Так как невозможно оперировать с огромным числом индивидуальных представлений, правил и т.п. для конкретных индивидуальных ситуаций, необходимо абстрагирование. Причем абстрагирование должно осуществляться относительно просто.

Представления должны быть обобщенными, абстрагированными. Так как невозможно оперировать с огромным числом индивидуальных представлений, правил и т.п. для конкретных индивидуальных ситуаций, необходимо абстрагирование. Причем абстрагирование должно осуществляться относительно просто.

Пути реализации

Итак, необходимо разработать и реализовать принципы построения интеллектуальных информационных технологий и систем ИИ, которые позволяют строить разносторонние, надежные (устойчивые, робастные), мультиресурсные системы. Для этого, в первую очередь, необходимо моделирование рассуждений на основе здравого смысла, то есть создание больших БЗ здравого смысла и методов организации, приобретения, и использования этих знаний.

В качестве механизма решения задач на основе оперирования базами знаний предлагается использование подхода рассуждений на основе примеров. Моделирование рассуждений на основе примеров и их разновидностей – рассуждений на основе прецедентов и аналогий – уже широко применяется в системах искусственного интеллекта для решения задач поиска, классификации, аппроксимации, прогнозирования, планирования, мониторинга, диагностики, управления [7]. При реализации подхода рассуждений по примерам в

системах ИИ формируется база прецедентов или аналогов, где запоминаются описания индивидуальных или обобщенных примеров – ситуации вместе с прогнозами их развития, реакциями на них, задачи с их решениями, и т.п. – т.е. прецеденты и аналоги. Для новой входной ситуации система находит одну или несколько ближайших, сходных с ней ситуаций в базе, и принимает решения, делает прогнозы и выводы о входной ситуации, адаптируя к ней знания об известных примерах (рис. 1).

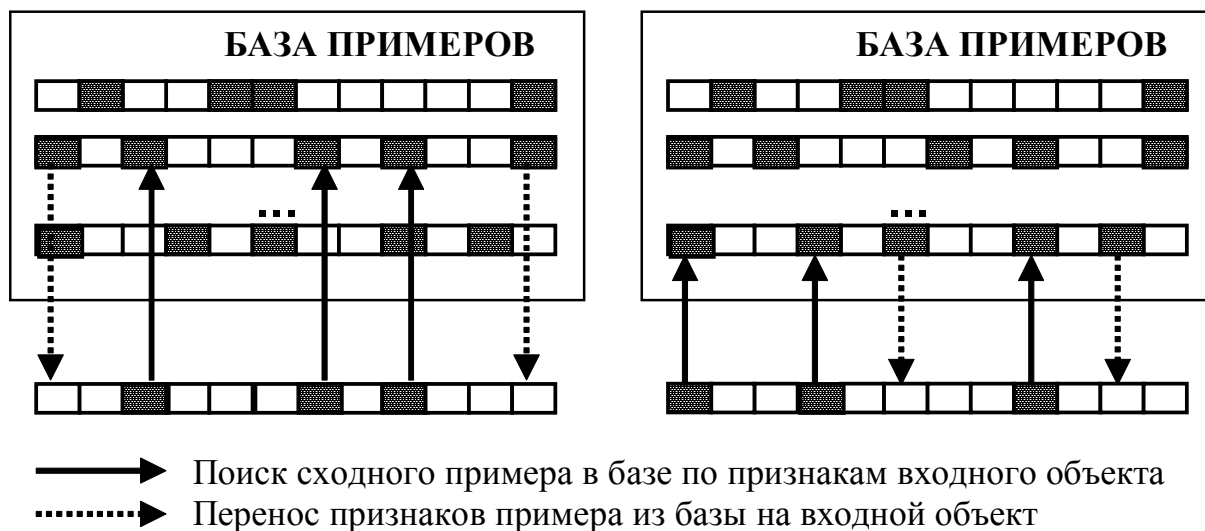


Рисунок 1 - Рассуждения на основе примеров

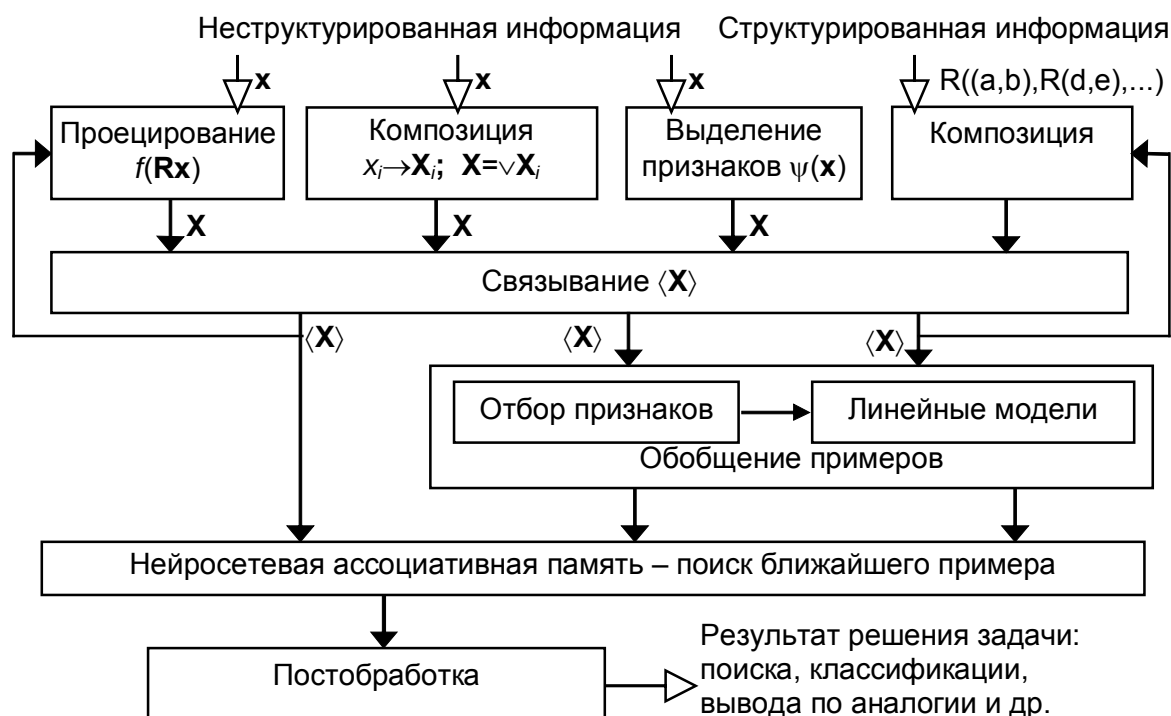


Рисунок 2 - Общая схема формирования и обработки распределенных представлений информации в рассуждениях по примерам

