

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ

В.И. Гнисько, Е.В. Еселева

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ

Введение. Исследование динамического взаимодействия упругих конструкций с жидкостью представляет достаточно сложную проблему, решению которой посвящена обширная литература. Актуальность данной проблемы связана с широким применением конструкций, содержащих полости с жидкостью, в технике. В качестве примеров можно привести цистерны для перевозки жидкостей, емкости для хранения нефтепродуктов, резервуары, используемые на атомных электростанциях и т. д.

Широкое распространение при решении задач динамики ограниченного объема жидкости получил вариационный метод [1-3], который приводит к приближенным решениям в аналитическом виде со свойствами слабой сходимости. К проблемам, возникающим при реализации данного метода, относятся выбор системы координатных функций, вопросы устойчивости алгоритма Рунге и др.

Другая группа методов исследования рассматриваемых задач основана на дискретизации основных параметров задачи. К числу таких методов относятся, в частности, метод конечных элементов (МКЭ) [4-5] и метод граничных элементов (МГЭ) [6-7]. Основное достоинство этих подходов состоит в универсальности их алгоритмов по отношению к геометрии конструкции и полости, заполненной жидкостью. Интенсивно разрабатываемый в последние десятилетия МГЭ имеет определенные преимущества: уравнения МГЭ содержат значения искомых функций и их производных только на границе области, занятой жидкостью, что позволяет уменьшить на единицу размерность задачи.

В данной работе предлагается подход, основанный на использовании метода граничных интегральных уравнений, для решения задач динамики оболочек вращения, заполненных жидкостью.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую упругую оболочку вращения, частично заполненную жидкостью. Обозначим смачиваемую поверхность оболочки через S_1 . Введем связанную с оболочкой систему координат $Oxyz$, в которой свободная поверхность жидкости S_0 в невозмущенном состоянии совпадает с плоскостью xOy , а вектор сил тяжести противоположен по направлению оси Oz . Предположим, что жидкость идеальная, несжимаемая, и ее течение является безвихревым. Эти допущения позволяют считать возмущенное движение жидкости потенциальным с потенциалом скоростей $j(x,y,z,t)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа.

Уравнение колебаний жидкости в линейном приближении определяется соотношениями [2]

$$\begin{aligned} V &= \text{grad } \varphi, \\ P &= -\rho(\dot{\varphi} + gz) + P_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где P – гидродинамическое давление жидкости, ρ – плотность жидкости, g – ускорение поля массовых сил; V – вектор скоростей движения жидкости; $z = H$ – координата невозмущенной свободной поверхности жидкости

Уравнение колебаний упругой оболочки с жидкостью запишем в векторном виде

$$LU + M\ddot{U} = P + Q \quad (2)$$

где L, M – операторы упругих и массовых сил в оболочке; $U = (u_1, u_2, w)$ – вектор-функция перемещений срединной поверхности оболочки; $Q(t)$ – вектор внешней поверхностной нагрузки.

Кинематическое граничное условие безотрывного движения жидкости на смачиваемой поверхности оболочки S_1 :

$$Vn = \dot{U}n = \dot{w} \quad (3)$$

где n – внешняя единичная нормаль к смоченной поверхности оболочки, w – нормальная составляющая перемещений оболочки.

Динамическое граничное условие на возмущенной свободной поверхности жидкости S_0 при $z = H + \zeta$ после линеаризации принимает вид

$$P - \rho g \zeta = 0 \quad (4)$$

где $z = \zeta(x, y, t)$ – уравнение возмущенной поверхности жидкости.

Гидродинамическую задачу (1)–(4) можно свести к задаче определения одной неизвестной функции $\varphi(x, y, z, t)$. Будем искать потенциал скоростей в виде суммы

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_1(x, y, z, t) + \varphi_2(x, y, z, t)$$

Для потенциала φ_1 сформулируем следующую краевую задачу

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_1 &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \dot{w}, \quad P_S \in S_1, \\ \dot{\varphi}_1 &= 0, \quad P_S \in S_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь P_S – точка, принадлежащая поверхности $S = S_1 \cup S_0$.

Будем искать решение задачи (5) в виде разложения по собственным формам $u_k(x, y, z)$ колебаний оболочки в вакууме

$$U(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m u_k(x, y, z) c_k(t), \quad (6)$$

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m \varphi_{1k}(x, y, z) \dot{c}_k(t), \quad (7)$$

где $c_k(t)$ – неизвестные коэффициенты. Отметим, что для собственных векторов справедливы следующие соотношения:

$$Lu_k = \omega_k^2 Mu_k, \quad (Mu_k, u_j) = \delta_{kj}, \quad (8)$$

где ω_k – k -я частота собственных колебаний оболочки в вакууме.

Для определения φ_{1k} имеем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_{1k} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n} &= w, \quad P_S \in S_1, \\ \dot{\varphi}_{1k} &= 0, \quad P_S \in S_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для потенциала φ_2 сформулируем следующую краевую задачу

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_2 &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= 0, \quad P_S \in S_1, \\ \ddot{\varphi}_2 + g \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= 0, \quad P_S \in S_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Эта задача описывает колебания ограниченного объема жидкости в жестком сосуде. Предполагая, что φ_2 меняется во времени по гармоническому закону $\varphi_2(x, y, z, t) = \tilde{\varphi}_2(x, y, z) \cos(\kappa t + \varepsilon)$, приходим к задаче о собственных колебаниях жидкости в жестком сосуде

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{\varphi}_2 &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial n} &= 0, \quad P_S \in S_1, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial n} &= \frac{\kappa^2}{g} \tilde{\varphi}_2, \quad P_S \in S_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Ее решение определяет ряд собственных чисел κ_k и соответствующих им собственных функций φ_{2k} .

Решение краевых задач (9), (11) строится на основе метода граничных интегральных уравнений. Так как объектом исследования являются оболочки вращения, функция потенциала представлена разложением в ряды Фурье по окружной координате. В работах [8], [9] получены определяющие интегральные уравнения для каждой из гармоник и изложен алгоритм их численного решения.

Определив φ_{2k} , будем искать φ_2 в виде

$$\varphi_2(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m d_k(t) \varphi_{2k}(x, y, z). \quad (12)$$

Подставляя разложение (12) в уравнения (10), потребуем, чтобы условие на свободной поверхности жидкости было выполнено. Удовлетворение этому условию приводит к системе дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов d_k

$$\ddot{d}_k + \kappa_k^2 d_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Решение этой системы имеет вид

$$d_k(t) = \cos(\kappa_k t + \varepsilon), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (13)$$

Гидродинамическое давление определим, подставив в уравнение (1) соотношения (7), (12), (13)

$$P = -\rho \left(\sum_{k=1}^m \ddot{c}_k(t) \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^m \kappa_k \sin(\kappa_k t + \varepsilon) \varphi_{2k} + gz \right). \quad (13)$$

Далее подставим разложения (6), (13) в уравнение движения оболочки (2) и умножим его скалярно на собственный вектор u_j . Учитывая свойства (8), приходим к системе дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов c_k

$$\omega_j^2 \delta_{kj} c_j + \delta_{kj} \ddot{c}_j = -\rho \sum_{k=1}^m \ddot{c}_k \varphi_{1k} u_j - \rho \sum_{k=1}^m \kappa_k \sin(\kappa_k t + \varepsilon) \varphi_{2k} u_j - \rho g z u_j + Q u_j, \quad j = 1, m \quad (14)$$

Для решения этой системы используется метод Рунге-Кутты. Собственные частоты и формы колебаний оболочки в вакууме определяются методом конечных элементов.

В качестве примера рассмотрена задача о колебаниях полусферической оболочки, заполненной жидкостью, под действием равномерно распределенного давления $Q(t) = Q_0 T(t)$, где $Q_0 = 10^7$ Па, $T(t) = \exp(-t/\tau)$, $\tau = 14.2 \text{E}^{-6}$ с. (Рис.1). Параметры оболочки

следующие: радиус $R=5.08$ м, толщина $h=0.0254$ м, модуль упругости $E=0.7 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$, плотность материала $\rho_0=2770$ кг/м³. Плотность жидкости $\rho=1000$ кг/м³. Условия закрепления – шарнирное опирание по контуру оболочки.

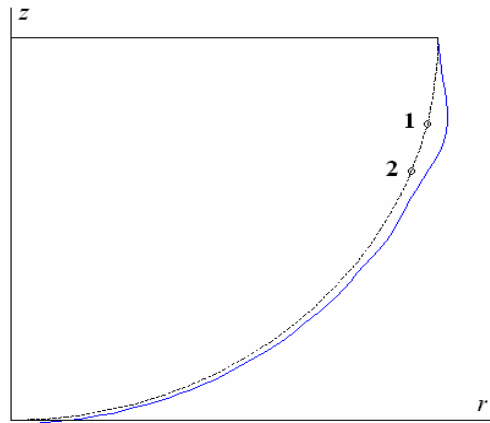


Рисунок 1 - Деформированное состояние оболочки

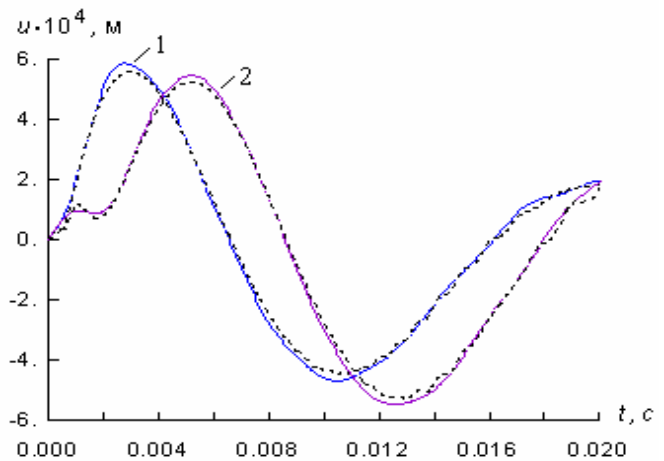


Рисунок 2 - Радиальные перемещения оболочки, заполненной жидкостью

На рис.2 приведены графики изменения во времени радиальных перемещений в узлах 1 ($z_1 = 4.582$ м) и 2 ($z_2 = 4.187$ м) оболочки с жидкостью: сплошные линии – вариант расчета по предложенной методике; пунктирные линии показывают данные расчета по программному комплексу, реализующему метод конечных элементов. Хорошее согласование результатов свидетельствует о достоверности метода и алгоритма решения задачи. На рис. 3, 4 приведены зависимости от времени напряжений на поверхности оболочки, взаимодействующей с жидкостью (узел 1), и гидродинамического давления.

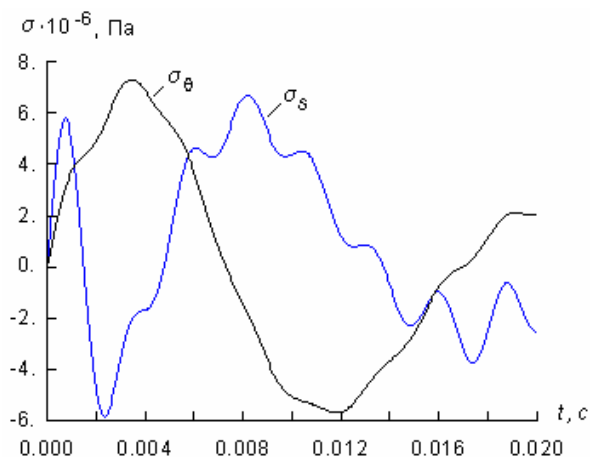


Рисунок 3 - Напряжения в оболочке

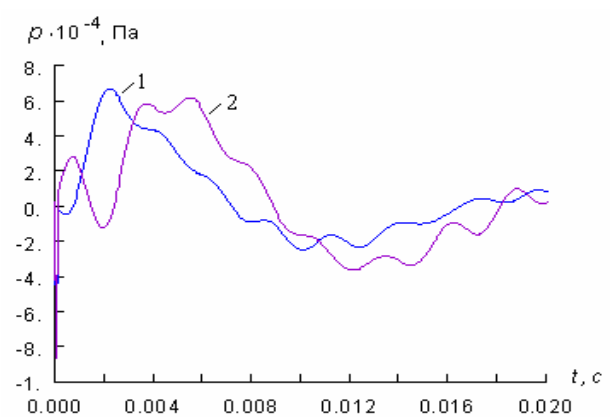


Рисунок 4 - Гидродинамическое давление

Выводы. На основе метода граничных интегральных уравнений предложен подход к решению задач определения напряженного и деформированного состояния оболочек вращения, частично заполненных жидкостью, при динамическом нагружении. В дальнейшем разработанный подход будет использован при исследовании задач динамики тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, находящихся под воздействием различных нестационарных (импульсных, сейсмических и т.д.) нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 440 с.
2. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. – Киев: Наукова думка, 1990. – 296 с.
3. Богоряд И.Б., Дружинин И.А., Дружинина Г.З., Либин Э.Е. Введение в динамику сосудов с жидкостью. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1977. – 144 с.
4. Григорьев В.Г. Применение метода конечных элементов к расчету колебаний упругих оболочечных конструкций, содержащих жидкость // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. (Труды III семинара). – Томск: Изд-во Том. ун-та, 1978. – С. 55–60.
5. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов // Механика твёрдого тела. – 1998. – № 5. – С. 166–174.
6. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
7. Кантор Б.Я., Стрельникова Е.А. К теории собственных колебаний конструкций, содержащих жидкость // Доп. НАН України. – 2001. – № 10. – С. 61–65.
8. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью // Пробл. машиностроения. – 2006. – Т. 9, № 1. – С. 58–68.
9. Еселева Е.В., Науменко В.В., Стрельникова Е.А. Метод интегральных уравнений в задаче о колебаниях жидкости в жесткой оболочке // Вестник ХНТУ. – 2006. – Т. 25, № 2. – С. 198–202.

Получено 15.06.2007 г.

УДК 539.3

К.Г. Головки, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш

**ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ НАГРУЗКАХ**

Введение. На сегодняшний день статические задачи взаимодействия оболочек и стержней с упругой средой являются достаточно изученными [1, 2]. Интерес представляют динамические задачи поведения оболочек и упругих элементов со средами. Наиболее полно свойства упругой среды, в которую заключена деформируемая система, описываются уравнениями теории упругости. Однако, в математическом плане эта задача является достаточно сложной [3]. Исходя из этого, задача учета упругой среды сводится к сравнительно простой математической постановке, которая позволяет с достаточной точностью определить реакцию упругой среды на рассматриваемую конструкцию. Здесь можно отметить ряд работ по деформированию однослойных и многослойных балок и цилиндрических оболочек на упругом основании при нестационарных нагрузках [4-6]. В основном, указанные задачи рассматривались с применением упругого основания Винклера. Практически не рассмотрены задачи другой геометрии оболочек (кроме цилиндрических оболочек) с упругими средами при динамических нагрузках.

Целью данной работы является изучение динамического поведения сферических оболочек в упругой среде согласно модели Пастернака [2] при нестационарной распределенной нагрузке.

1. Постановка задачи. Рассматривается гладкая однородная сферическая оболочка, которая заключена в упругую среду и находится под действием внутренней нормальной распределенной нагрузки $P_3(\alpha_1, t)$. Упругая среда моделируется основанием типа Пастернака. Эта модель характеризуется двумя коэффициентами постели c_1 и c_2 , которые отвечают за работу упругого основания на сжатие растяжение и сдвиг. Данная модель содержит в себе основание Винклера как частный случай.

Исходные уравнения колебаний для сферической оболочки на упругом основании, согласно модели типа Тимошенко [2,7] имеют вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s} (\sin \alpha_1 T_{11}) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1}{R} T_{22} + \frac{T_{11}}{R} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\
& \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s} (\sin \alpha_1 \bar{T}_{13}) + \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s} (\sin \alpha_1 R_{2 \text{ осн}}) - \\
& \quad - \frac{T_{11}}{R} - \frac{T_{22}}{R} - R_{1 \text{ осн}} + P_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\
& \frac{1}{\sin \alpha_1} \frac{\partial}{\partial s} (\sin \alpha_1 M_{11}) - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1}{R} M_{22} - T_{13} = \rho h \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \\
& \bar{T}_{13} = T_{13} + T_{11} \theta_1, \quad R_{1 \text{ осн}} = c_1 u_3, \quad R_{2 \text{ осн}} = c_2 \frac{\partial u_3}{\partial s}.
\end{aligned} \tag{1}$$

В уравнениях (1) введены следующие обозначения: α_1, t – пространственная и временная координаты; $s = \alpha_1 R$, R, h – радиус срединной поверхности и толщина оболочки; $P_3(\alpha_1, t)$ – внутренняя распределенная нагрузка; (u_1, u_3, φ_1) – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки.

Связь между величинами усилий–моментов и соответствующими деформациями определяются согласно формул

$$\begin{aligned}
T_{11} &= B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), & T_{22} &= B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}), \\
T_{13} &= B_{13} k^2 \varepsilon_{13}, & M_{11} &= D_{11}(\kappa_{11} + \nu \kappa_{22}), \\
M_{22} &= D_{22}(\kappa_{22} + \nu \kappa_{11}),
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\text{где } B_{11} = B_{22} = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad B_{13} = Gh, \quad D_{11} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}; \quad E, G, \nu$$

– физико – механические параметры оболочки; k^2 – интегральный коэффициент сдвига в теории оболочек типа Тимошенко.

Величины деформаций в формулах (2) выражаются через компоненты обобщенного вектора перемещений согласно формул

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{1}{2} \theta^2 + \frac{u_3}{R}, \\
\varepsilon_{22} &= \frac{u_1}{R} \operatorname{ctg} \alpha_1 + \frac{u_3}{R}, \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \theta_1, \\
\theta_1 &= \frac{\partial u_3}{\partial s} - \frac{u_1}{R}, \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}, \quad \kappa_{22} = \frac{\varphi_1}{R} \operatorname{ctg} \alpha_1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения колебаний (1) – (3) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями. В частности, для случая

жесткого заземления краев сферической оболочки при $s = s_0$, $s = s_N$ имеем

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0 \quad (4)$$

Граничные условия для случая $t = 0$

$$\begin{aligned} u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Численный алгоритм. Исходные уравнения колебаний сферической оболочки на упругом основании (1) – (5) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Численный алгоритм решения исходных уравнений базируется на совместном применении интегро – интерполяционного метода построения разностных схем по пространственной координате и явной конечно – разностной схеме по временной координате [7].

3. Числовые результаты. Рассматривалась сферическая оболочка на упругом основании типа Пастернака с жестко заземленными краями – граничные условия (4) при действии распределенной нагрузки

$$P_3(\alpha_1, t) = A \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где A – амплитуда нагрузки; T – длительность нагрузки. Задача решалась при следующих геометрических и физико – механических параметрах: $\alpha_{10} = \pi/12$, $\alpha_{1N} = \pi/2$; $R/h = 60$; $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $\nu = 0,3$; $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с. Коэффициенты постели полагались $c_1 = 0,25 \cdot 10^8$ н/м³ $c_2 = 10^7$ н/м [5].

Численные расчеты проводились на временном интервале $t = 10T$. На рис.1 и рис.2 приведены величины σ_{22} для случаев оболочки без учета основания (кривая 1) и с учетом основания (кривая 2). На рис.1 приведены зависимости величины σ_{22} по пространственной координате s в момент времени $t = 3,875T$ (момент достижения максимальных значений для величин σ_{22}). На рис.2 приведены зависимости величины σ_{22} в сечении

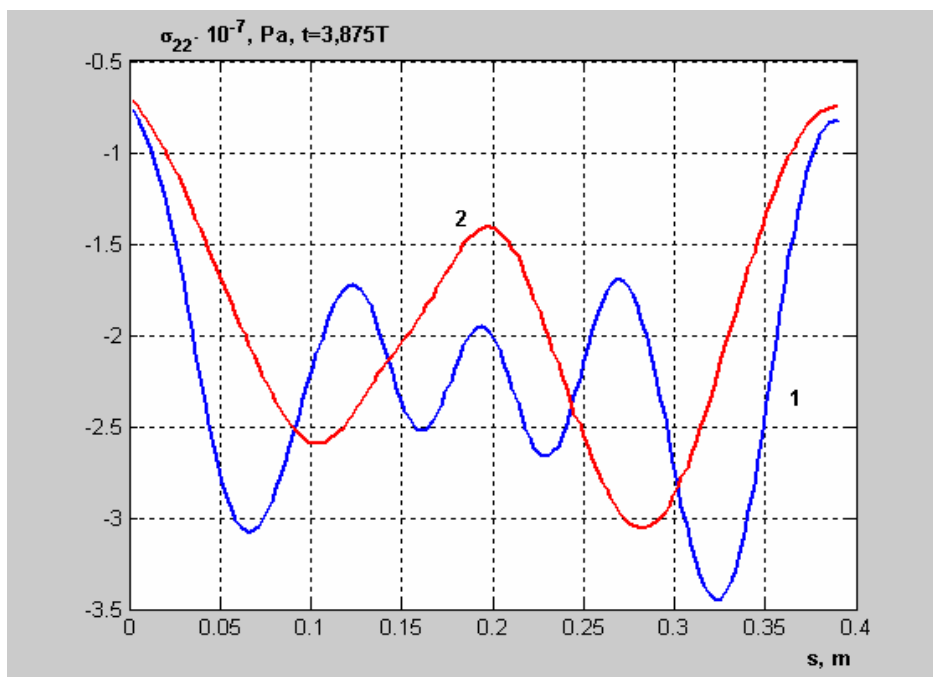


Рисунок 1

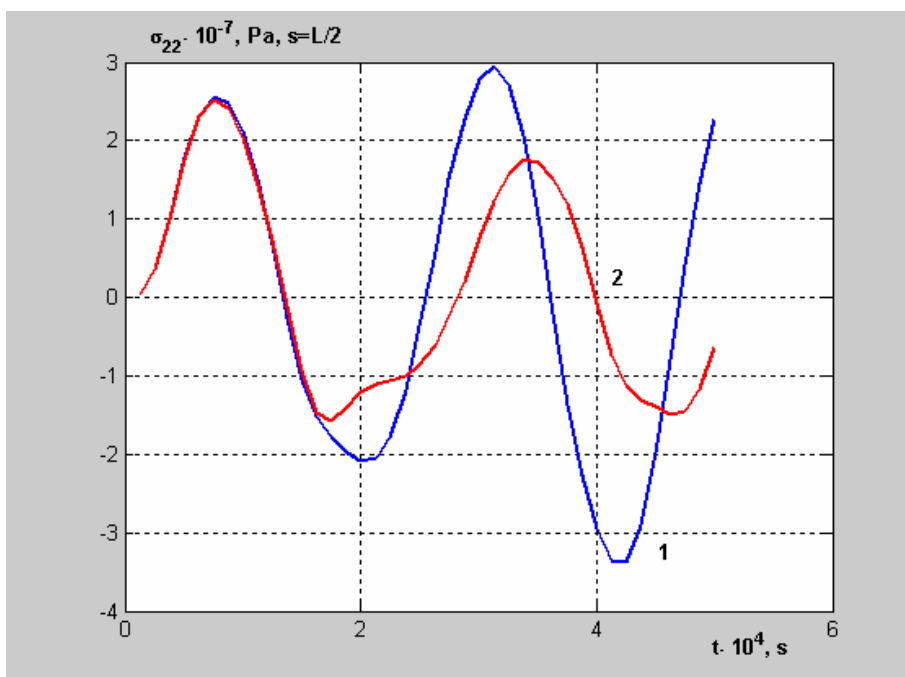


Рисунок 2

$s = L/2, L = (\alpha_{10} - \alpha_{1N})R$ от времени t . Как видно из представленных рисунков, влияние упругого основания на НДС рассматриваемой конструкции начинает сказываться после времени достижения величинами σ_{22} своих максимальных значений. Исходя из представленного материала можно оценить количественное влияние упругого основания на величины НДС конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В.А. Изгиб цилиндрических оболочек в упругой среде. – К.: Вища школа, 1975. – 168с.
2. Перельмутер А.В., Сливкер В.Н. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – Киев: Изд – во «Сталь», 2002. – 600 с.
3. Вестняк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – Т. 15, 1983. – С. 69 – 148.
4. Устойчивость и колебания деформируемых систем с односторонними связями / В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, Г.С. Кондаков, А.И. Оглобля. – К.: Вища школа, 1989. – 399 с.
5. Динамика конструкций при воздействии кратковременных нагрузок / Кохманюк С.С., Дмитриев А.С., Шелудько Г.А. и др. – Киев: Наук. думка, 1989. – 304с.
6. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарапата А.С. - Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392с.
7. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: Изд. Полигр. центр «Киевский ун –т», 2005. – 536 с.

Получено 15.06.2007 г.

Л.О. Григор'єва

ЕЛЕКТРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО ЦИЛІНДРА ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗБУРЕННЯХ

Постійно зростаюча область застосування п'єзокерамічних матеріалів зумовлює необхідність поглибленого вивчення динамічних задач електропружності [1,2,3 та ін.]. Найбільш складними та найменше дослідженими в цьому класі задач є задачі нестационарної динаміки для п'єзокерамічних тіл скінченних розмірів. Дана робота присвячена дослідженню поширення осесиметричних нестационарних коливань в порожнистому п'єзокерамічному циліндрі при збуренні електричним потенціалом.

Розглядається порожнистий радіально поляризований циліндр, перетин якого в циліндричній системі координат r, θ, z займає область $W = \{R - h \leq r \leq R + h, 0 \leq z \leq l_z\}$. В рамках лінійної теорії електропружності збурений стан п'єзоелектричного циліндра описується системою рівнянь

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= -\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_{rr}}{\partial r}; \quad \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \sigma_{rz}}{\partial r}; \\ \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

при матеріальних співвідношеннях радіально поляризованого тіла [1]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{13}^E \frac{u_r}{r} + c_{13}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{33}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{11}^E \frac{u_r}{r} + c_{12}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ \sigma_{zz} &= c_{12}^E \frac{u_r}{r} + c_{11}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r}{\partial r} + e_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad \sigma_{rz} = c_{44}^E \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + e_{42} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\ D_r &= e_{13} \frac{u_r}{r} + e_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \varepsilon_{33}^S \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad D_z = e_{42} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11}^S \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Торець $z = 0$ циліндра жорстко закріплений, інші поверхні вільні від механічних навантажень. До електродованих поверхонь $r = R \pm h$ підводиться різниця потенціалів, а на торцях виконується умова відсутності вільних зарядів. Граничні умови мають вигляд:

$$\sigma_{rr}(R \pm h, z, t) = 0, \sigma_{zz}(r, l_z, t) = 0, \sigma_{rz}(R \pm h, z, t) = \sigma_{rz}(r, l_z, t) = 0, \quad (3)$$

$$u_r(r, 0, t) = u_z(r, 0, t) = 0, D_z(r, 0, t) = D_z(r, l_z, t) = 0, \varphi(R \pm h, z, t) = f_{\pm}(t).$$

Початкові умови прийнемо нульовими:

$$u_r(r, z, 0) = u_z(r, z, 0) = 0; \dot{u}_z(r, z, 0) = \dot{u}_r(r, z, 0) = 0. \quad (4)$$

Розв’язок шукається в функціях u_r, u_z, φ , де u_r, u_z – радіальні та поздовжні переміщення, φ – електричний потенціал. Після підстановки (2) в (1), (3) задача зводиться до системи диференціальних рівнянь в частинних похідних другого порядку при крайових (3) та початкових (4) умовах.

Для чисельного розв’язання задачі в області $D = \{-h \leq x \leq h, 0 \leq z \leq l_z, 0 < t \leq T\}$, де $x = r - R$, вводиться розбиття $\Omega = \{x_i, z_j, t_k\}$, що містить позаконтурні точки, необхідні для запису граничних умов.

Розв’язок шукаємо в вигляді набору значень переміщень та електричного потенціалу в точках розбиття:

$$u_{i,j}^{r,k} = u_r(x_i, z_j, t_k), u_{i,j}^{z,k} = u_z(x_i, z_j, t_k), \varphi_{i,j}^k = \varphi(x_i, z_j, t_k), \{x_i, z_j, t_k\} \in \Omega.$$

Систему рівнянь в частинних похідних зводимо до системи алгебраїчних рівнянь шляхом заміни похідних по просторовим координатам центрально-різницеви виразами та похідних по часу різницеви виразами неявної схеми Ньюмарка

$$\ddot{u}_{ij}^{k+1} = \frac{\dot{u}_{ij}^{k+1} - \dot{u}_{ij}^k}{\xi \Delta t} - \frac{1 - \xi}{\xi} \ddot{u}_{ij}^k; \dot{u}_{ij}^{k+1} = \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\xi \Delta t} - \frac{1 - \xi}{\xi} \dot{u}_{ij}^k,$$

де ξ – параметр схеми. При обчисленнях використовувалося значення $\xi = 0.5$.

Виключивши значення невідомих в позаконтурних точках, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь $M \cdot U^{k+1} = F^{k+1}$, де $U^{k+1} = \{u_{i,j}^{r,k+1}, u_{i,j}^{z,k+1}, \varphi_{i,j}^{k+1}\}$ – вектор невідомих в внутрішніх точках розбиття в момент часу $t = t_{k+1}$, F^{k+1} – вільний вектор. Система розв’язується шляхом факторизації матриці на верхньотрикутну та нижньотрикутну з використанням перестановки.

Значення переміщень, їх швидкостей та прискорень в початковий момент часу $t = 0$ отримуємо з початкових умов (4) та рівнянь руху (1).

В якості модельних взято одновимірну електропружну задачу про поширення коливань в п’єзокерамічному шарі (розв’язок

побудовано методом Даламбера) та в нескінченному п'єзокерамічному циліндрі (розв'язана чисельно).

При розгляданні двовимірної задачі виявилось, що фронт хвилі поздовжніх переміщень рухається від торців подібно до пружних хвиль. До моменту приходу в точку хвилі поздовжніх переміщень механічні та електричні параметри не залежать від координати z і співпадають з розв'язком одновимірної задачі.

Потрібно відмітити, що суттєва двовимірність задачі та зв'язаність механічних та електричних характеристик ускладнює аналіз впливу фізичних та геометричних параметрів постановки на рішення і є причиною скорочення інтервалу стійкості розв'язку в порівнянні з одновимірною або пружною задачею.

Обчислення проводилися для циліндра з кераміки PZT-4 [1] з геометричними характеристиками $l_z = 5h$, $h/R = 0.5$ при навантаженні електричним потенціалом

$$V(t) = \begin{cases} V_0(1 - \cos \omega t), & 0 < t < 2\pi/\omega, \\ 0, & t \leq 0, t \geq 2\pi/\omega. \end{cases}$$

При обезрозмірюванні, прийнятому в [1], $V_0 = 0.5$, $\omega = \pi$.

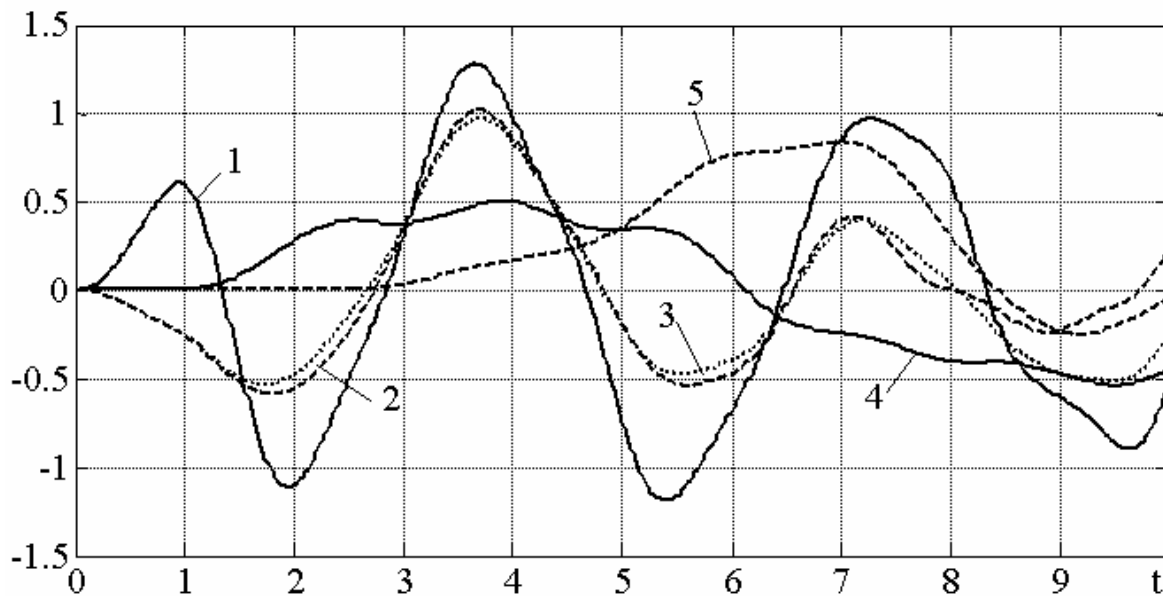


Рисунок 1

Малюнок ілюструє зміну основних механічних характеристик відносно безрозмірного часу в центральній точці перерізу: лінія 1 відповідає безрозмірним напруженням $\bar{\sigma}_{rr}$, 2 – $\bar{\sigma}_{zz}$, 3 – $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$, 4 – переміщення $\bar{u}_r$, 5 – $\bar{u}_z$. Бачимо, що напруження в перерізі циліндра

виникають миттєво, і до моменту приходу в цю точку переміщень з вільних поверхонь повністю визначаються електричним потенціалом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шульга Н. А., Болкисев А. М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К: Наук. думка, 1990. – 228 с.
2. Чебан В. Г., Форня Г. А. Численное исследование электроупругой задачи для прямоугольных тел // Численные методы решения задач волновой динамики. – Вып. 117. – Кишинев: Штиинца, 1990. – С. 122–131.
3. Мельник В. Н., Москальков М. Н. Разностные схемы и анализ приближенных решений для двумерных нестационарных задач связанной электроупругости // Дифф. уравнения. – 1991. – 27, №7. – С. 1220-1229.

Получено 15.06.2007 г.

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН НЕТОНККИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ І ДЕФОРМАЦІЯМИ

Викладено спосіб побудови рівнянь рівноваги нетонких анізотропних оболонок з початковими напруженнями і деформаціями при усталеному температурному полі. В основу його покладено метод розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини. Відносно коефіцієнтів розкладу як функцій двох незалежних змінних варіаційним способом виводиться система диференціальних рівнянь і відповідні граничні умови.

Припустимо, що оболонка, яка займає область $\Omega = S \times [-h, h]$ тривимірного простору, віднесена до криволінійної системи координат x^i ($i=1,2,3$), нормально зв'язаної з поверхнею S . При цьому будемо вважати, що x^α ($\alpha=1,2$) співпадають з гаусовими координатами поверхні S , а x^3 змінюється вздовж нормалі $\vec{n}$ до S в межах товщини оболонки, тобто $x^3 \in [-h, h]$. Нехай p^{ij} і v_j компоненти початкових напружень і переміщень оболонки, які визначаються розв'язком лінійної крайової задачі. Для побудови двовимірних рівнянь теорії оболонок скористаємося варіаційним рівнянням В.В.Болотіна [1], доповненого температурним членом

$$\iiint_{\Omega} t^{ij} \nabla_i \delta u_j d\Omega = 0, \quad (1)$$

де

$$t^{ij} = \sigma^{ij} + c^{ilsm} \nabla_s u_m \nabla_l v^j + p^{il} \nabla_l u^j, \quad (2)$$

причому

$$\sigma^{ij} = c^{ijlm} (\nabla_l u_m + \nabla_m v^s \nabla_s u_l) - \beta^{ij} \theta, \quad (3)$$

і варіаційним рівнянням для стаціонарного температурного поля [2]

$$\iiint_{\Omega} q^i \partial_i (\delta \theta) d\Omega - \iint_{\partial\Omega} Q \delta \theta da = 0, \quad (4)$$

в якому

$$q^i = -\lambda^{ij} \partial_j \theta. \quad (5)$$

Тут ∇_l - символ коваріантної похідної в S_g -параметризації області Ω [3]; $\partial_j = \partial/\partial x_j$; σ^{ij} , u_j - компоненти збуреного тензора напружень і

вектора переміщень, θ - приріст температури; q^i - вектор притоку тепла, Q - заданий приплив тепла на граничній поверхні; c^{ijlm} - тензор модулів пружності; $\beta^{ij} = c^{ijlm} \alpha_{lm}$, α_{lm} - коефіцієнти температурного лінійного розширення і зсуву; λ^{ij} - коефіцієнти теплопровідності.

Зобразимо компоненти вектора переміщень u_j і приросту температури θ у вигляді скінченного ряду Фур'є за поліномами Лежандра $P_k(\zeta)$, тобто [4]

$$u_{j'}(x^1, x^2, x^3) = \sum_{k=0}^N u_{j'}^{(k)}(x) P_k(\zeta); \theta(x^1, x^2, x^3) = \sum_{k=0}^N \theta^{(k)}(x) P_k(\zeta), \quad (6)$$

де $x = (x^1, x^2)$, $\zeta = h^{-1}x^3$; $u_{j'}^{(k)}(x)$, $\theta^{(k)}(x)$ - коефіцієнти розкладу, що іменуємо далі моментами. Враховуючи представлення (6) із варіаційного рівняння (1) після деяких перетворень отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} t_{(k)}^{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\beta} t_{(k)}^{\alpha 3} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} t_{(k-2s-1)}^{3\beta} &= 0 \quad (\beta=1,2); \\ \nabla_{\alpha} t_{(k)}^{\alpha 3} + b_{\alpha\beta} t_{(k)}^{\alpha\beta} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} t_{(k-2s-1)}^{33} &= 0 \quad (k=0,1,\dots,N); \end{aligned} \quad (7)$$

і відповідні граничні умови $t_{(k)}^{\alpha i} \nu_{\alpha} = 0$, де ν_{α} - компоненти зовнішньої нормалі до границі ∂S ; ∇_{α} - символ коваріантної похідної в базисі поверхні S ; $K = (k-1)/2$, символ $[K]$ означає цілу частину числа K ;

$$t_{(k)}^{ij'} = (k + \frac{1}{2}) \int_{-h}^h \mathcal{G}(x^3) A_{r'}^{j'} t^{ir} P_k(\zeta) dx^3. \quad (8)$$

Тут $A_{r'}^{j'}$ - просторовий тензор другого рангу [3]; $\mathcal{G}(x^3) = \det \| A_{r'}^{j'} \|$.

Згідно (6) співвідношення (2), (3) приймуть вигляд

$$\begin{aligned} t^{ir} &= \sigma^{ir} + \sum_{n=0}^N (A_{m'}^{s'} c^{iqlm} \mathfrak{F}_q v^r + A^{rs'} p^{il}) \varepsilon_{ls'}^{(k)} P_n(\zeta); \\ \sigma^{ir} &= \sum_{n=0}^N \left[c^{irlm} (A_{m'}^{s'} + A_{q'}^{s'} \mathfrak{F}_m v^q) \varepsilon_{ls'}^{(n)} - \beta^{ir} \theta^{(n)} \right] P_k(\zeta). \end{aligned} \quad (9)$$

Далі слід враховувати, що компоненти початкових напружень p^{ij} і переміщень v_j зображаються у вигляді рядів за поліномами Лежандра, моменти яких визначаються при розв'язуванні

відповідних граничних задач [5]. Після цього необхідно підставити (9) у формулу (8) і провести інтегрування по x^3 .

Таким же способом із варіаційного рівняння (4) отримуємо систему рівнянь

$$\nabla_\alpha q_{(k)}^\alpha - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} q_{(k-2s-1)}^3 + \Phi^{(k)} = 0 \quad (k=0,1,\dots,N), \quad (10)$$

і відповідні їй граничні умови $q_{(k)}^\alpha \nu_\alpha = Q_{(v)}^{(k)}$,

де

$$\Phi^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \left[\mathcal{G}(h) Q_3^+ - (-1)^k \mathcal{G}(-h) Q_3^- \right]. \quad (11)$$

До рівняння (10) приєднуються співвідношення між моментами теплових потоків і приросту температури, тобто

$$q_{(k)}^i = - \sum_{n=0}^N \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-h}^h \mathcal{G}(x^3) \left(\lambda^{i\alpha} \partial_\alpha \theta^{(n)} + \lambda^{i3} h^{-1} \underline{\theta}^{(n)} \right) P_k(\zeta) dx^3, \quad (12)$$

де $\underline{\theta}^{(k)} = (2k+1)(\theta^{(k+1)} + \theta^{(k+3)} + \dots)$, причому $\theta^{(n)} = 0$, якщо $n < N$.

Наведені рівняння є досить загальними. Вони значно спрощуються, якщо знехтувати зміною метрики по товщині оболонки, тобто коли геометрія оболонки така, що величиною $|k_\alpha x^3|$, де k_α ($\alpha=1,2$) головні кривизни поверхні S , можна знехтувати в порівнянні з одиницею.

ЛІТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. О вариационных принципах теории упругой устойчивости // Пробл. механики твердого деформируемого тела. – Л. Судостроение. 1970. – С. 83-88.
2. Новацкий В. Электромагнитные волны в твердых телах. – М. Мир, 1986. – 159 с.
3. Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теория ковариантов. – М. Наука. 1986. – 296 с.
4. Khoma I.Yu. Thermopiezoelectric Equations for Nonthin Ceramic Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – vol. 41, №2. – p. 118-128.
5. Хома И.Ю., Хома Ю.И. Учёт температурного поля в теории нетонких оболочек с начальными напряжениями // Вісник Донецького університету, Сер. А. Природничі науки. – 2006, №1. – С. 117-120.