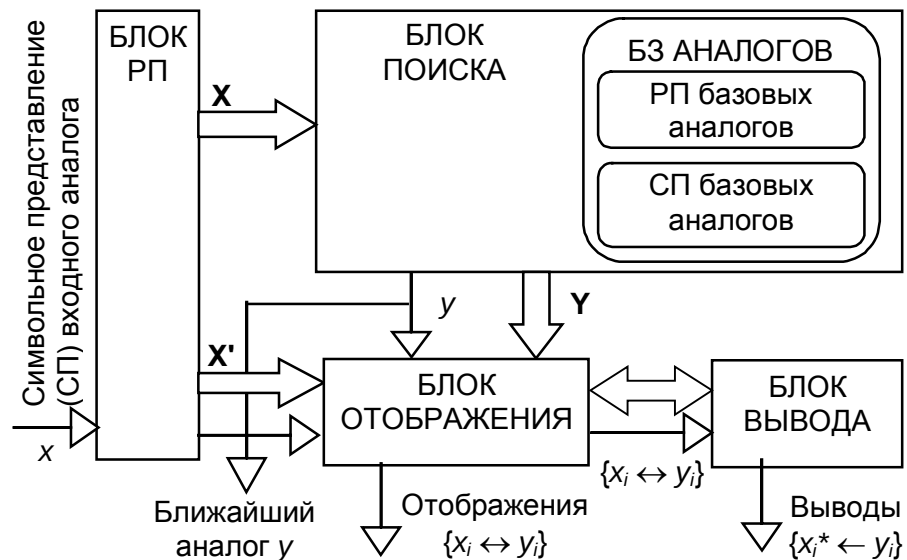


Рисунок 3 - Рассуждения по аналогии с использованием распределенных представлений

Эффективность применения рассуждений на основе прецедентов и аналогий во многом зависит от формы представления информации. В качестве основы для эффективного представления, хранения, поиска, сравнения информации предлагается использование распределенного представления информации [12, 3]. Это нейросетевая форма векторного представления, где каждый объект (признак, физический объект, их совокупность, отношение, сцена и др.) представлен совокупностью элементов вектора, а отдельный элемент вектора может принадлежать представлениям разных объектов. Распределенные представления обеспечивают высокую информационную емкость, вычислительно эффективную оценку сходства объектов скалярным произведением векторов, позволяют использовать известные методы обработки векторной информации.

Для преодоления ряда недостатков распределенных представлений, связанных с отсутствием единого формата, сложностью реализации и др. разработаны [12, 3] методы распределенного представления информации в виде *кодвекторов* – разреженных (с малой долей ненулевых элементов) векторов с бинарными элементами (0 или 1). Такие методы разработаны для исходной информации разного типа – как *реляционной структурированной* (ориентированных ациклических графов с вершинами – объектами и отношениями разного уровня иерархии), так и *неструктурированной* (векторов числовых признаков). Методы обеспечивают формирование сходных (по векторным мерам сходства)

кодвекторов для сходных в контексте решаемой задачи объектов. Использование кодвекторов обеспечивает возможность повышения эффективности рассуждений на примерах за счет представления большого числа разных объектов и градаций их сходства, вычислительно эффективной обработки на основе ассоциаций по сходству, а также наследования достоинств традиционных распределенных представлений информации.

В качестве средства эффективного хранения, поиска, обобщения информации предлагается использование распределенной ассоциативной памяти [4, 5]. Для хранения больших баз примеров, представленных в виде кодвекторов, и быстрого поиска сходных кодвекторов перспективным средством является нейросетевая распределенная ассоциативная память (НРАП). Исследовалась НРАП матричного типа с бинарными связями (связь – элемент матрицы W размерностью $N \times N$), в которой запоминание L кодвекторов X_l ($l=1, L$) размерностью N осуществляется по правилу Вилшоу: $W_{ij} = \bigvee_{l=1, L} X_{il} X_{jl}$. НРАП осуществляет на выходе воспроизведение кодвектора, ближайшего ко входному. На вход подается кодвектор $X(t=0)=X^{in}$. На каждом шаге (итерации) t работы сети, вплоть до стабилизации ее состояния $X(t+1)=X(t)$, определяется $X(t+1)$: $X_i(t+1) = \Theta(k_i(t) - T(t))$, где $k_i(t) = \sum_j W_{ij} X_j(t)$ – входная активация нейрона, Θ – функция Хевисайда, $T(t)$ – порог активации нейронов, который обеспечивает $|X(t+1)|=M$.

Показано, что распределенная память может обеспечить более высокую скорость поиска (восстановления) ближайшего кодвектора, чем нераспределенная, а также является перспективным средством обобщения информации. Проведенное исследование информационных характеристик НРАП (нагрузка, корректирующая способность, эффективность, и др.) создает необходимую теоретическую базу для ее использования при решении задач методом рассуждения по примерам.

Общая схема подхода к распределенному представлению информации в рассуждениях на основе примеров приведена на рис. 2.

На базе разработанных распределенных представлений реляционной структурированной информации развит [10, 11] новый подход к моделированию рассуждений по аналогии, направленный на применение в системах ИИ, основанных на знаниях. *Аналоги* есть

иерархически структурированные описания эпизодов или ситуаций в БЗ. Разработаны новые методы, реализующие этапы рассуждений по аналогии: представление информации об аналогах; поиск в памяти аналога, ближайшего ко входному; отображение – установление соответствия компонентов аналогов (рис. 3).