Получено 15.06.2007 г.

УДК 534.21:537.634

В.В. Левченко, Л.П. Зинчук

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН В СЛОИСТО–ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ ТИПА «ФЕРРИТ–ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК»

1. Введение. Изучение особенностей распространения магнитоэлектродупругих волн в слоистых структурах, образованных чередованием слоев со свойствами феррита и пьезоэлектрика, является достаточно актуальным как с точки зрения фундаментальных исследований, так и для практических применений в качестве конструктивных элементов разнообразных радиоэлектронных устройств.

Магнитоупругие и электродупругие сдвиговые волны в слоисто-периодических структурах рассматривались в [1-3]. Начало исследованиям магнитоэлектродупругих волн сдвига положено в работе [4], где было установлено существование волн, распространяющихся на границе пьезоэлектрического и магнитоупругих полупространств.

В данной работе предложен подход к построению дисперсионных уравнений для нормальных волн, распространяющихся в слоисто-периодических структурах феррит/пьезоэлектрик, и проведено аналитическое исследование процессов взаимодействия волн различной физической природы в таких структурах.

2. Постановка задачи и метод решения. Рассматривается распространение сдвиговых волн в слоистой структуре, отнесенной к декартовой системе координат $Oxuz$, которая образована периодическим N –кратным повторением пакета из двух слоев со свойствами пьезоэлектрика гексагональной симметрии и феррита кубической симметрии. Предполагается, что поверхности пакета металлизированы, при этом механические свойства поверхностей не учитываются, а принимается во внимание лишь их экранирующий эффект. Ось ox декартовой системы координат совмещена с соответствующими кристаллографическими осями феррита и пьезоэлектрика и перпендикулярна плоскостям раздела слоев, а плоскость ozu совпадает с границей первого слоя в пакете.

Предположим, что волна в исследуемом пространстве распространяется вдоль оси ou . Постоянное магнитное поле H_0 направлено вдоль оси oz , которая является и осью симметрии для пьезоэлектрика. Волновой процесс в слоях феррита и пьезоэлектрика описывается соответственно линеаризованными системами уравнений магнито – и электроупругости.

В безобменном и магнитостатическом приближениях распространение магнитоэлектроупругих волн сдвига для слоев со свойствами феррита кубической симметрии описывается уравнениями [3]

$$\rho_f \partial_t^2 u_f = c_{44,f}^* \Delta u_f, \Delta \psi_f = 0, \Delta \varphi_{f0} = 0, \quad (1)$$

а в слоях со свойствами пьезоэлектрика волновые уравнения будут иметь вид [2]

$$\rho_p \partial_t^2 u_p = c_{44,p}^* \Delta u_p, \Delta \psi_p = 0, \Delta \varphi_{p0} = 0. \quad (2)$$

В системах уравнений (1) и (2) приняты обозначения

$$c_{44,f}^* = c_{44,f} \left(1 + \frac{\gamma^2 b^2 H_0}{c_{44,f} M (\omega^2 - \omega_0^2)} \right), \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_H (\omega_H + \omega_M)}, \quad \omega_H = \gamma H_0,$$

$\omega_M = 4\pi\gamma M$, γ – гиромагнитная постоянная, M – намагниченность

насыщения феррита, $\psi_f = \varphi_f - \left(\frac{4\pi\gamma^2 b H_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) u_f$, b – магнитоупругая

постоянная, φ_f , φ_{f0} – магнитные потенциалы соответственно в

феррите и пьезоэлектрике, $c_{44,p}^* = c_{44,p} + \frac{e_{15,p}^2}{\varepsilon_{11,p}}$, $\psi_p = \varphi_p - \left(\frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,p}} \right) u_p$, φ_p , φ_{p0}

– электростатические потенциалы соответственно в пьезоэлектрике и феррите.

Решение системы уравнений (1)–(2) в каждом из слоев будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_f &= B_{f,n}^{(1)} \sin \Omega_f (x - x_{n,f}^*) + B_{f,n}^{(2)} \cos \Omega_f (x - x_{n,f}^*), \\ \psi_f &= A_{f,n}^{(1)} \operatorname{sh} k (x - x_{n,f}^*) + A_{f,n}^{(2)} \operatorname{ch} k (x - x_{n,f}^*), \\ \varphi_{p0} &= D_{f,n}^{(1)} \operatorname{sh} k (x - x_{n,f}^*) + D_{f,n}^{(2)} \operatorname{ch} k (x - x_{n,f}^*), \\ &\quad x_{n-1,p}^* < x < x_{n,f}^*; \\ u_p &= B_{p,n}^{(1)} \sin \Omega_p (x - x_{n,p}^*) + B_{p,n}^{(2)} \cos \Omega_p (x - x_{n,p}^*), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{f0} &= A_{p,n}^{(1)} \operatorname{shk}(x - x_{n,p}^*) + A_{p,n}^{(2)} \operatorname{chk}(x - x_{n,p}^*), \\ \psi_p &= D_{p,n}^{(1)} \operatorname{shk}(x - x_{n,p}^*) + D_{p,n}^{(2)} \operatorname{chk}(x - x_{n,p}^*), \\ x_{n-1,f}^* &< x < x_{n,p}^*,\end{aligned}$$

где $x_{n,f}^* = (n-1)h + h_f$, $x_{n,p}^* = nh$, $h = h_f + h_p$, $n = 1, \dots, N$, $x_{0,p}^* = 0$,

$$\Omega_f = (k_f^2 - k^2)^{1/2}, \quad \Omega_p = (k_p^2 - k^2)^{1/2}, \quad k_f^2 = \frac{\omega^2}{c_f^2}, \quad k_p^2 = \frac{\omega^2}{c_p^2}, \quad c_f^2 = \frac{c_{44,f}^*}{\rho_f}, \quad c_p^2 = \frac{c_{44,p}^*}{\rho_p}.$$

В формулах (3) множитель $\exp(i\delta ky - i\omega t)$ опущен. Величина $\delta = \pm 1$, что соответствует распространению волн в положительном и отрицательном направлении оси oy соответственно.

Будем предполагать, что на внутренних плоскостях раздела свойств пакета выполняются условия:

(граница феррит – пьезоэлектрик)

$$\begin{aligned}c_{44,f}^* \partial_x u_f + b^* \partial_x \psi_f &= c_{44,p}^* \partial_x u_p + b^* \partial_x \varphi_{f0} + e_{15,p} \partial_x \psi_p, \quad u_f = u_p, \\ \psi_f + C_0^{(4)} u_f &= \varphi_{f0}, \quad C_0^{(1)} \partial_x \psi_f + C_0^{(2)} \partial_y \psi_f + C_0^{(3)} \partial_y u_f = \partial_x \varphi_{f0}, \\ \varphi_{p0} &= \varphi_p, \quad \varepsilon_{11,f} \partial_x \varphi_{p0} = \varepsilon_{11,p} \partial_x \psi_p;\end{aligned} \quad (4)$$

(граница феррит – металл – пьезоэлектрик)

$$\begin{aligned}c_{44,f}^* \partial_x u_f + b^* \partial_x \psi_f &= c_{44,p}^* \partial_x u_p + e_{15,p} \partial_x \psi_p, \quad u_f = u_p, \\ C_0^{(1)} \partial_x \psi_f + C_0^{(2)} \partial_y \psi_f + C_0^{(3)} \partial_y u_f &= 0, \quad \varphi_{p0} = 0.\end{aligned} \quad (5)$$

На внешней свободной металлизированной поверхности феррита должны выполняться условия

$$c_{44,f}^* \partial_x u_f + b^* \partial_x \psi_f = 0, \quad C_0^{(1)} \partial_x \psi_f + C_0^{(2)} \partial_y \psi_f + C_0^{(3)} \partial_y u_f = 0, \quad \varphi_{p0} = 0, \quad (6)$$

а на внешней свободной металлизированной поверхности пьезоэлектрика условия

$$c_{44,p}^* \partial_x u_p + e_{15,p} \partial_x \psi_p = 0, \quad \partial_x \varphi_{f0} = 0, \quad \varphi_p = 0, \quad (7)$$

Коэффициенты $C_0^{(1)}$, $C_0^{(2)}$, $C_0^{(3)}$, $C_0^{(4)}$ введены в работе [3], а

$$b^* = \frac{b}{4\pi H_0}.$$

Подставляя решения (3) в условия (4)-(7) исходную задачу сведем к алгебраической системе $12N$ уравнений относительно неизвестных

$$\vec{A}_{p,i} = \operatorname{col}(A_{p,i}^{(1)}, A_{p,i}^{(2)}), \quad \vec{A}_{f,i} = \operatorname{col}(A_{f,i}^{(1)}, A_{f,i}^{(2)}), \quad \vec{B}_{p,i} = \operatorname{col}(B_{p,i}^{(1)}, B_{p,i}^{(2)}),$$

$$\bar{B}_{f,i} = \text{col}(B_{f,i}^{(1)}, B_{f,i}^{(2)}), \quad \bar{D}_{p,i} = \text{col}(D_{p,i}^{(1)}, D_{p,i}^{(2)}), \quad \bar{D}_{f,i} = \text{col}(D_{f,i}^{(1)}, D_{f,i}^{(2)}) \quad (i = 1, \dots, N).$$

Выполнив ряд преобразований неизвестные $\bar{A}_{p,i}$, $\bar{A}_{f,i}$, $\bar{D}_{p,i}$, $\bar{D}_{f,i}$ можно выразить через $\bar{B}_{p,i}$, $\bar{B}_{f,i}$ таким образом

$$\bar{A}_{f,i} = P_{mf} \bar{B}_{f,i}, \quad \bar{A}_{p,i} = P_{mp} \bar{B}_{p,i}, \quad \bar{D}_{p,i} = P_{ep} \bar{B}_{p,i}, \quad \bar{D}_{f,i} = P_{ef} \bar{B}_{f,i}. \quad (8)$$

Элементы матриц P_{mf} , P_{mp} , P_{ef} , P_{ep} имеют вид

$$P_{mf}^{11} = C^{(3)} \bar{C}^{(2)} \sin \theta_f, \quad P_{mf}^{12} = -C^{(3)} \bar{C}^{(2)} + \bar{C}^{(3)} L_2, \quad P_{mf}^{21} = -C^{(1)} C^{(3)} \sin \theta_f,$$

$$P_{mf}^{22} = C^{(3)} C^{(1)} \cos \theta_f - \bar{C}^{(3)} L_1, \quad P_{mp}^{11} = 0, \quad P_{mp}^{12} = 0, \quad P_{mp}^{21} = P_{mf}^{21} / ch \kappa_p,$$

$$P_{mp}^{22} = (P_{mf}^{22} + C^{(4)}) / ch \kappa_p, \quad P_{ep}^{11} = -\frac{e_{15,p}}{d_1 \varepsilon_{11,p}} \sin \theta_p, \quad (9)$$

$$P_{ep}^{12} = \frac{e_{15,p}}{d_1 \varepsilon_{11,p}} (\cos \theta_p - 1 - th \kappa_p), \quad P_{ep}^{21} = 0, \quad P_{ep}^{22} = -\frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,p}}, \quad P_{ef}^{11} = \frac{\varepsilon_{11,p}}{\varepsilon_{11,f}} ch \kappa_p P_{ep}^{11},$$

$$P_{ef}^{12} = \frac{\varepsilon_{11,p}}{\varepsilon_{11,f}} ch \kappa_p P_{ep}^{12} + \frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,f}}, \quad P_{ef}^{21} = th \kappa_f, \quad P_{ef}^{22} = 0,$$

где введены обозначения

$$\kappa_f = kh_f, \quad \kappa_p = kh_p, \quad \theta_f = \Omega_f h_f, \quad \theta_p = \Omega_p h_p, \quad C^{(1)} = kC_0^{(1)}, \quad C^{(2)} = i\delta C_0^{(2)},$$

$$C^{(3)} = i\delta C_0^{(3)}, \quad \bar{C}^{(2)} = C^{(2)} + kth \kappa_p, \quad \bar{C}^{(3)} = C^{(3)} + C^{(4)} kth \kappa_p,$$

$$L_1 = C^{(1)} ch \kappa_f - C^{(2)} sh \kappa_f, \quad L_2 = -C^{(1)} sh \kappa_f + C^{(2)} ch \kappa_f, \quad d_1 = th \kappa_p + \frac{\varepsilon_{11,p}}{\varepsilon_{11,f}} ch \kappa_p + sh \kappa_p$$

Тогда исходную задачу можно свести к системе $4N$ уравнений

$$\left(\bar{N}^{(1)}(a_f; \theta_f) + \frac{\bar{b}}{D} \bar{M}^{(1)}(\kappa_f) P_{mf} \right) \bar{B}_{f,1} = 0,$$

$$\left(N(a_f; 0) + \frac{\bar{b}}{D} M(0) P_{mf} \right) \bar{B}_{f,n} = \left(N(a_p; \theta_p) + \frac{\bar{b}}{D} M(\kappa_p) + ke_{15,p} M(\kappa_p) P_{ep} \right) \bar{B}_{p,n},$$

$$\left(N(a_f; \theta_f) + \frac{\bar{b}}{D} M(\kappa_f) P_{mf} \right) \bar{B}_{p,n+1} = \left(N(a_p; 0) + e_{15,p} k M(0) P_{ep} \right) \bar{B}_{p,n}, \quad (10)$$

$$\left(\bar{N}^{(1)}(a_p; 0) + e_{15,p} k M^{(1)}(0) P_{ep} \right) \bar{B}_{p,N} = 0,$$

где

$$N(a_f; \theta_f) = \begin{bmatrix} a_f \cos \theta_f & a_f \sin \theta_f \\ -\sin \theta_f & \cos \theta_f \end{bmatrix}, \quad N(a_p; \theta_p) = \begin{bmatrix} a_p \cos \theta_p & a_p \sin \theta_p \\ -\sin \theta_p & \cos \theta_p \end{bmatrix},$$

$$M(\kappa_f) = \begin{bmatrix} ch\kappa_f & -sh\kappa_f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = kb^*, \quad a_f = c_{44,f}^* \Omega_f, \quad a_p = c_{44,p}^* \Omega_p,$$

$$D = \left((C^{(1)})^2 - (C^{(2)})^2 \right) sh\kappa_f + k th\kappa_p \left(C^{(1)} ch\kappa_f - C^{(2)} sh\kappa_f \right),$$

а вектора-строки $\bar{N}^{(i)}$, $\bar{M}^{(i)}$ образованы i -й строкой соответствующей матрицы.

Из условия существования нетривиального решения системы (10) найдем дисперсионное уравнение для нормальных магнитоэлектрорупругих волн сдвига

$$(P^N)^{12} = 0, \quad (11)$$

где P^N – N -я степень матрицы P вида

$$P = \left(N(a_f; \theta_f) + \frac{\bar{b}}{D} M(\kappa_f) P_{mf} \right) \left(N(a_f; 0) + \frac{\bar{b}}{D} M(0) P_{mf} + \frac{\bar{b}}{D} M(\kappa_p) P_{mp} \right)^{-1} \times \\ \times \left(N(a_p; \theta_p) + k e_{15,p} M(\kappa_p) P_{ep} \right) \left(N(a_p; 0) + k e_{15,p} M(0) P_{ep} \right)^{-1}.$$

3. Анализ дисперсионного уравнения. При $b = 0$ дисперсионное уравнение (11) распадается на дисперсионное уравнение для магнитостатических волн

$$D = 0 \quad (12)$$

и дисперсионное уравнение для электрорупругих волн сдвига. Дисперсионные кривые, которые описываются решением (12), имеют невзаимные характеристики, а значит и распространение связанных магнитоэлектрорупругих волн будет невзаимным.

Детерминант передаточной матрицы P определяется как

$$D_E = \frac{Da_f + C^{(3)}(C^{(2)} + k th\kappa_f) \bar{b} \sin \theta_f}{Da_f + (C^{(3)}(C^{(2)} + k th\kappa_f) - C^{(1)} C^{(3)} k th\kappa_f) \bar{b} \sin \theta_f}. \quad (13)$$

Анализ выражения (13) показывает, что D_E не значительно отличается от единицы во всем диапазоне частот, за исключением диапазонов частот, где $D \rightarrow 0$, $a_f \rightarrow 0$ или областей частот близких к ω_0 . В окрестности этих частот отклонение D_E от единицы может быть значительным, и локализация дисперсионных кривых относительно зон пропускания по сравнению с чисто упругим случаем [5] изменится качественно.

Остановимся более подробно на предельном случае, когда толщина пьезоэлектрического слоя стремится к нулю. Нетрудно

показать, что при $h_p = 0$ будет выполняться $D_E = 0$, а дисперсионное уравнение (11) сведется к виду

$$P_f^{12} = 0,$$

$$\text{где} \quad P_f = \left(N(a_f; \theta_f) + \frac{\bar{b}}{D} M(\kappa_f) P_{mf} \right) \left(N(a_f; 0) + \frac{\bar{b}}{D} M(0) P_{mf} \right)^{-1} -$$

передаточная матрица для слоя феррита. В чисто упругом случае мы имеем дисперсионное уравнение $\sin(\theta_f N) = 0$ [5]. Для магнитоупругого случая спектр дисперсионных кривых будет локализован в окрестности решения уравнения $\sin \theta_f = 0$, а количество расщеплений дисперсионной кривой будет пропорционально количеству порождающих пакетов.

Заключение. Таким образом, в работе предложен подход к построению дисперсионных уравнений для нормальных магнитоэлектроупругих волн сдвига, распространяющихся в слоисто-периодической структуре феррит/пьезоэлектрик, проведен анализ полученного дисперсионного уравнения, выполнено сравнение с чисто упругим случаем и выявлены особенности влияния магнитных свойств феррита на дисперсионные характеристики рассматриваемого типа волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. van de Vaart. Magnetoelastic Love-Wave propagation in metal-coated layered substrates //Journal of Applied physics. –1971, V. 48, N. 3. – P. 5305 –5312.
2. Зинчук Л.П., Подлипенец А.Н., Шульга Н.А. О построении дисперсионных уравнений для электроупругих сдвиговых волн в слоисто-периодических средах //Прикл. механика. –1990. – 26, № 11.– С.84–93.
3. Левченко В.В. Магнитоупругие объемные волны сдвига в регулярно-слоистых феррит-диэлектрических структурах // Прикл. механика. - 1990. –26, №2. –С. 36–41.
4. Tsutsumi, M., Bhattacharyya, T., Kumagai, N. Piezoelectric-magnetoelastic wave guided by interface between semi-infinite piezoelectric and magnetoelastic media //Journal of Applied Physics. – 1975. – V.46, No. 12.–P. 5072 –5075.
5. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.

Получено 15.06.2007 г.

УДК 539.3

В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш, Э.А. Штанцель

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ БАЛОК В РАМКАХ ПРИКЛАДНЫХ ТЕОРИЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

Неоднородные по толщине балки являются распространенными конструктивными элементами в несущих конструкциях. Существует ряд подходов построения математических моделей неоднородных по толщине балок (в данном случае трехслойных балок). Среди них основное место занимают теории, которые построены на использовании единых гипотез для всего пакета слоев в целом. Такой подход правомочен в случае незначительной разницы физико – механических параметров слоев. При значительном отличии физико – механических параметров более целесообразно принять теорию балок с использованием независимых гипотез к каждому из слоев. Численный анализ динамического поведения трехслойных балок с применением указанных теорий показывает, что в ряде случаев наблюдается значительное различие параметров напряженно – деформированного состояния по различным теориям. Этот факт вызывает необходимость проведения детального исследования напряженно – деформированного состояния трехслойных балок, проведения сравнительного анализа параметров напряженно– деформированного состояния и оценки достоверности полученных результатов.

В данной работе проводится численный анализ напряженно– деформированного состояния трехслойных балок согласно теории применения единых гипотез ко всему пакету слоев в рамках классической модели, модели с учетом деформаций поперечного сдвига и инерции вращения нормального элемента (балка Тимошенко) и модели трехслойных балок с применением гипотез к каждому слою при нестационарных нагрузках. В частном случае, исходя из полученных результатов, проводится косвенное сравнение с известными аналитическими и экспериментальными данными.

§1. Модель трехслойных балок с применением гипотез к каждому слою Трехслойная балка состоит из внешних ортотропных

слоев (обшивки) и внутреннего изотропного слоя (заполнитель). Все слои балки имеют постоянную толщину h_k ($k = \overline{1,3}$) и деформируются без проскальзывания и отрыва. Балка отнесена к ортогональной системе координат x, y, z , в которой срединные поверхности слоев являются координатными поверхностями $z = \text{const}$. Балка изгибается в плоскости xz . Кроме того, для каждого слоя вводятся локальные системы координат, которые являются следствием параллельного переноса указанной системы вдоль оси z .

При выводе уравнений динамического деформирования трехслойной балки будем исходить из положений, которые аналогичны при построении теории трехслойных оболочек [6].

В качестве независимых искомых функций принимаем компоненты вектора перемещения на поверхностях слоев $\bar{U} = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x), w_1(x), w_3(x))^T$.

Для вывода уравнений колебаний вариационный принцип Рейсснера для динамических процессов, согласно которому

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(R - T) - \delta A] dt = 0, \quad (1.1)$$

где A – работа внешних сил, R – функционал Рейсснера, T – кинетическая энергия упругой структуры.

Из вариационного уравнения (1.6) следуют уравнения колебаний трехслойной балки относительно независимых функций перемещений на поверхности слоев $u_1, u_2, u_3, u_4, w_1, w_3$

$$\begin{aligned} L_{3m+1}(\bar{U}) &= \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{2m+1} + u_{2m+2}}{2} \right) + \\ &+ (-1)^{m+1} \frac{\rho_{2m+1} h_{2m+1}^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{2m+2} - u_{2m+1}}{h_{2m+1}} \right) \quad (m = 0; 1); \\ L_{m+2}(\bar{U}) &= \frac{\rho_{m+1} h_{m+1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_m + u_{m+1}}{2} \right) + (-1)^m \frac{\rho_m h_m^2}{12} \times \\ &\times \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{m+1} - u_m}{h_m} \right) + (-1)^{m+1} \frac{\rho_{m+1} h_{m+1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{m+2} + u_{m+1}}{2} \right) + \\ &+ \frac{\rho_{m+1} h_{m+1}^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{m+2} - u_{m+1}}{h_{m+1}} \right) \quad (m = 1; 2); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$L_{m+5}(\bar{U}) = \rho_{2m+1} h_{2m+1} \frac{\partial^2 w_{2m+1}}{\partial t^2} + \frac{\rho_2 h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{w_1 + w_3}{2} \right) + \\ + (-1)^{m+1} \frac{\rho_2 h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{w_3 - w_1}{h_2} \right) \quad (m = 0; 1),$$

где операторы $L_m(\bar{U})$, $m = \overline{1, 6}$ имеют следующий вид:

$$L_{3m+1}(\bar{U}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (T_{11}^{2m+1}) \right] - (-1)^m \frac{1}{h_{2m+1}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (M_{11}^{2m+1}) \right] + \\ + (-1)^m \frac{1}{h_{2m+1}} T_{13}^{2m+1}, \quad (m = 0; 1);$$

$$L_{m+1}(\bar{U}) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} (T_{11}^m) + \frac{\partial}{\partial x} (T_{11}^{m+1}) + \frac{1}{h_m} \left[\frac{\partial}{\partial x} (M_{11}^m) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{h_{m+1}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (M_{11}^{m+1}) \right] - \frac{1}{h_{m+1}} T_{13}^m + \frac{1}{h_{m+1}} T_{13}^{m+1} \right], \quad (m = 1; 2); \\ L_{m+5}(\bar{U}) = \frac{\partial}{\partial x} (\bar{T}_{13}^{2m+1}) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{T}_{13}^2) + (-1)^m \frac{1}{h_2} T_{33}^2, \quad (m = 0; 1);$$

$$\bar{T}_{13}^i = T_{13}^i + T_{11}^i \theta_1^i, \quad (i = \overline{1, 3}).$$

Интегральные характеристики напряжений для каждого слоя задаются согласно формулам $(T_{11}^k, T_{13}^k, T_{33}^2) = \int_z (\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}, \sigma_{33}^2) dz$;

$$M_{11}^k = \int_z z^k \sigma_{11}^{kz} dz, \quad k = \overline{1, 3}; \quad z \in [-h/2, h/2].$$

Уравнения (1.2) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

§ 2. Численный метод решения задач. Численный алгоритм основывается на конечно – разностной аппроксимации уравнений колебаний. Используя явную схему «крест», компоненты обобщенного вектора перемещений аппроксимируем в целых точках разностной сетки, а компоненты обобщенного тензора деформаций и усилий в полуцелых точках сетки. Такой подход позволяет сохранить дивергентную форму разностного представления дифференциальных уравнений, а также и выполнение закона сохранения полной механической энергии на разностном уровне [6].

§ 3. Численные расчеты. Были проведены численные расчеты и сравнительный анализ результатов решения динамических задач нестационарного поведения трехслойных балок в рамках прикладных

теорий – классической теории трехслойных балок, балок типа С.П. Тимошенко при принятии единых гипотез ко всему пакету в целом и теории с использованием независимых гипотез к каждому из слоев в широком диапазоне изменения физико–механических и геометрических параметров при разных видах граничных условий и типов нагружения.

Численные расчеты проводились при следующих геометрических параметрах $h_2/h_1 = 2 \div 9$; $h = h_1 + h_2 + h_3$; $R/h = 10 \div 30$; $L/R = 4$. Физико – механические параметры обшивок с толщинами h_1 и h_3 задавались следующими $E_1^1 = E_2^1 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $E_1^3 = E_1^1$; $\nu_1^1 = \nu_1^3 = 0,33$; $\rho_1 = \rho_3 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³. Физико – механические параметры заполнителя изменялись в пределах $E_{\text{фл}} = E_1^1/10 \div E_1^1/1000$.

Нагрузка задавалась в виде $P_3(t) = A \cdot \sin \frac{\pi \cdot t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)]$, где T – время нагружения, A – амплитуда нагружения, $\eta(t)$ – функция Хевисайда.

Исходя из сравнительного анализа динамического поведения трехслойных балок можно сделать выводы, что при $E_1/E_{\text{фл}} = 10$ величины напряженно–деформированного состояния практически не отличаются как по качественному характеру поведения, так и по количественному. В случае $E_1/E_{\text{фл}} = 100$, картина распределения величин напряженно–деформированного состояния согласно приведенных теорий качественно начинает отличаться. Согласно теории с использованием гипотез к каждому слою, величинам прогибов U_3 характерно более густое волнообразование по сравнению с теорией неоднородных по толщине балок. Разница по максимальным амплитудам прогибов при этом достигает порядка 5%. В случае $E_1/E_{\text{фл}} = 500$ разница величин по максимальным амплитудам достигает порядка 10 – 15%. Увеличение соотношения $E_1/E_{\text{фл}}$ приводит к значительному качественному расхождению величин напряженно – деформированного состояния (процесс волнообразования) и количественной разнице по максимальным величинам. Исходя из сравнительного анализа расчетов согласно теорий с использованием независимых гипотез к каждому слою,

классической теории балок и балок типа С.П. Тимошенко можно сделать вывод, что для всех задач, которые рассматривались для случая $E_1/E_{\text{fil}} = 1000$ характерно, что различие по максимальным величинам прогибов в обшивках и заполнителе при заданных нестационарных нагружениях достигает порядка 15–30%, причем большие прогибы, а также более густое волнообразование наблюдается для теории с использованием независимых гипотез для каждого слоя. Как уже отмечалось, при уменьшении отношения величин E_1/E_{fil} указанная разница уменьшается и при значении $E_1/E_{\text{fil}} = 50$ соответствующие величины отличаются не более чем в 1,1–1,2 раза. Анализ величин деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ в срединной поверхности заполнителя показывает, что величина ε_{33} значительно превышает над соответствующей величиной ε_{11} .

§ 4. Сравнение с экспериментом. Значительное расхождение результатов расчетов согласно теориям с использованием независимых гипотез к каждому слою и классической теории балок и балок типа С.П. Тимошенко вызывает необходимость проведения тестовых расчетов. Исходя из этого было проведено косвенное сравнение численных результатов расчетов согласно указанных прикладных теорий трехслойных балок с известными экспериментальными и аналитическими данными решения соответствующих задач. Косвенный анализ проводился исходя из следующих предположений. Рассматривались известные аналитические решения задач и экспериментальные данные по теории трехслойных балок. При заданных геометрических и физико-механических параметрах проводились расчеты по динамическому поведению трехслойных балок согласно вышеуказанных волновых уравнений (теория балок с использованием независимых гипотез к каждому слою, классическая теория балок, теория балок типа С.П. Тимошенко) при действии внезапно приложенного распределенного нормального нагружения вида

$$P_3(x, t) = A f_1(x) f_2(t)$$

где A – амплитуда нагрузки; $f_2(t)$ – функция, которая отвечает за изменение нагружения во времени; $f_1(x)$ – функция, которая соответствует форме нагружения по пространственной координате x .

Полученные кинематические и силовые параметры сравнивались с данными решения соответствующих задач статики через динамический коэффициент K_d . В работе [4] приведены значения коэффициента динамичности для случая шарнирно-опертой балки при действии нагрузки $P_3(x, t)$ и вида функции $f_2(t) = (1 - t/T) \cdot \eta(t - T)$, где T – длительность нагружения, $\eta(t)$ – функция Хевисайда. Согласно [4] показано, что при величине $\omega T \geq 100$, коэффициент динамичности $K_d = 2$, где ω – круговая частота колебаний балки при заданной функции прогиба. При расчетах при действии внезапно приложенной нагрузки для случая $f(t) = \eta(t)$, как предельный случай, полагаем коэффициент динамичности $K_d = 2$.

В табл. 1, 2 приведены результаты расчетов и сравнительный анализ согласно экспериментальных данных и теоретических расчетов согласно прикладных теорий трехслойных балок (как частный случай теории трехслойных оболочек с использованием независимых гипотез к каждому слою и теории неоднородных по толщине оболочек Кирхгофа – Лява и типа С.П. Тимошенко)

Таблица 1

Вариант расчетов	$U_3 \cdot 10^{-2}, \text{м}$	$\Delta, \%$
эксперимент	0,153	
аналитическое решения	0,160	4,68
теория согласно независимых гипотез	0,1432	6,4
теория типа Тимошенко	0,168	9,8
теория Кирхгофа – Лява	0,1155	24,5

Таблица 2

Вариант расчета	$U_3 \cdot 10^{-2}, \text{м}$	$\Delta, \%$
эксперимент	0,348	
аналитическое решение	0,363	4,13
теория согласно независимых гипотез	0,354	1,7
теория типа Тимошенко	0,1995	42,7
теория Кирхгофа – Лява	0,1902	45,3

Результаты табл. 1 соответствуют варианту расчетов шарнирно-опертой балки при действии распределенной нагрузки $P_3 = Af(x)\eta(t)$, где $f(x) = \sin(\pi x/L)$, где L – длина балки. Результаты эксперимента и аналитического решения приведены согласно работ [2,3]. Рассматривалась трехслойная балка с обшивками, изготовленными из материала типа сплав Д16-Т, и заполнителем типа пенопласт. Геометрические и физико-механические параметры балки полагались следующими: толщина обшивки $\delta_1 = 0,7 \cdot 10^{-3}$ м; заполнителя $\delta_2 = 0,37 \cdot 10^{-2}$ м; $E_{обш} = 7,03 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu = 0,33$; $E_{обш}/E_{зап} = 471$; $A = 0,0996 \cdot 10^5$ Па; $L = 0,28$ м.

В табл. 1 в первой строке приведены результаты согласно эксперимента [1] для значений прогиба U_3 на внешней поверхности балки при $x = L/2$. Вторая строка отвечает результатам аналитического решения [3]. Третья строка отвечает расчетам, которые представлены согласно теории независимых аппроксимаций. Четвертая строка – теории трехслойных балок типа Тимошенко (пакет), пятая – классической теории балок (пакет). Второй столбец в таблице отвечает относительной погрешности Δ , которая вычисляется по формуле

$$\Delta = \left| \frac{w_T - w_*}{w_T} \right| \cdot 100\%,$$

где w_m – значение согласно эксперимента, w_* – соответствующие значения согласно другим расчетам.

В табл. 2 приведено сравнение величин прогиба согласно эксперимента [1]. Рассматривался случай шарнирно опертой балки при нагружении $P_3 = Af(x)\eta(t)$. Геометрические и физико-механические параметры балки полагались следующими: $L/h = 10$; $\delta_1/\delta_2 = 0,5$; $h = 2\delta_1 + \delta_2$; $E_{обш} = 2,02 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu_{обш} = 0,3$; $E_{зап} = 0,394 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_{зап} = 0,35$; $A = 5 \cdot 10^5$ Па. Обозначения величин в табл. 2 аналогичны обозначениям табл. 1. Как следует с приведенных результатов, расчеты согласно теории независимых аппроксимаций наиболее удовлетворительно согласуются с соответствующими экспериментальными и аналитическими

решениями, что косвенно подтверждает достоверность полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Я., Брюкер Л.Э., Куршин и др. Расчет трехслойных панелей. – М.: Оборонгиз, 1960. – 271с.
2. Остерник Э.С. Экспериментальное исследование деформации нормали и способа осуществления краевых условий у слоистых пластин // Тр. VIII Всесоюз. конфер. по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1973. – 797с.
3. Пикуль В.В. Общая техническая теория тонких упругих пластин и пологих оболочек. – М.: Наука, 1977. – 152 с.
4. Попов Н.Н., Расторгуев Б.С., Забегаев А.С. Расчет конструкций на динамические нагрузки. – М.: Высш. шк., 1992. – 319 с.
5. Шульга Н.А., Мейш В.Ф., Хамренко Ю.А. Нестационарные колебания трехслойных цилиндрических оболочек при осесимметричном нагружении // Прикл. механика. – 1999. – 35, N 8. – С. 3–9.

Получено 15.06.2007 г.

УДК 539.3

И.Ю.Бабич, Н.П.Семенюк, Н.Б.Жукова

**ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА
УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ ИЛИ ВНЕШНЕМ
ДАВЛЕНИИ**

Рассматривается устойчивость продольно гофрированных композитных цилиндрических оболочек при внешнем давлении и осевом сжатии. Поперечное сечение оболочки образовано опертыми на исходную окружность радиуса R_0 цилиндрическими панелями радиуса r , охватывающими одинаковый центральный угол γ_0 . Основная окружность радиуса R_0 разделена на N равных частей, каждой из которых отвечает центральный угол φ_0 . Радиус r окружности гофра может быть как меньше, так и больше радиуса R_0 . При $r \gg R_0$ получим цилиндрическую оболочку, состоящую из почти плоских панелей (складчатую). Так как радиус r при увеличении количества волн N уменьшается, то важно исследовать влияние пониженной сдвиговой жесткости компонентов на критические нагрузки. Для решения поставленной задачи используется теория ортотропных оболочек типа Тимошенко [1].

Полагаем, что материал оболочки обладает свойствами армированного волокнами композита. Отдельные слои его уложены таким образом, что в целом материал является ортотропным, симметричным относительно срединной поверхности. При этом направления осей ортотропии совпадают с направлениями осей координат оболочки.

Примем, что оболочка нагружена равномерным внешним давлением интенсивностью q либо сжимается равномерно распределенными по торцевому сечению осевыми усилиями $T_{11,S}^0$. Из уравнений безмоментной теории оболочек в этом случае вытекает [2], что докритическое состояние оболочки характеризуется усилиями - T_{11}^0 , S^0 , T_{22}^0 , для которых получены формулы:

$$T_{11}^0 = -\frac{1}{2}q \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial R_2}{\partial \varphi} \right) x(x-L), \quad S^0 = q \frac{1}{A_2} \frac{\partial R_2}{\partial \varphi} \left(x - \frac{L}{2} \right), \quad T_{22}^0 = -\lambda_q R_2 \quad - \text{ для}$$

внешнего давления или $T_{11}^0 = T_{11,S}^0$, $S^0 = 0$, $T_{22}^0 = 0$ - для осевого сжатия.

Устойчивость этого состояния будем исследовать с помощью вариационного уравнения нейтрального равновесия:

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} [T_{11} \delta \varepsilon_1 + T_{22} \delta \varepsilon_2 + T_{12} \delta \omega_1 + T_{21} \delta \omega_2 + T_{13} \delta \varepsilon_{13} + T_{23} \delta \varepsilon_{23} + M_{11} \delta k_1 + \\ + M_{22} \delta k_2 + M_{12} \delta t_1 + M_{21} \delta t_2 + \\ + T_{11}^0 (\varepsilon_1 \delta \varepsilon_1 + \omega_1 \delta \omega_1 + \theta_1 \delta \theta_1) + S^0 (\theta_1 \delta \theta_2 + \theta_2 \delta \theta_1) + T_{22}^0 (\varepsilon_2 \delta \varepsilon_2 + \omega_2 \delta \omega_2 + \theta_2 \delta \theta)] dx d\varphi = 0$$

При решении задачи используются безразмерные величины:

$$\xi = \frac{x}{R_0}, \quad a_2 = \frac{A_2}{R_0}, \quad p_2 = \frac{R_2}{R_0}, \quad v_2 = \frac{C_{12}}{C_{11}}, \quad \alpha_6 = \frac{C_{66}}{C_{11}}, \quad \alpha_2 = \frac{C_{22}}{C_{11}}, \quad \alpha_4 = \frac{C_{44}}{C_{11}}, \\ \alpha_5 = \frac{C_{55}}{C_{11}}, \quad \gamma_{12} = \frac{D_{12}}{C_{11} R_0^2}, \quad \gamma_{22} = \frac{D_{22}}{C_{11} R_0^2}, \quad \gamma_{66} = \frac{D_{66}}{C_{11} R_0^2}, \quad \lambda_q = \frac{q R_0}{C_{11}}, \quad \lambda_s = \frac{T_{11}^0}{C_{11}}.$$

Перемещения отнесем к радиусу. Выразив все входящие в (1) величины через перемещения, указанное вариационное уравнение запишем в таком виде:

$$\delta \Pi_1 - \lambda \delta \Pi_2 = 0, \quad (2)$$

где λ может принимать значения λ_q или λ_s и

$$\Pi_1 = \sum_{i,j=1}^5 \iint L_{ij}(\xi, \varphi) a_2 d\xi d\varphi, \\ \Pi_2 = \frac{1}{2} \lambda \iint \left\{ \frac{1}{2} \omega_{13} \xi \left(\xi - \frac{L}{R_0} \right) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right] - \right. \\ \left. \left(\xi - \frac{L}{R_0} \right) \frac{\partial w}{\partial \xi} \left(\omega_{14} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \omega_{12} v \right) + \right. \\ \left. + \omega_{11} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \omega_2 (v^2 + w^2) + 2v \frac{\partial w}{\partial \varphi} - 2w \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right\} d\xi d\varphi,$$

Дифференциальные операторы $L_{i,j}(\xi, \varphi)$ выражаются через перемещения u, v, w и углы поворота θ, ψ [3]. Они содержат в качестве коэффициентов периодически изменяющиеся по окружной координате геометрические параметры ω_i , которые являются четными или нечетными с наименьшим периодом $2\pi/N$. Аппроксимируем четные функции отрезком ряда Фурье:

$$\omega_i = \lambda_{0,i} + \sum_{r=1}^p \lambda_{r,i} \cos rN\varphi.$$

Значения функций ω_i зададим в M точках (M - нечетное число). Ввиду ортогональности функций $\cos rN\varphi$ на дискретном множестве точек, коэффициенты $\lambda_{r,i}$ вычисляются по формулам:

$$\lambda_{o,i} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \omega_i(\varphi_k), \quad \lambda_{r,i} = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \omega_i(\varphi_k) \cos rN\varphi_k,$$

где $\varphi_k = k \frac{2\pi}{NM}$. Нечетные функции ω_{12} и ω_{14} в рядах Фурье содержат синусы.

Удовлетворяя граничным условиям шарнирного опирания, а также условиям периодичности по окружной координате, перемещения представим в виде тригонометрических рядов [3].

Проведены расчеты боропластиковых оболочек, состоящих из различного количества панелей при постоянном радиусе r и переменном R_0 и, наоборот, при переменном r и постоянном R_0 . Варьировалась также длина оболочек при постоянной толщине.

Установлено, что короткие и средней длины оболочки, состоящие из цилиндрических секций меньшего, чем основная оболочка, радиуса могут обладать высокими показателями устойчивости не только при осевом сжатии, но и при внешнем давлении (Рис.1). При вогнутости панелей в противоположном по отношению к основной оболочке направлении оболочки теряют устойчивость от воздействия внутреннего давления. Показано, что при увеличении количества гофров весьма существенно влияет на величину критической нагрузки пониженная сдвиговая жесткость композита (Рис.2). Значительно сужается область геометрических параметров, при которых оболочка с гофрами имеет более высокие критические нагрузки, чем круглые оболочки среднего радиуса.