Разработанные методы реализованы программными средствами и экспериментально исследованы на фрагментах БЗ, используемых для исследования моделей рассуждений по аналогии. Проведенные исследования показали адекватность предложенного подхода для моделирования рассуждений по аналогии и более высокую вычислительную эффективность его реализации по сравнению с традиционными символьными методами. Вычислительная сложность поиска составляет $O(1)-O(L)$ по сравнению с $O(n^2L)-O(n!L)$ или $O(n^4L^2)$ для традиционных методов, где n – число компонентов в аналоге, L – число аналогов в БЗ. Вычислительная сложность отображения составляет $O(n^2)$ по сравнению с $O(n^4)-O(n!)$ для традиционных методов.

Заключение

Таким образом, для повышения интеллектуальности информационных технологий и систем предлагается подход, основанный на моделировании мышления человека – рассуждений по прецедентам и аналогиям и использовании знаний здравого смысла. Для реализации эффективного доступа к знаниям предлагается использовать имеющиеся наработки в области нейросетевого распределенного представления информации, моделирования рассуждений по аналогии на их основе и нейросетевой ассоциативной памяти. Перспективным направлением дальнейших исследований является механизмы автоматизированного создания баз знаний здравого смысла как основы развиваемого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов Н.М. Моделирование мышления и психики. – К.: Наукова думка, 1965. – 304 с.
2. Амосов Н.М., Байдык Т.Н., Гольцев А.Д., Касаткин А.М., Касаткина Л.М., Куссуль Э.М., Рачковский Д.А. Нейрокомпьютеры и интеллектуальные роботы. – К.: Наукова думка, 1991. – 272 с.
3. Куссуль Э.М. Ассоциативные нейроподобные структуры. – К.: Наукова думка, 1992. – 144 с.

4. Фролов А.А., Гусек Д., Рачковский Д.А. Время поиска по сходству в ассоциативной памяти для бинарных векторов // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 5. – С. 3-13.
5. Frolov A.A., Rachkovskij D.A., Husek D. On Information Characteristics of Willshaw–Like Auto–Associative Memory // Neural Network World. – 2002. – V. 12, № 2. – P. 141-157.
6. Gentner D., Holyoak K.J., Kokinov B. The analogical mind. – Cambridge, MA: The MIT Press, 2001. – 520 p.
7. Kolodner J. Case-based Reasoning. – San Mateo, CA: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1993. – 668 p.
8. Lenat D.B. Scaling Up: Computers vs. Common Sense // Proceedings of 12th International Conference LPAR. – 2005. – P. 47.
9. Minsky M. The Emotion Machine: Commonsense Thinking, Artificial Intelligence, and the Future of the Human Mind. – Simon & Schuster, 2006. – 400 p.
10. Rachkovskij D.A. Representation and Processing of Structures with Binary Sparse Distributed Codes // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. – 2001. – V. 13, № 2. – P. 261-276.
11. Rachkovskij D.A. Some Approaches to Analogical Mapping with Structure Sensitive Distributed Representations // Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence. – 2004. – V. 16, № 3. – P. 125-145.
12. Rachkovskij D.A., Kussul E.M. Binding and Normalization of Binary Sparse Distributed Representations by Context–Dependent Thinning // Neural Computation. – 2001. – V. 13, № 2. – P. 411-452.

Получено 05.05.2008 г.

СОДЕРЖАНИЕ

О.Г. Галаган, Ю.П. Глухов Уравнения движения пластины с учётом сдвига и инерции вращения в цилиндрических координатах.....	3
В.Г.Савченко Неосесимметричное термонапряжённое состояние тел вращения из прямолинейно ортотропных материалов с учетом разномодульности при растяжении и сжатии	9
Т. В. Крылова Оптимизация решения нелинейной относительно параметра краевой задачи на собственные значения.....	15
Э.Д. Чихладзе, М.А. Веревичева, Л.Б. Кравцов Исследование напряженно-деформированного состояния сталебетонных колонн с учетом пространственной работы бетонного ядра.....	19
П.А.Стеблянко О методе решения нестационарных задач термомеханики упругопластических термочувствительных электропроводных тел ..	23
М.О. Шульга Про математичний опис деяких механічних процесів	28
И.Е. Соколовская Моделирование процесса термообработки пористого теплоизоляционного материала в вихревом слое	32
Р.В. Кирия Математическая модель динамики пуска двухприводных ленточных конвейеров	37
В.А. Максимюк Про послідовне виключення множників лагранжа	45
К.В. Медведєв, В.М. Шульга, В.Ф. Корнієнко, І.О. Ластівка Дисперсія акустичних хвиль кілогерцевого діапазону в фібрильних нитках	48
С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов, В.Ф.Лазар Поведение пластины, лежащей на предварительно-напряжённом полупространстве, при воздействии подвижной нагрузки	55
С.Ю. Бабич, Є.М.Борисов, Л.Є. Борисова Деформація пружної неоднорідної сфери при частинному виді навантаження	61
Р.С.Мусій, Н.Б.Мельник, Н.Б.Гіссовська, К.В.Шиндер Визначення несучої здатності електропровідних тіл канонічної форми за дії імпульсних електромагнітних полів.....	66
Н.Д. Шульга Форми коливань на границях зон пропускання об'ємних хвиль зсуву	