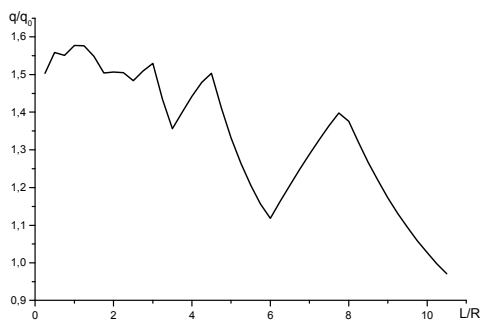


Рисунок 1

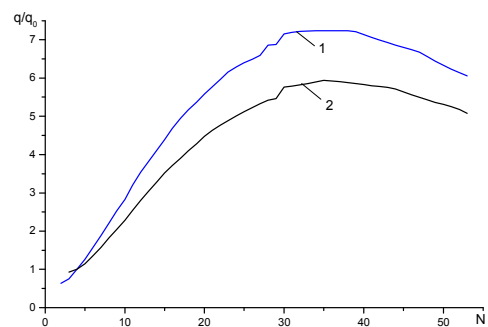


Рисунок 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Ванин Г.А., Семенюк Н.П. Устойчивость оболочек из композиционных материалов с несовершенствами. -К.: Наук. думка, 1987. – 200 с.
2. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз. – 1962.- 431с.
3. Semenyuk N.P., Zhukova N.B., Neshodovskaya N.A.. Stability of orthotropic corrugated cylindrical shells under axial compression // Mechanics of Composite Materials. – 2002. – 38, N 3. – P.243 – 252.

Получено 15.06.2007 г.

ДО ТЕОРІЇ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ НЕОСЕСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ПЛАСТИН З ТОВЩИННОЮ ПОЛЯРИЗАЦІЄЮ

Важливість досліджень гармонічних коливань тонкостінних п'єзоелектричних тіл обумовлена поширеністю таких режимів функціонування перетворювачів енергії, застосуванням частотних методів визначення фізико-механічних властивостей матеріалів та ін. [1, 3].

Тонку п'єзокерамічну пластину товщиною h віднесемо до прямокутних декартових координат x, y, z , причому координатна площина $z=0$ співпадає з серединною площиною пластини. При товщинній поляризації скористаємося матеріальними залежностями у формі [1, 3]

$$\begin{aligned} e_x &= s_{11}^E \sigma_x + s_{12}^E \sigma_y + s_{13}^E \sigma_z + d_{13} E_z, \\ e_y &= s_{12}^E \sigma_x + s_{11}^E \sigma_y + s_{13}^E \sigma_z + d_{13} E_z, \\ e_z &= s_{13}^E (\sigma_x + \sigma_y) + s_{33}^E \sigma_z + d_{33} E_z, \\ \gamma_{yx} &= s_{66}^E \tau_{yx}, \quad D_z = \varepsilon_{33}^T E_z + d_{13} (\sigma_x + \sigma_y) + d_{33} \sigma_z, \\ \gamma_{yz} &= s_{55}^E \tau_{yz} + d_{15} E_y, \quad D_y = \varepsilon_{11}^T E_y + d_{15} \tau_{yz}, \\ \gamma_{xz} &= s_{55}^E \tau_{xz} + d_{15} E_x, \quad D_x = \varepsilon_{11}^T E_x + d_{15} \tau_{xz}, \end{aligned} \quad (1)$$

причому $s_{66}^E = 2(s_{11}^E - s_{12}^E)$.

Якщо тонка п'єзокерамічна пластина з електродованими лицевими площинами знаходиться в умовах плоского напруженого стану, то, прийнявши гіпотези $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$, $E_z = E_z(x, y, t)$, із загальних матеріальних співвідношень (1) одержимо [1, 3] формули

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - (1 + \nu) d_{31} E_z \right), \\ \sigma_y &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu^2)} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - (1 + \nu) d_{31} E_z \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2(1 + \nu) s_{11}^E} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Аналог коефіцієнту Пуассона $\nu = -s_{12}^E / s_{11}^E$.

З трьох рівнянь коливань при нехтуванні товщиним пришвидженням залишаються тільки два

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (3)$$

З формул (2), (3) одержимо рівняння коливань в переміщеннях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-v}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - (1+v) d_{31} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= (1-v^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-v}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - (1+v) d_{31} \frac{\partial E_z}{\partial y} &= (1-v^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

При неелектродованих лицевих площинах пластини для п'єзокераміки, як сильного діелектрика, електричні граничні умови при $z = \pm h/2$ записуються [1, 3] у вигляді $D_z(x, y, z = \pm h/2, t) = 0$. Оскільки пластина тонка, то можна прийняти $D_z = 0$ по всьому об'єму пластини. Нехтуючи σ_z в порівнянні з σ_x , σ_y , визначивши з п'ятого рівняння (1) $E_z = -(\sigma_x + \sigma_y) d_{13} / \varepsilon_{33}^T$ і підставивши це значення E_z в перші два рівняння (1), одержимо

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{s_{11}^D (1-v^2)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_y &= \frac{1}{s_{11}^D (1-v^2)} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2(1+v) s_{11}^D} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

В цих формулах використовуються матеріальні сталі

$$s_{11}^D = s_{11}^E - d_{31}^2 / \varepsilon_{33}^T, \quad s_{12}^D = s_{12}^E - d_{31}^2 / \varepsilon_{33}^T, \quad v = -s_{12}^D / s_{11}^D. \quad (6)$$

Підставляючи (5) в (3), одержимо рівняння коливань в переміщеннях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-v}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) &= (1-v^2) s_{11}^D \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-v}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) &= (1-v^2) s_{11}^D \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

які тільки доданком $(1+v) d_{31} \frac{\partial E_z}{\partial x}$, $(1+v) d_{31} \frac{\partial E_z}{\partial y}$ відрізняються від рівнянь (4).

Розв'язок систем (4) або (7) представимо [2] у вигляді

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (8)$$

У випадку електродованих площин $z = \pm h/2$ функції $\Phi(x, y, t)$, $\Psi(x, y, t)$ визначаються з хвильових рівнянь

$$\Delta\Phi - (1+\nu)d_{31}E_z = (1-\nu^2)s_{11}^D\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad \Delta\Psi = 2(1+\nu)s_{11}^D\rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}, \quad (9)$$

а у випадку неелектродованих площин $z = \pm h/2$ функції $\Phi(x, y, t)$, $\Psi(x, y, t)$ визначаються з хвильових рівнянь

$$\Delta\Phi = (1-\nu^2)s_{11}^D\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \quad \Delta\Psi = 2(1+\nu)s_{11}^D\rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}. \quad (10)$$

В рівняннях (9) і (10) оператор Δ є оператором Лапласа.

В полярних координатах $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ вирази (8) для переміщень будуть такими

$$u_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial\Psi}{\partial r}. \quad (11)$$

Користуючись формулами [1, 3] для деформацій

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = r\frac{\partial}{\partial r}\frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} \quad (12)$$

і напружень

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{(1-\nu^2)s_{11}^E}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) - \frac{d_{31}}{(1-\nu)s_{11}^E}E_z, \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{(1-\nu^2)s_{11}^E}(\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) - \frac{d_{31}}{(1-\nu)s_{11}^E}E_z, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2(1+\nu)s_{11}^E}\gamma_{r\theta}, \end{aligned} \quad (13)$$

одержимо вирази для напружень через потенціали Φ, Ψ в полярних координатах

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{(1-\nu^2)s_{11}^E} \left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) \right) + \nu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) \right) \right] - \frac{d_{31}}{(1-\nu)s_{11}^E}E_z, \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{(1-\nu^2)s_{11}^E} \left[\nu \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) \right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) \right) \right] - \frac{d_{31}}{(1-\nu)s_{11}^E}E_z \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2(1+\nu)s_{11}^E} \left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Розглянемо кругле п'єзокерамічне кільце радіусу R_1 з отвором радіусу R_0 . Електродне покриття на лицевих площинах $z = \pm h/2$ розбите на $2N$ секторів з протифазними сусідніми підключеннями, так що $E_z = (-1)^{n-1}V_0/2h$, $n=1, \dots, 2N$. Розв'язок рівнянь (9) в полярних координатах r, θ , в першому з яких доданок $(1+\nu)d_{31}E_z$ треба брати

рівним нулеві [3], при гармонічних коливаннях вибираємо у вигляді рядів

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta, t) &= R^2 \operatorname{Re} \sum_m \{A_{m1} J_m(k_1 r) + A_{m2} N_m(k_1 r)\} \sin m\theta \exp(-i\omega t), \\ \Psi(r, \theta, t) &= R^2 \operatorname{Re} \sum_m \{A_{m3} J_m(k_2 r) + A_{m4} N_m(k_2 r)\} \cos m\theta \exp(-i\omega t).\end{aligned}\quad (15)$$

Тут $J_m(k_j r)$ та $N_m(k_j r)$ – циліндричні функції першого та другого роду, $k_1^2 = (1 - \nu^2) s_{11}^E \rho \omega^2$, $k_2^2 = 2(1 + \nu) s_{11}^E \rho \omega^2$, ω – циклічна частота коливань. З формул (15) і (14) знаходимо механічні напруження

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, \theta, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_m (a_{m1}(k_1 r) A_{m1} + a_{m2}(k_1 r) A_{m2} + a_{m3}(k_2 r) A_{m3} + a_{m4}(k_2 r) A_{m4}) \sin m\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2V_0 d_{31}}{\pi(1 - \nu) s_{11}^E} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin N(2n+1)\theta}{2n+1} \right\} e^{-i\omega t}, \\ \sigma_\theta(r, \theta, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_m (b_{m1}(k_1 r) A_{m1} + b_{m2}(k_1 r) A_{m2} + b_{m3}(k_2 r) A_{m3} + b_{m4}(k_2 r) A_{m4}) \sin m\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2V_0 d_{31}}{\pi(1 - \nu) s_{11}^E} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin N(2n+1)\theta}{2n+1} \right\} e^{-i\omega t}, \\ \tau_{r\theta}(r, \theta, t) &= \operatorname{Re} \sum_m (c_{m1}(k_1 r) A_{m1} + c_{m2}(k_1 r) A_{m2} + c_{m3}(k_2 r) A_{m3} + c_{m4}(k_2 r) A_{m4}) \cos m\theta e^{-i\omega t}.\end{aligned}\quad (16)$$

Користуючись граничними умовами

$$\sigma_r(R_j, \theta, t) = 0, \quad \tau_{r\theta}(R_j, \theta, t) = 0, \quad j = 0, 1, \quad (17)$$

одержимо блочні системи алгебраїчних рівнянь для визначення ненульових безрозмірних сталих $A_{N(2n+1).i}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1,2} [a_{N(2n+1).i}(k_1 R_j) A_{N(2n+1).i} + a_{N(2n+1).i+2}(k_2 R_j) A_{N(2n+1).i+2}] + \frac{2V_0 d_{31}}{\pi(2n+1)(1 - \nu) s_{11}^E} = 0, \\ \sum_{i=1,2} [c_{N(2n+1).i}(k_1 R_j) A_{N(2n+1).i} + c_{N(2n+1).i+2}(k_2 R_j) A_{N(2n+1).i+2}] = 0.\end{aligned}\quad (18)$$

При резонансних коливаннях скористаємося концепцією комплексних модулів [3], внаслідок якої в формулах (13)-(16), (18) матеріальні сталі будуть комплексними величинами $\tilde{s}_{ij}^E = s_{ij}^E - i s_{ij}^{E \operatorname{Im}}$, $\tilde{d}_y = d_y - i d_{ij}^{\operatorname{Im}}$, $\tilde{\varepsilon}_{jj} = \varepsilon_{jj} - i \varepsilon_{ij}^{\operatorname{Im}}$. При визначенні частот вільних коливань з визначника четвертого порядку однорідної (при $V_0 = 0$) системи алгебраїчних рівнянь (18) тангенсами малих кутів втрат можна знехтувати.

ЛІТЕРАТУРА

1. Механика связанных полей в элементах конструкций. В. 5т. (под общ. ред. А.Н. Гузя). Т.5. Электрoупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.

2. Шульга Н.А. О волновых потенциалах электроупругости для пьезокерамических материалов // Теорет. и приклад. механика. – 1984. – Вып. 15. – С. 73-76.
3. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.

Получено 15.06.2007 г.

Н.Д. Шульга

**ФОРМИ КОЛИВАНЬ НА ГРАНИЦЯХ ЗОН ПРОПУСКАННЯ
ОДНОМІРНИХ ХВИЛЬ В ДВОКОМПОНЕНТНИХ ШАРУВАТИХ
КОМПОЗИТАХ З МІЖФАЗНИМИ НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ**

Фізико-механічні властивості, деформативність і міцність реальних композитних матеріалів залежить головними чином від властивостей матриці і наповнювача та якості границь розділу наповнювач-матриця [3]. В теоретичних дослідженнях безперечно перевага надається [4] ідеальній моделі, в якій композит розглядається як досконалий хімічний дисконтинуум і досконалий хімічний континуум. Відповідно до цієї концепції НДС компонент (фаз) описується співвідношеннями механіки деформування твердих тіл, а на поверхнях розділу виконуються умови досконалого механічного контакту $y_n^+ = y_n^-$, $u^+ = u^-$. Для моделювання міжфазних недосконалостей в тонкому міжфазному прошарку з неповністю визначеними фізико-механічними властивостями і підвищеною дефектністю вводиться [1, 2] гіпотетична міжфазна поверхня з контактними умовами $y_n^+ = y_n^-$, $u^+ = u^- + z_n \cdot y_n^-$. При вивченні поширення хвиль довільного частотного діапазону в шаруватих композитах використовується структурна (кусково-однорідна) модель при досконалому механічному міжфазному контакті. Основні результати цих досліджень висвітлені в монографії [4]. Деякі узагальнення досліджень про поширення хвиль в рамках структурної моделі при недосконалому механічному контакті викладаються в цій роботі.

Розглянемо двокомпонентний композит з міжфазними недосконалостями і дефектами, механічні властивості ортотропних компонент якого позначимо $c_{ij,1}$, ρ_1 для шарів товщиною h_1 і $c_{ij,2}$, ρ_2 для шарів товщиною h_2 . Координатні вісі x_i направимо вздовж головних напрямів ортотропії шарів. При поширенні хвиль впоперек структури шарів (вздовж осі x_3) переміщення, деформації і напруження залежать тільки від x_3 та часу і для них мають місце рівняння

$$\rho(x_3) \frac{\partial^2 u_{6-m}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{3,6-m}}{\partial x_3}, \quad \sigma_{3,6-m} = c_{mm}(x_3) \frac{\partial u_{6-m}}{\partial x_3}, \quad m = 3, 4, 5. \quad (1)$$

На міжфазних площинах $x_{3,2n-2+q}$ (n – ціле число, $q = 1, 2$) з недосконалим механічним контактом будемо вимагати виконання умов спряження

$$\begin{aligned} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0, t) &= \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0, t), \\ u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} + 0, t) &= u_{6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0, t) + \eta_{3,6-m} \sigma_{3,6-m}(x_{3,2n-2+q} - 0, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Міжфазні параметри $\eta_{3,6-m}$ приймаються сталими і однаковими для всіх міжфазних площин.

Розв’язок рівнянь (1) для шарів $(n-1)h < x_3 < (n-1)h + h_1$ та $(n-1)h + h_1 < x_3 < nh$ відповідно вибираємо у вигляді

$$\begin{aligned} u_{6-m}(x_3, t) &= h \operatorname{Re} \left[A_{2n-1}^{(1)} \frac{\sin k_{mm,1}(x_3 - nh + h)}{\bar{c}_{mm,1} \bar{k}_{mm,1}} + A_{2n-1}^{(2)} \cos k_{mm,1}(x_3 - nh + h) \right] e^{-i\omega t}, \\ u_{6-m}(x_3, t) &= h \operatorname{Re} \left[A_{2n}^{(1)} \frac{\sin k_{mm,2}(x_3 - nh + h_2)}{\bar{c}_{mm,2} \bar{k}_{mm,2}} + A_{2n}^{(2)} \cos k_{mm,2}(x_3 - nh + h_2) \right] e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (3) і далі використовуються позначення $\rho_{00} \bar{\rho}_q = \rho_q$, $\bar{c}_{mm,q} c_{00} = c_{mm,q}$, $\bar{k}_{mm,q} = h_{00} k_{mm,q}$, $k_{mm,q} = \omega \sqrt{\rho_q / c_{mm,q}}$, $\bar{\eta}_{3,6-m} = \eta_{3,6-m} c_{00} / h$, де ρ_{00} , c_{00} , h – нормуючі параметри.

Тоді з умов спряження одержимо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь

$$A_{2n+1} = M_{mm}(h_2) A_{2n}, \quad A_{2n} = M_{mm}(h_1) A_{2n-1}. \quad (4)$$

Якщо її розв’язок шукати у вигляді

$$A_{2n} = \chi_{mm}^n M_{mm}(h_1) X_{mm}, \quad A_{2n-1} = \chi_{mm}^{n-1} X_{mm}, \quad (5)$$

то для визначення скаляра χ_{mm} і вектора X_{mm} одержимо однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$(M_{mm}(h_2, h_1) - \chi_{mm}^{-1} I_2) X_{mm} = 0, \quad (6)$$

де $M_{mm}(h_2, h_1)$ – передаточна матриця для двох шарів.

З умови існування ненульових розв’язків системи (6) знаходимо характеристичне рівняння

$$\chi_{mm}^2 - 2b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) \chi_{mm} + 1 = 0. \quad (7)$$

Аналіз цього рівняння показує, що система (4) буде мати обмежений розв’язок при $n \rightarrow \pm\infty$ ($-\infty < x_3 < +\infty$), якщо коефіцієнт рівняння (7) задовольнятиме умову

$$-1 < b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) < +1, \quad (8)$$

яка і є умовою існування об’ємних хвиль.

Для ідентифікації експериментальних вимірювань важливо знати також просторові форми хвиль. Для частот, які обмежують зони пропускання хвиль, тобто при $b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = \pm 1$, аналіз розв’язків системи (4) дозволяє установити просторові форми хвиль.

На межах $b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = +1$ зон пропускання (8) відбуваються симетричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (SS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(2)} C_2(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(2)} C_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (9)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(2)}$, $\tilde{A}_2^{(2)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(2)} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) + \tilde{A}_2^{(2)} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(2)} \left(C_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) \right) - \tilde{A}_2^{(2)} \left(C_2(H_2) - \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

та антисиметричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (AA-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(1)} S_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(1)} S_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (11)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(1)}$, $\tilde{A}_2^{(1)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(1)} C_1(H_1) - \tilde{A}_2^{(1)} C_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(1)} \left(S_1(H_1) + \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} C_1(H_1) \right) + \tilde{A}_2^{(1)} \left(S_2(H_2) + \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} C_2(H_2) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

На межах $b_{mm}(\bar{k}_{mm,2}, \bar{k}_{mm,1}) = -1$ зон пропускання (8) відбуваються симетричні-антисиметричні відносно серединних площин шарів коливання (SA-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(2)} C_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(1)} S_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (13)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(2)}$, $\tilde{A}_2^{(1)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(2)} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) + \tilde{A}_2^{(1)} C_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(2)} \left(C_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,1}^2 S_1(H_1) \right) + \tilde{A}_2^{(1)} \left(\bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) + \frac{1}{2} \bar{n}_{3,6-m} C_2(H_2) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

та антисиметричні-симетричні відносно серединних площин шарів коливання (AS-коливання)

$$u_{6-m}(x_3) = \begin{cases} \tilde{A}_1^{(1)} S_1(x_3 - x_{31}), & |x_3 - x_{31}| < H_1, \\ \tilde{A}_2^{(2)} C_2(x_3 - x_{32}), & |x_3 - x_{32}| < H_2, \end{cases} \quad (15)$$

частоти і відношення амплітуд $\tilde{A}_1^{(2)}$, $\tilde{A}_2^{(1)}$ яких визначаються з однорідної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(1)} C_1(H_1) - \tilde{A}_2^{(2)} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) &= 0, \\ \tilde{A}_1^{(1)} \left(S_1(H_1) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} C_1(H_1) \right) - \tilde{A}_2^{(2)} \left(C_2(H_2) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_{3,6-m} \bar{a}_{mm,2}^2 S_2(H_2) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В формулах (9)-(16) використовуються позначення $\bar{a}_{mm,q} = \bar{c}_{mm,q} \bar{k}_{mm,q}$, $S_q(x_3 - x_{3q}) = \bar{a}_{mm,q}^{-1} \sin k_{mm,q}(x_3 - x_{3q})$, $C_q(x_3 - x_{3q}) = \cos k_{mm,q}(x_3 - x_{3q})$, $x_{31} = H_1$, $x_{32} = h_1 + H_2$, $2H_q = h_q$.

При кількісному аналізі основна увага зверталася на вплив міжфазних параметрів $\eta_{3,6-m}$ на дисперсійні і амплітудні характеристики. Зі збільшенням $\eta_{3,6-m}$ зони пропускання звужуються і практично вироджуються в дискретний спектр власних частот товщинних коливань окремих шарів. Такі зони визначалися з частотних рівнянь граничних форм коливань. Шляхом чисельних розрахунків прослідкована перебудова форм об'ємних хвиль на границях зон пропускання.

Розглядався композит з механічними властивостями шарів $\bar{\rho}_1 = 1$, $\bar{c}_{33,1} = 13/3$, $\bar{c}_{44,1} = \bar{c}_{55,1} = 1$, $\bar{\rho}_2 = 2$, $\bar{c}_{33,2} = 70$, $\bar{c}_{44,2} = \bar{c}_{55,2} = 20$ при нормуючих параметрах $\rho_{00} = \rho_1$, $c_{00} = c_{44,1}$. Міжфазні сталі $\bar{\eta}_{33} = \bar{\eta}_{32} = \bar{\eta}_{31} = 0,5$. Товщини шарів приймалися рівними $h_1 = 0,3h$ і $h_2 = 0,7h$. На рис.1 наведені результати розрахунку форм поперечних (рис.1,а) та поздовжніх (рис.1,б) хвиль на граничних частотах зон пропускання на двох періодах структури. На рис.1,а показані форми поперечних хвиль, причому крива 2 відповідає верхній границі першої зони пропускання ($\omega_2 = 1,4731$, AS-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\omega_3 = 3,42205$, SA-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\omega_4 = 3,81221$, SS-коливання), крива 5 – нижній границі третьої зони пропускання ($\omega_5 = 11,524375$, AA-коливання), крива 6 – верхній границі третьої зони пропускання

($\omega_5 = 11,61749$, AS-коливання). На рис.1,б показані форми поздовжніх хвиль, причому крива 2 відповідає верхній границі першої зони пропускання ($\omega_2 = 1,6319$, AS-коливання), крива 3 – нижній границі другої зони пропускання ($\omega_3 = 3,5921$, SA-коливання), крива 4 – верхній границі другої зони пропускання ($\omega_4 = 3,97136$, SS-коливання). При побудові форм приймалося, що максимальна амплітуда коливань в першій зоні пропускання рівна одиниці. Зауважимо, що на нижній границі першої зони пропускання частота $\bar{\omega} = 0$, що відповідає поступальному руху жорсткого тіла, зміщення прийнято рівним нулеві і на рис.1 не показані.

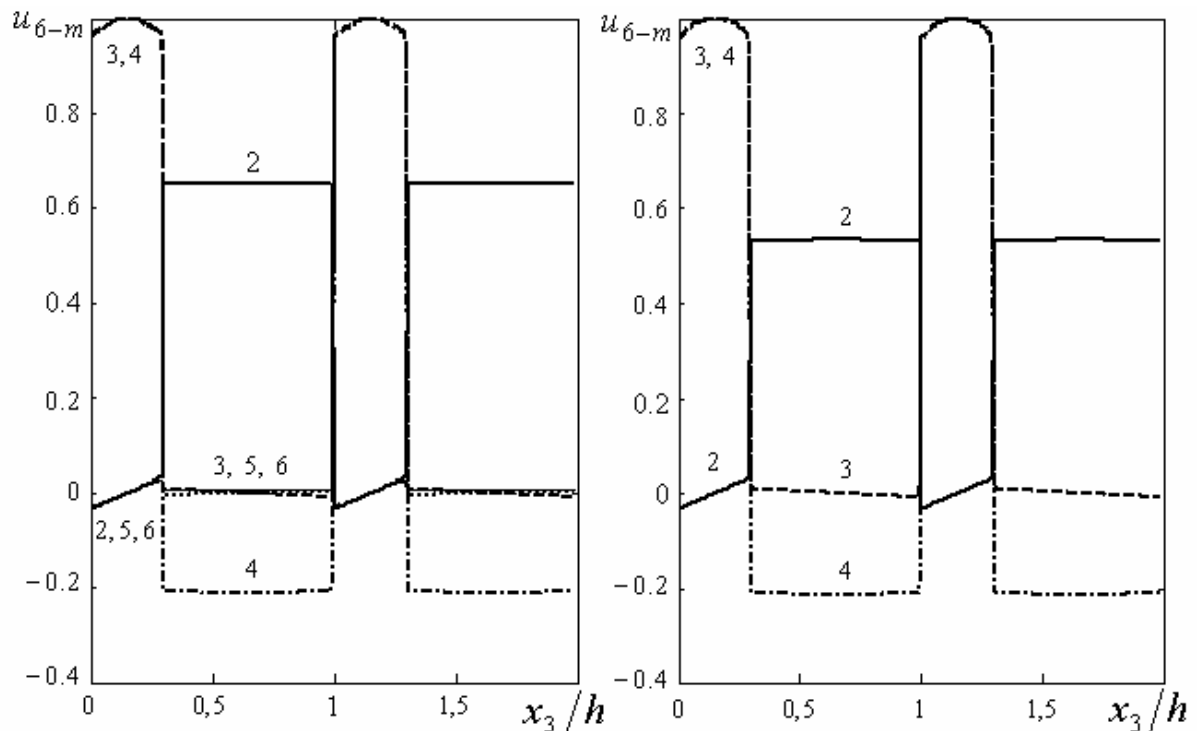


Рисунок 1

Різка зміна характеру форм на міжфазних прошарках (розриви першого роду на міжфазних площинах в прийнятій феноменологічній моделі) залежить від величин міжфазних параметрів $\bar{\eta}_{3,6-m}$ і зникає при $\bar{\eta}_{33} = \bar{\eta}_{32} = \bar{\eta}_{31} = 0$ (міжфазні недосконалості відсутні). Неперервні ділянки форм мають пологий характер в зв'язку з великим періодом відповідних тригонометричних функцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Баженов В.А., Шульга Н.Д. Скорости распространения длинных волн в слоистых композитах с тонкими прослойками // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1989. – Вып. 55. – С. 6-10.

2. Баженов В.А., Шульга Н.Д. Распространение волн поперек структуры слоистого материала с межфазными прослойками // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1990. – Вып. 56. – С. 3-7.
3. Композиционные материалы. В 8-и т. Т.1. поверхности раздела в металлических композитах. – Москва: Мир, 1978. – 438 с. Т.6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – Москва: Мир, 1978. – 294 с.
4. Механика композитов. В 12 т. Т.2. Динамика и устойчивость материалов. – Киев: Наукова думка, 1993. – 431 с. Т.6. Технологические напряжения и деформации в материалах. – Киев: ПТОО «А.С.К.», 1997. – 394 с.

Получено 15.06.2007 г.

УДК 539.3

С.Ю. Бабич, Е.Н. Борисов, Ю.П. Глухов

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассматривается плоская задача об установившемся движении упругого двухслойного полупространства с начальными напряжениями под действием движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузки. Пусть слоистое полупространство состоит из пластины и подстилающего ее полупространства из предварительно напряженного сжимаемого или несжимаемого материала. Запишем постановку задачи в комплексных потенциалах, введенных в работах [1, 2, 4, 5]. Для этого введем следующие комплексные переменные

$$z_j = y_1 + \mu_j(y_2 + h); \quad \bar{z}_j = y_1 + \bar{\mu}_j(y_2 + h); \quad j=1,2 \quad (1)$$

Учитывая (1), уравнения движения для полупространства в подвижной системе координат через функции $\chi^{(j)}$ можно записать в виде [3]. Запишем условия контакта между пластиной и полупространством. Здесь ограничимся случаем равных корней определяющего уравнения [4] и рассмотрим жесткий контакт. Используя комплексные потенциалы [1, 2] с учетом (1), граничные условия при $y_2 = -h$ при жестком контакте можно записать в виде [3]

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left\{\gamma_{21}^{(1)} \left[\varphi_1''(y_1) + y_1\varphi_2''(y_1)\right] + \gamma_{21}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} &= \tau(y_1); \\ \operatorname{Re}\left\{\gamma_{22}^{(1)} \left[\varphi_1''(y_1) + y_1\varphi_2''(y_1)\right] + \gamma_{22}^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} &= q(y_1); \\ \operatorname{Re}\left\{\gamma_2^{(1)} \left[\varphi_1'(y_1) + y_1\varphi_2'(y_1)\right] + \gamma_2^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} &= w(y_1); \\ \operatorname{Re}\left\{\gamma_1^{(1)} \left[\varphi_1'(y_1) + y_1\varphi_2'(y_1)\right] + \gamma_1^{(2)}\varphi_2'(y_1)\right\} &= u(y_1) + h\varphi(y_1); \end{aligned} \quad (2)$$

Из уравнений [3] и (2) исключим функции $u(y_1)$, $w(y_1)$, $q(y_1)$, $\tau(y_1)$. После несложных преобразований получим два уравнения для определения аналитических функций φ_j , $j=1, 2$ и выражение для функций угла поворота сечения пластины φ через

аналитические функции φ_j [3]. Опуская промежуточные результаты, после ряда преобразований получим

$$\begin{aligned}
 & -\theta_1\theta_2\gamma_1^{(1)}[\varphi_1^{IV}(z) + z\varphi_2^{IV}(z)] - \theta_1\theta_2[3\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}]\varphi_2'''(z) + \\
 & + [\theta_4\gamma_{21}^{(1)} + \theta_1(\theta_3 - 2kh)\gamma_2^{(1)}][\varphi_1'''(z) + z\varphi_2'''(z)] + \\
 & + [\theta_4(\gamma_{21}^{(1)} + \gamma_{21}^{(2)} + \theta_1(\theta_3 - 2kh)(2\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}))]\varphi_2''(z) - \\
 & - \theta_1\gamma_{22}^{(1)}[\varphi_1''(z) + z\varphi_2''(z)] - \theta_1\gamma_{22}^{(2)}\varphi_2'(z) = \\
 & = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\theta_1 P_2(y_1) - \theta_2 P_1'(y_1)] dy_1}{y_1 - z}; \\
 & -\theta_1\theta_3\gamma_2^{(1)}[\varphi_1^{IV}(z) + z\varphi_2^{IV}(z)] - \theta_1\theta_3[3\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}]\varphi_2'''(z) + \\
 & + \theta_1(2k\gamma_1^{(1)} + \gamma_{22}^{(1)})[\varphi_1'''(z) + z\varphi_2'''(z)] + \\
 & + \theta_1[2k(2\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)} + \gamma_{22}^{(1)} + \gamma_{22}^{(2)})]\varphi_2''(z) - \\
 & - 2k\gamma_{21}^{(1)}[\varphi_1''(z) + z\varphi_2''(z)] - 2k\gamma_{21}^{(2)}\varphi_2'(z) = \\
 & = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[2kP_1(y_1) - \theta_1 P_2'(y_1)] dy_1}{y_1 - z}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Систему уравнений (3) несложно привести к виду

$$\begin{aligned}
 L[\varphi_1''(z) + z\varphi_2''(z)] &= f_1(z) \\
 L[\varphi_2'(z)] &= f_2(z)
 \end{aligned} \tag{4}$$

Где дифференциальный оператор L и функции f_j ($j=1, 2$) определяются из [3].

Таким образом, для жесткого контакта при равных корнях определяющего (основного) уравнения задача свелась к решению обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида (4) относительно функций $\varphi_1''(z_1) + z_1\varphi_2''(z_1)$ и $\varphi_2'(z_1)$. Получив функции $\varphi_1''(z_1) + z_1\varphi_2''(z_1)$ и $\varphi_2'(z_1)$, легко определить функции $\varphi_j''(z_1)$, ($j=1, 2$), а затем напряжения и скорости перемещений в полупространстве (перемещения в данном случае определяются с точностью произвольной постоянной). Изгибающий момент в пластине можно найти аналогично [3].

Численные исследования в данной работе проведены в рамках теории конечных начальных деформаций: для сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа и для несжимаемого материала с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича.

На основе анализа полученных числовых результатов выявлен следующий механический эффект: значение критических скоростей движения нагрузки и их количество существенно зависит от начальных напряжений в полупространстве, механических характеристик пластины и полупространства и условий их контакта. При жестком соединении пластины с полупространством возможно существование двух критических скоростей движения нагрузки, по крайней мере, одна из которых больше скорости волн Рэлея.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич С.Ю., Гузь А.Н. Комплексные потенциалы плоской динамической задачи для сжимаемых упругих тел с начальными напряжениями // Прикл. механика.-1981.-Т.17, №7.-с. 75-83.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю. Плоские динамические задачи для упругих несжимаемых тел с начальными напряжениями // Прикл. математика и механика.-1982.-Т.46, №2.-с. 263-271.
3. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Динамика слоистого сжимаемого предварительно напряженного полупространства при взаимодействии подвижной нагрузки // Прикл. механика.-1986.-Т.22, №9.-с.8-15.
4. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.В. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. - К.: Вища школа, 1995.-304с.
5. Guz A. N., Babich S. Yu., Rudnitsky V. B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research// Appl. Mech. Rew.- 1998.-51, №5. –p. 343-371.

Получено 15.06.2007 г.

УДК 539.3

С. Ю. Бабич, Ю. П. Глухов

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ
НАГРУЗКИ НА СЛОИСТОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С
НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ**

Среди широкого круга вопросов, непосредственно связанных с постановкой и решением задач о движущихся нагрузках, важными в практическом и теоретическом смысле являются вопросы исследования распространения волн в упругих системах плоскопараллельных слоев с различными упругими свойствами. В частности, представляют значительный интерес задачи о воздействии подвижной нагрузки на двухслойное полупространство, состоящее из упругого слоя и подстилающего его упругого полупространства. Задачи о поведении двухслойного упругого полупространства изучались как в точной постановке, так и с использованием различных приближенных моделей двухслойной упругой среды.

В данной работе рассмотрены один из методов решения плоской задачи о воздействии подвижной нагрузки на двухслойное полупространство, состоящее из пластины и подстилающего ее предварительно напряженного полупространства и некоторые результаты.

§ 1. Для решения задачи воспользуемся соотношениями линеаризированной теории упругости сжимаемых тел с начальными напряжениями [1].

Общая постановка плоских задач об установившемся движении упругого двухслойного полупространства, состоящего из пластины, уравнения движения которой записываются с учетом сдвига и инерции вращения [2], и подстилающего ее, подверженного предварительному однородному деформированию полупространства из сжимаемого или несжимаемого материалов при подвижной нагрузке, включает [3,4]:

уравнения движения пластины

$$u_1 \frac{d^2 u}{dy_1^2} - \phi = P_1;$$

$$\begin{aligned} u_3 \frac{d^2 w}{dy_1^2} - 2\kappa h G_1 \frac{d\varphi}{dy_1} - q &= P_2; \\ u_2 \frac{d^2 \varphi}{dy_1^2} + 2\kappa G_1 \left(\frac{dw}{dy_1} - \varphi \right) - \phi &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$u_1 = 2h \left(\frac{2G_1}{1-\mu_1} - \mathfrak{T}_1 v^2 \right); \quad u_2 = \frac{2h^2}{3} \left(\frac{2G_1}{1-\mu_1} - \times_0 \mathfrak{T}_1 v^2 \right); \quad u_3 = 2h (\equiv G_1 - \mathfrak{T}_1 v^2); \quad (2)$$

уравнения движения полупространства

$$\left(\mathfrak{z}_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\mathfrak{z}_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \cap^{(j)} = 0; \quad j=1,2; \quad (3)$$

и условия контакта между пластиной и полупространством при $y_2 = -h$:

жесткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = \phi; \quad \tilde{Q}_{22} = q; \quad u_2 = w; \quad u_1 = u + h\varphi; \quad (4)$$

и нежесткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = 0; \quad \phi = 0; \quad \tilde{Q}_{22} = q; \quad u_2 = w. \quad (5)$$

Функции $\mathfrak{z}_j$ в уравнениях движения (3) определяются из уравнения

$$\mathfrak{z}^4 + A\mathfrak{z}^2 + A_1 = 0. \quad (6)$$

Коэффициенты A и A_1 в случае сжимаемого тела определяются из выражений

$$\begin{aligned} A\tilde{u}_{2112}\tilde{u}_{2222} &= \tilde{u}_{2112}(\tilde{u}_{1221} - \tilde{c}v^2) + \tilde{u}_{2222}(\tilde{u}_{1111} - \tilde{c}v^2) - (\tilde{u}_{1122} + \tilde{u}_{1212})^2; \\ A_1\tilde{u}_{2112}\tilde{u}_{2222} &= (\tilde{u}_{1221} - \tilde{c}v^2)(\tilde{u}_{1111} - \tilde{c}v^2); \end{aligned} \quad (7)$$

а в случае несжимаемого тела из выражений

$$\begin{aligned} A\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2\tilde{\kappa}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2(\tilde{\kappa}_{1111} - \tilde{c}v^2) - 2\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}(\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212}); \\ A_1\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2(\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{c}v^2). \end{aligned} \quad (8)$$

В формулах (1)-(8) введены следующие обозначения: G_1, μ_1, c_1 - соответственно модуль сдвига, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины; u и w - перемещения срединной плоскости пластины; κ - сдвиговый коэффициент Тимошенко; φ - угол поворота поперечного сечения; ∂_0 - различительная константа, принимающая значение 1 или 0 в зависимости от того, учитывается или пренебрегается инерцией вращения при выводе уравнений (1); P_1, P_2 и ϕ, q - соответственно касательные и нормальные напряжения на

свободной поверхности пластины и на поверхности раздела пластины и полупространства; $\tilde{c}$ - плотность материала полупространства в начальном деформированном состоянии; u_1 и u_2 - составляющие вектора перемещений в полупространстве; $\tilde{Q}_{ij}$ - составляющие тензора напряжений, отнесенные к единице площади в начальном деформированном состоянии; $\tilde{\mathcal{U}}_{ij\bar{c}\bar{c}}$, $\tilde{\kappa}_{ij\bar{c}\bar{c}}$, $\tilde{q}_{ij}$ - компоненты тензоров, зависящих от формы упругого потенциала, отнесенные к единице площади в начальном деформированном состоянии.

Из уравнений (1) и (4) в случае жесткого контакта и (1) и (5) в случае нежесткого контакта, исключая функции u , w , ϕ и q , получим систему граничных условий, которая для жесткого и нежесткого контакта имеет общий вид

$$\begin{aligned} \partial u_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} (u_1 - h\varphi) - \tilde{Q}_{21} &= \partial P_1; \\ u_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1^2} - 2\kappa h G_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \tilde{Q}_{22} &= P_2; \\ u_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2\kappa G_1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y_1} - \varphi \right) - \partial \tilde{Q}_{21} &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

где $\partial = 1$ в случае жесткого контакта и $\partial = 0$ в случае нежесткого контакта.

Таким образом, при использовании общих решений плоских динамических задач линеаризированной теории рассматриваемые задачи сводятся к краевым задачам для функций $\varphi^{(j)}$ ($j=1,2$) и φ в случае равных корней и для функций φ и φ в случае неравных корней ($\varphi^{(1)} = (\tilde{\mathcal{U}}_{1122} + \tilde{\mathcal{U}}_{1212})\varphi$; $\varphi^{(2)} = 0$).

§ 2. Поставленные краевые задачи решаются с помощью преобразования Фурье по переменной y_1 . Фундаментальные решения в пространстве изображений Фурье получены при различных скоростях движения нагрузки и условиях контакта между пластиной и полупространством для равных и неравных корней уравнения (6).

Вычисление интегралов обращения при переходе к оригиналам в выражениях для напряжений, скоростей перемещений в полупространстве (перемещения в данном случае определяются с точностью до аддитивной постоянной) и изгибающего момента в

пластине зависит от скорости движения нагрузки. В зависимости от скорости движения нагрузки знаменатель в интегралах обращения может иметь действительные положительные корни, а может и не иметь. Если ни один корень не лежит на действительной оси, то интегралы обращения не имеют особенностей и их можно вычислить непосредственно с помощью таблиц. При наличии неравных действительных положительных корней знаменателя интегралы вдоль контура интегрирования от $-\infty + i\varepsilon$ до $+\infty + i\varepsilon$ можно заменить суммой главного значения интеграла и суммой всех вычетов, умноженной на $(-ip)$.

§ 3. На основании полученных результатов проведено численное исследование влияния начальных напряжений на значение критических скоростей движения нагрузки и на напряженно-деформированное состояние двухслойной среды. Подробно рассмотрены случаи сжимаемого и несжимаемого материалов соответственно с упругим потенциалом гармонического типа и упругим потенциалом типа Бартенева-Хазановича.

Влияние начальных деформаций на напряжения, скорости перемещений в полупространстве и изгибающий момент в пластине исследовалось при различных скоростях движения нагрузки (дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой) и условиях контакта пластины и полупространства.

В качестве примера рассмотрена нормальная сосредоточенная нагрузка. Предполагалось также, что начальное деформированное состояние является плоским и поверхностная нагрузка отсутствует.

В частности исследовалось, как влияет учет инерции вращения при выводе уравнений движения пластины на параметры напряженно-деформированного состояния рассматриваемой модели слоистой среды.