в двокомпонентних шаруватих композитах з міжфазними недосконалостями.....	70
Л.О. Григор'єва	
Про застосування методу характеристик при дослідженні електромеханічних нестационарних коливань п'єзокерамічного шару при електричному навантаженні.....	77
С.А. Григор'єв	
Товщинні нестационарні коливання п'єзокерамічної кулі при електричному збуренні	82
В.В. Левченко, Л.П.Зинчук	
Объемные волны сдвига в металлизированных феррит–пъезоэлектрических средах	87
И.И. Аникьев, М.И. Михайлова, А.Т. Забуга, Н.П. Плахтиенко, Е.А. Сущенко	
О колебаниях твердого тела с электромагнитным демпфером в механизме сейсмоизоляции	96
Г.М.Бакланова	
Суть проблеми стійкості масива з горизонтальною виробкою, обумовленою наявністю пластичних деформацій.....	103
С. Ю. Бабич, Е. Н. Борисов, В. Г. Овсиенко	
К теории контактной задачи кручения упругого сжимаемого слоя с начальными напряжениями	106
К.І. Шнеренко, В.Ф. Годзула	
Дослідження впливу зміни міжшарового зсуву на напружений стан композитної циліндричної оболонки з отвором	111
Г.И.Щурук	
Влияние плотности жидкости на волновой процесс в гидроупругой системе оболочка-вязкая жидкость	116
В.Ф.Мейш, Н.В.Арнауца	
Вимушені коливання п'ятишарових кінчних оболонок з врахуванням дискретності розміщення ребер при нестационарних навантаженнях.....	120
Г.І. Ларіонов	
До питання про зміну діаметру металополімерного анкера.....	125
А.В.Артамонова, В.А.Долодаренко, С.З.Полищук, В.Н.Полторацкая, В.В.Фалько, А.В.Полищук	
Опытно-теоретическая оценка составляющей экологического риска от точечного источника выбросов загрязняющих веществ	139
В.И. Кузьменко, П.Н. Кирьязов	
Математическое моделирование и анализ напряженного состояния зубчатого соединения лент при взаимодействии с приводным барабаном ленточного конвейера.....	146

Д.А. Рачковский

Моделирование мышления как путь повышения интеллектуальности
информационных технологий и систем154

РЕФЕРАТЫ

УДК 539.3

Галаган О.Г., Глухов Ю.П. **Рівняння руху пластини з урахуванням зсуву та інерції обертання у циліндричних координатах** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.3-8.

У циліндричних координатах приведені рівняння руху пластини з урахуванням зсуву та інерції обертання.

Савченко В.Г. **Неосесимметричний термонапружений стан складених тіл обертання із прямолінійно ортотропних матеріалів з урахуванням різномодульності при розтяганні та стисканню** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.9-14.

Запропоновано методику врахування різномодульності при розтяганні та стисканню в процесі деформування ортотропних матеріалів при дослідженні пружного напружено-деформованого стану складених тіл обертання при неосесиметричному навантаженні та нагріванні.

УДК 539.3

Крилова Т.В. **Оптимізація розв'язку нелінійної відносно параметру крайової задачі на власні значення** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.15-18.

Дослідження коливань динамічних систем призводить до задач на власні значення. У ряді випадків ці задачі є нелінійними відносно параметра. Запропоновано новий варіант методу розв'язання крайових задач з неперервно-дискретними коефіцієнтами.

Бібл. 6.

Чихладзе Э.Д., Веревичева М.А., Кравцов Л.Б. **Исследование напряженно-деформированного состояния сталебетонных колонн с учетом пространственной работы бетонного ядра** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.19-22.

УДК 539.3

Стеблянюк П.О. **Про метод розв'язання нестационарних задач термомеханіки пружнопластичних термочутливих електропровідних тіл** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.23-27.

Розроблено чисельний метод розв'язання просторових зв'язаних нестационарних задач термомеханіки для випадку, коли тіло знаходиться під дією квазіусталеного

електромагнітного поля. Метод базується на розщепленні повної системи рівнянь по координатах у сполучі з апроксимацією невідомих величин за допомогою двовимірних напружених сплайнів.

Бібл. 9.

УДК 517.5

Шульга М.О. **О математическом описании некоторых механических процессов** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.28-31.

Проанализированы функции, которые описывают пилообразную ломаную, и для них получены соответствующие дифференциальные уравнения.

УДК 664.2.032.1

Соколовская И.Е. **Моделирование процесса термообработки пористого теплоизоляционного материала в вихревом слое** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.32-36.

В роботі наводяться розрахункові дані залежності траєкторії частки сировини для отримання пористого матеріалу від швидкості потоку теплоносія і місця введення часток в об'єм робочої камери вихрового апарату. Показана якісна адекватність моделей і наведені результати тестових розрахунків.

Кирия Р.В. **Математическая модель динамики пуска двухприводных ленточных конвейеров** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.37-44.

УДК 517.272:97

Максимюк В.А. **О последовательном исключении множителей Лагранжа** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.45-47.

Предложена альтернативная процедура последовательного исключения множителей Лагранжа. Процедура имеет более широкую область применения, чем классический подход (параллельное исключение). Она может быть применена для построения функционалов и нахождения экстремалей с дополнительными условиями или с дополнительными независимыми функциями.

Библ. 3.

УДК 534-21

Медведев К.В., Шульга В.М., Корниенко В.Ф., Ластивка И.О. **Дисперсия акустических волн килогерцевого диапазона в фибрильных нитях** // Системні

технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.48-54.

На основании принципа гомогенизации и теории упругости цилиндрических ортотропных тел получены дисперсионные соотношения для волн произвольной частоты в фибрильных нитях. В случаях длинных волн получены формулы для скоростей и коэффициентов затухания волн в фибрильных нитях из наполненного полиэтиленом поликапроамида.

УДК 539.3

Бабиц С. Ю., Глухов Ю. П., Лазар В.Ф. **Поведінка пластини, що лежить на заздалегідь-напруженому напівпросторі, при дії рухомого навантаження** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.55-60.

У даній роботі приведені результати дослідження впливу початкового напруження на згинаючий момент в пластині, що лежить на заздалегідь-напруженому напівпросторі, при дії рухомого навантаження.

УДК 539.3

Бабиц С. Ю., Борисов Є.М., Борисова Л. Е. **Деформация упругой неоднородной сферы при частном виде нагружения** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(57). - Дніпропетровськ, 2008. - С.61-65.

Рассмотрена внутренняя пространственная задача для упругой неоднородной сферы. Получено частное решение в случае симметрично нагруженной сферы.

Библ. 3

УДК 539.3

Мусій Р.С., Мельник Н.Б., Гіссовська Н.Б., Шиндер К.В. **Визначення несучої здатності електропровідних тіл канонічної форми за дії імпульсних електромагнітних полів** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.66-69.

УДК 534-21

Шульга Н.Д. **Формы колебаний на границях зон пропускания объемных волн сдвига в двухкомпонентных слоистых композитах с межфазными несовершенствами** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.70-76.

Проводится аналитически-численный анализ форм колебаний объемных волн сдвига в двухкомпонентном слоистом композите с межфазными несовершенствами на частотах, которые соответствуют отвечают границам зон пропускания.

УДК 534-21:537.226.86

Григор'єва Л.О. **О применении метода характеристик при исследовании электромеханических нестационарных колебаний пьезокерамического слоя при электрическом нагружении** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.77-81.

При решении задач о нестационарных колебаниях пьезокерамического слоя при электрическом нагружении применен метод характеристик.

УДК 534-21:537.226.86

Григор'єв С.А. **Товщинні нестационарні коливання п'єзокерамічної кулі при електричному збуренні** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.82-86.

Розглядається задача про нестационарні коливання радіально поляризованої п'єзооерамічної кулі при навантаженні електричним потенціалом. Для розв'язання задачі розвинуто чисельну схему на основі сіткових апроксимацій та явних і неявних схемах по часу. Проведено аналіз динамічного електромеханічного стану кулі, досліджено зміну в часі механічних переміщень та напружень.

УДК 534.21:537.226.86:537.634

Левченко В.В., Зінчук Л.П. **Об'ємні хвилі зсуву в ферит-п'єзоелектричних середовищах** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.87-95.

Запропоновано спосіб побудови дисперсійних співвідношень для об'ємних магнітоелектропружних хвиль зсуву, що поширюються в шарувато-періодичних середовищах, утворених повторенням металізованого пакету, який складається із двох різних п'єзоелектричних шарів, розділених шаром фериту. Вивчено вплив фізико-механічних та геометричних параметрів шарів на умови існування об'ємних хвиль.

Бібл. 10.

УДК 534.01;62.4.01

Анік'єв І.І., Михайлова М.І., Забуга А.Т., Плахтійенко М.П., Сущенко Є.О. **Про коливання твердого тіла з електромагнітним демпфером в механізмі сейсмоізоляції** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.96-102.

Побудована нелінійна математична модель гравітаційної коливальної системи з керованим електромагнітним демпфером. Експериментально визначена характеристика залежності від струму сили притягання соленоїдом феромагнітних тіл. При багаточастотному інерційному збудженні обчислено коефіцієнт динамічності відносно пришвидшення залежно від сталої часу і коефіцієнта підсилення для двох законів управління струмом сейсмомдемпфера.

Бібл. 5, іл. 5, табл. 1.

УДК 539.3

Бакланова Г.Н. **Сущность проблемы устойчивости массива с горизонтальной выработкой, обусловленной наличием пластических деформаций** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.103-105.

Рассматривается устойчивость состояния равновесия упруго-пластического несжимаемого массива в окрестности незакрепленной горизонтальной выработки на основе трехмерной линеаризированной теории устойчивости.

Результаты вычисления критических нагрузок свидетельствуют о необходимости учета пластических свойств горных пород.

Библ. 2, табл. 2.

УДК 539.3

Бабич С.Ю., Борисов Є.М., Овсієнко В. Г. **До теорії контактної задачі кручення пружного стиснутого шару з початковими напруженнями** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.106-110.

Розглядається статична контактна задача кручення пружного шару з початковими напруженнями. Задача зводиться до парних інтегральних рівнянь, які, в свою чергу, зводяться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. На основі числових розрахунків досліджено вплив початкових напружень на основні характеристики.

Бібл. 5, таблиця 1

УДК 539.3

Шнеренко К.І., Годзула В.Ф. **Дослідження впливу зміни міжшарового зсуву на напружений стан композитної циліндричної оболонки з отвором** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.111-115.

Подана методика визначення напружень в композитній циліндричній оболонки, послабленої круговим отвором. Використано модель оболонок типу Тимошенка. Застосовано метод скінчених елементів. Досліджено розподіл напружень навколо отвору від зміни зсувної жорсткості матеріалу оболонки.

Бібл. 4, табл. 1.

УДК 539.3

Щурук Г.І. **Вплив густини рідини на хвильовий процес в гідропружній системі оболонка – в'язка рідина** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.116-119.

Розглянуто процес розповсюдження осесиметричних хвиль в ортотропній циліндричній оболонці, що містить в'язку стисливу рідину. Аналіз проведено в рамках лінійних рівнянь теорії оболонок типу С.П.Тимошенка та лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса для рідини. Досліджено вплив відносної густини рідини на частотно-фазові характеристики системи.

Бібл. 2, іл.3.

УДК 539.3

Мейш В.Ф., Арнаута Н.В. **Вынужденные колебания пятислойных конических оболочек с учетом дискретного расположения ребер при нестационарных нагрузках** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.120-124.

Рассматриваются нестационарные колебания пятислойных конических оболочек с учетом дискретности расположения ребер. На основе вариационного принципа Рейсснера получены уравнения нелинейных колебаний и естественные граничные условия многослойных подкрепленных оболочек вращения с учетом дискретности расположения ребер в рамках гипотез типа Тимошенко для оболочек и стержней. Для представленных уравнений колебаний развит эффективный численный метод решения динамических задач. В основе численного алгоритма лежит интегро-интерполяционный метод построения конечно-разностной схемы по пространственной координате и явная конечно-разностная схема типа «крест» по временной координате с использованием аппроксимации Ричардсона по пространственной координате. Приведено решение конкретной задачи и анализ полученных результатов.

УДК 622.28.044:622.831

Ларіонов Г.І. **До питання про зміну діаметру металополімерного анкера** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.125-138.