На рис. 1 (а - жесткий контакт, б - нежесткий контакт) показано влияние учета инерции вращения при различных скоростях движения нагрузки и начальных деформациях на значение составляющей напряжения $\tilde{Q}_{22}$ в точке $y_1 = -\mathcal{L}_1 h$; $y_2 = -2h/\mathcal{L}_2$ для сжимаемого материала. Кривая 1 на рис. 1 и 2 соответствует скорости движения нагрузки $v^2 = 0,1c_s^2$, кривая 2 – скорости $v^2 = 0,2c_s^2$, кривая 3 - скорости $v^2 = 0,3c_s^2$, кривая 4 – скорости $v^2 = 0,4c_s^2$.

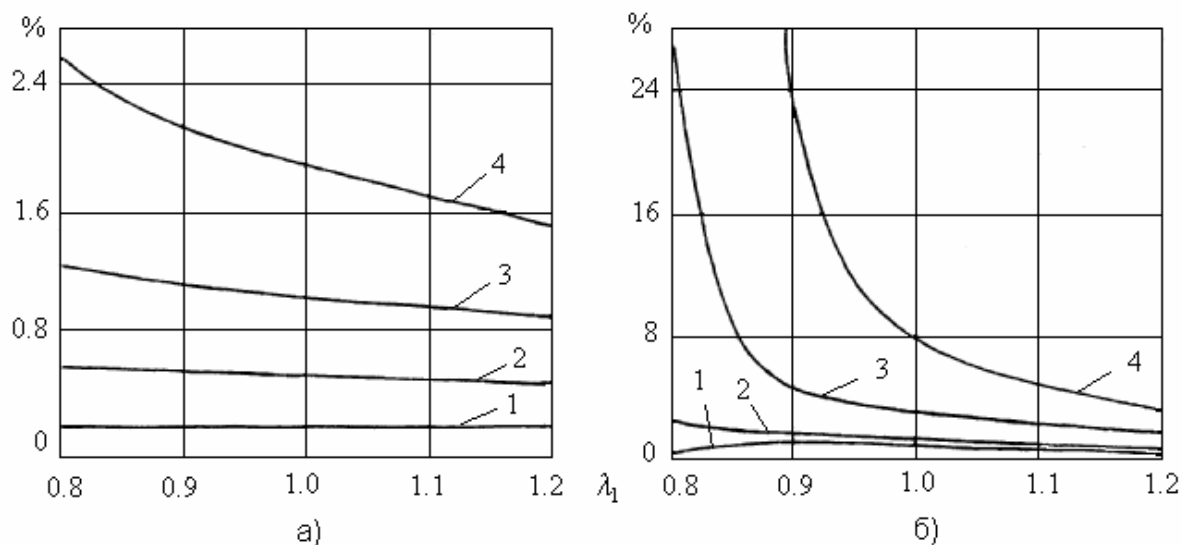


Рисунок 1

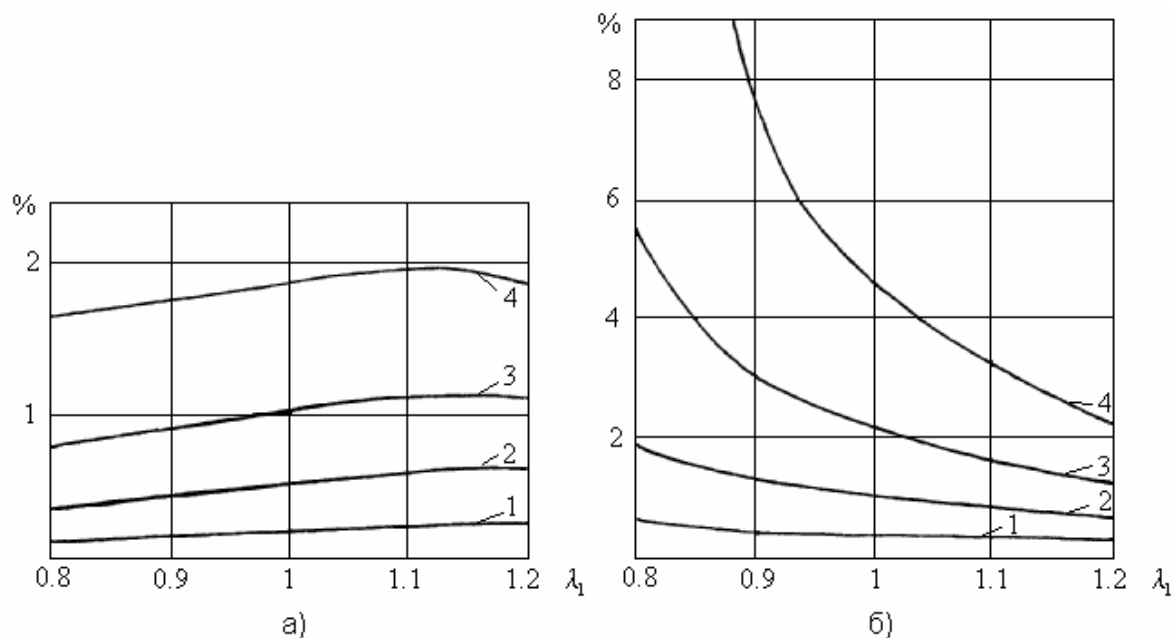


Рисунок 2

Как видно из рис. 1 учет инерции вращения в пределах рассматриваемых скоростей движения поверхностной нагрузки и значений λ_1 в случае жесткого контакта вносит незначительную поправку (меньше 2,6%), то в случае нежесткого контакта (рис. 1б) отличие в результатах будет очень большим (до 30%). Особенно необходим учет инерции вращения при $\lambda_1 < 1$ и больших скоростях движения нагрузки.

На рис. 2 (а - жесткий контакт, б - нежесткий контакт) показано влияние инерции вращения на составляющую напряжения $\tilde{Q}_{22}$ в

точке $y_1 = -\lambda_1 h$; $y_2 = -2h\lambda_1$ для несжимаемого материала. Обозначения на рис. 2 те же, что и на рис. 1. Конкретный вид таких зависимостей определяется положением точки слоистой среды относительно точки приложения нагрузки.

Таким образом, учет инерции вращения при выводе уравнений движения для пластины особенно важен при нежестком контакте, предварительном сжатии и больших скоростях движения нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. - Киев: Наукова думка, 1973. - 272 с.
2. Achenbach J.D., Keshawa S.P., Herrmann G. Moving load on a plate resting on an elastic half space // Trans.ASME.Ser.E.J.Appl.Mech.- 1967.- 34, № 4.-P.183- 189.
3. Бабич С.Ю., Глухов Ю.П., Гузь А.Н. Динамика слоистого сжимаемого предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки // Прикл. механика. - 1986. - 22, №9.-С. 8-15.
4. Глухов Ю.П. К определению критических скоростей движения нагрузки по пластине, лежащей на несжимаемом предварительно деформированном полупространстве// Прикл. механика . - 1986. -22, №10.-С. 57-62.

Получено 15.06.2007 г.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Повышение технических характеристик современных машин, уменьшение материалоемкости ответственных элементов приводит к росту как общей, так и местной напряженности конструкции с возможным выходом материала за пределы упругой работы. Поэтому для достоверного прогнозирования ресурса эксплуатации конструкции на стадии их проектирования та остаточного ресурса на стадии эксплуатации необходимо иметь такие методы исследования упругопластического напряженно – деформированного состояния, которые бы более углубленно учитывали характер неупругого деформирования материала при сложном неизотермическом нагружении. К таким эффектам можно отнести, например, зависимость свойств материала от вида напряженного состояния, т. е. от третьего инварианта тензора напряжений [6].

Большинство конструкционных сталей являются умеренно чувствительными к виду напряженного состояния. В них различие кривых при растяжении (сжатии) и кручении при малых деформациях не превышают 10%. В то же время для алюминиевого сплава Д16Т различие кривых растяжения (сжатия) и кручения достигает 40%. К таким материалам можно отнести и различные марки чугуна, для которых диаграммы растяжения, кручения и сжатия отличаются существенно.

В связи с этим предлагается методика исследования неосесимметричного деформированного состояния составных тел вращения из изотропных материалов с учетом вида напряженного состояния при нагружении объемными $\vec{K}(K_z, K_r, K_\varphi)$ и поверхностными $\vec{t}_n(t_{nz}, t_{nr}, t_{n\varphi})$ силами и неравномерном нагреве, т.е. для материалов, имеющих различные характеристики пластического деформирования и разрушения, например, при растяжении, сжатии, сдвиге. Предполагается, что части тела скреплены между собой без натяга и на их общей границе выполняются условия идеально

силового и теплового контактов. Уровень нагружения такой, что реологические свойства материалов слоев не проявляются, хотя их механические характеристики зависят от температуры. Кроме того, нагружение и нагрев тела происходит таким образом, что в его элементах осуществляются простые (или близкие к простым) процессы деформирования или процессы деформирования по траекториям малой кривизны, сопровождающиеся неупругими деформациями и областями разгрузки. Для учета истории деформирования весь процесс нагружения и нагрева разбивается на отдельных достаточно малые по времени этапы таким образом, чтобы концы этих этапов по возможности совпадали с моментами, когда направления процессов деформирования отдельных элементов тела изменятся от нагружения к разгрузке или наоборот. Разгрузка предполагается упругой. Исследование с учетом истории таких тел вращения сводится к последовательному решению задачи нестационарной теплопроводности по определению температуры T и задачи по определению перемещений u_i , деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} ($i, j = z, r, \varphi$) для конкретных значений моментов времени. Тензор деформаций представляется в виде суммы тензоров упругой и пластической деформаций, при этом в процессе деформирования возможно только упругое изменение объема материала. Упругие деформации при изменении напряжений следуют обобщенному закону Гука. Тогда для описания неупругого деформирования элементов тела по различным траекториям получим зависимости между компонентами напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} , линеаризованные теми или другими способами, в виде закона Гука с дополнительными слагаемыми σ_{ij}^* , учитывающими тепловую деформацию, отклонение материала от упругого, зависимость характеристик материала от вида напряженного состояния и температуры, а также методы линеаризации исходных нелинейных соотношений [2]:

$$\sigma_{ij} = 2G^* \varepsilon_{ij} + (K - 2G^*) \varepsilon_0 \delta_{ij} - \sigma_{ij}^* \quad (i, j = z, r, \varphi), \quad (1)$$

где $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi})/3$ – средняя деформация;

$K = \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu}$ – модуль объемного расширения материала; G – модуль

сдвига и ν - коэффициент Пуассона, зависящие от температуры T и вида напряженного состояния.

Выражения для σ_{ij}^* и модуля G^* зависят от используемой теории и способа линеаризации исходных нелинейных уравнений состояния.

В случае теории малых упругопластических деформаций, т.е. когда каждый элемент тела деформируется по прямолинейным траекториям или мало отклоняющихся от них, при линеаризации соотношений (1) методом упругих решений: $G^* = G_0$, $K = K_0$ - соответственно модуль сдвига и модуль объемного деформирования материала при нормальной температуре T_0 и некотором начальном значении угла вида напряженного состояния. При этом дополнительные напряжения σ_{ij}^* определяются равенствами

$$\sigma_{ij}^* = 2G_0\omega e_{ij} + 2G^*\varepsilon_{ij}^{1P} + [K_0\omega_1\varepsilon_0 + K_0(1-\omega_1)\varepsilon_T]\delta_{ij}, \quad (i, j = z, r, \varphi). \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon_T = \alpha_T(T - T_0)$ - тепловая деформация, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0\delta_{ij}$ - компоненты девиатора деформаций, ε_{ij}^{1P} - значения пластической деформации в момент разгрузки элемента тела. Функция ω и ω_1 определяются соотношениями

$$\omega = 1 - G^*/G, \quad \omega_1 = 1 - K/K_0, \quad 2G^* = S/\Gamma, \quad (3)$$

где $S = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}/2$ - интенсивность касательных напряжений, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}$ - компоненты девиатора напряжений, $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ - среднее напряжение, $\Gamma = \sqrt{e_{ij}e_{ij}}/2$ - интенсивность деформаций сдвига.

При линеаризации соотношений термопластичности методом переменных параметров упругости в уравнениях (1) G^* определяется равенством (3), а дополнительные напряжения вместо (2) определяются выражением

$$\sigma_{ij}^* = 2G\varepsilon_{ij}^{1P} + K\varepsilon_T\delta_{ij}. \quad (4)$$

При использовании соотношений теории термопластичности, описывающих деформирование элементов тела по траекториям малой кривизны, после линеаризации методом дополнительных напряжений G^* соответствует модулю сдвига G при текущих значениях температуры тела и угла вида напряженного состояния, который связан с компонентами напряжений соотношением

$3\vartheta = \arccos(3\sqrt{3} I_3 / 2S^3)$. Здесь через I_3 обозначен третий инвариант тензора девиаторов напряжений:

$$I_3 = s_{zz}s_{rr}s_{\varphi\varphi} + 2s_{zr}s_{r\varphi}s_{z\varphi} - s_{zz}s_{r\varphi}^2 - s_{rr}s_{z\varphi}^2 - s_{\varphi\varphi}s_{zr}^2. \quad (5)$$

Тогда компоненты дополнительных напряжений σ_{ij}^* определяются равенствами

$$\sigma_{ij}^* = 2G\varepsilon_{ij}^P + K\varepsilon_T\delta_{ij}, \quad (6)$$

где в конце m -го этапа нагружения пластические составляющие компонентов деформации определяются соотношением

$$(\varepsilon_{ij}^P)_m = \sum_{K=1}^m \Delta_K \varepsilon_{ij}^P, \quad \Delta_K \varepsilon_{ij}^P = \Delta_K e_{ij}^P = \left\langle \frac{s_{ij}}{S} \right\rangle \Delta_K \Gamma_P \quad (7)$$

Интенсивности касательных напряжений S , деформаций сдвига Γ , температура T и угол вида напряженного состояния ϑ связаны функциональной зависимостью. Этот функционал в случае отсутствия ползучести материала превращается в функцию $S = F(\Gamma, T, \vartheta)$ и представляет собой геометрическое место диаграмм деформирования, полученных для фиксированных значений температуры T при различных значениях угла вида напряженного состояния ϑ . Эти диаграммы должны определяться со скоростями, при которых не проявляются реологические свойства материала.

Линеаризация нелинейных уравнений состояния осуществляется методом последовательных приближений с использованием диаграмм деформирования, соответствующих значениям заданной на этапе температуры и вычисленного на предыдущем приближении угла вида напряженного состояния. В процессе последовательных приближений при решении краевой задачи на основе теории малых упругопластических деформаций с использованием этих диаграмм деформирования вычисляется функция пластичности ω и секущий модуль G^* , а при решении задачи по теории процессов деформирования малой кривизны - приращения интенсивности накопленных пластических деформаций сдвига $\Delta_K \Gamma_P$. Затем через эти величины определяются компоненты дополнительных напряжений σ_{ij}^* , входящие в определяющие уравнения (3.1). Методики определения координат точек на термомеханической поверхности $S = F(\Gamma, T, \vartheta)$ при фиксированных значениях угла вида напряженного состояния, описание способов определения величин ω , G^* или $\Delta_K \Gamma_P$

содержатся в работах [4, 5]. При этом в случае активного процесса деформирования из первоначально ненапряженного состояния неупругие деформации ε_{ij}^{1P} , входящие в выражение (3.2), (3.4) для дополнительных напряжений, равны нулю. Эти компоненты деформаций в момент разгрузки определяются равенством

$$\varepsilon_{ij}^{1P} = (1 - G_1^* / G) e_{ij}, \quad (8)$$

где $G_1^* = G(1 - \omega)$ – соответствует G^* в момент разгрузки.

При этом, как при решении задачи теплопроводности по определению распределения температуры в исследуемом теле, так и при решении краевой задачи по определению напряженно-деформированного состояния составного тела вращения будет использоваться полуаналитический метод конечных элементов [126], в котором решение ищется в виде тригонометрических рядов на основе соответствующих вариационных уравнений.

Присоединив к вариационному уравнению (12) соотношения Коши, кинематические граничные и начальные условия, получим полную систему уравнений, которая вместе с (11) позволяет поэтапно проследить весь процесс деформирования тела и определить температуру перемещения, деформации и напряжения в любой точке тела. При таком подходе исходные трехмерные краевые задачи сводятся к решению в меридиональном сечении F тела совокупности двумерных вариационных задач для каждой гармоники в отдельности. Их дискретизация осуществляется на основе метода конечных элементов. Более подробно с методикой решения в такой постановке задач теплопроводности и термопластичности можно познакомиться в работах [4.5].

Влияние экспериментальных диаграмм деформирования материала, полученных при различных углах вида напряженного состояния, на результаты решения задачи пластичности было исследовано при вычислении напряженного состояния тонкого сплошного диска под действием центробежных сил. В качестве механических характеристик материала диска (чугун) использовались данные работ [1,3]. Напряжения в диске распределены таким образом, что угол вида напряженного состояния изменяется от $\vartheta=0$ на ободу диска до $\vartheta=\pi/3$ в центре диска. Были проведены расчеты с использованием диаграмм, полученных при растяжении

цилиндрических образцов ($\vartheta=0$), при кручении ($\vartheta=\pi/6$) и при сжатии ($\vartheta=\pi/3$). Анализ результатов показал, что использование в расчетах диаграмм деформирования, соответствующих разному виду напряженного состояния, приводит к существенному различию результатов. В частности, если компоненты напряжений при этом отличаются на 5-10 % , то компоненты деформаций-на порядок.

Таким образом, учет третьего инварианта тензора девиаторов напряжений при исследовании напряженно-деформированного состояния составных тел вращения приводит к существенному уточнению результатов решения соответствующей краевой задачи упругопластичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. – М.: Наука. – 1982.-320 с.
2. Механика композитов: В 12-ти т. / Под общ. ред. А.Н.Гузя. Т.11. Численные методы / Я.М.Григоренко, Ю.Н.Шевченко,..., В.Г.Савченко и др. – К.: «А.С.К.», 2002. –448 с.
3. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. - Киев: Наукова думка. – 1988. – 736 с.
4. Савченко В.Г. О напряженном состоянии составных тел вращения с учетом повреждения разномодульных при растяжении и сжатии ортотропных материалов // Прикл. механика. – 2006.- 42, №11.-С. 57-68.
5. Успехи механики: В 6-ти томах. / Под общей редакцией А.Н.Гузя. Т.1.- Киев: “АСК”, 2005.-776с. Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н. Пространственные задачи термовязкопластичности. С.625-660.
6. Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г., Тормахов Н.Н. Определяющие уравнения для описания упругопластических процессов деформирования элементов тела по траекториям малой кривизны с учетом вида напряженного состояния материала // Прикл. механика. – 2006.- 42, №4.-С. 62-72.

Получено 15.06.2007 г.

А.М. Павленко, И.Е. Соколовская

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СКОРОСТИ И ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ПОТОКЕ ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ

Во многих отраслях техники применяют различные массообменные устройства для сушки гранулированного материала различного назначения [1]. В целом методики проектирования таких аппаратов известны, и если технологический процесс реализуется без каких либо особенностей, то методы расчета себя оправдывают. В случаях, когда свойства материала в процессе термообработки изменяются, традиционные методы расчета дают существенные погрешности. Тогда возникает необходимость математического моделирования основных технологических процессов.

Так на рис.1 приведена схема вихревой камеры для термообработки дисперсного материала. В гидродинамике аппарата, и соответственно в процессах обработки, следует выделить два основных этапа: предварительная подсушка частиц в плоской струе теплоносителя и окончательная термообработка в вихревом слое. Остановимся подробнее на первом этапе технологии.

В процессе движения материала вдоль стенок патрубка 9 вследствие ускорения настильной струей частицы приобретают некоторую начальную скорость [2]. При этом частицы меньшего веса будут иметь большую скорость, чем тяжелые. Такое распределение начальной скорости частиц материала представляется нам целесообразным для уменьшения выноса их из камеры с уходящими газами.

1. Рассмотрим движение одиночной частицы сферической формы в потоке газа (рис.2). Поступая в поток газа, частица движется в нем под действием силы тяжести, выталкивающей силы (силы Архимеда) и силы сопротивления. Систему координат выбираем так, чтобы ось X была направлена вдоль конуса, а ось Y перпендикулярно к его поверхности. При необходимости можно рассматривать трехмерное движение частиц, если вдоль конуса-распылителя создаем закрученную струю.

Уравнения равновесия сил, действующих на частицу, в проекциях на оси координат запишутся так:

$$ma_x = c \frac{\rho(u - g_x)^2}{2} S + mg \cos \alpha \quad (1)$$

$$ma_y = mg \sin \alpha$$

Где S - площадь поперечного сечения частицы, m - масса частицы, u - скорость потока газа, ρ - плотность газа.

Начальные условия для интегрирования уравнений будут:

при $t = 0$, $x = y = 0$,

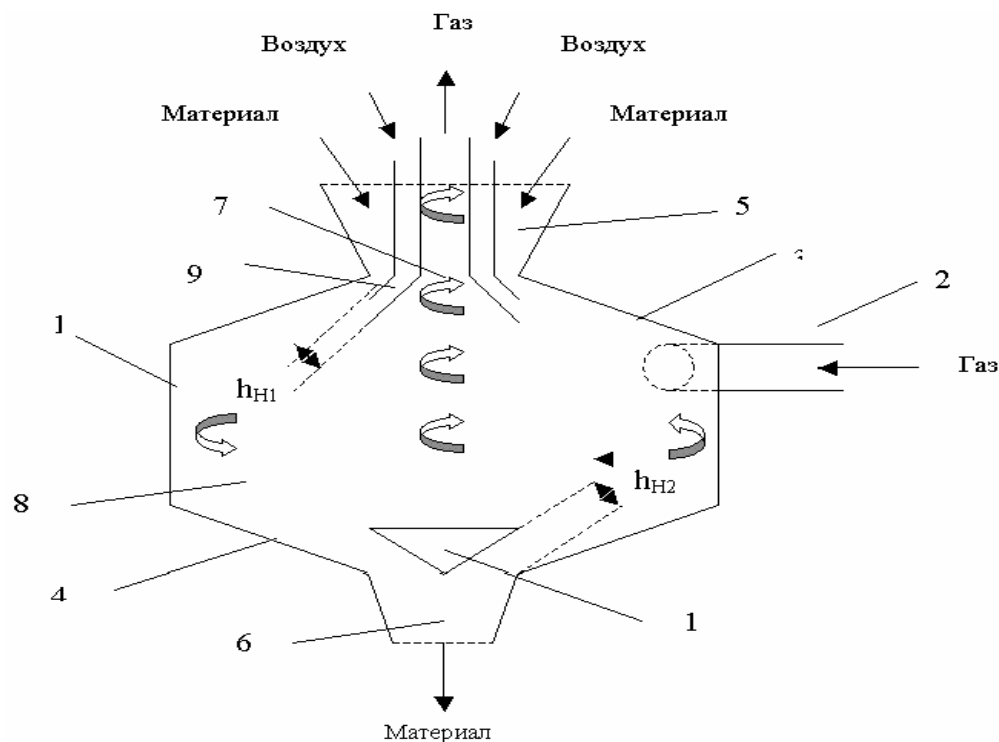


Рисунок 1 - Схема аппарата: 1- корпус; 2- боковой входной патрубок для подвода газа; 3- торцевая верхняя стенка; 4-торцевая нижняя стенка; 5- загрузочный бункер; 6- разгрузочный бункер; 7- воронка с патрубком, для отвода газа; 8-рабочая камера; 9- патрубки для подачи воздуха; 10- регулятор.

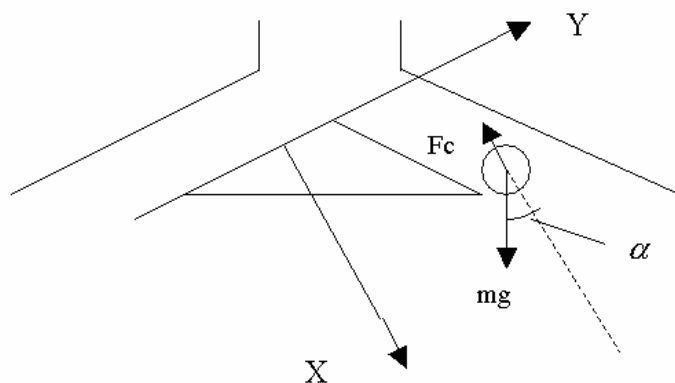


Рисунок 2 – Расчетная схема

$$g_x = g_0 \cos \alpha, \quad g_y = g_0 \sin \alpha \quad (2)$$

Задавая, таким образом, начальные условия, мы рассматриваем частицу, которая максимальное время находится в настильной струе газа. В общем случае скорость V_0 определяем как среднемассовую

$$g_0 = \frac{4G_M}{\pi(D_T^2 - d_T^2)\rho_M},$$

где G_M - массовый расход материала; ρ_M - насыпная плотность.

Преобразуем исходные уравнения:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{3}{4} C_x \frac{\rho}{a\rho_T} (u - g_x)^2 + \left(1 - \frac{\rho}{\rho_T}\right) g \cos \alpha, \\ a_y &= g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_T}\right) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Второе уравнение можно интегрировать. Для интегрирования первого уравнения необходимо знать скорость потока и коэффициент сопротивления частицы при ее обтекании, который, как известно, зависит от ее относительной скорости. В начальный момент после попадания частицы в поток из-за большой относительной скорости имеет место турбулентный или переходной режимы обтекания с $C = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64\nu}{gd}$ коэффициентом сопротивления, изменяющимся в зависимости от числа Рейнольдса, например по формуле Клячко [3].

Для решения уравнения проведем некоторые упрощения:

$$a_x = 18 \frac{\rho}{\rho_T} \frac{\nu}{a^2} (u - g_x) + \frac{1}{6} \sqrt{\left(\frac{a}{\nu}\right)^2} (u - g_x)^{\frac{5}{3}}, \quad (4)$$

$$a_y = g \sin \alpha.$$

В общем случае скорость потока изменяется по y и x .

Для сравнительно небольших расстояний можно принять $u = u_{cp} = \text{const}$. В случае численного решения можно задать и более точные законы распределения скоростей.

Приведем уравнения к безразмерному виду, выбрав в качестве характерных размеров длину конуса-распылителя l , высоту $2h_H$ и время $t_K = \frac{l}{u}$.

Тогда, выполнив преобразования и опуская черточки над безразмерными величинами, получим

$$\begin{aligned} a_x &= A_1(1 - g_x) + A_2(1 - g_x)^{\frac{5}{3}}, \\ a_y &= A_3, \end{aligned} \quad (5)$$

где $A_1 = \frac{18}{\text{Re}} \frac{\rho}{\rho_T} \frac{l}{a}$, $A_2 = \frac{1}{6} \text{Re}^{\frac{2}{3}}$, $A_3 = \frac{gl}{2h_H u} \sin \alpha_3$, $\text{Re} = \frac{ua}{\nu}$.

Начальные условия в безразмерном виде запишутся так:

при $t = 0$

$$\begin{aligned} x &= y = 0; \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{g_0}{u} \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{g_0}{u} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

При турбулентном обтекании частиц коэффициент сопротивления зависит только от их формы и для шара можно принять $C_X \approx 0,44$. Тогда система уравнений (3), преобразованная к безразмерному виду, запишется так:

$$\begin{aligned} a_X &= A_4(1 - g_X)^2 + A_5, \\ a_Y &= A_3, \end{aligned} \quad (7)$$

где $A_4 = \frac{3}{4} C_X \frac{\rho}{\rho_T} \frac{l}{a}$, $A_5 = \frac{gl}{u^2} \cos \alpha$.

Полученные соотношения позволяют приближенно определить время движения частицы до момента соударения с конусом-распылителем при $y = h_H$ и соответствующее ему расстояние x , которое для исключения износа корпуса не должно быть меньше длины направляющей l .

Для определения координат частицы внутри камеры закручивания проинтегрируем систему (1).

Тогда:

$$\begin{aligned} x &= \frac{Cx}{m} \frac{\rho(u - g_X)^2}{2} S \frac{t^2}{2} + g \cos \frac{t^2}{2}; \\ y &= g \sin \alpha t^2. \end{aligned} \quad (8)$$

2. Для предварительной сушки в плоской струе воздуха с учетом изменяющихся теплофизических и геометрических параметров частицы.

Из уравнения равновесия сил (1), действующих на частицу, в проекциях на оси координат, задавая $m = \text{const}$, $\rho_{\text{ЧАСТ}} = \text{var}$, $S = \text{var}$, $c = f(d)$:

$$\rho(\tau) \cdot \frac{4}{3} d^3(\tau) \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{c(\tau) \rho(\tau) [u(\tau) - g_X]^2}{2} \pi d^2(\tau) + \rho(\tau) \frac{4}{3} d^3(\tau) \cdot g \cos \alpha \quad (9)$$

Тогда вторая производная координаты по времени:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{3}{8} c(\tau) \pi [u(\tau) - g_X]^2 \frac{1}{d(\tau)} + g \cos \alpha;$$

Сделаем замену:

$$k_1 = \frac{3}{8} c \pi [u(\tau) - \vartheta_x]^2,$$

тогда:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{k_1}{d(\tau)} + g \cos \alpha. \quad (10)$$

Первая производная координаты по времени:

$$\frac{dx}{d\tau} = \vartheta_{H.X.} + \int_0^\tau k_1 \frac{d\tau}{d(\tau)} + g \cos \alpha \tau.$$

Рассмотрим случай изменения диаметра частицы по степенной зависимости $d = f(\tau)$:

$$d(\tau) = D + k_2 \tau^2; \quad (11)$$

тогда:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \vartheta_{H.X.} + \frac{k_1}{k_2} \int_0^\tau \frac{d\tau}{\frac{D}{k_2} (1 + \tau^2)} + g \cos \alpha \cdot \tau; \\ \frac{dx}{d\tau} &= \vartheta_{H.X.} + \frac{k_1}{k_2 \sqrt{\frac{D}{k_2}}} \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{\frac{D}{k_2}}} \Big|_0^\tau + g \cos \alpha \cdot \tau. \end{aligned}$$

Принимаем $\bar{D} = \frac{D}{k_2}$, тогда:

$$\frac{dx}{d\tau} = \vartheta_{H.X.} + \frac{k_1}{\sqrt{D k_2}} \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{D}} + g \cos \alpha \cdot \tau.$$

Следовательно:

$$x(\tau) = \vartheta_{H.X.} \cdot \tau + \int_0^\tau \frac{k_1}{\sqrt{D k_2}} \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{D}} d\tau + g \cos \alpha \frac{\tau^2}{2}. \quad (12)$$

Принимаем

$$u = \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{D}}; \quad dz = d\tau; \quad du = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{d\tau}{1 + \frac{\tau^2}{D}}; \quad z = \tau. \quad (13)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \vartheta_{H.X.} \cdot \tau + \frac{k_1 \tau}{\sqrt{D k_2}} \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{D}} - \frac{k_1}{\sqrt{D k_2}} \int_0^\tau \frac{\sqrt{D} \cdot \tau}{\bar{D} + \tau^2} d\tau + g \cos \alpha \frac{\tau^2}{2}; \\ x(\tau) &= \vartheta_{H.X.} \cdot \tau + \frac{k_1 \cdot \tau}{\sqrt{D k_2}} \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{D}} - \frac{k_1 \sqrt{D}}{2 \sqrt{D k_2}} \ln |\bar{D} + \tau^2| \Big|_0^\tau + g \cos \alpha \frac{\tau^2}{2}; \\ x(\tau) &= \vartheta_{H.X.} \cdot \tau + \frac{k_1 \cdot \tau}{\sqrt{D k_2}} \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{D}} - \frac{k_1 \sqrt{D}}{2 \sqrt{D k_2}} \ln (\bar{D} + \tau^2) + \frac{k_1 \sqrt{D}}{2 \sqrt{D k_2}} \ln |\bar{D}| + g \cos \alpha \frac{\tau^2}{2}. \quad (14) \end{aligned}$$

Начальные условия для интегрирования:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{d\tau^2} = g \sin \alpha; \\ \frac{dy(0)}{y(0)} = g_{H.Y}; \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= g_{H.Y} + g \sin \alpha \cdot \tau = g; \\ y(\tau) &= g_{H.Y} \cdot \tau + g \sin \alpha \cdot \frac{\tau^2}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Если $k_1 = k_1(\tau) = \frac{3}{8} c(\tau) \pi [u(\tau) - g_x]^2$; то:

$$x(\tau) = g_{H.X} \cdot \tau + \int_0^\tau \int_0^\tau \frac{k_1(\tau)}{d(\tau)} d\tau d\tau + g \cos \alpha \frac{\tau^2}{2}. \quad (17)$$

По предложенным зависимостям несложно рассчитать траектории движения частиц, скорости (рис.3) и размеры аппарата.

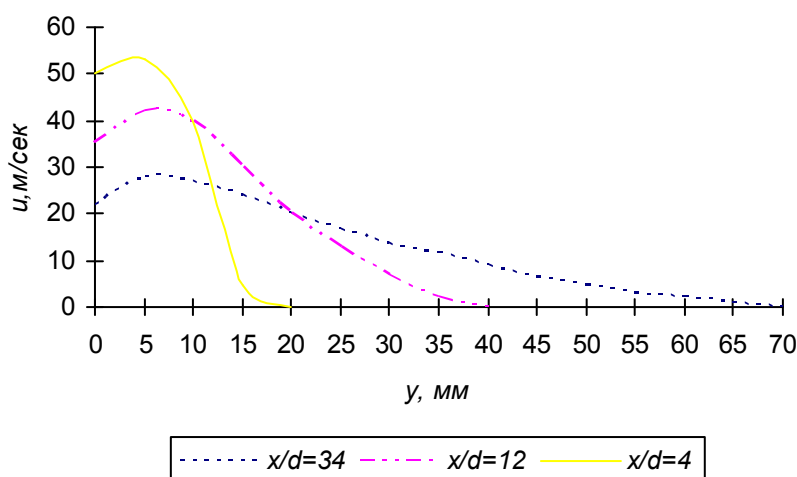


Рисунок 3 - Распределение скоростей в настильной струе

Полученные таким образом уравнения отражают указанные выше особенности термообработки частиц в вихревом аппарате с учетом изменяющихся их размеров и могут дополнить существующие методы проектирования таких установок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии, «Химия», 1971.
2. Бай Ши-и, Турбулентное течение жидкостей и газов, ИЛ, 1962.
3. Клячко Л.С. «Отопление и вентиляция», 4, 1934.

Получено 15.06.2007 г.

КОЛИВАННЯ РІДИНИ В РУХОМІЙ ПОРОЖНИНІ З ЖОРСТКИМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

Актуальність теми. Для зменшення впливу коливання вільної поверхні рідини на стійкість руху системи “тіло – рідина” на практиці застосовують різного роду конструктивні пристрої. Широке розповсюдження отримали пристрої у вигляді жорстких або пружних ребер – перегородок [1-2]. Перегородки здійснюють істотний вплив на динамічні характеристики рідини [3-4]. Було встановлено, що зменшення коливання рідини обумовлено тим, що при визначених режимах взаємодії жорстких елементів з рідиною спостерігається збільшення швидкості потоку відносно перегородок, що призводить до більш інтенсивного розсіювання енергії.

В даній роботі викладені результати теоретичних дослідів розв’язку задачі, що пов’язана зі знаходженням лінії, які характеризуються тим, що для довільного моменту часу t дотична до цих ліній в будь-якій точці співпадає за напрямом зі швидкістю. Наводиться конструктивне зображення розв’язку задачі. Проілюстровані векторні лінії для даної постановки задачі.

Лінії струму для задачі (3). Нехай в полі масових сил знаходиться нерухомий бак, заповнений ідеальною і нестискуваною рідиною з густиною ρ (не обмежуючи загальності, надалі будемо вважати $\rho = 1$). Розглянемо розріз баку, який є перпендикулярним до площини Oz . Обмежимося розглядом антисиметричних коливань рідини в площині Oxy .

Розглянемо спочатку випадок, коли ребра відсутні.

Нехай $\Omega = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, Γ - границя.

$$\Gamma_0 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, y = 1\}, \Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0.$$

Потенціал $\Phi(x, y)$ є розв’язком наступної крайової задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \Phi(0, y) = 0, \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=1} = 0, \quad \Phi \Big|_{\Gamma_0} = u(x) \end{array} \right. \quad (1)$$

В цьому випадку можна знайти ряд частинних розв’язків системи (1)

$$\Phi_n(x, y) = c_n \cosh \frac{\pi(1+2n)y}{2} \sin \frac{\pi(1+2n)x}{2},$$

де

$$c_n = 2 \int_0^1 u(\xi) \frac{\sin \frac{\pi(1+2n)\xi}{2}}{\cosh \frac{\pi(1+2n)}{2}} d\xi.$$

Неважко переконатися, що ліній току для задачі (1) мають вигляд:

$$\sinh \frac{\pi(1+2n)y}{2} \cos \frac{\pi(1+2n)x}{2} = C, \quad (2)$$

де C – довільна константа.

Зокрема, для першого частинного розв’язку криві (2) мають вигляд

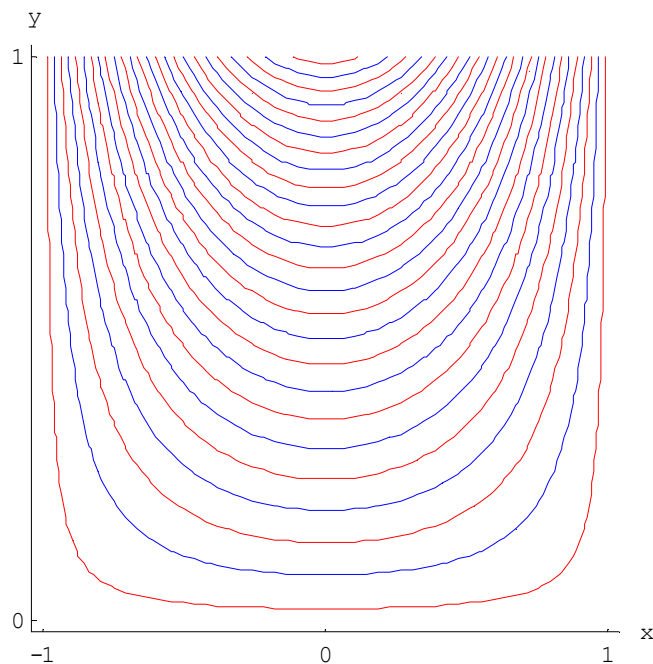


Рисунок 1

Розглянемо квадрат з повздовжніми ребрами довжини a , встановленими на висоті $y = \frac{1}{2}$ з обох сторін висотою 1. Задачу (1) потрібно розглядати в наступній області $\Omega^{(a)} = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ з границею Γ та з двома ребрами довжини a , встановлених на висоті $y = \frac{1}{2}$.

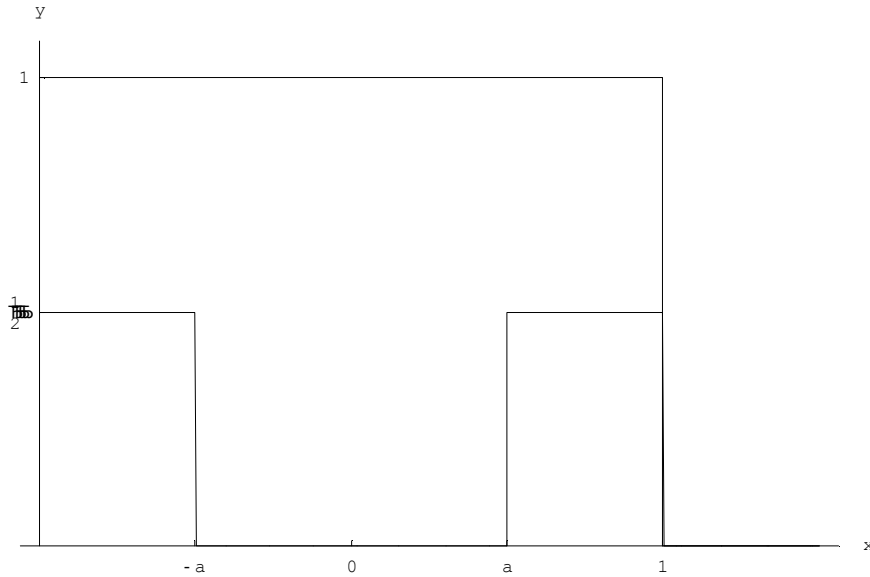


Рисунок 2

Визначимо $\Gamma_0 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, y = 1\}$,

$\Omega_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{2}\}$ і

нехай $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ наступні відрізки $\gamma_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq -a, y = \frac{1}{2}\}$,

$\gamma_2 = \{(x, y) : a \leq x \leq 1, y = \frac{1}{2}\}$, $\gamma = \{(x, y) : -a \leq x \leq a, y = \frac{1}{2}\}$.