В работе рассмотрена проблема влияния изменения диаметра металлополимерного анкера, а соответственно и шпура на прочностные характеристики фиксирующей смеси с учетом технологических параметров его установки. Задача формулировалась и решалась как задача условной оптимизации. В качестве функции цели выбрано интеграл от усилий, возникающих в теле оболочки из фиксирующего состава при растяжении осевыми усилиями. В качестве ограничений принимались предельные напряжения в теле оболочки из фиксирующего состава и максимальный крутящий момент применяемого бурового оборудования. Дан анализ полученных результатов.

Артамонова А.В., Долодаренко В.А., Полищук С.З., Полторацкая В.Н., Фалько В.В., Полищук А.В. **Опытно-теоретическая оценка составляющей экологического риска от точечного источника выбросов загрязняющих веществ** // Системні технології.

Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.139-145.

Надана дослідно-теоретична оцінка складової екологічного ризику від точкового джерела викидів при вимірах приземних концентрацій не усіх забруднюючих речовин.

УДК 621.876.212.

Кузьменко В.І., Кирьязов П.М. **Математичне моделювання та аналіз напруженого стану зубчастого з'єднання стрічок при взаємодії з приводним барабаном стрічкового конвеєра** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.146-153.

Ціль роботи – визначити напруження у зв'язуючому шарі з'єднання зубчастої конструкції стрічки у взаємодії з приводним барабаном стрічкового конвеєра. Задача розв'язана у нелінійній постановці методом кінцевих елементів на прикладі чотирьохпрокладочної стрічки. Кінцево-елементна розрахункова схема представляє собою дев'ятишарову модель. Результати досліджень напруженого стану зв'язуючого шару з'єднання зубчастої конструкції отримані у вигляді залежностей компонент нормальних і дотичних напруг. Визначені еквівалентні напруження по енергетичній теорії міцності та виконаний порівняльний аналіз напруженого стану зв'язуючого шару з'єднання для різноманітних випадків його навантаження.

Бібл. 4, іл. 10.

УДК 51-76+004.056.53

Рачковський Д.А. **Моделювання мислення як шлях підвищення інтелектуальності інформаційних технологій і систем** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 4(57). – Дніпропетровськ, 2008. – С.154-162.

Розглядається підхід до підвищення інтелектуальності інформаційних технологій і систем на основі моделювання мислення людини – міркувань по прецедентах і аналогіях і використанні "знань здорового глузду". Для реалізації пропонується використовувати методи нейросетевого розподіленого представлення інформації.

Бібл. 19, іл. 2, табл. 4.

UDC 539.3

Galagan O.G., Glukhov Y.P. **The equations of movement of a plate taking into account of shift and rotary inertia in cylindrical coordinates** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.3-8.

In cylindrical coordinates the equations of movement of a plate into account of shift and rotary inertia are resulted.

Savchenko V.G. **The nonaxisymmetric thermostressed state of laminated bodies of revolution of rectilinear orthotropic materials with allowance for the material**

multimodulus in tension and compression // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.9-14

The technique for allowance of the multimodulus in tension and compression in deformation processes of rectilinear orthotropic materials at an investigation of elastic stress-strained state of composite orthotropic solid of revolution subjected to nonaxisymmetrical loading and heating is proposed.

UDC 517.5

Krylova T. **Optimization of the decision nonlinear concerning parameter of the eigenvalue problem** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.15-18.

Research of fluctuations of dynamic systems lead to problems on own values. In some cases these problems are nonlinear concerning parameter. The new variant of a method of the decision of regional problems with is continuous-discrete factors is offered.

Bibl. 6.

Chikhladze E.D., Verevicheva M.A, Kravciv L.B. **Research the stress-deformed state of the steel-concrete columns with the consideration of the spatial work of the core** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.19-22.

The solving of the three-axes problem of the theory of elasticity for the estimate of the strained - stress state at the steel-concrete column is demonstration. The problem is non-linear because of the mechanic characteristics of a concrete depending on the main strains. It is showed that problem of the estimate of the bearing ability it is possible to solve in the supposition . For that case the analytical solving is obtained, its advantage consists at the more prĳising of solving and at the economy of the calculation time.

UDC 539.3

Steblyanko P. **About the method of the decision of non-stationary problems thermal-mechanics elastic-plasticity of therosensitive electrowire bodies** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.23-27.

It is developed with use of a method on-component splittings and representations of all required sizes in the form of two-dimensional splines difference algorithm which describes electromagnetic, thermal and mechanical processes. Estimations of borders of applicability of the offered method of definition electromagnetic are received, temperature and mechanical fields.

Bibl. 9.

UDC 517.5

Shul'ga M.O. **About mathematical definition of some mechanical processes** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.28-31.

Functions which describe saw-toothed broken-line are analysed, and for them the corresponding differential equations are got.

UDC 664.2.032.1

Sokolovskaya I.E. **Modeling of the process of heat treatment of porous termoinsulating material in a vortical layer** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.32-36.

In work computation data are cited of dependence of trajectory of particle of raw material for the receipt of porous material, from, speed of thread of teplonositelya and place of introduction of particles in the volume of working chamber of vortical vehicle. High-quality adequacy is shown of models and results are presented of test computations.

Kiriya R.V. **Mathematical model of starting dynamics of two-drive band pipelines** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.37-44.

By the method of superposition the mathematical model of dynamics of starting of twodrive band conveyer at which one of drive drums is found on the single branch of ribbon of conveyer is developed. On the basis of mathematical model the algorithm of decision of task, which was taken to the decision of task of starting of onedrive conveyer with different types of tightness, is got.

UDC 517.272:97

Maksymyuk V.A. **On the successive elimination of Lagrangian multipliers** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.45-47.

An alternative procedure of the successive elimination of Lagrangian multipliers is proposed. The procedure is of a wider field for application than the classical approach (the parallel elimination). It can be used for constructing functionals and seeking extremals with additional conditioni or with additional independent functions.

Bibl. 3.

UDC 534-21

Medvedev K.W., Shul'ga W.M., Korniyenko V.F., Lastyvka I.O. **Dispersion of acoustic waves of kilohertz region in fibril filaments** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.48-54.