Ми визначимо невідому функцію $\varphi(x)$ як нормальну похідну потенціалу на γ . Тоді на $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma$ нормальна похідна від Φ є визначеною і

$$\varphi(x) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=\frac{1}{2}} = \begin{cases} 0, & x \in \gamma_1 \cup \gamma_2, \\ \varphi(x), & x \in \gamma. \end{cases}$$

Зауважимо, що потенціал Φ є розв'язком наступної граничної задачі

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0, & x \in \Omega^{(a)} \setminus \gamma_1 \cup \gamma_2, \\ \Phi = u(x), & x \in \Gamma_0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0, \quad \Phi(0, y) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Частинні розв’язки потенціалу $\Phi(x, y)$ в областях Ω_1 і Ω_2 будуть мати вигляд

$$\Phi_n = \left[a_n \cosh \frac{\pi(1+2n)}{2} \left(\frac{1}{2} - y \right) + b_n \sinh \frac{\pi(1+2n)}{2} (1-y) \right] \sin \frac{\pi(1+2n)x}{2} \quad \text{в } \Omega_1 \quad (4)$$

$$\Phi_n(x, y) = c_n \cosh \frac{\pi(1+2n)y}{2} \sin \frac{\pi(1+2n)x}{2} \quad \text{в } \Omega_2 \quad (5)$$

де

$$a_n = 2 \int_0^1 u(\xi) \frac{\cos \frac{\pi(1+2n)}{2} \xi}{\cosh \frac{\pi(1+2n)}{4}} d\xi, \quad (6)$$

$$b_n = -\frac{2}{a} \int_0^1 \psi(\xi) \frac{U_{1+2n} \left(\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi a}{2} \sin^2 \frac{\pi \xi}{2}} \right)}{(1+2n) \cosh \frac{\pi(1+2n)}{4}} d\xi, \quad (7)$$

$$c_n = \frac{2}{a} \int_0^1 \psi(\xi) \left(\tanh \frac{\pi(1+2n)}{4} + 1 \right) \frac{U_{1+2n} \left(\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi a}{2} \sin^2 \frac{\pi \xi}{2}} \right)}{1+2n} d\xi,$$

$$\psi(\tau) = \tilde{\varphi} \left(\frac{2}{\pi} \arcsin \left(\sin \frac{\pi a}{2} \sin \pi \tau \right) \right), \quad \varphi(\xi) = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \frac{\pi \xi}{2}}{\sin^2 \frac{\pi a}{2} - \sin^2 \frac{\pi \xi}{2}}} \tilde{\varphi}(\xi),$$

$U_k(z)$ - многочлени Чебишова II -го роду.

Лінії току для функції $\Phi(x, y)$ в області Ω_2 співпадають з (2).

Лінії току в області Ω_1 мають наступний вигляд

$$\cos \frac{\pi(1+2n)x}{2} \left[a_n \sinh \frac{\pi(1+2n)}{2} \left(\frac{1}{2} - y \right) + b_n \cosh \frac{\pi(1+2n)}{2} (1-y) \right] = C$$

Таким чином,

Теорема: Лінії тока для задачі (3) мають вигляд

$$\cos \frac{\pi(1+2n)x}{2} \left[a_n \sinh \frac{\pi(1+2n)}{2} \left(\frac{1}{2} - y \right) + b_n \cosh \frac{\pi(1+2n)}{2} (1-y) \right] = C_1$$

в області Ω_1 ,

$$\sinh \frac{\pi(1+2n)y}{2} \cos \frac{\pi(1+2n)x}{2} = C \quad \text{в області } \Omega_2,$$

де a_n, b_n визначаються відповідно з (6), (7), C_1, C_2 - довільні сталі.

Ці лінії току не міняються з часом, і вони є траєкторіями частинок рідини.

На рис 3. проілюстровані сімейство кривих для задачі (3) для першого частинного розв’язку.

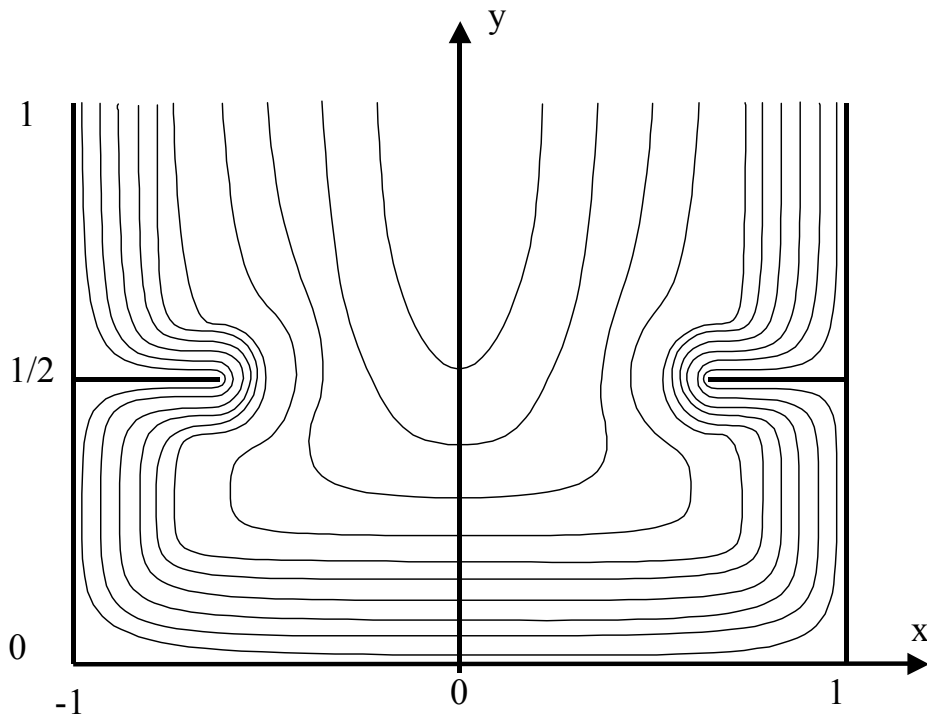


Рисунок 3

ЛІТЕРАТУРА

1. Троценко В.А. Колебания жидкости в подвижных емкостях с перегородками – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006. – 320с.
2. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость – К.: Наукова думка, 1990. – 296с.
3. И.Б. Богоряд, Г.З. Дружинина О демпфировании колебаний вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде с кольцевым ребром. – Прикладная механика, Т.21, №2, 1985 с.126-128
4. Gavriluk I.P., Kulyk A.B., Makarov V.L. Integral equations of the linear sloshing in an infinite chute and their discretization// Computational methods in applied mathematics – 2001. #1. pp. 39-61.

Получено 15.06.2007 г.

С.З. Полищук, В.В. Голуб, В.А. Пивень, Д.М. Шпирок, Ю.В. Дорошенко, А.В. Романенко, Т.М. Пустоварова

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОТКОСОВ И СКЛОНОВ

Природа оползневых явлений, весьма сложных по существу, до настоящего времени остается еще далеко не решенной. Несмотря на работы многих специалистов и ученых, а также многих производственных и научных организаций, прогнозы по оценке степени устойчивости склонов и откосов в ряде случаев не оправдываются, что нередко приводит к большим убыткам. Вместе с тем и борьба с явно выраженными оползневыми явлениями, базировавшаяся на этих прогнозах, очень часто оказывалась малоэффективной или даже безуспешной.

“Определенный круг специалистов усматривает причину несоответствия известных методов оползневых расчетов реальным условиям в их теоретическом несовершенстве и дефектах. В частности, известно, что метод круглоцилиндрической поверхности скольжения Терцаги, пользующийся исключительно широкой популярностью в мировом масштабе, является далеко не совершенным...” [1].

Как известно, одним из основных руководств по оценке устойчивости бортов карьеров и отвалов являются “Методические указания...” [2]. При разработке инженерных методов многими авторами достаточно много внимания уделялось задачам определения формы поверхностей сдвижения. Поэтому в расчетах устойчивости откосов применялись всевозможные тривиальные формы априори заданных поверхностей сдвижения (части окружности, части спирали и др.) (рис. 1.а). Как ни парадоксально, но это привело к замене задачи об оценке устойчивости откосов “близкой” задачей об оценке устойчивости части массива откоса на заданной форме конструкции (рис. 1.б). С помощью заданных форм поверхностей сдвижения на массив накладывалась геометрическая связь. Точки несвободной системы не могут двигаться совершенно произвольно. Их совместимые со связями (допускаемые связями) перемещения,

скорости, ускорения должны удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из уравнений связей. Наиболее распространенная в практике расчета устойчивости откосов форма связи описывается уравнением окружности с центром в точке, выбираемой по определенным правилам.

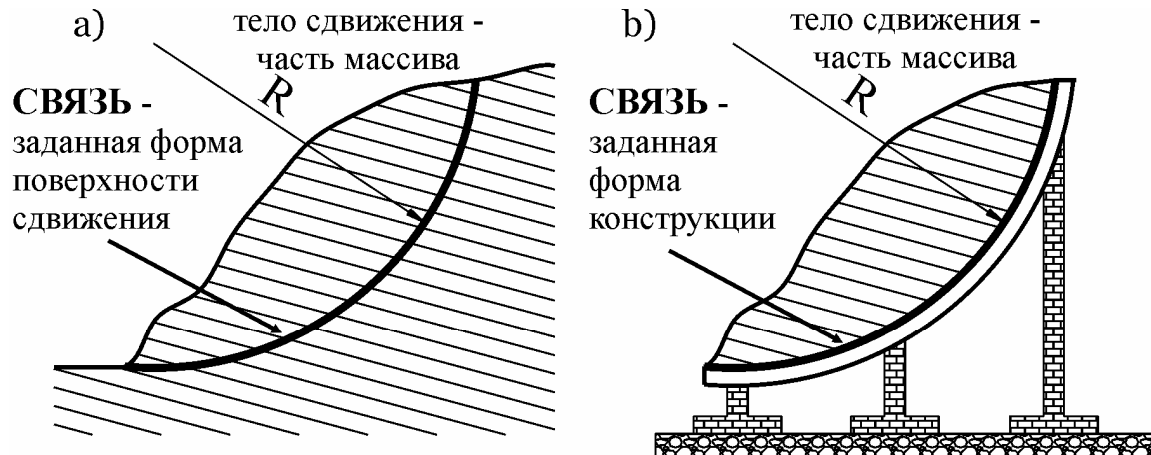


Рис. 1. Особенности традиционных расчетных схем оценки устойчивости откосов и склонов при наложении геометрических связей на породный массив:
 а- традиционное применение заданной формы поверхности сдвижения;
 б- реально рассчитываемая конструкция при применении заданной формы поверхности сдвижения

Остановимся далее на некоторых положениях рекомендаций «Методических указаний...», которые, на наш взгляд, требуют доработки.

Проведенные исследования [3,4] показали, что заранее (до расчета) вводить коэффициент запаса в прочностные свойства пород нецелесообразно с геомеханической точки зрения.

Не вполне логичным представляется и искусственное разделение бортов карьеров на две категории: со сроком эксплуатации до 5 лет и более, так как это условие в «Методических указаниях...» связывается с принятием нормативного запаса устойчивости 1.5 либо 2.0. Кроме того, выбор тех или иных нормативов устойчивости недостаточно увязан с особенностями горно-геологических условий разработки месторождений полезных ископаемых открытым способом.

Одним из основополагающих положений «Методических указаний...» является формула определения величины сцепления породы в массиве по соответствующим данным сцепления породы в образце. Практика расчетов выявляет, что получающиеся по выше указанной формуле значения сцепления в массиве для «выветрелого»

состояния породы не всегда меньше по величине соответствующих значений сцепления для «свежего» состояния породы. Такое соотношение получающихся расчетных значений является несовершенством указанной формулы и требует ее корректировки.

Как правило, массивы горных пород имеют сложно-структурное строение. В «Методических указаниях...» оценка устойчивости уступов, бортов карьеров и отвалов основывается на использовании средневзвешенных величин физико-механических свойств пород сложно-структурного горного массива. Такой вынужденный и упрощенный подход в расчетах устойчивости откосов и склонов был приемлем в прошлом, когда распространенным средством вычислений была логарифмическая линейка. В настоящее время такой подход не целесообразен.

Применяемая в «Методических указаниях...» круглоцилиндрическая форма потенциальной поверхности сдвижения не соответствует по нескольким позициям современным представлениям о местоположении и форме поверхностей сдвижения массивов грунта и горных пород. Как известно, поверхности сдвижения в породном массиве образуются с глубины возникновения элементарных площадок сдвижения H_{90} . Это положение механики грунтов и горных пород при построении круглоцилиндрической поверхности сдвижения учитывается только на верхнем участке поверхности (например, берма уступа), а на нижнем участке поверхности сдвижения не учитывается. Также установлено [5,6], что угол наклона к горизонту элементарных площадок сдвижения (на глубинах более H_{90}) находится в пределах от величины $\varphi = 45^\circ + \frac{\rho}{2}$ до величины угла внутреннего трения ρ . При построении круглоцилиндрической поверхности сдвижения указанные особенности не могут быть учтены. Все отмеченные теоретические несовершенства, главным образом, объясняются тем, что круглоцилиндрическая поверхность является геометрической связью, которая наложена на породный массив, а не потенциальной поверхностью сдвижения.

На наш взгляд наклоны элементарных площадок сдвижения в массиве не должны задаваться заранее (в соответствии с уравнением связи) (рис. 1.b), а должны определяться на основании общих законов

механики грунтов и горных пород [7]. Базируясь на этом подходе, было получено уравнение, описывающее интегральные поверхности сдвижения [5].

Предлагается физически обоснованный новый методический подход, который базируется на применение составных поверхностей сдвижения (состоящих из интегральных поверхностей и поверхностей наименьшего сопротивления), что позволяет выполнять оценку устойчивости откосов и склонов без наложения на массив дополнительных геометрических связей. Форма и местоположение элементарных площадок сдвижения, формирующих составную поверхность сдвижения, определяется физико-механическими свойствами пород массива, их геометрией, а также геометрией дневной поверхности откоса. Установлено, что обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка позволяет описывать составные поверхности сдвижения $y(x)$ в породном массиве

$$\frac{dy(x)}{dx} = \begin{cases} F_1(h(x), C, \gamma, \rho) & \text{при } h(x) \leq H_{90} \\ F_2(h(x), C, \gamma, \rho) & \text{при } h(x) > H_{90} \end{cases}, \quad (1)$$

где

$h(x) = H(x) - y(x)$ – функция, описывающая глубину заложения площадок сдвижения в породном массиве, x – абсцисса, отсчитываемая от подошвы откоса, C – сцепление в породе, γ – объемный вес породы, ρ – угол внутреннего трения породы, $H(x)$ – функция, описывающая дневную поверхность откоса, H_{90} – глубина возникновения площадок сдвижения в породном массиве,

$$F_2(h(x), C, \gamma, \rho) = \frac{1}{2 \cdot C} \{ \gamma \cdot h(x) - \sqrt{\gamma^2 \cdot h(x)^2 - 4 \cdot C \cdot \gamma \cdot \operatorname{tg}(\rho) \cdot h(x) - 4 \cdot C^2} \} -$$

функция, которая формирует интегральную поверхность сдвижения,

$F_1(h(x), C, \gamma, \rho)$ – функция, которая формирует поверхность наименьшего сопротивления сдвижению.

Вид функции $F_2(h(x), C, \gamma, \rho)$ для сложно-структурного массива приведен в работе [6]. Подход к получению функции $F_1(h(x), C, \gamma, \rho)$ достаточно громоздкий, поэтому здесь не рассматривается.

В расчетных схемах, которые используются в "Методических указаниях...", на породный массив накладываются дополнительные геометрические связи (рис. 1.b). Несомненно, любопытно оценить устойчивость откосов без наложения дополнительных геометрических

связей на породный массив и определить форму поверхностей сдвижения. Для этого возьмем в качестве примера расчет устойчивости откоса при пологом залегании ослабления (Приложение 7 “Методических указаний...”). Воспользуемся описанным выше методическим подходом, базирующимся на применении составных поверхностей сдвижения. Физико-механические свойства массива и ослабления, необходимые для выполнения расчетов устойчивости, получим из измененных значений C и ρ (в которые введен коэффициент запаса). Результаты оценки устойчивости приведены на рис. 2.а. Рассмотрим участки i поверхности из семейства составных поверхностей сдвижения. Отрезок $B_i K_i$ определяет глубину возникновения площадок сдвижения в породном массиве.

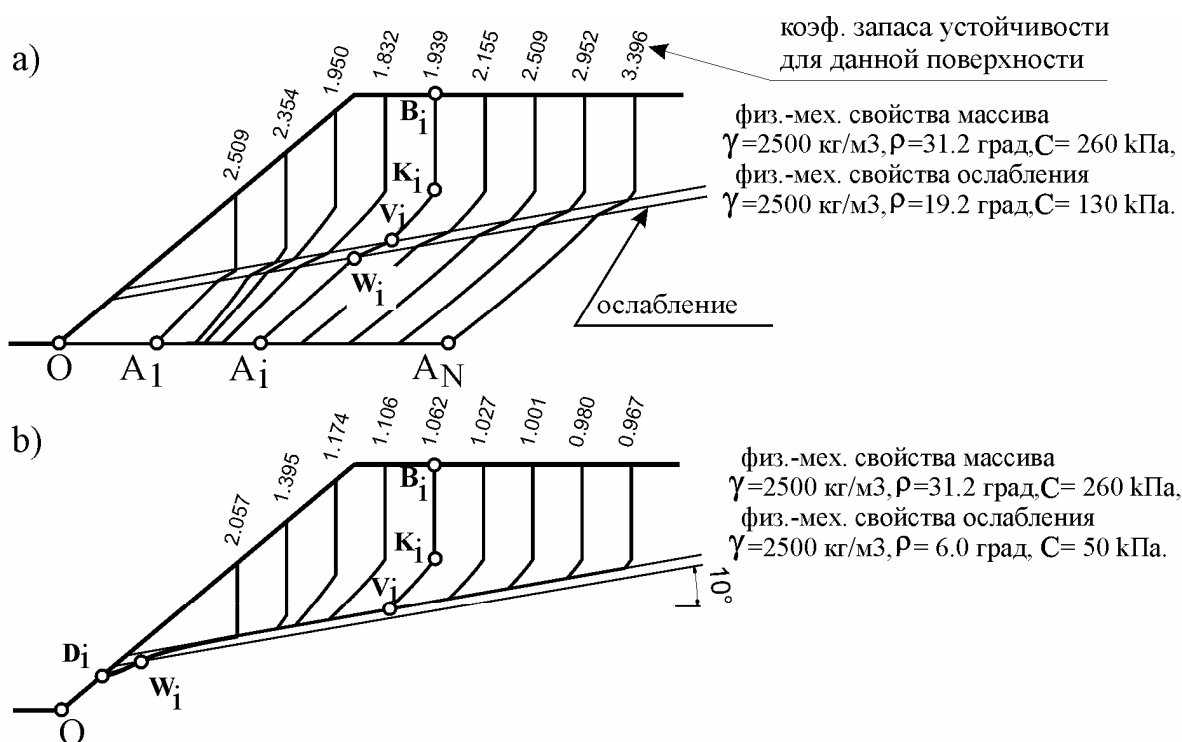


Рис. 2. Применение составных поверхностей сдвижения для оценки устойчивости откоса при пологом залегании ослабления: а- заданные физ.-мех. свойства ослабления (из “Методических указаний...”); б- вариант физ.-мех. свойств ослабления, который позволяет реализовать ослабление

Участки $K_i V_i$, $V_i W_i$, $W_i A_i$ описываются интегральной поверхностью сдвижения. Особо следует отметить, что участок поверхности $V_i W_i$ пересекает ослабление. Такое местоположение и форма участка $V_i W_i$ обусловлены физико-механическими свойствами ослабления породного массива. Как видно, интегральные поверхности не пошли вдоль ослабления. Если же следовать [2], то мы должны были

реализовать схему типа (рис. 1.b), заложив в расчет устойчивости физико-механические свойства ослабления по заданной геометрической связи. Продолжая рассмотрение, можно определить, при каких значениях физико-механических свойств ослабления поверхности сдвижения будут проходить по ослаблению. Один из возможных вариантов приведен на рис. 2.b. Отметим, что для этого случая участок поверхности сдвижения V_iW_i описывается дифференциальным уравнением (1), при этом, реализуется, как условие $h(x) > H_{90}$, так и условие $h(x) \leq H_{90}$. Следующий участок поверхности сдвижения W_iD_i реализуется только с условием $h(x) \leq H_{90}$. В точке D_i составная i поверхность сдвижения выходит на дневную поверхность откоса. Дополняют характеристику состояния откоса коэффициенты запаса устойчивости, рассчитанные по методу алгебраического сложения сил для семейства составных поверхностей сдвижения. Как видно из рис. 2, семейство составных поверхностей сдвижения является хорошей иллюстрацией того, как распределяются в массиве участки возможного сдвижения и где следует ожидать заколы на дневной поверхности откоса. Составная поверхность сдвижения, которая имеет наименьший коэффициент запаса устойчивости, является наиболее слабой составной поверхностью сдвижения.

Таким образом, новые методические подходы к оценке устойчивости откосов и склонов позволяют более полно учесть реальную структуру породного массива и исключить при оценке устойчивости дополнительные геометрические связи, обусловленные необоснованно задаваемыми формами поверхностей сдвижения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов Н.Н. Механика грунтов в практике строительства (оползни и борьба с ними) Уч. пособие для вузов.- М.: Стройиздат.- 1977.- 320с.
2. Методические указания по определению углов наклона бортов, откосов уступов и отвалов, строящихся и эксплуатируемых карьеров. - Л.: ВНИМИ.- 1972. - 164 с.
3. Полищук С.З. Геомеханические задачи рационального природопользования на открытых горных работах.- К.: Наук.думка, 1998. - 180 с.
4. Прогноз устойчивости и оптимизация параметров бортов глубоких карьеров // Под общ. ред. д-ра техн. наук С.З. Полищука.- Днепрпетровск: Полиграфист.- 2001.- 371с.

5. Голуб В.В., Полищук С.З. Дифференциальное уравнение линии сдвижения природных и техногенных откосов // Сб. научн. тр. НГА Украины.- Днепропетровск: РИК НГАУ.- 2000. -№9, Т. 2.- С.140-146.
6. Голуб В.В., Полищук С.З. Оценка устойчивости приоткосной области массивов грунтов и горных пород с использованием интегральных поверхностей сдвижения // Сб. научн. тр.: Строительство. Материаловедение. Машиностроение. - Днепропетровск: ПГСА.- 2004.- Вып. №28.- С.77-82.
7. Шапарь А.Г., Полищук С.З., Голуб В.В., Баранов Ю.Д., Шурыгин В.Д. Научная идея о местоположении и форме поверхности сдвижения в массивах грунта и горных пород// Научные открытия.- М: «Сударыня».- 2004.- Вып. №2.- С.55-56.

Получено 15.06.2007 г.

УДК 539.3

И.И.Аникьев, М.И.Михайлова, Е.А.Сущенко

ДЕЙСТВИЕ ИМПУЛЬСНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ТОНКУЮ УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ С РАЗРЕЗОМ

Изучению влияния неоднородностей (типа отверстий, разрезов, трещин и т.п.) на деформированное состояние, потерю устойчивости и разрушение элементов конструкций посвящено большое число публикаций [например, 1 - 3].

В данной работе проведены экспериментальные исследования деформирования сплошных упругих пластин, а также пластин с разрезом при падении на них длинной ударной волны ступенчатой формы.

Методика исследования. Схема установки приведена в [4]. Испытывались пластины из стеклотекстолита марки СФ-1-150 ($E = 2,6 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 1,7$ г/см³), как материала, который сохраняет свои упругие свойства при мно-гократном нагружении.

Пластина толщиной 2,5 мм, предварительно защемленная по двум коротким сторонам между массивными стальными рамками, располагалась в конце канала диафрагменной ударной трубы. Рабочий размер пластины ($a = 140$ мм, $b = 210$ мм) совпадал с размером внутреннего сечения канала ударной трубы. Установка давала возможность формировать в воздухе ударные волны ступенчатой формы амплитудой до $0,5 \cdot 10^5$ Па, длительностью $8 \cdot 10^{-3}$ с.

Прямолинейный разрез пластины шириной около 0,5 мм, длиной L от 10 до 70 мм располагался в средней части пластины параллельно защемленным сторонам. Регистрация деформаций велась с помощью тензорезисторов, наклеенных по обе стороны пластины в продольном (вдоль оси x , параллельно свободным сторонам b) и поперечном (вдоль оси y , параллельно защемленным сторонам a), а также вдоль берегов разреза.

Сигналы тензорезисторов регистрировались на экране персонального компьютера с помощью быстродействующего устройства ввода-вывода и обработки аналоговой цифровой информации L1250, работающей в четырехканальном режиме в полосе частот от нуля до 25 кГц.

Результаты исследования. На рис.1,а приведена осциллограмма изгибных деформаций сплошной пластины ε_x^u вблизи заземленного края ($x = 0,45$; $y = 0$). Рис.1,б иллюстрирует поведение пластины с разрезом 70 мм ($L = a/2$). Верхняя кривая – ε_x^u ($x = 0,45$; $y = 0$), нижняя – ε_x^u ($x = 0$; $y = 0,39$), две средних кривых – мембранные деформации ε_x^m в тех же точках. Данные, приведенные на всех рисунках, получены при действии на пластины волновой нагрузки $0,12 \cdot 10^5$ Па.

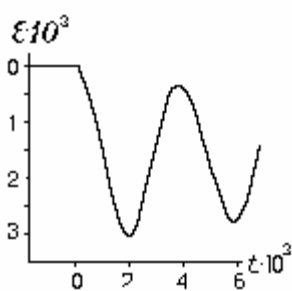


Рис. 1,а

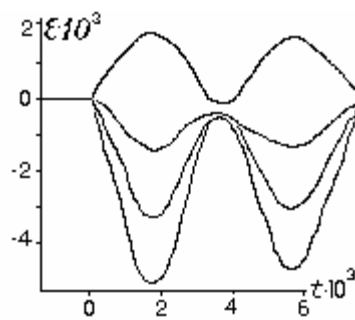


Рис. 1,б

Закономерность деформирования сплошной пластины и пластины с разрезом одинакова: прогибаясь в направлении действия волны, пластины совершали затухающие колебания относительно постоянного уровня, зависящего от значения давления в волне нагрузки. Колебания не являлись строго гармоническими.

При обработке осциллограмм фиксировались значения наибольших деформаций, а также измерялся интервал времени T между двумя первыми максимумами. При изменении L от 10 до 70мм значения T возросли примерно на 6 %.

На рис.2 приведены эпюры изгибных деформаций ε_y^u в момент появления первого максимума для пластин с разрезами различной длины (безразмерная длина разреза L/a обозначена около каждой кривой). Разрез наибольшей длины показан на рисунке сплошной темной прямой линией вдоль оси y от $y = -0.25$ до $y = 0.25$. С левой стороны от оси ординат кривые построены по показаниям тензорезисторов, наклеенных вдоль разреза на минимальном расстоянии от его берега (тензорезисторы условно обозначены короткими черточками). Правая сторона рисунка – эпюры изгибных деформаций ε_y^u средней части пластины от конца разреза до ее свободного края.

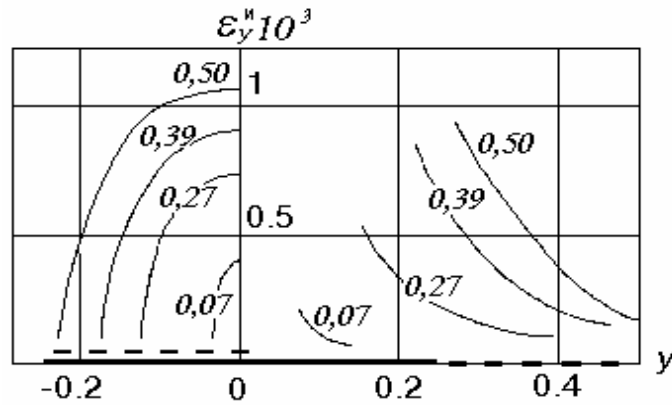


Рис. 2

Сплошная пластина [5], защемленная по двум противоположным сторонам, под действием нормально действующей нагрузки изгибается как балка, т.е. деформации изгиба возникают только в направлении, перпендикулярном защемленным сторонам. Вдоль линий, соединяющих свободные стороны, изгибные деформации имеют нулевые значения.

Приведенные эпюры показывают, что разрез, длина которого составляет менее 10% ширины пластины a , приводит к локальным изменениям деформирования пластины. По мере возрастания величины L до половины ширины пластины a изгибные деформации вдоль разреза охватывает всю пластину. Наибольшие изгибные деформации наблюдаются в середине разреза, а также вблизи его концов.

Изменение изгибных деформаций ε_x'' и ε_y'' вдоль оси x показаны на рис.3. По оси абсцисс отложено расстояние от центра пластины до точки измерения $x = x/b$. Слева от оси ординат представлены эпюры ε_x'' сплошной пластины ($L = 0$) и пластин с разрезами, длина которых составляла 0.07; 0.27; 0.39 и 0.5 характерного размера пластины a . Справа от оси ординат – кривые изменения деформаций ε_y'' от центра пластины до защемленной стороны.

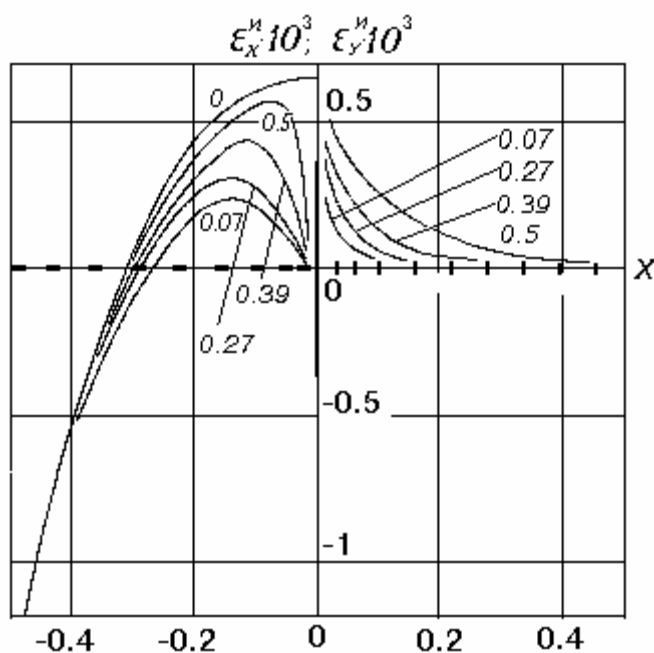


Рис.3

Данные измерений показывают, что появление разреза длиной, составляющей всего 7% ширины пластины a , приводит к качественному изменению эпюры изгибных деформаций. Если сплошная пластина, изгибаясь как балка, испытывала в середине ($x \sim 0$) максимальные деформации, то появление разреза приводит к резкому падению ε''_x в области малых значений x . Максимумы эпюр изгибных деформаций смещаются вправо и влево от разреза, и падают с ростом его длины.

Не приводя графиков, отметим, что с ростом L наблюдалось линейное падение величин максимальных изгибных деформаций ε''_x . Отмечается также небольшое смещение точки перегиба (точки изменения знака изгибных деформаций) к середине пластины. В зонах от точек перегиба до защемленных краёв влияние разреза и его длины можно считать несущественным.

Выводы. Тонкие сплошные пластины и пластины с прямолинейным разрезом при падении на них ударной волны ступенчатой формы совершают затухающие колебания около нового положения равновесия, зависящего от значения скачка давления в падающей ударной волне. В области упругих деформаций пластины ведут себя как линейные колебательные системы с периодом колебаний, слабо растущим с увеличением длины разреза. Разрез вносит качественные изменения в деформированное состояние

пластины: в процессе колебаний пластина с разрезом изгибается не только в продольном, но и в поперечном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дышель М.Ш. Устойчивость и разрушение пластин с краевой трещиной при растяжении// Прикл. механика. – 2006. – 42, №11. – С. 121 - -125.
2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. Киев.: Изд. – полиграф. центр “Киевский университет”, 2005. -.536 с.
3. Malezhik M.P., Malezhik O.P., Zirka A.I., Chernyshenko I.S. Dynamic Photoelastic Study of Wave Fields in Elastic Plates with Stress Concentrators//Int. Appl. Mech. – 2005. – 41. - №12. – P. 1399 – 1406.
4. Экспериментальные исследования тонкостенных конструкций/ Гузь А.Н., Заруцкий В.А., Амиро И.Я. и др. – К.: Наук. думка, 1984. – 240 с.
5. Аникьев И.И., Михайлова М.И., Списовский А.С., Тимофеев А.Л. Экспериментальное исследование деформирования тонких пластин при статическом нагружении и при взаимодействии их с ударной волной// Прикл. механика. – 1983. – 19, №10.– С. 89 – 94.

Получено 15.06.2007 г.

УДК 539.3

В.Н. Чехов, Э.А.Ткаченко

УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТЫХ ПОКРЫТИЙ В ТРИБОСОПРЯЖЕНИИ ПРИ ЖИДКОСТНОЙ СМАЗКЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНТАКТА

Введение. При эксплуатации элементов конструкций триботехнического назначения в зоне контакта сопрягаемых поверхностей покрытий используются различные виды смазочных материалов. В зависимости от вида применяемого для этого материала, функционального его назначения и условий эксплуатации в литературе выделяют различные классы смазочных материалов и видов смазки. В частности [3] отмечено, что смазочные материалы могут быть твердыми или жидкими. В первом случае между контактирующими между собой поверхностями в трибосопряжении возникает контакт сухого трения. В случае жидкой смазки в зависимости от толщины слоя смазки выделяют граничный, смешанный и жидкостный виды смазки. В последнем случае при полном отделении неровностей контактирующих поверхностей возникает упругогидродинамический и гидростатический виды смазки, которые реализуются при очень высоких давлениях, действующих на поверхностях контакта сопрягаемых покрытий. При выборе расчетной схемы в задачах расчета устойчивости слоистых покрытий триботехнического назначения в работах [2,4], проблема сводится к исследованию поверхностной потери устойчивости в слоистой среде, сопряженной со структурно однородным полупространством. Реакция взаимодействия контактирующих между собой тел заменяется системой равномерно распределенных поверхностных нагрузок. Исходя из указанных выше характерных особенностей рассматриваемого здесь вида смазки считаем, что при ее использовании в расчетной схеме реакцию взаимодействия сопрягаемых элементов конструкций необходимо моделировать поверхностными распределенными нагрузками следящего типа. Поэтому ниже в рамках модели кусочно-однородных сред рассматривается задача потери устойчивости и определения критических значений параметров нагружения и волнообразования в

слоистой полуограниченной среде, находящейся в поле действия сжимающих распределенных нагрузок, когда к граничной поверхности ее приложена система распределенных нагрузок следящего вида. Как правило в зоне контакта элементов триботехники имеет место повышенный уровень температуры, поэтому при расчетах на устойчивость покрытий необходимо учитывать температурный фактор.

§1 Постановка задачи; основные соотношения. Для решения задачи используется трехмерная линеаризованная теория устойчивости при малых докритических деформациях, когда основное состояние определяется по геометрически линейной теории [1]. Для учета температуры используется квазистатический подход, когда температурное поле влияет только на значения компонент докритического напряженно-деформированного состояния и не учитывалось при получении линеаризованных уравнений устойчивости. Объект исследования моделируется слоистой средой, состоящей из слоистого покрытия, сопряженного со структурно однородным основанием. Слоистая среда находится под действием сжимающих в плоскости слоев статической распределенной нагрузкой интенсивности p_1 . К поверхности покрытия приложена система сил p_3 следящего характера. Материал слоев и основания считаем линейно упругим трансверсально - изотропным сжимаемым. Поверхность покрытия нагревается от температуры естественного состояния T_0 до рабочей температуры $\hat{T}$. При этом величина $\delta = [(T - T_0)/T_0] > 1$. Между отдельными элементами слоистой среды предполагаем выполнение условий абсолютно жесткого силового и идеального теплового контактов. Исследуется поверхностная форма потери устойчивости покрытия. В работе [1] рассмотрены различные подходы для исследования поставленной задачи. Следуя этой работе считаем, что соотношения постановочного характера из работы [2], где не учитывалось влияние температуры на устойчивость покрытий, сохраняются без изменения. Изменяются только выражения для компонент докритического напряженного состояния и физико-механические характеристики отдельных слоев и полупространства. В силу принятой постановки и расчетной схемы предполагаем, что в окрестности приповерхностной зоны, где реализуется возмущенное

напряженное состояние, температурное поле изменяется несущественно. Поэтому температурное поле в этой зоне можно считать однородным. В этом случае докритическое напряженное состояние рассматриваемой слоистой среды является кусочно – однородным [4]. Уравнения устойчивости в пределах каждого элемента слоистой среды в имеют вид

$$\left[(a_{11} - p_{11}) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (G_{12} - p_{22}) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (G_{13} - p_{33}) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] u_1 +$$

$$+ (a_{12} + G_{12}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (a_{13} + G_{13}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} = 0. \quad (1, 2, 3, \text{Curl}). \quad (1)$$

Связь между компонентами возмущений напряжений σ_{ij} и перемещений u_i используем в виде

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + (1 - \delta_{ij}) G_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

В соотношениях (1),(2) через a_{ij}, G_{ij} обозначены упругие постоянные материала слоистой среды, а через x_i -лагранжевы координаты, до деформирования совпадающие с декартовыми. Координата x_3 направлена по нормали к поверхности покрытия. Компоненты возмущений поверхностных следящих нагрузок $\tilde{P}_i$ будут

$$\tilde{P}_i = -p_3 \left(N_i \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - N_\alpha \delta_{\beta i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right). \quad (3)$$

Здесь обозначено: δ_{ij} - символ Кронекера; N_i - единичный орт нормали к поверхности, к которой приложена следящая нагрузка в недеформированном состоянии; p_3 - интенсивность нагрузки на поверхность, которая определяется нормалью N_3 . По повторяющимся индексам в формулах (2),(3) предполагается суммирование. Для исследования устойчивости покрытия использован статический метод Эйлера и соответствующие ему критерии устойчивости. Поскольку в общем случае следящая нагрузка не является консервативной, для его использования необходимо выполнение достаточных условий его применимости. Когда нагрузка p_3 приложена к части S_0 поверхности слоистого тела, ограниченной кривой L , такие условия имеют вид [1].

$$\int_L (u_3^{(1)} u_m^{(2)} - u_3^{(2)} u_m^{(1)}) dL = 0, \quad (4)$$

где u_3 - возмущения перемещений, направленных вдоль нормали к поверхности

S_0 , а u_m - по нормали к кривой L в плоскости S_0 . Условия механического кон - такта между отдельными элементами слоистой среды в возмущениях принимают вид

$$P_i^{(k)}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) \Big|_{x_3^{(k)} = -h_k} = P_i^{(t)}(x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, x_3^{(t)}) \Big|_{x_3^{(t)} = 0},$$

$$u_i^{(k)}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}) \Big|_{x_3^{(k)} = -h_k} = u_i^{(t)}(x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, x_3^{(t)}) \Big|_{x_3^{(t)} = 0} \quad (t = k+1) \quad (5)$$

В соотношениях (5) обозначено : h_k - толщина k - го слоя; k - порядковый номер слоя ($k = \overline{1, T}$). На «бесконечности» для полуплоскости имеем условия затухания возмущений

$$u_i^{(T+1)}(x_1^{(T+1)}, x_2^{(T+1)}, x_{(T+1)}) \Big|_{x_3^{(T+1)} \rightarrow -\infty} \rightarrow 0. \quad (6)$$

На поверхности покрытия ($x_3^{(1)} = 0$) граничные условия в возмущениях будут

$$P_i^{(1)}(x_1, x_2, 0) = \tilde{P}_i \quad (7)$$

Задача нахождения критических значений параметров задачи обуславливающих поверхностную неустойчивость слоистых покрытий сводится к исследованию на собственные значения краевой задачи (1), (5)-(7) при соответствующих значениях компонентов докритического напряженного состояния и физико - механических характеристик покрытия и полупространства. В качестве основных параметров задачи определяются параметры волнообразования $\omega_{кр} = (\pi H)/l$ и нагружения $t_{кр} = 10^2 (p_1/E_3)$, характеризующиеся соответственно длиной полуволны формы потери устойчивости l_i и величиной интенсивности сжимающей нагрузки p_1 .

§2. Решение для конкретной задачи. Влияние следящих поверхностных нагрузок при повышенных температурах на устойчивость слоистого покрытия рас-

смотрим на примере двухслойного покрытия (первый слой - высоколигированная сталь 3X13; второй - латунь Л62; основание -

чугун МСЧ 28-48) в рамках плоской деформации в плоскости x_1Ox_3 . Для решения задачи использован матричный подход, изложенный в работах [2,4-6]. Расчеты проводились при двух значениях температуры $\hat{T}$ - 20⁰С и 270⁰С. Необходимые значения физико-механических и теплофизических характеристик элементов слоистой среды приведены в таблице [4]. Влияние повышенного температурного поля на поверхностную устойчивость покрытия можно оценить за счет учета измененных физико-механических характеристик отдельных элементов рассматриваемой слоистой среды. При решении задачи фиксировались параметры: $n_k = E_k / E_{T+1}$, $y = p_3 / p_1$, ν_k , $\rho_k = h_k / H$. При $\theta \neq 0$ значения коэффициентов α_k^t выбирались из таблицы; $H = \sum_{k=1}^T h_k$. При $\hat{T} = 20^0$, имеем : $n_1 = 1,88$; $n_2 = 0,83$; $\nu_1 = 0,278$; $\nu_2 = 0,32$; $\nu_3 = 0,23$; . При $\hat{T} = 270^0$ С имеем $n_1 = 1,875$; $n_2 = 0,63$; $\nu_1 = 0,29$; $\nu_2 = 0,42$; $\nu_3 = 0,25$. В обоих случаях было принято $\rho_1 = 0,15$; $\rho_2 = 0,85$. Отсюда следует, что при повышении температуры покрытия на 250⁰ в основном изменились два параметра n_2 и ν_2 , величина которых обусловлена свойствами второго слоя. Анализ решения задачи показал, что совместное воздействие следящих поверхностных нагрузок и повышенного температурного поля может привести к поверхностной неустойчивости слоистых покрытий, первоначально находящихся в состоянии устойчивого равновесия. Например при нормальной температуре $\hat{T} = 20^0$ состояние равновесия покрытия можно считать устойчивым ($t_{kp} = 25,55$) на всем диапазоне изменения параметра $y = p_3 / p_1$.

Тем -ра $\hat{T}^0$	Материал	Модуль Юнга $E \times 10^{-6}$ (кг/см ²)	Коэффиц. Пуассона ν	Коэфф. линейн. расширения $\alpha_t \times 10^5$ (1/град)
20	Сталь 3Х13	2,25	0,278	1,4
20	Латунь Л62	1,02	0,32	2,6
20	Чугун МСЧ 28-48	1,2	0,23	1,1
270	Сталь 3Х13	2,8	0,29	1,4
270	Латунь Л62	0,8	0,42	2,6
270	Чугун МСЧ 28-48	1,15	0,25	1,1

При $T = 270^{\circ}C$ имеем $t_{kp} = 17,85$, что составляет 69 % от первоначального значения этой величины. Можно ожидать, что при более высоких значениях температуры величина t_{kp} будет уменьшаться и состояние равновесия покрытия может стать неустойчивым. Этот вывод имеет место лишь для выбранных параметров слоистой среды. В других случаях необходимо проводить дополнительные исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. К.; Наук. думка.-1986.-511с.
2. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Поверхностная неустойчивость слоистых материалов при малых и конечных докритических деформациях//Мех. Композитн. материалов.-1984.- № 5. - С. 838-845
3. Справочник по триботехнике. В 3-х томах. Т.2. Смазочные материалы, техника смазки, опоры скольжения и качения. Под редакцией Хебды М., Чичинадзе А.В. - М.: Машиностроение, 1990. - 416с.
4. Ткаченко Э.А. Устойчивость слоистых покрытий триботехнического назначения под действием следящих нагрузок// Прикл. механика.-1999.- №6.- с. 32-38.
5. Ткаченко Э.А., Чехов В.Н. Совместное влияние температуры и поверхностных сжимающих нагрузок на устойчивость многослойных упругих покрытий при малых докритических деформациях// Прикл. механика.-1998.-34,№8.-С.-32 -39.
6. Чехов В.Н. Поверхностная неустойчивость слоистой среды, сопряженной с однородным полупространством // Прикл. механика.- 1984.- № 11.-С. 35-42.

Получено 15.06.2007 г.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УСЕЧЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

В работе изложены результаты решения задачи для непологой усеченной конической оболочки кругового поперечного сечения. Оболочка изготовлена из композитного материала и нагружена осевыми сжимающими усилиями интенсивности p .

1. Решение рассматриваемой задачи основано на использовании основных уравнений теории многослойных композитных оболочек, записанных в криволинейной ортогональной системе координат (α, β, γ) . Система координат связана с оболочкой таким образом, чтобы линии α и β совпадали с линиями главных кривизн срединной поверхности, а координата γ отсчитывалась в направлении внешней нормали. Для исследования НДС тонкостенных оболочек из композитных материалов применяется уточненная двумерная модель теории тонких оболочек типа Тимошенко [1], учитывающую специфические особенности деформирования таких материалов (наличие деформации поперечного сдвига).

В качестве разрешающих уравнений для произвольной оболочки из композитного материала используем уравнения, приведенные в [2].

2. Для решения задачи используется вариационно-разностный метод [3,4]. Согласно принципу возможных перемещений истинные перемещения обращают функцию Лагранжа в относительный минимум

$$\delta \Pi = 0, \quad (1)$$

что эквивалентно равенству нулю всех частных производных по независимым переменным. Здесь $\Pi = V - A$, где V - потенциальная энергия деформации, A - сумма работ внешних сил на независимых перемещениях оболочки.

Потенциальная энергия деформации представляется в виде

$$V = \int_G \Phi dG, \quad (2)$$

Из уравнения (1) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно дискретных значений перемещений срединной поверхности и функций сдвига $U_i (i = 1, 4, 7, 10, 13)$

$$\sum_{a=i-1}^{i+1} \sum_{b=j-1}^{j+1} \sum_{k=1}^{13} P_{kl}^{ab} U_k^{ab} = Q_l^{ij} \quad (l, k = 1, 4, 7, 10, 13; \quad i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Здесь P_{kl}^{ab} - значение коэффициента в узле a, b при известной U_k^{ab} в уравнении для неизвестной U_l^{ij} , который является функцией геометрических и механических параметров оболочки, а также способа разбиения; Q_l^{ij} - значения в узле (i, j) l -х компонент силовой нагрузки.

Матрица системы уравнений (3) симметрична, положительно определена, имеет ленточную структуру, что позволяет сократить объем используемой памяти при расчетах на ЭВМ. На основе изложенного выше подхода реализован алгоритм, где решение системы уравнений (3) находится с помощью метода квадратных корней Холецкого [3].

3. В качестве примера определим НДС непологой усеченной конической оболочки кругового поперечного сечения с толщиной $h = \text{const}$. Срединная поверхность оболочки отнесена к системе координат (s, θ) , где s - расстояние вдоль образующей от сечения r_0 (r_0 = наименьшее расстояние образующей от оси вращения). Главные кривизны и коэффициенты Ляме для непологой оболочки представляются в виде

$$k_1 = 0, \quad k_2 = (r_0 + s \sin \varphi)^{-1}, \quad A = 1, \quad B = r_0 + s \sin \varphi, \quad (4)$$

где φ - угол наклона образующей к оси вращения оболочки. При расчете по теории пологих оболочек следует принять $B = r_0 + s$.

Оболочка нагружена по сечению $s = 0$ осевыми сжимающими усилиями интенсивности p . Граничные условия на контуре $s = 0$ примем в виде

$$T_s = p \cos \varphi, \quad Q_s = p \sin \varphi, \quad S_{s\theta} = G_s = H_{s\theta} = 0.$$

На контуре $s = S$ (S - длина образующей) имеют место условия шарнирного закрепления

$$u_s = u_\theta = w = G_s = H_{s\theta} = 0.$$

Расчеты проведены для ортотропной оболочки с параметрами

$$S/h = 50; r_0/h = 10; E_2/E_1 = 0,5; \nu_1 = 0,3; G_{12}/E_1 = 0,385; G_{13}/E_1 = G_{23}/E_1 = 0,05.$$

В таблице представлены значения усилий $T_\theta/E_1 h \cdot 10^4$ вдоль образующей при различных значениях угла $\varphi \{\pi/3; \pi/6; 0\}$. Заметим, что случай $\varphi = 0$ соответствует цилиндрической оболочке. Величинам в числителе соответствуют значения усилий, полученных в рамках теории непологих оболочек, а в знаменателе – по теории пологих оболочек.

Таблица

φ	s/S					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\pi/3$	1,657	-0,060	0	0	0	-0,017
	1,573	-0,047	-0,002	0	0	-0,006
	0,956	-0,036	0	0	0,002	-0,031
$\pi/6$	0,902	0,026	0	0	0,001	-0,009
	0	0	0	0	0,003	-0,075
0	0,030	-0,001	0	0	0,001	-0,013

ЛИТЕРАТУРА

1. Шнеренко К.И. Анализ расчетных схем для оболочек из композитных материалов с отверстиями // Прикл.механика. - 1981. - 17, №4. - С.24-30.
2. Методи розрахунку оболонок. В 5 т. Т.1. Гузь О.М., Чернишенко І.С., Чехов Вал.М., Чехов Вік.М., Шнеренко К.І. Теорія тонких оболонок, послаблених отворами. - Київ: Наук.думка, 1980.-636 с.
3. Годзула В.Ф. Применение вариационно-разностного метода к расчету композитных цилиндрических оболочек с отверстиями // Прикл.механика.- 1989.-25, №11. - С.110-113.
4. Schnerenko K.I., Godzula V.F. Stress state of a composite cylindrical shell with Sizeable circular hole//Int.Appl.Mech.-2003.-39, №11.- P.1323-1327.

Получено 15.06.2007 г.

ОСОБЕННОСТИ ВЛИЯНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ ОБОЛОЧКИ НА ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС В СИСТЕМЕ ОБОЛОЧКА-ВЯЗКАЯ ЖИДКОСТЬ

Введение. Среди широкого круга вопросов, непосредственно связанных с постановкой и решением задач гидроупругости, важными в практическом и теоретическом смысле являются вопросы исследования распространения волн в системах оболочка-жидкость.

Данная работа посвящена исследованию распространения малых, гармонически изменяющихся во времени возмущений в бесконечно длинной ортотропной оболочке, содержащей вязкую сжимаемую жидкость. Задача рассматривается в линейной постановке, т.е. перемещения оболочки и возмущения скорости жидкости предполагаются малыми. Такие упрощения являются оправданными, поскольку рассматривается процесс распространения гармонических волн и налагаемые ограничения не сужают рамок проводимого исследования. Этим обуславливается возможность линеаризации уравнений движения вязкой жидкости и использование линейной теории оболочек.

Поскольку конечной целью исследований является изучение волновых процессов в системе, для оболочки необходимо выбрать такую модель, уравнения движения для которой более полно описывают явление распространения волн. Кроме того, вязкая жидкость передает стенке оболочки не только нормальное давление, но и касательные усилия. Поэтому в данной задаче уместно учесть деформации поперечного сдвига и инерцию вращения нормальных элементов. Это приводит к теории оболочек типа С.П.Тимошенко. Для жидкой среды используется линеаризованная модель ньютоновской покоящейся вязкой сжимаемой жидкости.

Метод решения. Рассмотрим бесконечную круговую цилиндрическую ортотропную оболочку радиуса R и толщиной $2h$, содержащую вязкую сжимаемую жидкость. Введем цилиндрическую систему координат (z, r, θ) , где ось z совмещена с осью оболочки. Используем линейные уравнения теории оболочек типа

С.П.Тимошенко [1] и линеаризированные уравнения Навье-Стокса для покоящейся вязкой сжимаемой жидкости [2]. В рамках этих моделей система уравнений, описывающая совместные колебания системы, будет иметь вид:

$$L\bar{u} = \bar{q}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - v^* \Delta \bar{u} + \frac{1}{\rho_0^*} \text{grad} p - \frac{v^*}{3} \text{grad} \text{div} \bar{u} = 0;$$

$$\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \text{div} \bar{u} = 0; \quad (2)$$

$$a_0 = \text{const};$$

$$\dot{u}_z = v_z; \quad q_r = -p_{rr}; \quad q_z = -p_{rz}; \quad (3)$$

$$p_{rr} = -p + \lambda^* \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) + 2\mu^* \frac{\partial v_r}{\partial r};$$

$$p_{rz} = \mu^* \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right). \quad (4)$$

Здесь в уравнениях (1): L -матрица дифференциальных операторов теории оболочек типа С.П.Тимошенко [1]; $\bar{u} = \bar{u}(u_z, u_r)$ - вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки; $\bar{q}$ - вектор усилия внешней нагрузки, приведенный к срединной поверхности оболочки. В уравнениях (2-4): $\bar{u}$ -вектор скорости частиц жидкости; ρ^* и p -возмущения плотности и давления в жидкости; ρ_0^* и a_0 -плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; v^* , μ^* -кинематический и динамический коэффициенты вязкости; p_{rr}, p_{rz} - составляющие тензора напряжений в жидкости. Уравнения (3) – соответственно кинематические и динамические граничные условия, которые, в силу тонкостенности оболочки, будем удовлетворять на срединной поверхности ($r=R$). Соотношения (1)-(4) представляют замкнутую систему соотношений гидроупругости для ортотропной цилиндрической оболочки, содержащей вязкую сжимаемую жидкость.

Для решения этой системы соотношений используем представления общих решений уравнений гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости через скалярные потенциалы [2]. Подставляя выражения для искомых функций в виде бегущих волн в уравнения исходной системы, используя условия на колеблющейся стенке (3),

после ряда преобразований получим систему трех линейных однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд. Из условия существования нетривиального решения такой системы получаем дисперсионное уравнение

$$\det \|A_{mn}\| = 0, \quad (m, n=1, 2, 3), \quad (5)$$

$$\text{где } A_{mn} = A_{mn}(c, \Omega, \gamma, \rho_o^*, a_o, v_o^*, E_i, G_{ik}, v_{ij}, \rho_{об}, \frac{2h}{R}, J_n(\eta_j R), \eta_j),$$

(i, j=1, 2; k=2, 3),

c-фазовая скорость; Ω -частота; γ -коэффициент затухания волн; E_i, G_{ik} -модули упругости при растяжении и сдвиге; v_{ij} -коэффициенты Пуассона; $J_n(\eta_j R)$ -функции Бесселя n-го порядка первого рода комплексного аргумента $\eta_j R$ [2].

Дисперсионное уравнение (5) является многопараметрическим трансцендентным уравнением и описывает процесс распространения осесимметричных волн в исследуемой гидроупругой системе.

Анализ результатов. В результате численного решения уравнения (5) получены частотно-фазовые характеристики данной гидроупругой системы. В этой работе рассмотрим влияние относительной толщины оболочки $k_0 = \frac{2h}{R}$ на дисперсионные кривые боропластиковой оболочки с глицерином.

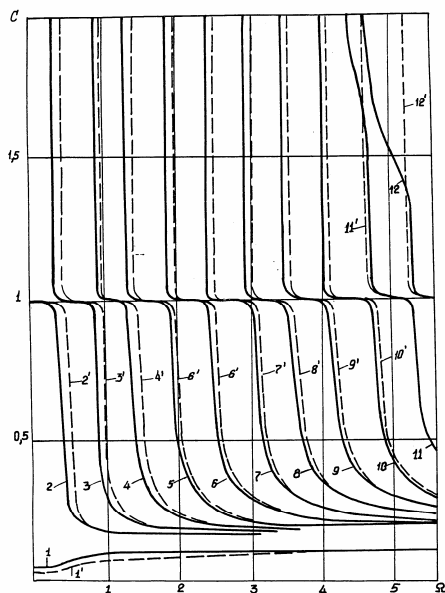


Рисунок 1

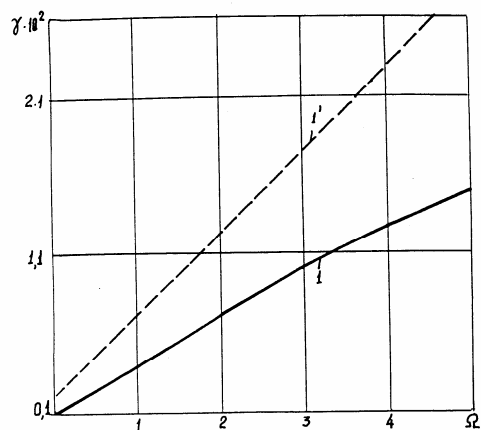


Рисунок 2

На рис.1 представлены графики зависимости фазовой скорости c от частоты Ω (сплошные линии соответствуют $k_0 = 0,125$; штриховые - $k_0 = 0,05$), а на рис.2 – зависимости коэффициента затухания γ первой моды от частоты Ω . Как следует из рис.1 при уменьшении относительной толщины оболочки наблюдается увеличение значений критических частот дисперсионных кривых. Кроме того, их участок (начиная с 11-ой моды), соответствующий в случае «пустой» оболочки третьей моде колебаний, при $k_0 = 0,05$ сдвигается на более высокие частоты $\Omega > 5,6$ (на рисунке этот диапазон частот не изображен). Коэффициент затухания для первой моды (рис.2) возрастает с уменьшением относительной толщины оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швец Р.К., Марчук Р.А. Колебания ортотропной цилиндрической оболочки типа Тимошенко, соприкасающейся со слоем жидкости // Мат. методы и физ.-мех. поля. – Киев: Наук. думка. – 1975. – Вып. I. – С.135-140.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т.2. Закономерности распространения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 536с.

Получено 15.06.2007 г.

УДК 631.33.024.2/.3

В.И.Врублевская, А.Б.Невзорова, В.В.Макеев, В.Б.Врублевский,
С.О.Барбуль

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ДРЕВЕСИНЫ В УЗЛАХ ТРЕНИЯ ПОСЕВНОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ТЕХНИКИ

Введение. Сельскохозяйственная техника эксплуатируется в тяжелых условиях абразивно-агрессивных и влажных сред. Наиболее интенсивному изнашиванию подвержены узлы трения, работоспособность которых зачастую определяет ресурс машины или механизма. В большинстве современных конструкций узлов трения используются подшипники качения. Они при работе корродируют, заклинивают, требуют регулярного подвода смазки и технического ухода. Частые остановки сельскохозяйственной техники на ремонт недопустимы при эксплуатации в поле в период посевной или уборочной кампаний, когда необходимо в кратчайшие сроки выполнить необходимую работу.

Для решения проблемы обеспечения безотказной работы узлов трения сельскохозяйственной техники в настоящей работе рассматривается возможность замены подшипников качения (ПК) подшипниками скольжения самосмазывающимися (ПСС) на основе прессованной древесины. Реализация поставленной задачи возможна при обоснованном применении эффективных методов модифицирования древесины для обеспечения повышенных физико-механических и эксплуатационных ее характеристик как антифрикционного материала.

Для производства ПСС в настоящее время применяется торцово-прессовое деформирование древесины березы в цилиндрический вкладыш [1] с последующей двукратной перепрессовкой его через конические приемники в корпус подшипника для формирования у вкладыша повышенных физико-механических свойств. В результате проведения этих операций достигается максимально возможная степень прессования по внутренней поверхности вкладыша $\varepsilon = 59 \%$, по наружной – $\varepsilon = 18-27 \%$.

Пропитку древесного вкладыша для придания ему свойства самосмазываемости осуществляют минеральным маслом с высокомолекулярными полимерными присадками. В процессе трения под действием механических напряжений и тепла, генерируемого в контактной зоне, происходит деструкция полимера с образованием свободных радикалов, способных вступать в прямые химические реакции с окисной поверхностью металла, образуя адсорбционный граничный смазочный слой органических макромолекул. Этот слой также эффективно разделяет сопряженные поверхности трения, экранируя их [2].

Несмотря на существующие многочисленные способы пропитки древесины с целью глубокого заполнения ее капиллярно-пористой системы различными антисептиками (способ горячей и горяче - холодных ванн, пропитка в вакууме и под давлением, в ультразвуковом поле и др.) применительно к специфической технологии производства ПСС до настоящего времени применялся лишь способ горячей ванны, реализующий принцип капиллярной пропитки. Было предложено насыщать капиллярно-пористую систему древесины загущенным СМ при температуре $t = 130\text{ }^{\circ}\text{C}$ в течение 50 минут. При нагревании вязкость СМ снижается с $513\text{ мм}^2/\text{с}$ до $66\text{ мм}^2/\text{с}$, и он легко проникает в капиллярно-пористую систему древесины. После пропитки древесные вкладыши остывают на воздухе, и СМ загустевает в объеме древесины. При таком способе пропитки степень наполнения СМ не превышает 10 %. Расчеты свидетельствуют, что теоретически возможно достижение степени наполнения до 50 %. Это значение показывает, что резервы капиллярно-пористой системы древесины по аккумулярованию СМ использованы не в полном объеме. Это может явиться причиной сокращения срока эксплуатации ПСС, ослабления его гидрофобности.

Постановка задачи. Усовершенствовать конструкции узлов трения посевной сельскохозяйственной техники с применением подшипников скольжения самосмазывающихся на основе модифицированной древесины. Предложить способы увеличения степени наполнения капиллярно-пористой системы древесины смазочным материалом для обеспечения формоустойчивости древесного вкладыша ПСС, усиления его гидрофобности при эксплуатации во влажных средах.

Результаты исследования. В результате проведенных исследований направленных на поиск новых способов увеличения степени наполнения смазочным материалом древесных вкладышей ПСС различных типоразмеров был предложен и исследован способ термоконтрастных ванн, как наиболее простой и эффективный способ, применяемый для пропитки древесины СМ. Он заключается в следующем. Древесные вкладыши в тонкостенных стальных цилиндрических обоймах помещаются в горячую ванну ($t = 130\text{ }^{\circ}\text{C}$) со СМ на основе минерального масла с высокомолекулярной полимерной присадкой, массовая концентрация которой составляла 3 %, и выдерживались в ней согласно 50 минут. Затем одна партия образцов остывала на воздухе, а другая – в ванне с холодным СМ ($t = 20\text{--}30\text{ }^{\circ}\text{C}$), концентрация присадки в котором составляла 0,5 %. Уровень СМ в этом случае над древесиной был равен глубине погруженных образцов, а вязкость составляла $176\text{ мм}^2/\text{с}$.

Этот способ пропитки позволяет увеличить степень наполнения древесных вкладышей ПСС в 4 - 5 раз, а масса впитанного смазочного материала увеличивается в 2 - 3 раза в сравнении с использованием способа горячей ванны. Исследования водопоглощения показали, что оно уменьшается в 5 - 6 раз.

Предложенный способ пропитки был использован при изготовлении экспериментальной партии узлов трения для сеялок СПУ-6М и СТВ-3,6. Они являются наиболее часто используемыми машинами в сельском хозяйстве и предназначены для формирования борозд и посева семян зерновых и зернобобовых растений. Наиболее уязвимыми конструктивными элементами сеялки СПУ-6М «Берестье» (рисунок 1, а), изготавливаемой на ОАО «Брестский электромеханический завод» (г. Брест, Республика Беларусь), являются узлы трения сошников, количество которых на одну сеялку в зависимости от исполнения приходится от 24 до 48 штук.

В базовой комплектации узел трения сошника сеялки СПУ-6М состоит из ступицы, к которой крепится заклепками диск. В ступице размещается ось с напрессованными на ее шейку двумя шарикоподшипниками радиальным однорядным 203 (ГОСТ 8338-75) и полузакрытым 160203 (ГОСТ 8752-79); стопорное кольцо и втулка фиксируют положение подшипников относительно ступицы; полимерная манжета и крышка предотвращают попадание абразива к

подшипникам качения. Но, несмотря на такое защитное уплотнительное устройство, в подшипниковый узел попадает пыль, влага и через 2-4 месяца эксплуатации подшипники заклинивают, корродируют и выходят из строя (не вращаются).

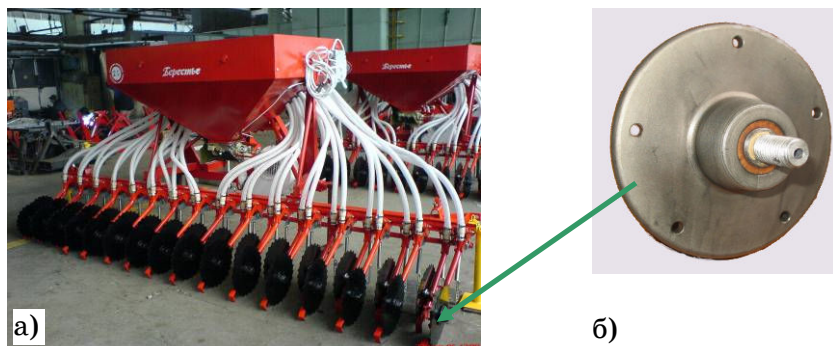


Рисунок 1 – Сеялка СПУ-6М (а) с модернизированными узлами трения сошников (б)

С целью увеличения долговечности узла трения сошника, было предложено заменить ПК на ПСС на основе прессованной древесины. Научной базой для этого послужили работы ученых Белорусского государственного университета транспорта (г. Гомель, Республика Беларусь) по созданию нового антифрикционного самосмазывающегося материала на основе прессованной древесины и способа торцово-прессового деформирования древесных вкладышей для изготовления подшипников скольжения. ПСС обладают исключительной работоспособностью в абразивных, агрессивных и влажных средах при $pv \leq 2,5$ МПа·м/с. Они обеспечивают увеличение ресурса работы узлов трения в сравнении с ПК в 2-7 раз в зависимости от условий эксплуатации.

Для создания качественного подшипника скольжения самосмазывающегося был произведен расчет геометрических параметров древесной заготовки и основных конструктивных элементов специальной гибкой дискретной системы (длины и ширины), формирующей древесный вкладыш, сконструирован новый узел трения с ПСС (рисунок 1, б).

Для снижения металлоемкости ступицы сошника сеялки СПУ-6М были созданы компьютерные модели нескольких вариантов ее исполнения. Исходными условиями процесса моделирования были базовая конструкция ступицы и нагрузка, действующая на узел трения. Анализ напряженно-деформированного состояния ступицы в базовом исполнении позволил выявить наименее нагруженные

области, рассчитать коэффициент запаса прочности $n_\sigma = 262$. Его расчет выполнен на статическую прочность по допускаемым напряжениям. Исследуемый образец выполнен из хрупкого материала – чугуна. Для него предельное состояние характеризуется пределом прочности $\sigma_u = 210$ МПа (образование трещин).

Значение коэффициента запаса прочности n_σ свидетельствует о том, что действующие максимальные эквивалентные напряжения $\sigma_{\max} = 0,8$ МПа значительно меньше предела прочности для материала чугуна σ_u . Полученные данные явились основанием для уменьшения размеров ступицы и создания новой ее конструкции.

Коэффициент запаса прочности для новой конструкции ступицы составляет $n_\sigma = 206$. Его значение удовлетворяет требованию работоспособности детали при возможном росте нагрузок, неточности изготовления конструкции и т.д. В результате проведенных исследований стало возможным уменьшить массу ступицы на 15 % (с 0,65 кг до 0,55 кг).

Разработанная усовершенствованная конструкция узла трения сошника сеялки СПУ – 6М «Берестье» с установленными ПСС прошла полевые испытания в СПК «Вознесенский» Жабинковского района Брестской области и ГУО «Областной аграрно-производственный профессиональный лицей» (г. Дрогичин, Брестская область). Испытания осуществлялись в полевых условиях на различных почвах. При рабочей скорости трактора 9-10 км/ч и глубине хода сошника 4,0 – 5,0 см наработка за сезон (весна – осень 2006 года) составляла 348 га на посевных площадях СПК «Вознесенский» и 77 га – ГУО «Областной аграрно-производственный профессиональный лицей». По результатам полевых испытаний был проведен анализ сопряженных поверхностей трения древесного вкладыша ПСС и оси, который показал минимальный их износ. В целом узел трения пригоден к дальнейшей работе

Следующим объектом исследований явился узел трения привода посевного диска сеялки СТВ-3,6, базовая конструкция которого представлена на рисунке 2, а. Сеялка изготавливается на ОАО «Лидсельмаш» (г. Лида, Республика Беларусь) и предназначена для прямого посева семян кукурузы. Прямой посев обеспечивается за счет создания насосом в камере 7 разрежения, которое фиксирует семена на вращающемся посевном диске, а затем переводит их по семяпроводам в почву. Вращение передается от привода сеялки по

средствам цепной передачи через звездочку 1, закрепленную на валу 4 шпонкой 2, узел трения с двумя 10 и 6 подшипниками качения 203 и шестерню 5. Шестерня приводит во вращение посевной диск с семенами. Разряжение в камере 7 провоцирует засасывание из окружающей среды пыли, абразивных частиц, что вызывает засорение узла трения и заклинивание подшипников качения. Это приводит к приостановке работы всей сеялки.

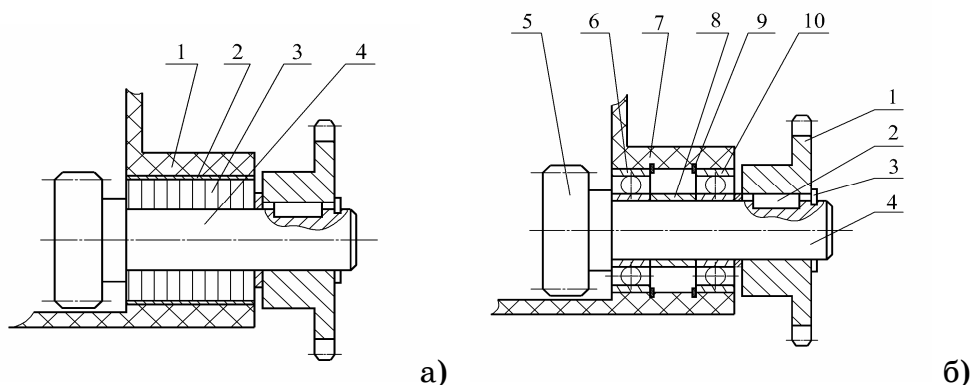


Рисунок 2 - Конструкция узла трения привода посевного диска сеялки СТБ-3,6 с ПК (а) и с ПСС (б)

а) 1 – звездочка цепной передачи; 2 – шпонка; 3 – стопорное кольцо; 4 – вал; 5 – зубчатое колесо привода посевного диска; 6 – шарикоподшипник качения 203; 7 – корпус посевной камеры; 8 – втулка; 9 – стопорное кольцо; 10 – шарикоподшипник качения 203

б) 1 – корпус посевной камеры; 2 – металлическая обойма ПСС; 3 – древесный вкладыш ПСС; 4 – вал

Предлагаемая новая конструкция (рисунок 2, б) предусматривает постановку в узел трения привода посевного диска сеялки СТБ-3,6 подшипника скольжения самосмазывающегося на основе модифицированной древесины. Древесный вкладыш 3 запрессован в тонкостенную металлическую обойму 2 ($t = 0,5$ мм), которая установлена с натягом в полимерный корпус посевной камеры 1. ПСС в новой конструкции заменяет два 6 и 10 шарикоподшипника качения 203, втулку 8, два стопорных кольца 9 (рисунок 2, а).

Экономический эффект от внедрения рассмотренных конструкций узлов трения сеялок с применением подшипников скольжения самосмазывающихся на основе модифицированной древесины состоит из трех составляющих:

- 1 снижение себестоимости изготовления узлов трения;
- 2 повышение их надежности в эксплуатации;

3 экономия дефицитных цветных металлов и дорогостоящих импортных подшипников качения.

Для предприятия-изготовителя сельскохозяйственной техники наиболее актуальной является первая и вторая составляющая формирования экономического эффекта от внедрения ПСС. Их реализация позволяет экономить денежные средства при производстве (первая составляющая) и избежать рекламаций при эксплуатации техники (вторая составляющая).

Для обеспечения наиболее ощутимого экономического эффекта новое исполнение сошника сеялки СПУ-6М «Берестье» предусматривает исключение из его конструкции следующих комплектующих стоимостью (у.е.):

- подшипник № 203	0,55
- подшипник № 160203	0,6
- манжета	0,24
- крышка	0,22
- втулка	0,18
Всего на сумму	1,79.

Стоимость комплектующих узла трения на одну сеялку с 24 сошниками составляет $1,79 \times 24 = 42,96$ у.е.

Вместо них в соответствии с новой конструкцией узла трения, устанавливается древесный вкладыш стоимостью 0,33 у.е. В этом случае экономия на комплектующих на одной сеялке составляет $42,96 - (0,33 \times 24) = 35$ у.е.

Себестоимость изготовления узла трения сошника сеялки СПУ-6М «Берестье» с использованием подшипников качения составляет 4,66 у.е., а с ПСС – 2,7 у.е.; стоимость узлов трения всех сошников сеялки соответственно 111,84 и 64,74 у.е. Следовательно, экономия при производстве узлов трения сошников с ПСС на каждой сеялке СПУ – 6М составляет 47,1 у.е.

Аналогично рассчитывается экономический эффект от внедрения ПСС в узлах трения сеялки СТВ – 3,6. Он равен 39 у.е. на каждую сеялку.

Вывод. Проведенные исследования по усовершенствованию узлов трения сеялок СПУ-6М и СТВ-3,6 позволили оптимизировать их конструкции за счет постановки ПСС с высоконаполненными смазочным материалом древесными вкладышами, а также

устранения уплотнений, предназначенных для защиты зоны трения от абразивных частиц и влаги (полимерная манжета, распорная втулка, крышка). В свою очередь это привело к снижению себестоимости изготовления техники, уменьшению ее металлоемкости и массы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Врублевский, В.Б. Исследование процесса торцово-прессового деформирования древесины и создание высокопроизводительного оборудования для изготовления подшипников скольжения: Дис. канд. техн. наук: 05.21.05 / В.Б. Врублевский. – Мн., 2001. – 135 с.
2. Врублевская, В.И. Износостойкие самосмазывающиеся антифрикционные материалы и узлы трения из них / В.И. Врублевская, А.Б. Невзорова, В.Б. Врублевский – Гомель, 2000. – 324 с.
3. Белый, В.А. Древесно-полимерные конструкционные материалы и изделия \ В.А. Белый, В.И. Врублевская, Б.И. Купчинов; под ред. В.А. Белого. – Мн.: Наука и техника, 1980. – 280 с.
4. Ломакин, А.Д. Защита древесины и древесных материалов / А.Д. Ломакин – М.: Лесная промышленность, 1990. – 256 с.
5. Моисеенко, В.Л. Создание самоустанавливающихся подшипников скольжения на основе прессованной древесины и технологии их изготовления: Дис...канд. техн. наук: 05.21.05 / В.Л. Моисеенко – Мн., 2002. – 120 с.

Получено 15.06.2007 г.

УДК 539.3

П.А. Стеблянко

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДВУХМЕРНЫХ НАПРЯЖЕННЫХ
СПЛАЙНОВ ПРИ РЕШЕНИИ СВЯЗАННЫХ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ
ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ**

Введение. Одним из наиболее эффективных приемов при численном решении пространственных нестационарных задач теории термоупругопластичности является подход, основанный на использовании для определения неизвестных величин, метода дробных шагов или метода покомпонентного расщепления [3,4,6,7, 12-14,19,23-25,28] в сочетании с представлением искомых величин в виде сплайн-функций [1,5,19-21,27]. Преимущество данного подхода обусловлено тремя факторами. Он не сложнее в реализации, чем конечно-разностный метод. Решение находится в виде сплайна во всей области определения, в то время как разностное решение ищется только на сетке [1, 5]. Дает более высокий порядок аппроксимации, что позволяет выбирать более крупную сетку по координатам по сравнению с конечно-разностным методом при условии достижения одинаковой точности вычислений [2, 12, 13].

В работах [8-13, 15-18, 26, 29, 30] решен ряд нестационарных задач механики, где применялись физические соотношения, позволяющие описывать простые и близкие к простым процессы деформирования и процессы деформирования по траекториям малой кривизны. Связанные нестационарные задачи теории термоупругопластичности решены в работах [15-18, 26, 29, 30]. Отметим, что здесь используется форма физических уравнений, приведенная в монографии [13]. При этом двухмерные сплайны использовались для аппроксимации неизвестных величин в работах [7,14,19-21].

Сами соотношения теории процессов малой кривизны при неизотермических процессах деформирования элемента тела разрабатывались в отделе термопластичности Института механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины под руководством академика НАН

Украины Шевченко Ю.Н. и получили экспериментальное обоснование [22].

Постановка нестационарных задач теории термоупругопластичности. Основной задачей нестационарной теории термоупругопластичности является определение перемещений (скоростей перемещений) и компонент тензоров напряжений и деформаций, возникающих в пространственном теле в процессе его нагружения, когда некоторые элементы тела работают за пределом упругости материала. Процесс нагружения будем рассматривать развивающимся во времени, что может вызвать движение отдельных частей тела.

Пусть первоначально изотропное и однородное двумерное тело V , ограниченное поверхностью S , в начальный момент времени $t=0$ находится в естественном ненапряженном состоянии, где α^i - оси произвольной ортогональной системы координат, $i = 1, 2, 3$. Затем тело подвергается нагружению внешними силами и нагреву. Это могут быть объемные силы $\vec{K}(\alpha^i, t)$, воздействующие на каждый элемент тела, и поверхностные силы $\vec{\Sigma}_n(\alpha^i, t)$, действующие на части поверхности тела S_Σ . На другой части поверхности тела S_γ , которая может быть определенным образом закреплена, задаются скорости перемещений $\vec{V}(\alpha^i, t)$. Конфигурация тела задается уравнением поверхности $\Phi(\alpha^i) = 0$, которая ограничивает его. Механические характеристики материала (в случае необратимых деформаций) при исследовании процессов деформирования по прямолинейным траекториям и траектория малой кривизны задаются в виде мгновенных диаграмм растяжения образцов.

Исходя из перечисленных данных, необходимо определить температурное поле три составляющие вектора скорости перемещений, шесть компонент тензора напряжений и шесть компонент тензора деформаций. Следовательно, подлежат определению 16 неизвестных функций времени и трех координат. Для этого необходимо воспользоваться уравнениями движения, геометрическими, физическими уравнениями и уравнением теплопроводности.

При решении нестационарной задачи теории пластичности в тех частях тела, где возникают необратимые деформации, будем

пользоваться определяющими уравнениями, описывающими процессы нагружения как по прямолинейным траекториям, так и по траекториям деформирования малой кривизны. После решения задачи по геометрии траектории деформирования можно судить о достоверности используемых определяющих соотношений.

Полная система уравнений в частных производных решается при определенных начальных и граничных условиях [12, 13].

Метод решения. Приведем полную систему уравнений к виду [12]

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha} + A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \beta} + A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \gamma} + \vec{B} \quad (1)$$

где $\vec{W}$ - вектор, компонентами которого будут скорости перемещений v_i , составляющие тензоров напряжений и деформаций $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, i, j=1,2,3$ ($w_1=v_1; w_2=v_2; w_3=v_3; w_4=\sigma_{11}; w_5=\sigma_{22}; w_6=\sigma_{33}; w_7=\tau_{12}; w_8=\tau_{13}; w_9=\tau_{23}; w_{10}=\tau_{11}; w_{11}=\tau_{22}; w_{12}=\tau_{33}; w_{13}=\tau_{12}; w_{14}=\tau_{13}; w_{15}=\tau_{23}$).

Нестационарное трехмерное уравнение теплопроводности, используемое при решении связанных задач механики деформируемого твердого тела, имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial T}{\partial \gamma} \right) \right] + B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad (2)$$

где $B(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = S_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{S_{ij} \dot{S}_{ij}}{2G_0} + \frac{\sigma_{ij}}{3} (\dot{\varepsilon}_{ij} - 3\alpha \dot{T}) - \frac{\sigma_{ii} \dot{\sigma}_{ii}}{9K_0}$, H_1, H_2, H_3 - коэффициенты

Ляме.

При решении пространственных задач в цилиндрической системе координат r, φ, x в уравнении (2) следует положить $H_1 = H_3 = 1, H_2 = r, \alpha = r, \beta = \varphi, \gamma = x$. Тогда из уравнения (2) получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{a}{r} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] + B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}). \quad (3)$$

Применим для решения к системе (1) и уравнению (3) метод покомпонентного расщепления [12, 13]. Введем в рассмотрение сетку по времени ω_r с учетом дробного шага.

$$\omega_r = \left\{ \begin{aligned} t_p; t_{p+1/3} = t_p + \tau_1; t_{p+2/3} = t_{p+1/3} + \tau_2; t_{p+1} = t_{p+2/3} + \tau_3; \\ \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3; t_0 = 0; p = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Схема расщепления Писмана, Рэчфорда, Дугласа уравнения (3) может быть представлена так [3].

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) + \gamma_1 B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}), & t \in [t_p; t_{p+1/3}], \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= a \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \gamma_2 B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}), & t \in [t_{p+1/3}; t_{p+2/3}], \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \gamma_3 B(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}), & t \in [t_{p+2/3}; t_{p+1}]\end{aligned}\quad (5)$$

Здесь и далее $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$.

Неявная разностная схема на дробных шагах в точке r_i, φ_j, x_k

$$\begin{aligned}\frac{T^{p+1/3} - T^p}{\tau} &= \frac{a}{h_1^2} \left[\alpha \left(\mu_1(T^{p+1/3}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^{p+1/3}) \right) + \beta \left(\mu_1(T^p) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^p) \right) \right] + \\ &+ \frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} [\alpha \mu_2(T^{p+1/3}) + \beta \mu_2(T^p)] + \gamma_1 B^p, \\ \frac{T^{p+2/3} - T^{p+1/3}}{\tau} &= \frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} [\alpha \mu_2(T^{p+2/3}) + \beta \mu_2(T^{p+1/3})] + \\ &+ \frac{a}{h_3^2} [\alpha \mu_3(T^{p+2/3}) + \beta \mu_3(T^{p+1/3})] + \gamma_2 B^{p+1/3}, \\ \frac{T^{p+1} - T^{p+2/3}}{\tau} &= \frac{a}{h_3^2} [\alpha \mu_3(T^{p+1}) + \beta \mu_3(T^{p+2/3})] + \\ &+ \frac{a}{h_1^2} \left[\alpha \left(\mu_1(T^{p+1}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^{p+1}) \right) + \beta \left(\mu_1(T^{p+2/3}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^{p+2/3}) \right) \right] + \gamma_3 B^{p+2/3}.\end{aligned}\quad (6)$$

Для явной схемы ($\alpha=0, \beta=1$) можно записать такие расчетные формулы

$$\begin{aligned}T^{p+1/3} &= T^p + \tau \left[\frac{a}{h_1^2} \left(\mu_1(T^p) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^p) \right) + \frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} \mu_2(T^p) + \gamma_1 B^p \right], \\ T^{p+2/3} &= T^{p+1/3} + \tau \left[\frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} \mu_2(T^{p+1/3}) + \frac{a}{h_3^2} \mu_3(T^{p+1/3}) + \gamma_2 B^{p+1/3} \right], \\ T^{p+1} &= T^{p+2/3} + \tau \left[\frac{a}{h_3^2} \mu_3(T^{p+2/3}) + \frac{a}{h_1^2} \left(\mu_1(T^{p+2/3}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^{p+2/3}) \right) + \gamma_3 B^{p+2/3} \right].\end{aligned}\quad (7)$$

При помощи формул (7) определяется нулевое приближение ($T_0^{p+n/3}, n=1, 2, 3$) для следующей итерационной процедуры

$$\begin{aligned}T_j^{p+1/3} &= T^p + \left\{ \frac{a}{h_1^2} \left[\alpha \left(\mu_1(T^{p+1/3}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^{p+1/3}) \right) + \beta \left(\mu_1(T^p) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1(T^p) \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} [\alpha \mu_2(T^{p+1/3}) + \beta \mu_2(T^p)] + \gamma_1 B^p \right\}_{j-1}, \\ T_j^{p+2/3} &= T^{p+1/3} + \left\{ \gamma_2 B^{p+1/3} + \frac{a}{r_i^2} \frac{1}{h_2^2} [\alpha \mu_2(T^{p+2/3}) + \beta \mu_2(T^{p+1/3})] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{h_3^2} [\alpha \mu_3(T^{p+2/3}) + \beta \mu_3(T^{p+1/3})] \right\}_{j-1},\end{aligned}$$

$$T_j^{p+1} = T^{p+2/3} + \left\{ \gamma_3 B^{p+2/3} + \frac{a}{h_3^2} [\alpha \mu_3 (T^{p+1}) + \beta \mu_3 (T^{p+2/3})] + \right. \\ \left. + \frac{a}{h_1^2} \left[\alpha \left(\mu_1 (T^{p+1}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1 (T^{p+1}) \right) + \beta \left(\mu_1 (T^{p+2/3}) + \frac{h_1}{r_i} \lambda_1 (T^{p+2/3}) \right) \right] \right\}_{j-1} \quad (8)$$

Здесь λ_n, μ_n ($n=1,2,3$)- разностные операторы, аппроксимирующие производные соответственно первого и второго порядка по координатам [12,13].