Based on the principal of homogeneity and the elasticity theory of cylindrical orthotropic bodies the dispersion relations for waves of arbitrary frequency in fibril filaments are developed. At small wave sizes formulas for velocities and attenuation indexes of waves in fibril filaments made of polycaproamide filled with polyethylene.

UDC 539.3

Babich S.Y., Glukhov Y.P., Lazar V.F. **Behaviour of the plate laying on preliminary-stressed semispace, with influence of moving load** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.55-60.

In this work results of research of influence of initial stresses for bending moment in the plate laying on preliminary-stressed semispace are resulted, with influence of moving load.

UDC 539.3

Babich S. Yu., Borysov E. M., Borysova L. E. **The deformation of elastic heterogeneous sphere with partial loading** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.61-65.

An internal space problem for elastic heterogeneous sphere is considered. The partial solution in case of symmetric loading is obtained.

Bibl. 3

UDC 539.3

Musiy R., Melnyk N., Hissovska N., Shynder K. **The determination of carrying capacity of electroconductive solids of canonical form under the effect of impulse electromagnetic fields** // System Technologies. – N 4(57) - Dnipropetrovsk, 2008. – P.66-69.

The analytical model of determination of carrying capacity of electroconductive solids has been suggested. The set of basic equations of thermomechanics for electroconductive solids of canonical form, such as layer, cylinder and sphere, has been written.

UDC 534-21

Shul'ga N.D. **Mode shapes on bulk shear waves transmission zones boundaries in two-component layered composites with interfacial imperfections** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.70-76.

Analytical-numerical analysis of bulk shear waves mode shapes in two-component layered composites with interfacial imperfections on becoming transmission zones boundaries frequencies is developed.

UDC 534-21:537.226.86

Grigoryeva L.O. **About Method of Characteristics Using for Exploration of Electromechanical Unsteady Vibrations of the Piezoceramic Layer under Electrical Excitation** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.77-81.

It is built the analytical solution of unsteady vibrations problem of poled by thickness piezoceramic layer under electric potential loading. For solving of differential equation for decision prolongation functions there are used numerical schemes. Dynamical electromechanical layer state analysis is conducted, mechanical features progress in time are built and these features behaviour is investigated.

UDC 534-21:537.226.86

Grigoryev S. A. **Unsteady Vibrations by Thickness of the Piezoceramic Ball under Electric Excitation** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.82-86.

The problem of radial poled piezoceramic ball unsteady vibrations under electric potential loading is considered. For problem's solving it is developed the numerical method on the basis of mesh approximations, explicit and implicit schemes. It is conducted dynamical electromechanical ball state analysis, mechanical displacements and stresses progress in time are investigated.

UDC 534.21:537.226.86:537.634

Levchenko V.V., Zinchuk L.P. **Bulk shear waves in metalezied ferrite/piezoelectric media** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.87-95.

This paper describes an approach to the construction of dispersion relations for the bulk shear magnetoelastoelectric waves in a metal coated stratified-periodic ferrite/piezoelectric structures. The features of ferrite magnetic properties influence on dispersion characteristics of waves are also established.

Bibl. 10.

UDC 534.01;62.4.01

Anik'ev I.I., Mikhailova M.I., Zabuga A.G., Plakhtienko N.P., Sushchenko E.A. **About oscillations of a rigid body with electromagnetic seismic damper in the mechanism of seismoisolation** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.96-102.

The nonlinear mathematical model of the gravitation oscillating system with guided electromagnetic seismic damper is built. The description of dependence on the current of attractive force of ferromagnetic bodies by solenoid is experimentally determined. At multifrequency inertial excitation the coefficient of dynamical quality on an acceleration in depending from time and amplification constants for two laws of control is calculated.

Bibl. 5, il. 5, tabl. 1.

UDC 539.3

G.N.Baklanova **The essence of problem of stability of massif with horizontal underground working attached to existence of plastic deformation** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.103-105.

The stability of state equilibrium of the elastic-plastic incompressible massif with horizontal underground working using three-dimensional linearized theory of stability is considered.

The results of critical stresses calculation show the necessary of account of the plastic qualities of rocks.

Bibl. 2, tab. 2.

UDC 539.3

Babich S. Yu. Borisov E. N. Ovsienko V. G. **To the theory of a contact problem of torsion of elastic contractible layer with initial stresses** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.106-110.

Bibl. 5, tabl. 1

The static contact problem of torsion of elastic layer with initial stresses is considered. The problem reduces to pair integral equations witch leads to system of linear algebraic equations. On a base of numeric calculation the influence of initial stresses is investigated.

UDK 539.3

Shnerenko K.I., Godzula V.F. **Investigation of influence of interlayer shear change on state of stress of cylindrical shell with hole** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.111-115.

The method of determination of stresses in composite cylindrical shell with circular hole was given. The shells model of Timoshenko was used. The method of finite elements was used. The strain distribution around the hole on changed of shear stiffness of shell material was investigated.

Bibl 4, tab. 1.

UDK 539.3

Shchuruk G.I. **Influence of liquid density on wave process in hydroelastic system of shell-viscosity liquid** // System Technologies. - N 4(57) - Dnipropetrovsk, 2008. - P.116-119.

The process of nonaxisymmetrical waves distribution in the cylindrical orthotropic shell containing viscous compressible liquid was considered. The analysis was spent within the framework of the linear equations of S.P.Timoshenko type for the shell and linearized Navier-Stokes equation for liquid. The influence of relative density on the frequency –phases characteristics of the system was investigated.

Bibl. 2, ill.3.

UDC 539.3

Meish V. F., Arnauta N.V. **Forced vibration of five – layers conical shells with allowance of discrete ribs displacement under nonstationary loading** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.120-124.

A problem of non – linear deformation of five-layer conical shells with allowance for discrete ribs under non – stationary loading is considered. The system of non – linear differential equations is based on the Timoshenko type theory of rods and shells. The Reissner’s variational principle is used for deductions of the motion equations. An efficient numerical method with using Richardson type finite difference approximation for solution of problems on nonstationary behaviour of multiplayer shells with allowance distcrete ribs is represented. Numerical examples are given.