Алгоритм определения температурного поля цилиндрического тела, организованный на основании формул (7), (8), сочетает в себе преимущества явной разностной схемы и достоинства неявной схемы.

Перейдем к решению системы (1). Обозначим $\vec{W}^{p+n/3}$ вектор $\vec{W}$, вычисленный для момента времени $t=t_{p+n/3}$ ($n=0, 1, 2, 3$). Аналогичные обозначения вводятся и для вектора $\vec{B}$. При переходе от уравнений полной системы к разностной схеме их решения производные по времени заменяются разностными отношениями, а производные по координатам представляются линейной комбинацией производных, заданных на предыдущем временном слое $t_{p+(n-1)/3}$ и на том, на котором ищется решение $t_{p+n/3}$.

Согласно [3, 12] исходная нестационарная пространственная задача вида (1) может быть сведена к системе трех последовательно решаемых двухмерных задач на дробных шагах по времени (схема Писмана, Рэчфорда, Дугласа)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha} + A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \beta} \right) + \gamma_1 \vec{B}^p, \quad t \in [t^p; t^{p+1/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(A_2 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \beta} + A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \gamma} \right) + \gamma_2 \vec{B}^{p+1/3}, \quad t \in [t^{p+1/3}; t^{p+2/3}], \\ \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(A_3 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \gamma} + A_1 \frac{\partial \vec{W}}{\partial \alpha} \right) + \gamma_3 \vec{B}^{p+2/3}, \quad t \in [t^{p+2/3}; t^{p+1}], \end{aligned} \quad (9)$$

Рекуррентные формулы неявной схемы метода расщепления для определения неизвестных величин, позволяют получить соответственно третий порядок аппроксимации метода по координатам [13].

$$\begin{aligned} (W_m)_k^{p+1/3} &= R_{1m} + \frac{a \tau}{2 h_1} (\Lambda_1 W_m + \Lambda_2 W_m)_{k-1}^{p+1/3}, \\ (W_m)_k^{p+2/3} &= R_{2m} + \frac{a \tau}{2 h_2} (\Lambda_2 W_m + \Lambda_3 W_m)_{k-1}^{p+2/3}, \\ (W_m)_k^{p+1} &= R_{3m} + \frac{a \tau}{2 h_3} (\Lambda_3 W_m + \Lambda_1 W_m)_{k-1}^{p+1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где k – номер итерации, τ – шаг интегрирования по времени, Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 – дифференциальные операторы, аппроксимирующие первые производные по координатам [12, 13], а также введены

$$\begin{aligned} R_{1m} &= W_m^p + \tau\gamma_1 B_m^p + \frac{b\tau}{2h_1} (\Lambda_1 W_m + \Lambda_2 W_m)^p, \\ R_{2m} &= W_m^{p+1/3} + \tau\gamma_2 B_m^{p+1/3} + \frac{b\tau}{2h_2} (\Lambda_2 W_m + \Lambda_3 W_m)^{p+1/3}, \\ R_{3m} &= W_m^{p+2/3} + \tau\gamma_3 B_m^{p+2/3} + \frac{b\tau}{2h_3} (\Lambda_3 W_m + \Lambda_1 W_m)^{p+2/3}. \end{aligned}$$

Здесь $a + b = 1$. В случае использования схемы Кранка-Николсона, которая позволяет получить второй порядок аппроксимации метода по времени, в формулах (10) следует положить $a = b = 1/2$.

В качестве нулевой итерации будем использовать решение определенное по явной схеме. Для этого можно использовать формулы (10), в которых следует положить $a = 0$, а $b = 1$

$$\begin{aligned} (W_m)_0^{p+1/3} &= W_m^p + \tau\gamma_1 B_m^p + \frac{\tau}{2h_1} (\Lambda_1 W_m + \Lambda_2 W_m)^p, \\ (W_m)_0^{p+2/3} &= W_m^{p+1/3} + \tau\gamma_2 B_m^{p+1/3} + \frac{\tau}{2h_2} (\Lambda_2 W_m + \Lambda_3 W_m)^{p+1/3}, \\ (W_m)_0^{p+1} &= W_m^{p+2/3} + \tau\gamma_3 B_m^{p+2/3} + \frac{\tau}{2h_3} (\Lambda_3 W_m + \Lambda_1 W_m)^{p+2/3}. \end{aligned}$$

Для построения решения уравнения теплопроводности по формулам (8) и системы (1) по формулам (10) воспользуемся двухмерными напряженными сплайнами [19]. Неизвестные величины (составляющие вектора $\vec{W}$) разыскиваются в виде линейной комбинации двумерных сплайнов.

$$W_m(\xi; \eta) = \sum_{l=1}^2 \sum_{n=1}^2 b_{i+l, j+n} S_{2D}(\xi; \eta). \quad (11)$$

Здесь, например, для первого уравнения схемы переменных направлений (9)

$$\xi = \frac{1}{h_1}(\alpha - \alpha_i), \quad \eta = \frac{1}{h_2}(\beta - \beta_j), \quad \alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}], \quad \beta \in [\beta_j, \beta_{j+1}].$$

Для второго и третьего векторного уравнений из системы (9) безразмерные координаты определяются так

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{h_2}(\beta - \beta_j), \quad \eta = \frac{1}{h_3}(\gamma - \gamma_k), \quad \beta \in [\beta_j, \beta_{j+1}], \quad \gamma \in [\gamma_k, \gamma_{k+1}], \\ \xi &= \frac{1}{h_2}(\gamma - \gamma_k), \quad \eta = \frac{1}{h_1}(\alpha - \alpha_i), \quad \alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}], \quad \gamma \in [\gamma_k, \gamma_{k+1}]. \end{aligned}$$

Через h_1, h_2, h_3 обозначены шаги интегрирования по координатам α, β, γ , где $\alpha \equiv z, \beta \equiv \varphi, \gamma \equiv x$.

Двухмерный базисный напряженный сплайн. Приведем основные сведения о напряженных сплайнах. Следуя работе [19] в каждой вспомогательной области двухмерный напряженный сплайн разыскивается в виде следующего тензорного произведения

$$S_{2D} = [a_0 + a_1\xi + a_2sh(\sqrt{2}\xi) + a_3ch(\sqrt{2}\xi)] \cdot [b_0 + b_1\eta + b_2sh(\sqrt{2}\eta) + b_3ch(\sqrt{2}\eta)], \quad (12)$$

где $\xi \in [0;1], \eta \in [0;1]$, а для определения величин $a_i, b_i, i = 0;1;2;3$ используются определенные условия. Поверхность (12) симметрична относительно осей координат и состоит из шестнадцати «склеенных» частей трех типов.

Для угловой области A (рисунок 1) эти условия в вершинах квадрата $A(0;0), B(0;1), C(1;0), D(1;1)$ имеют вид

$$S_{2D}(0;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(0;1) = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(1;0) = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = 0, S_{2D}(1;1) = W_D, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = W'_D, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = W'_D.$$

Удовлетворяя этим условиям с учетом симметрии поверхности (12) относительно диагонали $\xi = \eta$ получим

$$S_{2D} = [k_0(1 - ch\sqrt{2}\xi) + k_1\xi + k_2sh\sqrt{2}\xi] \cdot [k_0(1 - ch\sqrt{2}\eta) + k_1\eta + k_2sh\sqrt{2}\eta], \quad (13)$$

где, следуя работе [26],

$$k_0 = -0,57235; k_1 = -0,37114; k_2 = 0,26244.$$

Для центральной под области C условия в вершинах квадрата $D(0;0), N(0;1), F(1;0), M(1;1)$ имеют вид

$$S_{2D}(0;0) = W_D, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi} = W'_D, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta} = W'_D, S_{2D}(0;1) = W_F, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi} = W'_F, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta} = 0, \\ S_{2D}(1;0) = W_F, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta} = W'_F, S_{2D}(1;1) = W_M, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta} = 0.$$

В центральной под области C поверхность, которую задает сплайн (12), также симметрична относительно диагонали $\xi = \eta$.

Удовлетворяя условиям в узлах получим

$$S_{2D} = [n_0 + n_1\xi + n_2sh\sqrt{2}\xi + n_3ch\sqrt{2}\xi][n_0 + n_1\eta + n_2sh\sqrt{2}\eta + n_3ch\sqrt{2}\eta], \quad (14)$$

где

$$n_0 = -0,42838; n_1 = 2,56711; n_2 = -1,39527; n_3 = 0,6325.$$

Для под областей B , которые объединяют под области A и C в вершинах квадрата $C(0;0), D(0;1), E(1;0), F(1;1)$ выполняются условия

$$S_{2D}(0;0)=0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \xi}=0, \frac{\partial S_{2D}(0;0)}{\partial \eta}=0, S_{2D}(0;1)=W_D, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \xi}=W'_D, \frac{\partial S_{2D}(0;1)}{\partial \eta}=W''_D, \\ S_{2D}(1;0)=0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \xi}=0, \frac{\partial S_{2D}(1;0)}{\partial \eta}=0, S_{2D}(1;1)=W_F, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \xi}=0, \frac{\partial S_{2D}(1;1)}{\partial \eta}=W'_F.$$

На основании этого можно записать

$$S_{2D}(\xi, \eta) = (m_0 + m_1\xi + m_2sh\sqrt{2}\xi + m_3ch\sqrt{2}\xi) \cdot [m_4(1 - ch\sqrt{2}\eta) + m_5(sh\sqrt{2}\eta - \sqrt{2})]. \quad (15)$$

Здесь

$$m_0 = 3,78066; m_1 = -10,62084; m_2 = 7,28425; m_3 = -4,31838; m_4 = 0,19552; m_5 = 0,29351.$$

Отметим, что в условия (5), (7), (9) входят параметры базисного напряженного сплайна $W_D, W_F, W_M, W'_D, W'_F$, которые подобраны так, чтобы в сечениях $\xi = 0, \eta = 0$, как частный случай, получался одномерный базисный кубический сплайн ($W_M = 2/3, W_F = 1/6, W'_F = 0,48492, W_D = 1/24, W'_D = W'_F/4 = 0,12123$).

Вспомогательные области А, В, В₁, С и т.д. вместе с локальными системами координат ξ, η приведены в работах [20, 21].

Следуя работам [19-21], общее выражение для двухмерного базисного сплайна третьей степени по каждой из координат для полной области определения $x \in [-2; 2], y \in [-2; 2]$ представим так

$$S_{2D}(x; y) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_k(\xi) \cdot \varphi_k(\eta), \\ \quad \text{где} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = x + 2, \eta = y + 2, x \in [-2; -1], y \in [-2; -1] \quad (A), \\ \xi = 2 - y, \eta = x + 2, x \in [-2; -1], y \in [1; 2] \quad (A_1), \\ \xi = -x + 2, \eta = -y + 2, x \in [1; 2], y \in [1; 2] \quad (A_2), \\ \xi = y + 2, \eta = -x + 2, x \in [1; 2], y \in [-2; -1] \quad (A_3), \end{array} \right. \\ \varphi_m(\xi) \cdot \psi_m(\eta), \\ \quad \text{где} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = x + 1, \eta = y + 2, x \in [-1; 0], y \in [-2; -1] \quad (B), \\ \xi = y + 1, \eta = x + 2, x \in [-2; -1], y \in [-1; 0] \quad (B_1), \\ \xi = 1 - y, \eta = x + 2, x \in [-2; -1], y \in [0; 1] \quad (B_2), \\ \xi = x + 1, \eta = 2 - y, x \in [-1; 0], y \in [1; 2] \quad (B_3), \\ \xi = -x + 1, \eta = -y + 2, x \in [0; 1], y \in [1; 2] \quad (B_4), \\ \xi = -y + 1, \eta = -x + 2, x \in [1; 2], y \in [0; 1] \quad (B_5), \\ \xi = y + 1, \eta = -x + 2, x \in [1; 2], y \in [-1; 0] \quad (B_6), \\ \xi = -x + 1, \eta = y + 2, x \in [0; 1], y \in [-2; -1] \quad (B_7), \end{array} \right. \\ \varphi_n(\xi) \cdot \varphi_n(\eta), \\ \quad \text{где} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = x + 1, \eta = y + 1, x \in [-1; 0], y \in [-1; 0] \quad (C), \\ \xi = 1 - y, \eta = x + 1, x \in [-1; 0], y \in [0; 1] \quad (C_1), \\ \xi = -x + 1, \eta = -y + 1, x \in [0; 1], y \in [0; 1] \quad (C_2), \\ \xi = y + 1, \eta = -x + 1, x \in [0; 1], y \in [-1; 0] \quad (C_3). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (16)$$

Здесь введены в рассмотрение четыре вспомогательные функции

$$\varphi_k(t) = k_0(1 - ch\sqrt{2}t) + k_1t + k_2sh\sqrt{2}t, \quad \varphi_m(t) = m_0 + m_1t + m_2sh\sqrt{2}t + m_3ch\sqrt{2}t, \quad (17) \\ \psi_m(t) = m_4(1 - ch\sqrt{2}t) + m_5(sh\sqrt{2}t - \sqrt{2}), \quad \varphi_n(t) = n_0 + n_1t + n_2sh\sqrt{2}t + n_3ch\sqrt{2}t,$$

Производные первого порядка от этих функций определяются так

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_k(t)}{dt} &\equiv \varphi_k^{(1)}(t) = k_1 + \sqrt{2}(k_2 ch\sqrt{2}t - k_0 sh\sqrt{2}t), \quad \frac{d\varphi_m(t)}{dt} \equiv \varphi_m^{(1)}(t) = m_1 + \sqrt{2}(m_2 ch\sqrt{2}t + m_3 sh\sqrt{2}t), \\ \frac{d\varphi_n(t)}{dt} &\equiv \varphi_n^{(1)}(t) = n_1 + \sqrt{2}(n_2 ch\sqrt{2}t + n_3 sh\sqrt{2}t), \quad \frac{d\psi_m(t)}{dt} \equiv \psi_m^{(1)}(t) = \sqrt{2}(m_5 ch\sqrt{2}t - m_4 sh\sqrt{2}t)\end{aligned}\quad (18)$$

Для вторых производных можно записать

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi_k(t)}{dt^2} &\equiv \varphi_k^{(2)}(t) = 2(k_2 sh\sqrt{2}t - k_0 ch\sqrt{2}t), \quad \frac{d^2\varphi_m(t)}{dt^2} \equiv \varphi_m^{(2)}(t) = 2(m_2 sh\sqrt{2}t + m_3 ch\sqrt{2}t), \\ \frac{d^2\varphi_n(t)}{dt^2} &\equiv \varphi_n^{(2)}(t) = 2(n_2 sh\sqrt{2}t + n_3 ch\sqrt{2}t), \quad \frac{d^2\psi_m(t)}{dt^2} \equiv \psi_m^{(2)}(t) = 2(m_5 sh\sqrt{2}t - m_4 ch\sqrt{2}t)\end{aligned}\quad (19)$$

Тогда поверхность каждой части нормированного базисного двухмерного сплайна, задаваемого выражением (12) в единой системе координат x, y может быть описана при помощи следующих функций

$$\begin{aligned}S_{01}(x; y) &= \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(y), & S_{02}(x; y) &= \varphi_m(x) \cdot \psi_m(y), \\ S_{03}(x; y) &= \psi_m(x) \cdot \varphi_m(y), & S_{04}(x; y) &= \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(y), \\ S_{05}(x; y) &= \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(1-y), & S_{06}(x; y) &= \psi_m(x) \cdot \varphi_m(1-y), \\ S_{07}(x; y) &= \varphi_m(x) \cdot \psi_m(1-y), & S_{08}(x; y) &= \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(1-y), \\ S_{09}(x; y) &= \varphi_k(1-x) \cdot \varphi_k(1-y), & S_{10}(x; y) &= \varphi_m(1-x) \cdot \psi_m(1-y), \\ S_{11}(x; y) &= \psi_m(1-x) \cdot \varphi_m(1-y), & S_{12}(x; y) &= \varphi_n(1-x) \cdot \varphi_n(1-y), \\ S_{13}(x; y) &= \varphi_k(1-x) \cdot \varphi_k(y), & S_{14}(x; y) &= \psi_m(1-x) \cdot \varphi_m(y), \\ S_{15}(x; y) &= \varphi_m(1-x) \cdot \psi_m(y), & S_{16}(x; y) &= \varphi_n(1-x) \cdot \varphi_n(y).\end{aligned}\quad (20)$$

В результате этого двухмерный сплайн приводится к виду

$$S_{2D}(x; y) = \sum_{k=1}^{16} b_k \cdot S_k(x; y), \quad x, y \in [0; 1] \quad (21)$$

Выражение (21) в прикладных задачах удобно использовать в несколько ином виде. Для этого выразим неизвестные коэффициенты сплайна b_k , ($k=1, 2, \dots, 16$) через значения некоторой функции $w(x; y)$ в узлах $(i/3; j/3)$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, т.е. $w(i/3; j/3) \equiv w_{ij}$. Система, из которой находятся коэффициенты b_k , ($k=1, 2, \dots, 16$) выглядит так

$$b_k \cdot S_k(i/3; j/3) = w_{ij}, \quad (i, j = 0, 1, 2, 3) \quad (22)$$

или

$$\vec{b} \cdot B = \vec{w},$$

где $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_{16}\}$, $\vec{w} = \{w_{00}, w_{10}, w_{20}, \dots, w_{23}, w_{33}\}$ - вектора, а B - матрица размера 16×16 , элементами которой являются $S_k(i/3; j/3)$, ($i, j = 0, 1, 2, 3$).

Решение системы (22) приводится к виду

$$\begin{aligned}b_1 &= \alpha_1 w_{00} + \alpha_2 w_{10} + \alpha_3 w_{20} + \alpha_4 w_{30} + \alpha_2 w_{01} + \alpha_6 w_{11} + \alpha_7 w_{21} + \alpha_8 w_{31} + \\ &+ \alpha_3 w_{02} + \alpha_7 w_{12} + \alpha_{11} w_{22} + \alpha_{12} w_{32} + \alpha_4 w_{03} + \alpha_8 w_{13} + \alpha_{12} w_{23} + \alpha_{16} w_{33},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \beta_1 w_{00} + \beta_2 w_{10} + \beta_3 w_{20} + \beta_4 w_{30} + \beta_5 w_{01} + \beta_6 w_{11} + \beta_7 w_{21} + \beta_8 w_{31} + \\
&\quad + \beta_9 w_{02} + \beta_{10} w_{12} + \beta_{11} w_{22} + \beta_{12} w_{32} + \beta_{13} w_{03} + \beta_{14} w_{13} + \beta_{15} w_{23} + \beta_{16} w_{33}, \\
b_3 &= \beta_1 w_{00} + \beta_5 w_{10} + \beta_9 w_{20} + \beta_{13} w_{30} + \beta_2 w_{01} + \beta_6 w_{11} + \beta_{10} w_{21} + \beta_{14} w_{31} + \\
&\quad + \beta_3 w_{02} + \beta_7 w_{12} + \beta_{11} w_{22} + \beta_{15} w_{32} + \beta_4 w_{03} + \beta_8 w_{13} + \beta_{12} w_{23} + \beta_{16} w_{33}, \\
b_4 &= \omega_4 w_{00} + \omega_3 w_{10} + \omega_2 w_{20} + \omega_1 w_{30} + \omega_3 w_{01} + \omega_7 w_{11} + \omega_6 w_{21} + \omega_5 w_{31} + \\
&\quad + \omega_2 w_{02} + \omega_6 w_{12} + \omega_{10} w_{22} + \omega_9 w_{32} + \omega_1 w_{03} + \omega_5 w_{13} + \omega_9 w_{23} + \omega_{13} w_{33}, \\
b_5 &= \alpha_4 w_{00} + \alpha_8 w_{10} + \alpha_{12} w_{20} + \alpha_{16} w_{30} + \alpha_3 w_{01} + \alpha_7 w_{11} + \alpha_{11} w_{21} + \alpha_{12} w_{31} + \\
&\quad + \alpha_2 w_{02} + \alpha_6 w_{12} + \alpha_7 w_{22} + \alpha_8 w_{32} + \alpha_1 w_{03} + \alpha_2 w_{13} + \alpha_3 w_{23} + \alpha_4 w_{33}, \\
b_6 &= \beta_4 w_{00} + \beta_8 w_{10} + \beta_{12} w_{20} + \beta_{16} w_{30} + \beta_3 w_{01} + \beta_7 w_{11} + \beta_{11} w_{21} + \beta_{15} w_{31} + \\
&\quad + \beta_2 w_{02} + \beta_6 w_{12} + \beta_{10} w_{22} + \beta_{14} w_{32} + \beta_1 w_{03} + \beta_5 w_{13} + \beta_9 w_{23} + \beta_{13} w_{33}, \\
b_7 &= \beta_{13} w_{00} + \beta_{14} w_{10} + \beta_{15} w_{20} + \beta_{16} w_{30} + \beta_9 w_{01} + \beta_{10} w_{11} + \beta_{11} w_{21} + \beta_{12} w_{31} + \\
&\quad + \beta_5 w_{02} + \beta_6 w_{12} + \beta_7 w_{22} + \beta_8 w_{32} + \beta_1 w_{03} + \beta_2 w_{13} + \beta_3 w_{23} + \beta_4 w_{33}, \\
b_8 &= \omega_1 w_{00} + \omega_5 w_{10} + \omega_9 w_{20} + \omega_{13} w_{30} + \omega_2 w_{01} + \omega_6 w_{11} + \omega_{10} w_{21} + \omega_9 w_{31} + \\
&\quad + \omega_3 w_{02} + \omega_7 w_{12} + \omega_6 w_{22} + \omega_5 w_{32} + \omega_4 w_{03} + \omega_3 w_{13} + \omega_2 w_{23} + \omega_1 w_{33}, \\
b_9 &= \alpha_{16} w_{00} + \alpha_{12} w_{10} + \alpha_8 w_{20} + \alpha_4 w_{30} + \alpha_{12} w_{01} + \alpha_{11} w_{11} + \alpha_7 w_{21} + \alpha_3 w_{31} + \\
&\quad + \alpha_8 w_{02} + \alpha_7 w_{12} + \alpha_6 w_{22} + \alpha_2 w_{32} + \alpha_4 w_{03} + \alpha_3 w_{13} + \alpha_2 w_{23} + \alpha_1 w_{33}, \\
b_{10} &= \beta_{16} w_{00} + \beta_{15} w_{10} + \beta_{14} w_{20} + \beta_{13} w_{30} + \beta_{12} w_{01} + \beta_{11} w_{11} + \beta_{10} w_{21} + \beta_9 w_{31} + \\
&\quad + \beta_8 w_{02} + \beta_7 w_{12} + \beta_6 w_{22} + \beta_5 w_{32} + \beta_4 w_{03} + \beta_3 w_{13} + \beta_2 w_{23} + \beta_1 w_{33}, \\
b_{11} &= \beta_{16} w_{00} + \beta_{12} w_{10} + \beta_8 w_{20} + \beta_4 w_{30} + \beta_{15} w_{01} + \beta_{11} w_{11} + \beta_7 w_{21} + \beta_3 w_{31} + \\
&\quad + \beta_{14} w_{02} + \beta_{10} w_{12} + \beta_6 w_{22} + \beta_2 w_{32} + \beta_{13} w_{03} + \beta_9 w_{13} + \beta_5 w_{23} + \beta_1 w_{33}, \\
b_{12} &= \omega_{13} w_{00} + \omega_9 w_{10} + \omega_5 w_{20} + \omega_1 w_{30} + \omega_9 w_{01} + \omega_{10} w_{11} + \omega_6 w_{21} + \omega_2 w_{31} + \\
&\quad + \omega_5 w_{02} + \omega_6 w_{12} + \omega_7 w_{22} + \omega_3 w_{32} + \omega_1 w_{03} + \omega_2 w_{13} + \omega_3 w_{23} + \omega_4 w_{33}, \\
b_{13} &= \alpha_4 w_{00} + \alpha_3 w_{10} + \alpha_2 w_{20} + \alpha_1 w_{30} + \alpha_8 w_{01} + \alpha_7 w_{11} + \alpha_6 w_{21} + \alpha_2 w_{31} + \\
&\quad + \alpha_{12} w_{02} + \alpha_{11} w_{12} + \alpha_7 w_{22} + \alpha_3 w_{32} + \alpha_{16} w_{03} + \alpha_{12} w_{13} + \alpha_8 w_{23} + \alpha_4 w_{33}, \\
b_{14} &= \beta_{13} w_{00} + \beta_9 w_{10} + \beta_5 w_{20} + \beta_1 w_{30} + \beta_{14} w_{01} + \beta_{10} w_{11} + \beta_6 w_{21} + \beta_2 w_{31} + \\
&\quad + \beta_{15} w_{02} + \beta_{11} w_{12} + \beta_7 w_{22} + \beta_3 w_{32} + \beta_{16} w_{03} + \beta_{12} w_{13} + \beta_8 w_{23} + \beta_4 w_{33}, \\
b_{15} &= \beta_4 w_{00} + \beta_3 w_{10} + \beta_2 w_{20} + \beta_1 w_{30} + \beta_8 w_{01} + \beta_7 w_{11} + \beta_6 w_{21} + \beta_5 w_{31} + \\
&\quad + \beta_{12} w_{02} + \beta_{11} w_{12} + \beta_{10} w_{22} + \beta_9 w_{32} + \beta_{16} w_{03} + \beta_{15} w_{13} + \beta_{14} w_{23} + \beta_{13} w_{33}, \\
b_{16} &= \omega_1 w_{00} + \omega_2 w_{10} + \omega_3 w_{20} + \omega_4 w_{30} + \omega_5 w_{01} + \omega_6 w_{11} + \omega_7 w_{21} + \omega_3 w_{31} + \\
&\quad + \omega_9 w_{02} + \omega_{10} w_{12} + \omega_6 w_{22} + \omega_2 w_{32} + \omega_{13} w_{03} + \omega_9 w_{13} + \omega_5 w_{23} + \omega_1 w_{33}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -1,024129; \quad \alpha_2 = 1,853825; \quad \alpha_3 = 0,593967; \quad \alpha_4 = -1,355467; \quad \alpha_6 = -0,757792; \\
\alpha_7 &= -8,383140; \quad \alpha_8 = 7,287788; \quad \alpha_{11} = 21,854539; \quad \alpha_{12} = -14,351214; \quad \alpha_{16} = 8,639624; \\
\beta_1 &= 4,194679; \quad \beta_2 = -19,305697; \quad \beta_3 = 33,329988; \quad \beta_4 = -11,599158; \quad \beta_5 = -4,654407; \\
\beta_6 &= 29,869894; \quad \beta_7 = -54,471278; \quad \beta_8 = 20,758982; \quad \beta_9 = -4,708391; \quad \beta_{10} = -7,464884; \\
\beta_{11} &= 26,299533; \quad \beta_{12} = -15,096534; \quad \beta_{13} = 2,86393; \quad \beta_{14} = -3,017141; \quad \beta_{15} = 1,89211; \quad \beta_{16} = 1,489334; \\
\omega_1 &= -5,203586; \quad \omega_2 = 1,665582; \quad \omega_3 = 9,491196; \quad \omega_4 = -7,152129; \quad \omega_5 = 36,725048; \\
\omega_6 &= -66,177067; \quad \omega_7 = 20,348282; \quad \omega_9 = -56,662471; \quad \omega_{10} = 123,934689; \quad \omega_{13} = 23,180715
\end{aligned} \tag{24}$$

После подстановки выражений (23) в (21) и определенной перегруппировки слагаемых запишем следующее интерполяционное выражение

$$w(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \cdot F_{ij}(x, y), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} F_{00}(x, y) &= \alpha_1 S_{01}(x, y) + \beta_1 [S_{02}(x, y) + S_{03}(x, y)] + \omega_4 S_{04}(x, y) + \alpha_4 [S_{05}(x, y) + S_{13}(x, y)] + \\ &+ \beta_4 [S_{06}(x, y) + S_{15}(x, y)] + \beta_{13} [S_{07}(x, y) + S_{14}(x, y)] + \omega_1 [S_{08}(x, y) + S_{16}(x, y)] + \\ &+ \alpha_{16} S_{09}(x, y) + \beta_{16} [S_{10}(x, y) + S_{11}(x, y)] + \omega_{13} S_{12}(x, y), \\ F_{10}(x, y) &= \alpha_2 S_{01}(x, y) + \beta_2 S_{02}(x, y) + \beta_3 S_{03}(x, y) + \omega_3 S_{04}(x, y) + \alpha_8 S_{05}(x, y) + \beta_8 S_{06}(x, y) + \\ &+ \beta_{14} S_{07}(x, y) + \omega_5 S_{08}(x, y) + \alpha_{12} S_{09}(x, y) + \beta_{15} S_{10}(x, y) + \beta_{12} S_{11}(x, y) + \omega_9 S_{12}(x, y) + \\ &+ \alpha_3 S_{13}(x, y) + \beta_9 S_{14}(x, y) + \beta_3 S_{15}(x, y) + \omega_2 S_{16}(x, y), \\ F_{11}(x, y) &= \alpha_6 S_{01}(x, y) + \beta_6 [S_{02}(x, y) + S_{03}(x, y)] + \omega_7 S_{04}(x, y) + \alpha_7 [S_{05}(x, y) + S_{13}(x, y)] + \\ &+ \beta_7 [S_{06}(x, y) + S_{15}(x, y)] + \beta_{10} [S_{07}(x, y) + S_{14}(x, y)] + \omega_6 [S_{08}(x, y) + S_{16}(x, y)] + \\ &+ \alpha_{11} S_{09}(x, y) + \beta_{11} [S_{10}(x, y) + S_{11}(x, y)] + \omega_{10} S_{12}(x, y). \end{aligned} \quad (26)$$

Остальные тринадцать функций можно записать при помощи формул (26) следующим образом

$$\begin{aligned} F_{01}(x, y) &= F_{10}(y, x), \quad F_{02}(x, y) = F_{10}(1-y, x), \quad F_{03}(x, y) = F_{00}(x, 1-y), \quad F_{12}(x, y) = F_{11}(x, 1-y), \\ F_{13}(x, y) &= F_{10}(x, 1-y), \quad F_{20}(x, y) = F_{10}(1-x, y), \quad F_{21}(x, y) = F_{11}(1-x, y), \quad F_{22}(x, y) = F_{11}(1-x, 1-y), \\ F_{23}(x, y) &= F_{10}(1-x, 1-y), \quad F_{30}(x, y) = F_{00}(1-x, y), \quad F_{31}(x, y) = F_{10}(y, 1-x), \quad F_{32}(x, y) = F_{00}(1-y, 1-x), \\ F_{33}(x, y) &= F_{00}(1-x, 1-y). \end{aligned}$$

Частные производные первого и второго порядков по координатам определяются на основании выражения (25). Тогда для дифференциальных операторов, входящих в состав расчетных формул (8) и (10) можно записать такие выражения

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1(w)}{h_1} &\equiv \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\lambda_2(w)}{h_2} \equiv \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial F_{ij}(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{\mu_1(w)}{h_1^2} &\equiv \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\mu_2(w)}{h_2^2} \equiv \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 w_{ij} \frac{\partial^2 F_{ij}(x, y)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (27)$$

Отметим, что по аналогии с результатами работы [1], формулы (17) позволяют вычислять частные производные по координатам первого порядка в областях расположенных непосредственно на границе тела $x \in [x_0; x_1], y \in [y_0; y_1], x \in [x_{N-1}; x_N], y \in [y_{M-1}; y_M]$ и соседних с ними областях $x \in [x_1; x_2], y \in [y_1; y_2], x \in [x_{N-2}; x_{N-1}], y \in [y_{M-2}; y_{M-1}]$. Во всех остальных ячейках пространственной сетки для этой цели нужно пользоваться линейной комбинацией (полу суммой) соответствующих выражений из (27), записанных в соседних областях.

Численные результаты. Рассмотрим осесимметричную задачу об определении температурного поля и связанного с ним

нестационарного термо-упруго-пластического напряженно-деформируемого состояния цилиндрического тела $r \in [R_0; R_1]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $x \in [-L; L]$. Для определения компонентов тензоров напряжения $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_x, \sigma_{r\varphi}$, деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_x, \varepsilon_{r\varphi}$ и компонентов вектора скорости перемещений v_r, v_x на полном шаге по времени использовались расчетные формулы метода покомпонентного расщепления (10). Все искомые величины задавались в форме напряженного двумерного сплайна (25) по координатам r, x . При этом температура T в каждый момент времени определялась из решения уравнения теплопроводности (3) при помощи формул (8) с учетом величин $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ($i, j = r, \varphi, x$), взятых с предыдущего шага по времени.

На первом этапе нагружения цилиндр сжимался силами P направленными вдоль оси. Выбирались усилия, при которых интенсивность напряжения σ_i превышала предел упругости материала σ_s .

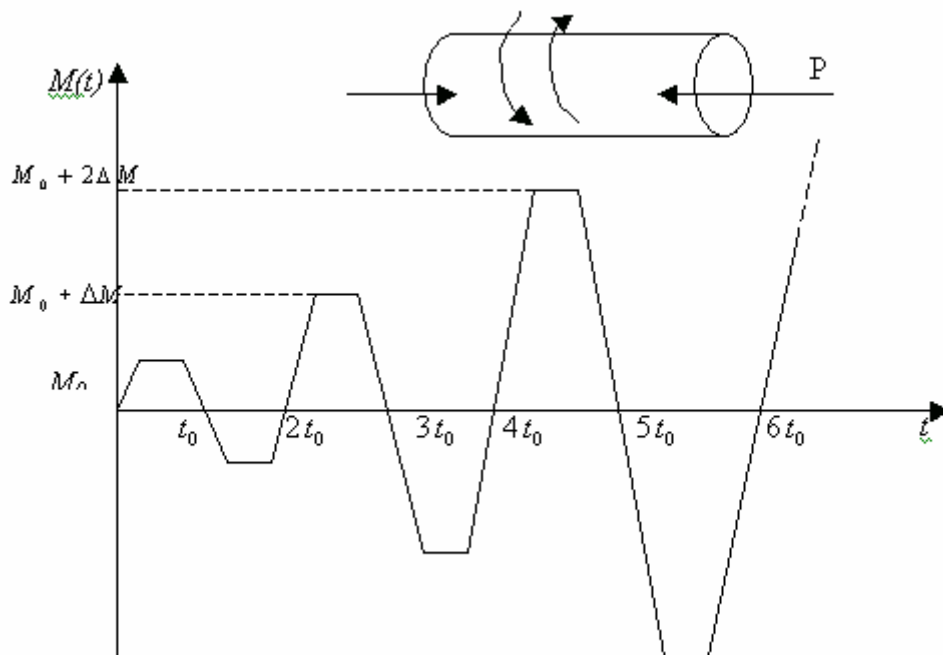


Рисунок 1 - Схема нагружения цилиндра на втором этапе

Здесь $\sigma_i = \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_x)^2}{2} + 3\tau_{r\varphi}^2 \right]^{1/2}$. Схема нагружения

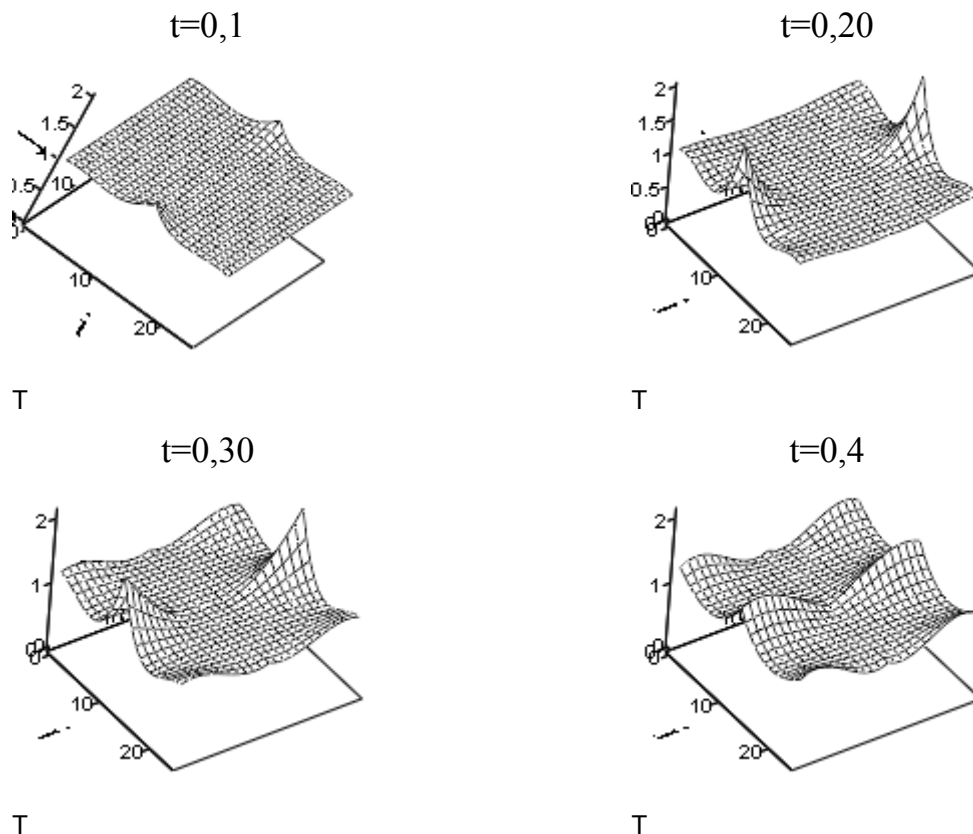
цилиндра крутящим моментом M , меняющим знак при переходе

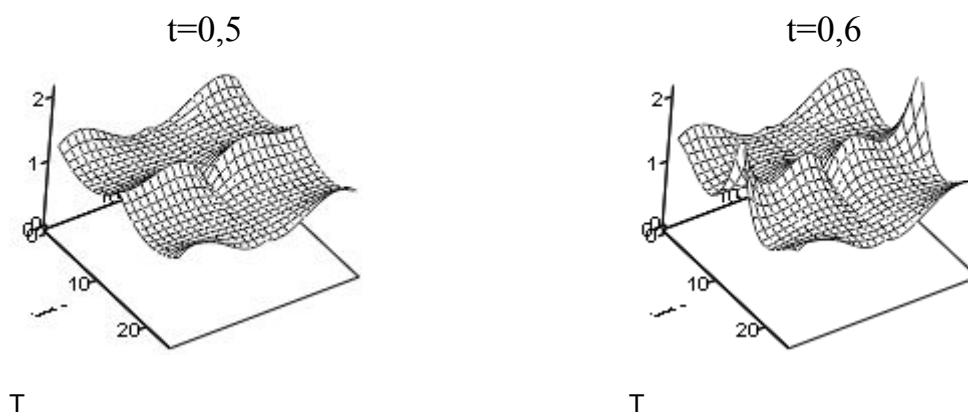
через сечение $x = 0$ на противоположный, показана на рисунке 1. Начальное распределение температуры - $T = T_0$. Начальные условия по всем остальным искомым величинам выбраны нулевыми.

В результате такого нагружения тангенциальное напряжение $\sigma_{\tau\varphi}$ в окрестности сечения циклически изменялось. В начале второй стадии нагружения интенсивность напряжений росла, а затем

происходила разгрузка по упругому закону. Далее процесс повторялся. На рисунке 3 показаны распределения температуры ($T \equiv T/T_0$) в сечении $\varphi = \text{const}$ для различных фиксированных моментов времени в окрестности сечения $x = 0$. Здесь задавалось $\tau_* = a\tau/h^2 = 0,05$, а безразмерное время определялось как $t = n\tau_*$ ($n = 0; 1; \dots$).