UDC 622.28.044:622.831

Larionov G.I. **On change resin-metal anchor diameter problem** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.125-138.

The paper is devoted to influence resin-metal anchor and borehole diameter choice on resin durability property levels with taking into account the technology demands. The task is formulated and solved as constraint optimization task. Resin shell axis tensile forces integral is the objective function. Maximum bore device torque and ultimate resin shell tensile stress were proposed as constraints. As a result analysis and conclusions are made.

Artamonova A.V., Dologarenko V.A., Polishuk S.Z. Poltoratskaya V.N., Falko V.V., Polishuk A.V. **The skilled - theoretical rating of a component of ecological risk from a dot source of emissions** // System Technologies. – N 4(57) – Dnipropetrovsk, 2008. – P.139-145.

The skilled - theoretical rating of a component of ecological risk from a dot source of emissions is given at measurements of concentration not of all polluting substances.

УДК 621.876.212.

Kuzmenko V.I., Kiryaziev P.N. **Mathematic modeling and analyses of the voltage condition of the bands under the circumstances of the reciprocity with the driving drum of the belt conveyer** // System Technologies. - N 4(57) - Dnipropetrovsk, 2008. - P. 146-153.

The aim of the work is to find voltage in the linking layer connection of the rack-weeled band construction under the circumstances of the reciprocity with the driving drum of the belt conveyer. The task is solved in the non-linear erection by the finite quantity elements' method on the example of the four- padding band. Finite-element rated scheme is a nine-layered model. The results of the research of the strain state of the linking layer connection of the rack-weeled band construction are taken in the form of the dependence of the components of the normal and tangent voltages along its length. Equivalent voltages under the energetic theory of the tensile strength are determined and the comparative analyses of the voltage condition of the linking layer connection for the different cases of its loading is made.

Bibl. 4, il. 10.

UDC 004.8 + 004.032.26

Rachkovskij D.A. **Modeling of human thinking as the way to increasing intellectuality of in-formation technologies and systems** //System technologies. – N 4(57) - Dnipropetrovsk, 2008. - P. 145-162.

The paper considers an approach to increasing intellectuality of information technologies and systems on the basis of modeling of human thinking – analogical and case-based reasoning and exploiting common sense knowledge. It is proposed to use methods for neural distributed representation of information for implementation of the approach.

Bib. 12, pic. 3, tabl. 0.

АВТОРЫ ВЫПУСКА

Аникьев И.И. - к.т.н., с.н.с. Институт механіки НАНУ.

Арнаута Н.В. - аспирант Інститут механіки НАНУ.

Бабич Степан Юрійович - д.т.н., професор кафедри вищої математики, Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана.

Бакланова Г.М. - к.т.н., с.н.с. Інститут механіки НАНУ.

Борисов Є.М. - к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики, Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана.

Борисова Людмила Євгенівна - заступник директора з навчально-виховної роботи, вчитель математики спеціалізованої школи № 31, м. Київ.

Веревичева М.А. - Украинская государственная академия железнодорожного транспорта.

Галаган О.Г. - Кременчугский государственный политехнический университет.

Гіссовська Н.Б. - Національний університет «Львівська політехніка».

Глухов Ю.П. - Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины.

Глухов Ю.П. - Кременчугский государственный политехнический университет

Годзула В.Ф. - к.т.н., с.н.с. Інститут механіки НАНУ.

Григор'єв С.А. - к.т.н., с.н.с. Інститут механіки НАНУ.

Григор'єва Л.О. - к.т.н., с.н.с. Інститут механіки НАНУ.

Забуга А.Т. - к.т.н., с.н.с. Інститут механіки НАНУ.

Зинчук Любовь Павловна – с.н.с., канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела электроупругости, Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, г. Киев.

Кирия Р.В. - Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины.

Кирьязов Петр Николаевич - к.т.н., доцент кафедры теоретической и строительной механики Донбасского государственного технического университета, г. Алчевск Луганской обл.

Корнієнко В.Ф. - Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины.

Кравцов Л.Б. - Украинская государственная академия железнодорожного транспорта.

Крылова Т.В. - д.п.н., проф. ДДТУ.

Кузьменко Владимир Иванович - к.т.н., доцент кафедры горной энергомеханики и оборудования Донбасского государственного технического университета, г. Алчевск Луганской обл.

Лазар В.Ф. - Мукачевский технологический университет.

Ларионов Г.И. - Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины.

Ларионов Г.И. –к.т.н. , с.н.с. –Институт геотехнической механіки НАНУ.

Ластівка І.О. - Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.

Левченко Владимир Владимирович – с.н.с., канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела электроупругости, Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАНУ, г. Киев.

Максимюк В.А. - Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.

Медведєв К.В. - Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.

Мейш В.Ф. - д.ф.-м.н., с.н.с. Інститут механіки НАНУ.

Мельник Н.Б. - Національний університет «Львівська політехніка».

Михайлова М.И. - к.т.н., с.н.с. Інститут механіки НАНУ.

Мусій Р.С. - Національний університет «Львівська політехніка».

Овсієнко Василь Григорович - к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики, Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана.

Плахтиєнко Н.П. - к.т.н., с.н.с. Інститут механіки НАНУ.

Рачковский Дмитрий Андреевич – д.т.н., старший научный сотрудник Международного научно-учебного центра информационных технологий и систем НАН и МОН України, г. Киев.

Савченко В.Г. - Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.

Соколовская И.Е. – аспірант, ДДТУ.

Стеблянко П.А. – д.ф.-м.н., проф., ДДТУ.

Сущенко Е.А. - к.т.н., с.н.с. Інститут механіки НАНУ.

Чихладзе Э.Д. - Украинская государственная академия железнодорожного транспорта.

Шиндер К.В. - Національний університет «Львівська політехніка».

Шнеренко К.І. - д.т.н., с.н.с. Інститут механіки НАНУ.

Шульга В.М. - Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.

Шульга М.О. - Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.

Шульга Н.Д. - к.т.н., с.н.с. Інститут механіки НАНУ.