Анализируя приведенные результаты можно констатировать существенное влияние циклически изменяющегося крутящего момента на процесс тепловыделения в окрестности сечения $x = 0$.



Рисунок 2 - Распределение температуры в сечении r, x

Выводы. Получено явное выражение для двухмерного интерполяционного напряженного сплайна. На основании этого разработан эффективный метод численного решения пространственных нестационарных задач теории термоупругопластичности, основанный на сведении исходной трехмерной задачи теории к системе трех последовательно решаемых двухмерных задач, когда неизвестные величины (скорости перемещений, напряжения и деформации) разыскиваются в виде двухмерных напряженных сплайнов, в случае деформирования элемента тела по траекториям деформирования малой кривизны.

Получены рекуррентные формулы неявной схемы метода расщепления для определения скоростей перемещений, напряжений и деформаций, позволяющие получить соответственно третий и четвертый порядок аппроксимации метода по координатам. Получено численное подтверждение того, что итерационная процедура быстро сходится. После трех итераций результаты по T в точке $x = 0$, $r = R_1$ отличались менее чем на 1%.

При построении расчетных формул итерационной процедуры, неявной схемы метода расщепления, неизвестные коэффициенты сплайна b_k , ($k = 1, 2, \dots, 16$) выражены через значения некоторой функции $w(x, y)$ в узлах пространственной сетки. Это позволило не только аппроксимировать частные производные первого и второго порядков по координатам в узлах, но и автоматически с высокой точностью получать решение задачи между узлами сетки в произвольной точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980.–352 с.

2. Крылова Т.В., Лигун А.А. Асимптотические оценки погрешности приближения функций интерполяционными напряженными сплайнами // Теория приближения.- Днепропетровск, 1994.- С. 63-64.
3. Марчук Г. И. Методы расщепления.-Москва: Наука, 1988. – 263 с.
4. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М:Наука, 1971. – 552 с.
5. Стечкин С.В., Субботин Ю.Н. Сплаины в вычислительной математике. - М.: Наука, 1976. – 248 с.
6. Стеблянюк П.А. К обоснованию метода покомпонентного расщепления для систем уравнений в частных производных // Современ. вопросы теории приближения и комплексного анализа. – К., Ин-т математики АН Украины, 1990. – С. 123 - 127.
7. Стеблянюк П.О. Методи розв’язання багатовимірних динамічних задач МДТТ. - К.: Міністерство освіти України, НМК ВО, 1990. – 139 с.
8. Стеблянюк П.О. Тривимірні динамічні задачі теорії пластичності. – К.: Наукове видання, НМК ВО, 1991. – 63 с.
9. Стеблянюк П.А. Решение неоднородных динамических задач для упругопластических тел экономичными методами. - К.: Министерство образования Украины, НМК ВО, 1992. – 54 с.
10. Стеблянюк П.А. Динамическая задача для ослабленной упругопластической пластины как трехмерного тела // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. – Днепропетровск, Изд-во ДГУ, 1992.-С. 115 - 121.
11. Стеблянюк П.А. Нестационарное напряженно - деформированное состояние пластин и оболочек с концентраторами, моделируемых трехмерным телом // Математичне моделювання. – Днепропетровск, ДДТУ, 1994. – С. 50 - 51.
12. Стеблянюк П.А. Пространственные нестационарные задачи теории термоупругопластичности. – К.: ИМ НАН Украины, 1997. – 273 с.
13. Стеблянюк П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304 с.
14. Стеблянюк П.А. Методы решения нестационарных задач теории пластичности. - Тверь: Приз, 1999. – 424 с.
15. Стеблянюк П.О., Волосова Н.М. Зв’язана задача для попередньо стиснутого циліндра при крутячому моменті, що циклічно змінюється // Системные технологии.-Вып.2(19).-Днепропетровск. Сист.техн., 2001.-С. 94 – 102.
16. Стеблянюк П.А., Еременко П.А. Численное определение нестационарного температурного поля в растущем по известному закону слое // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету. Вип. 3/2002 (114). С. 136 – 137.
17. Стеблянюк П.О., Волосова Н.М. Урахування ефекту тепловиділення у двовимірній нестационарній задачі теорії термопластичності для товстостінного циліндру // Вестник Кременчужского государственного политехнического университета. Выпуск 3/2002 (14).-Кременчуг: 2002.-С.133-135.
18. Стеблянюк П.А., Волосова Н.Н., Еременко П.А. Численное определение температурных напряжений в заготовке с использованием двумерной модели растущего цилиндрического тела// V Miedzynarodowa

conferencja nowe technologie w metalurgii i inzynirii, Czestohovwa, 2004, GZESC1, p. 251-253.

19. Стеблянюк П.А. Анализ вычислительной эффективности приближенных методов при исследовании нестационарного напряженно-деформированного состояния тел с использованием двумерных сплайнов//Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Збірник наукових праць/ ДНУ.- Дніпропетровськ, 2005.- Вип. 7.- С 73-87.
20. Стеблянюк П.А. Применение двумерного кубического сплайна для описания геометрических объектов// Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 3 (44) .- Дніпропетровськ, 2006.- С. -107-111.
21. Стеблянюк П.О. Застосування двовимірного напруженого сплайну в задачах механіки // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 5 (46) .- Дніпропетровськ, 2006.- С. - 17-26.
22. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2. Термовязкопластичность.-Киев:Наукова думка,1987.-264 с.
23. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - Новосибирск: Наука, 1967. - 195 с.
24. Яненко Н.Н. Введение в разностные методы математической физики. - Новосибирск: Изд. НГУ, 1968. - Ч. 1. - 192 с.
25. Steblyanko P.A. The method of decomposition in the non-stationary space problems of the theory of plasticity.-K.:SMC HE, 2000.-159 p.
26. Steblyanko P. A., Volosova N. N. Non-stationary 2D and 3D coupled problems of the theory of thermoplasticity //System technologies. – 2(13).– Dnepropetrovsk, 2001. – P. 174 – 181.
27. Steblyanko P. A. Spline-approximation of solution of system of nonlinear PDE//System technologies.–2(13). – Dnepropetrovsk, 2001.–P.181– 189.
28. Steblyanko P. A. The schemes of abnormally high accuracy solution of non-stationary problems of theory of thermo-elastic-plasticity for plates and shells// The Fifth International Congress on Thermal Stresses and Related Topics. Vol.1 – Virginia Politechn. Institute and State University Blacksburg, Virginia, USA. – June 8-11, 2003.-P. 231–234.
29. Steblyanko P.A. The method of solving of non-stationary coupled problems of the theory thermal-plasticity for the rotation shells // XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Warsaw, Poland. – 15-21 August 2004. – P. 208.
30. Shevchenko Yu.N., Steblyanko P. A. The non-stationary 2D and 3D coupled problems of thermal-elastic-plasticity// TS2005-6th International Congress on Thermal Stresses Related Topics, May 26-29, 2005. Vienna, Austria. - P. 231-234.

Получено 18.06.2007 г.

УДК 681-323

В.В.Бинкевич, И.В.Усиченко

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ИНТЕГРИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ

Введение. Работы по созданию интегрированных автоматизированных систем управления получили интенсивное развитие в 70-х годах прошлого века. Одним из объектов, потребовавшим усовершенствования управления на основе интеграции явилась в это время черная металлургия Украины. Актуальность решения задачи информационной интеграции определилась свойствами объекта управления. Известно, что черная металлургия представляет собой сложный многоподотраслевой комплекс, характеризующийся тесными производственными связями между различными по технологии, структуре и объемам производства подразделениями и предприятиями. Важной особенностью производства металлургической продукции в Украине является возможность самостоятельного обеспечения предприятий железорудным сырьем, коксом, огнеупорами и другими ресурсами. При этом характерным является большое количество внутриотраслевых переделов, высокая материалоемкость и энергоемкость процессов. Сбои и простои в работе агрегатов металлургического комплекса привели к большим экономическим потерям. Повышение скорости передачи и обработки данных для принятия на их основе оперативных решений представлялось целью автоматизации управления.

В условиях развития автоматизированных систем управления (АСУ) сформировалось несколько подходов к интеграции информационных технологий.

1. Объединение АСУ технологическими процессами (АСУТП) с АСУ предприятием (АСУП) и обеспечение их взаимодействия в реальном масштабе времени.
2. Объединение всех задач управления на базе единого информационного обеспечения.

3. Создание многомашинного вычислительного комплекса на основе сети ЭВМ для решения задач оперативного управления.

Направление реализации первого подхода было определено при разработке «Общепромышленных руководящих методических материалов по созданию организационно-технологических автоматизированных систем управления» [1].

В соответствии с методическими материалами предусматривалось создание организационно-технологических АСУ (АСУОТ), представляющих собой многоуровневые иерархические системы, сочетающие функции АСУП и АСУТП и обеспечивающих согласование по целям, критериям и процедурам обработки данных, совместное функционирование этих АСУ. АСУОТ намечалось создать на промышленных предприятиях в целях получения дополнительного эффекта, превышающего сумму эффектов, достигаемых при независимом функционировании отдельных АСУП, АСУТП и других АСУ[1].

Второй и третий подходы намечались к реализации в соответствии с «Программой создания интегрированных АСУ на предприятиях черной металлургии УССР». Программа была разработана Головным информационно-вычислительным центром Минчермета УССР (ГИВЦ), согласована с Госпланом Украины, Институтом кибернетики АН УССР и утверждена Госкомитетом по науке и технике СССР.

Анализ известных решений. Первым опытом технической и технологической интеграции информационных технологий при реализации принятой программы явилось проектирование сети ЭВМ в черной металлургии УССР [2]. Планировалось создание большой вычислительной системы распределенного типа с централизованным управлением на базе трехуровневого вычислительного комплекса. Вычислительный комплекс первого уровня - ГИВЦ- с помощью широкополосных магистральных каналов связи соединялся с вычислительными комплексами второго уровня – двумя кустовыми ВЦ коллективного использования в Криворожской и Донецком промышленных районах металлургического производства. Вычислительные комплексы третьего уровня – это вычислительные

центры предприятий, в первую очередь тех, которые определялись как базовые для создания интегрированных АСУ.

Организация кустового ВЦ в Кривбассе позволяла создать эффективную территориально-отраслевую систему управления, координирующую работу горнорудных предприятий, металлургического и коксохимического заводов, транспортных, ремонтных, энергетических и других предприятий этого промышленного района.

На базе кустового ВЦ в Донецке создавалась типовая АСУ для предприятий производственного управления «Укротнеупорнеруд», а также координировались работы по созданию АСУ на коксохимических предприятиях сосредоточенных в этом районе. Функционирование кустовых ВЦ позволяло улучшить управление интенсивными железнодорожными перевозками угля и железнорудного сырья между Кривбассом и Донбассом, обеспечить ритмичность поставок, сократить простои технологического оборудования на предприятиях и транспорте.

К 1980 г. вопросы реализации принятого направления работ были в основном решены. При этом технической базой информационной технологии являлись ЭВМ III поколения (ЕС-ЭВМ). Государственной комиссией интегрированная АСУ Укрчермет была принята в эксплуатацию. Однако, информационная технология на всех уровнях системы базировалась в основном на передаче первичных данных и решении учетных задач. При развитии работ возникали существенные методологические и организационно-правовые проблемы [4]. В целом система была направлена на реализацию директивного оперативного управления. В связи с этим ее потенциальная эффективность не могла быть достигнута.

В то же время, в ходе проектирования интегрированных АСУ, были выявлены важные направления совершенствования интегрированных информационных технологий.

Был сделан вывод, что интеграция может рассматриваться как восстановление существующих связей в экономическом объекте и совершенствование его с применением новых средств и методов управления. Восстановление утраченных из-за недостатков в проектировании АСУ связей экономического объекта приводят к новому качеству системы и появлению системного (синергического) эффекта. Дополнительный эффект возникает за счет восстановления

вертикальных взаимосвязей (эффект временной интеграции) и горизонтальных связей на каждом из уровней (эффект пространственной интеграции) [4]. Требуется учитывать, что в производственной системе в ходе длительной эволюции сложился довольно совершенный механизм самоорганизации и адаптивного управления. Этот механизм является отражением в конкретных структурах, технологических, организационных и правовых регламентах длительно накапливаемого коллективного опыта производственной деятельности. Можно предположить, что этот механизм отражает в конечном счете общие свойства структур и закономерностей естественного развития систем. Одним из условий такого развития явилось динамическое поддержание свойств целостности системы на основе формирования интегрированной информационной технологии. Новые требования к автоматизации управления включили необходимость построения «целостных информационно-вычислительных технологий» и органического «встраивания их в производственную среду в соответствии с потребностями самой среды». Экономическое развитие в таких системах должно происходить на инновационной основе с использованием знаний и опыта работников на всех уровнях управления [5].

Основная часть. В современных условиях при усилившейся динамике экономических процессов построение интегрированных информационных технологий представляется возможным реализовать как «интеграцию на основе самоорганизации» [6]. При этом условия самоорганизации (относительной автономии принятия экономических решений) должны быть выявлены как на микроуровне – в некоторых первичных процессах, так и на макроуровне – в интегрированных системах, включающих первичные.

В качестве первичного экономического процесса будем рассматривать обобщенную организационно - технологическую (ОТ) систему. В организационной подсистеме ОТ системы осуществляются процессы переработки информации при управлении технологической подсистемой, преобразующей вещественные ресурсы в продукцию, потребляемую во внешней среде. В соответствии с общим положением системно- кибернетического подхода, определяющим необходимость и возможность исследовать любой объект (процесс), как элемент более

широкой системы и, одновременно, как систему, в которой также могут быть выделены собственные элементы, можно рассматривать ОТ систему как многоуровневую. Формально будем считать, что при этом образуется иерархия вложенных ОТ систем, преобразующих ресурсы в продукцию в границах относительной обособленности уровней управления.

Попытаемся определить условия при которых взаимодействие между структурными элементами многоуровневой ОТ системы может привести к управлению на инновационной основе. Принципиальная схема системы управления (S) обычно представляется состоящей из трех основных частей: объекта управления (ОУ), управляющего объекта (УО) и исполнительного органа (ИО). УО и ИО образуют управляющую организационную подсистему, ОУ – технологическую. Таким образом рассматривается ОТ система, как это принято выше.

Процесс функционирования системы управления в иерархических системах управления представляется следующим образом: УО на основе входной информации о цели функционирования системы (S) и осведомляющей информации (I_{oc}) о текущем состоянии ОУ вырабатывает управляющую информацию (I_y), которая воздействует на ИО; на основе I_y с учетом влияния на S возмущающих воздействий ИО формирует управляющее воздействие на ОУ.

Характерной особенностью подобных описаний системы управления является то, что осведомляющая связь (обратная связь) обычно направляется непосредственно в УО минуя ИО. Выдача осведомляющей связи (в основном учетных данных) непосредственно ОУ не может существенно повысить эффективность системы управления на основе применения интеллектуальных ресурсов в интегрированных информационных технологиях. УО обычно не в состоянии переработать поток поступающей к нему учетной информации особенно в многоуровневых системах, работающих в современных условиях. Применение линейно-функциональных организационных структур не позволяет избежать запаздывания в обработке информации обратных связей при принятии решений по системе в целом. Автоматизация обработки данных в функциональных подразделениях и создание АРМ на основе ПБМ, баз данных и сетей передачи данных позволила ускорить поиск

рациональных решений по отдельным подразделениям и направлениям работ производственных систем. Однако, для отыскания оптимальных решений по системе в целом и обеспечения взаимосвязи организационных и технологических подсистем в интегрированных информационных технологиях должна быть решена задача согласования глобального и локальных критериев оптимальности. Сложность решения этой задачи связана с тем, что оптимальное решение по системе в целом может быть найдено только по информации об оптимальном состоянии подсистем, и, в то же время, оптимальное решение по подсистемам может быть получено только по информации о глобальном оптимальном решении. Возникающее противоречие может быть преодолено, если по отдельным подсистемам отыскивается доминирующая по глобальному ресурсу последовательность (зависимость) субоптимальных решений. По субоптимальным зависимостям отыскивается глобальное оптимальное решение, одновременно конкретизирующее вариант оптимальных решений по подсистемам.

Решение задачи интеграции на основе глобального критерия оптимальности по информации о субоптимальных вариантах будет соответствовать обеспечению интеграции на основе самоорганизации. Представляется, что при этом целесообразно совершенствовать автоматизированную информационную технологию в системе управления с учетом выделения специфических знаковых уровней (соответствующих трем аспектам семиотики): синтаксического, семантического и прагматического.

Будем считать, что формирование учетных данных о работе ОУ соответствует синтаксическому аспекту (уровню) анализа. На этом уровне могут также формироваться инициативные предложения и прогнозные данные о возможных вариантах усовершенствования производственных процессов. На этом уровне формируется информация обратных связей, поступающая на следующий, семантический уровень, рассматриваемый в структуре традиционных систем управления как ИО. Обработка информации обратных связей с применением средств вычислительной техники и экономико-математических моделей должна позволить своевременно подготовить варианты усовершенствования решений, принимаемых на прагматическом уровне, представленном как УО. Только на этом

уровне первичные данные становятся информацией повышающей степень достижения цели управления системой. Таким образом, в многоуровневой ОТ системе может быть последовательно сформирована интегрированная информационная технология, использующая интеллектуальные ресурсы.

Выводы. Анализ решений по проектированию интегрированных информационных технологий в черной металлургии Украины позволяет сделать вывод, что основным их недостатком была ориентация на оперативное директивное управление по осведомляющим данным. Системно-кибернетические исследования показывают, что интегрированная информационная технология в многоуровневой ОТ системе может быть реализована только на основе самоорганизации первичных ОТ объектов при автоматизации обработки информации обратных связей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Комплекс общепромышленных руководящих методических материалов по созданию АСУ и САПР/ Государственный комитет СССР по науке и технике. – М.: Статистика, 1980.
2. Якунин А.А., Бинкевич В.В. О создании сети ЭВМ в черной металлургии УССР//Управляющие системы и машины, №; 6. – К.: Наук. думка, 1976.
3. Правовые аспекты компьютеризации управления/ В.Я. Рубан, А.Х. Юлдашев, В.Н. Мирошник и др. Отв. редактор А.Х. Юлдашев: АН УССР, Ин-т государства и права. К.: Наук. думка, 1988.
4. Шихаев К.Н., Паншелев В.Н., Репьев Ю.М. Процессы интеграции в АСУ. – М.: Наука, 1982.
5. Михалевич В.С., Каныгин Ю.М., Гриценко В.И. Основные черты информатики// Методологические проблемы кибернетики и информатики. – К.: Наук. Думка, 1986.
6. Бинкевич В.В., Усиченко И.В. Об интеграции на основе самоорганизации// Вісник Дніпропетровського університету. Історія і філософія науки і техніки.-Випуск 8. - Дніпропетровськ: ДНУ, 2001.

Получено 18.06.2007 г.

УДК 539.3

Д.Г. Зеленцов, Ю.А. Храпач, Н.А. Солодкая

УЧЕТ КОНЦЕНТРАТОРОВ КОРРОЗИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДОЛГОВЕЧНОСТИ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Постановка проблемы. Часто в строительных и промышленных конструкциях используются стержневые элементы, составленные из профилей различных типов и размеров. Между тем, практически все виды соединений могут быть концентраторами коррозии, в том числе способствовать переходу сплошной коррозии в локальную. К числу наиболее технологичных и распространенных типов соединений можно отнести сварные соединения.

В связи с этим исследование долговечности стержневых конструкций, имеющих сварные соединения, является актуальной задачей.

Анализ последних исследований. В [1] приводится краткий анализ влияния формы сечения стержневых элементов на их долговечность. К сожалению, там практически не исследовано влияние на долговечность способа соединения элементов и концентраторов коррозии, вызванных тем или иным соединением.

Формулировка целей. Целью работы является исследование долговечности сжатых стержней, имеющих сварные соединения. Стержни подвержены коррозионному воздействию, математическая модель, которого имеет вид:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0(1 + k\sigma) \quad (1)$$

Здесь δ и σ – глубина коррозии и напряжение в элементе;

v_0 – скорость коррозии при отсутствии напряжений;

k – коэффициент, учитывающий влияние напряжений на скорость коррозии;

t – время;

Основная часть. Особенности коррозии сварных соединений достаточно подробно описаны в [2, 3]. Из большого количества факторов, влияющих на скорость коррозии сварных швов, следует особо выделить неравномерность электродного потенциала на поверхности металла вблизи шва. Следуя [4], выделяют три зоны,

отличающиеся значением электродного потенциала на поверхности металла: основной металл; зона термического влияния и сварной шов. Именно из-за того, что величина потенциала в зоне термического влияния и шва значительно выше, чем в зоне основного металла, сварные швы являются концентраторами коррозии. Пренебрегая возможностью возникновения локальных очагов коррозии, рассмотрим задачу долговечности сжатого сварного стержня с учетом концентрации коррозии в зоне сварного шва. Будем считать, что глубина сварного одинакова по всей длине стержня, и долговечность стержня определяется ограничением по устойчивости. В этом случае возможны два состояния стержня: когда его составные элементы связаны посредством сварки и представляют единое целое, и когда связь между ними теряется вследствие коррозии сварного шва. В последнем случае каждый составной элемент работает независимо от других.

Ограничимся случаем электрохимической коррозии. Как показано еще М. Фарадеем, на скорость электрохимического растворения металла в электролите существенно влияет величина анодного тока I . Между этим параметром и величиной электродного потенциала φ существует взаимосвязь, определяемая формулой Тафеля [5]:

$$\varphi = a + b \lg i; i = \frac{I}{F} \quad (2)$$

где a и b – константы, постоянные для всех точек корродирующей поверхности; i – плотность тока растворения; F – площадь контакта поверхности с агрессивной средой.

Считая значение величины F постоянным, и учитывая, что глубина коррозионного поражения прямо пропорциональна плотности тока растворения i , определим значение коэффициента концентрации коррозии. Пусть v_0^*, φ^* – значение скорости коррозии и величина электродного потенциала в зоне термического влияния или сварного шва. Определяя из (2) значение плотности тока i , получим:

$$\zeta = \frac{v_0^*}{v_0} = 10^{\frac{|\varphi^* - \varphi|}{b}} \quad (3)$$

Как следует из этой формулы, величина коэффициента концентрации коррозии зависит от разности потенциалов на поверхности корродирующего металла вблизи сварного шва. Данные

для расчета коэффициентов концентрации приводятся, например, в [6]. Так, например, для углеродистых сталей, распределение электродного потенциала вблизи шва, выполненного с помощью газовой сварки проволокой из стали марки 17Г2С1, имеет следующий вид: $\varphi_M = -500$ мВ; $\varphi_{зме} = -550$ мВ; $\varphi_{сш} = -540$ мВ; значение коэффициента $b = 80$ мВ. Данные получены для агрессивной среды – 3 % раствора NaCl. Значение коэффициента концентрации в этом случае $\zeta \approx 3,16$.

В качестве примера рассмотрим задачу долговечности сжатого стержня, собранного посредством сварки из двух уголкового профиля № 16 (ГОСТ 8510-86). При решении задачи будем считать, что площадь наплавленного металла в сечении пренебрежимо мала по сравнению с площадью основного металла.

Рассмотрим два временных интервала: $t \in [0; \tilde{t}]$ и $t \in (\tilde{t}; t^*]$. В течение первого интервала сварка обеспечивает связь между отдельными фрагментами сечения. Возможное деформирование стержня возможно в плоскости минимального момента инерции относительно оси X_0 (рис.1а). Положение этой оси определится по формуле

$$y_0(t) = \frac{S_x(t)}{F(t)} \quad (4)$$

где S_x – статический момент инерции сечения относительно оси X , F – площадь поперечного сечения стержня.

$$S_x = (T - 2\delta_1)[(B - 2\delta_1)^2 - (D - 2\delta_1)^2] + \frac{1}{2}(D - 2\delta_1)^2(H - 2\delta_1) \quad (5)$$

$$F = (H - 2\delta_1)(D - 2\delta_1) + 2(T - 2\delta_1)(B - D) \quad (6)$$

где B , H , D , T – геометрические размеры поперечного сечения стержневого элемента.

Момент времени $\tilde{t}$ соответствует полному разрушению сварного соединения. По истечению этого времени связь между фрагментами сечения теряется, и возможное деформирование каждого из фрагментов осуществляется в плоскости своего минимального момента инерции – относительно осей u_1v_1 и u_2v_2 (рис. 1б). Таким образом, функция, определяющая зависимость критического напряжения потери устойчивости от времени в окрестности точки $\tilde{t}$ будет иметь точку разрыва первого рода.

На рисунке 2 показаны эти зависимости для стержней длиной $L=550$ см (кривые 1), 500 см (кривые 2) и 450 см (кривые 3). Нижняя кривая соответствует росту текущих напряжений в сечении стержня. Так как величина нагрузки полагалась неизменной, нижняя кривая одинакова для всех трех стержней. Результаты получены для сжимающей нагрузки $Q=10000$ кг и следующих параметров коррозионного износа: $v_0=0,1$ см/год; $k=0,003$ МПа⁻¹. Значение коэффициента концентрации коррозии, согласно данным о распределении величины электродного потенциала в области сварного шва принималось равным $\zeta=2,5$.

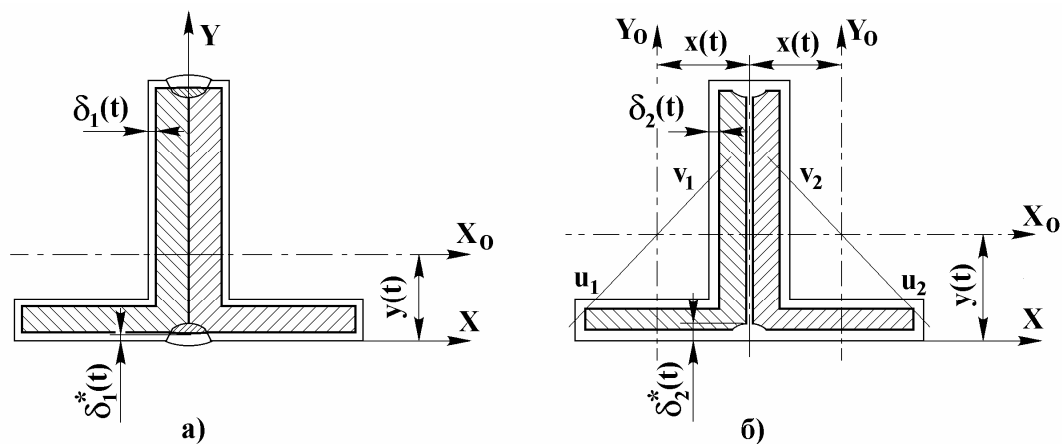


Рисунок 1 – Возможные случаи потери устойчивости сварного профиля

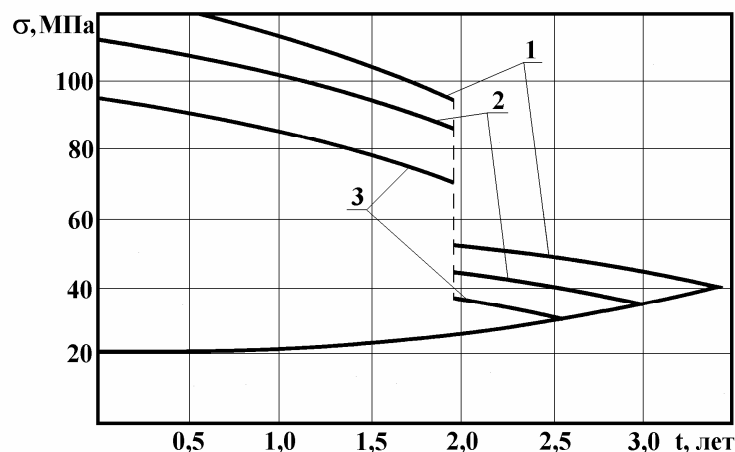


Рисунок 2 – Изменение текущих и критических напряжений в сжатых сварных стержнях

Выводы. На примере сварных соединений исследован механизм возможного деформирования составных стержней при потере устойчивости.

На основании приведенных исследований можно сделать вывод о нецелесообразности применения сварных соединений в конструкциях, предназначенных для эксплуатации в агрессивных средах, особенно в тех случаях, когда возможна полная коррозия сварного шва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров В. В., Овчинников И. Г., Шихов Ю. М. Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. – Саратов: СГУ, 1987. – 288 с.
2. Стеклов О.И. Стойкость материалов и конструкций к коррозии под напряжением. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.
3. Стеклов О.И. Прочность сварных соединений в агрессивных средах. – М.: Машиностроение, 1976. – 220 с.
4. Чернов Б.Б., Чичкин Р.В. Модельный расчет распределения тока коррозии по поверхности сварных соединений. // Защита металлов, 1983. – №5. – с. 784-788.
5. Скорчелетти В. В. Теоретические основы коррозии металлов. Л.: Издат-во Химия, 1973. – 263 с.
6. Сварка в машиностроении: Справочник в 4-х т. / Под. Ред. В.А. Винокурова. – М.: Машиностроение, 1973. – Т. 3. – 567 с.

Получено 10.06.2007 г.

УДК 629.025:539.4

В.О. Бейгул, Г.Л. Лепетова, Г.О. Щербинська, О.О. Бейгул

ОБГРУНТУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ПІДЙОМНО-ЗЧЕПЛЮВАЛЬНОГО ПРИСТРОЮ БУКСИРОВЩИКІВ КАР’ЄРНИХ АВТОСАМОСКИДІВ

Постановка проблеми. Прогрес гірничої промисловості тісно пов’язаний з розвитком відкритих розробок корисних копалин, де у транспортному обслуговуванні чільне місце займають автосамоскиди. У складних умовах експлуатації вони часто руйнуються на великій глибині кар’єрів, коли виникає потреба доставки техніки у стаціонарні механічні майстерні для наступного ремонту. В умовах обмеженого простору та великих уклонів технологічних доріг у кар’єрах для цієї мети служать спеціально обладнані буксировщики, які дозволяють оперативно підхоплювати і транспортувати зруйновані автосамоскиди. У кар’єрах технологічні дороги не дозволяють використовувати складні маневри, тому захват і транспортування машин мають відбуватися захватом як спереду, так і ззаду. Ця обставина визначає конструктивні особливості підйомно-зчеплювальних пристроїв, для яких обґрунтування раціональних параметрів складає актуальну наукову задачу.

Аналіз досліджень і публікацій. Буксировщики розробляються на базі автосамоскидів БілАЗ шляхом переобладнання, а саме установки підйомно-зчеплювального пристрою замість кузова. Параметри основних силових елементів підйомно-зчеплювальних пристроїв визначаються з проектувального розрахунку на міцність, який не враховує ряду навантажень, пов’язаних з коливаннями системи “буксировщик-автосамоскид” при русі по нерівностях технологічних доріг.

У роботі [1] окреслена проблема автосамоскидів, відзначається, що у науковій літературі практично відсутні матеріали, присвячені розробці та дослідженню підйомно-зчеплювальних пристроїв. Роботи [2], [3] присвячені динаміці дволанкових колісних машин, вони висвітлюють шлях визначення розрахункових навантажень на несучі конструкції. У роботах [4], [5] описані нерівності, які трапляються на

технологічних дорогах і спричиняють підвищення динамічних навантажень.

Нерозв’язана частина загальної проблеми. Разом з тим ці роботи не торкаються визначення параметрів конкретної конструкції підйомно-зчеплювального пристрою.

Мета роботи, таким чином, полягає у розробці алгоритму визначення параметрів основних силових елементів, методики проектувального розрахунку на міцність конструкції підйомно-зчеплювального пристрою буксировщиків кар’єрних автосамоскидів.

Викладення основного матеріалу. Підйомно-зчеплювальний пристрій може мати конструктивні особливості, але принципово складається з двох вузлів: нерухомої та рухомої штанг. Нерухома штанга – балочна конструкція, яка кріпиться до рами базової машини і має відповідні пристрої для переміщення рухомої штанги. Рухома штанга містить у собі два вузли захвату автосамоскида, переміщується у направляючих пристроях нерухомої штанги. Переміщується рухома штанга за допомогою гідравлічного чи пневматичного приводів. В залежності від місця захвату – за передній бампер чи за задню поперечину кузова – у роботу включається нижній або верхній вузли захвату рухомої штанги відповідно.

На рис. 1 представлена розрахункова схема підйомно-зчеплювального пристрою, де мають місце наступні позначення: 1 – штанга рухома; 2 – штанга нерухома; 3 – гідроциліндр підйому; 4 – кронштейн кріплення нерухомої штанги до рами буксировщика. При захваті спереду навантажується нижній вузол, при захваті ззаду навантажується верхній вузол рухомої штанги. Навантаження основних елементів підйомно-зчеплювального пристрою описується наступними розрахунковими випадками: 1. Навантаження нижнього вузла рухомої штанги вертикальною силою F_{y1} при підйомі автосамоскида. 2. Навантаження верхнього вузла штанги вертикальною силою F_{y2} при підйомі автосамоскида. 3. Навантаження нижнього вузла рухомої штанги вертикальною силою F_{y3} та поздовжньою силою F_{x3} . 4. Навантаження верхнього вузла рухомої штанги вертикальною силою F_{y4} та поздовжньою силою F_{x4} при буксируванні автосамоскида. 5. Навантаження нижнього вузла рухомої штанги вертикальною силою F_{y5} , поздовжньою силою F_{x5} та

поперечною силою F_{z5} при зрушенні з місця та асиметричному навантаженні. 6. Навантаження верхнього вузла рухомої штанги вертикальною силою F_{y6} , поздовжньою силою F_{x6} та поперечною силою F_{z6} при зрушенні з місця та асиметричному навантаженні.

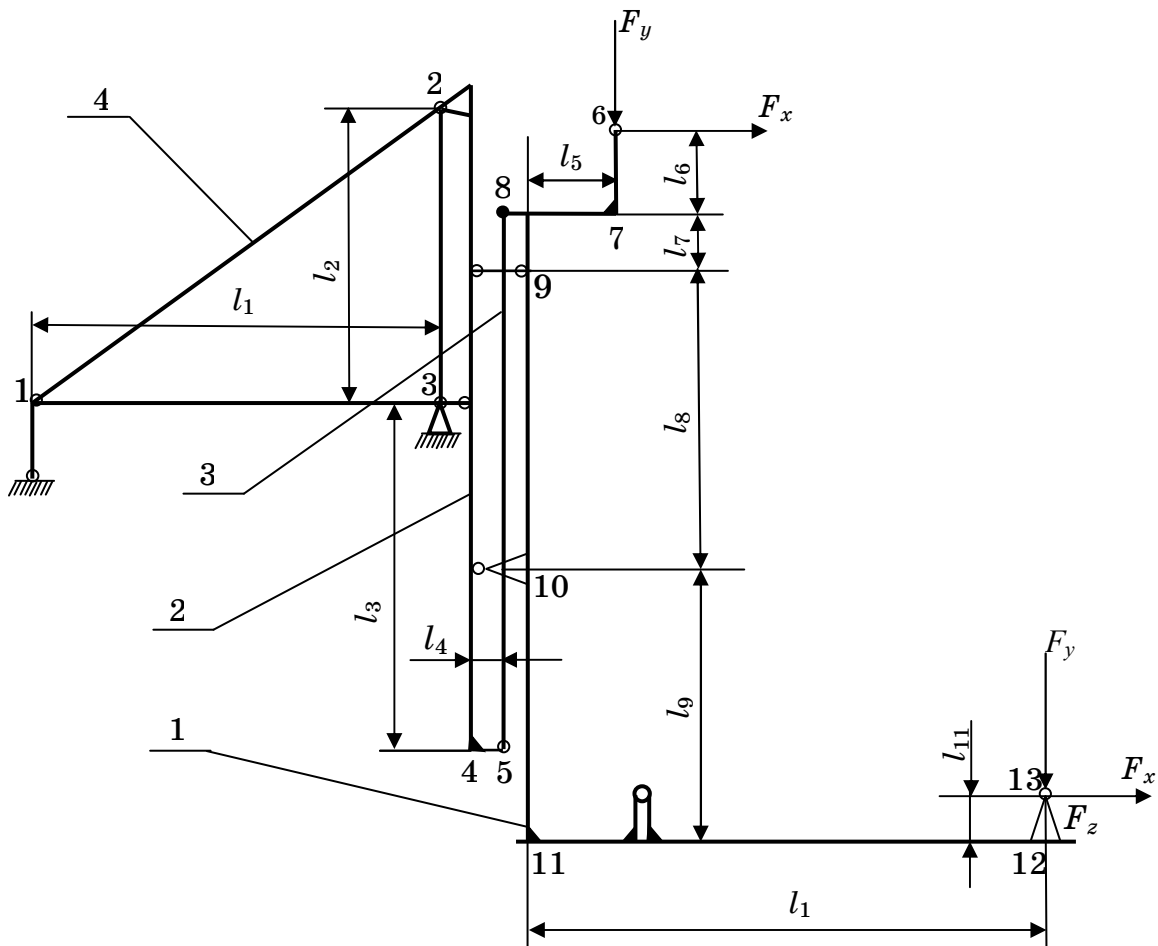


Рисунок 1 – Розрахункова схема підйомно-зчеплювального пристрою

Розроблена математична модель формування розрахункових навантажень покладена в основу оптимізації підйомно-зчеплювальних пристроїв буксировщиків. Оптимізація проводиться за критерієм мінімальної металомісткості шляхом розглядання вірогідних силових елементів та комбінацій внутрішніх силових факторів. Основна ідея оптимізації полягає в наступному. Конструктивні елементи мають розміщуватися таким чином, щоб забезпечити найкоротший шлях у передачі зусиль. При сприйнятті моментних навантажень відповідні силові елементи конструкції, окремих профілів мають бути максимально рознесені. Це збільшує зовнішні габарити, але зменшує

зусилля, які реалізують моменти, і, як наслідок, металомісткість конструкції.

На основі викладеного пропонується наступний алгоритм вибору раціональних параметрів підйомно-зчеплювального пристрою. У транспортному положенні рухома штанга має замикатися на кронштейні кріплення нерухомої штанги, тобто $l_2 = l_8$, а точки 2 і 9, 3 і 10 (рис. 1) мають співпадати. З шести розрахункових випадків вибираємо найбільш жорсткі для кожного з силових елементів підйомно-зчеплювального пристрою. Навантаження опорних вузлів рухомої штанги визначаються центровкою автосамоскидів, які буксируються (рис. 2).

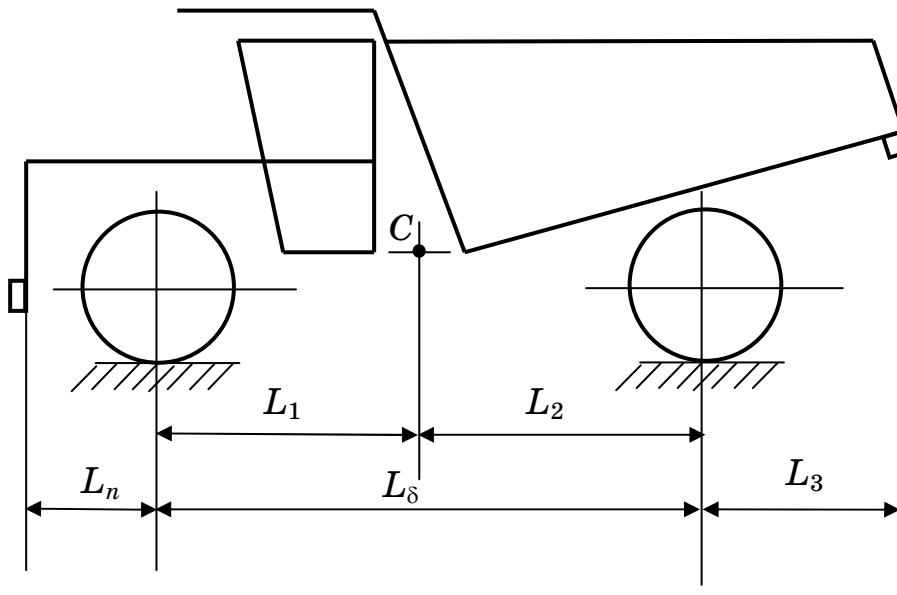


Рисунок 2 – Центровка кар’єрного автосамоскида

Визначаємо параметри траверси. При захваті, підйомі та буксируванні автосамоскида навантаження на рухому штангу передається через траверсу, яка підлягає вигину у двох площинах (рис. 3).

На рис. 3 прийняті наступні позначення: 1 – траверса; 2 – полиця рухомої штанги; 3 – сферичний палець. Враховуючи складний вигин, приймаємо закритий, тонкостінний профіль. З умови міцності визначаємо товщину стінок траверси [6]:

$$\delta = \frac{3M_x}{[\sigma](h^2 + 3bh)} + \frac{3M_y}{[\sigma](b^2 + 3bh)}, \quad (1)$$

де δ – товщина стінок траверси, м;

M_x, M_y – згинаючі моменти, Н·м;

$[\sigma]$ – допустиме напруження, Па;

b – ширина перетину, м;

h – висота перетину, м.

Розкриваємо вирази у формулі (1):

$$M_x = F_{y1}l_{12}/2; \quad F_{y1} = mgK_{\partial 1}L_2/(L_{\delta} + L_n);$$

$$M_y = F_{x3}l_{12}/2; \quad F_{x3} = mgK_{\partial 3}\varphi[1 - L_2/(L_{\delta} + L_n)].$$

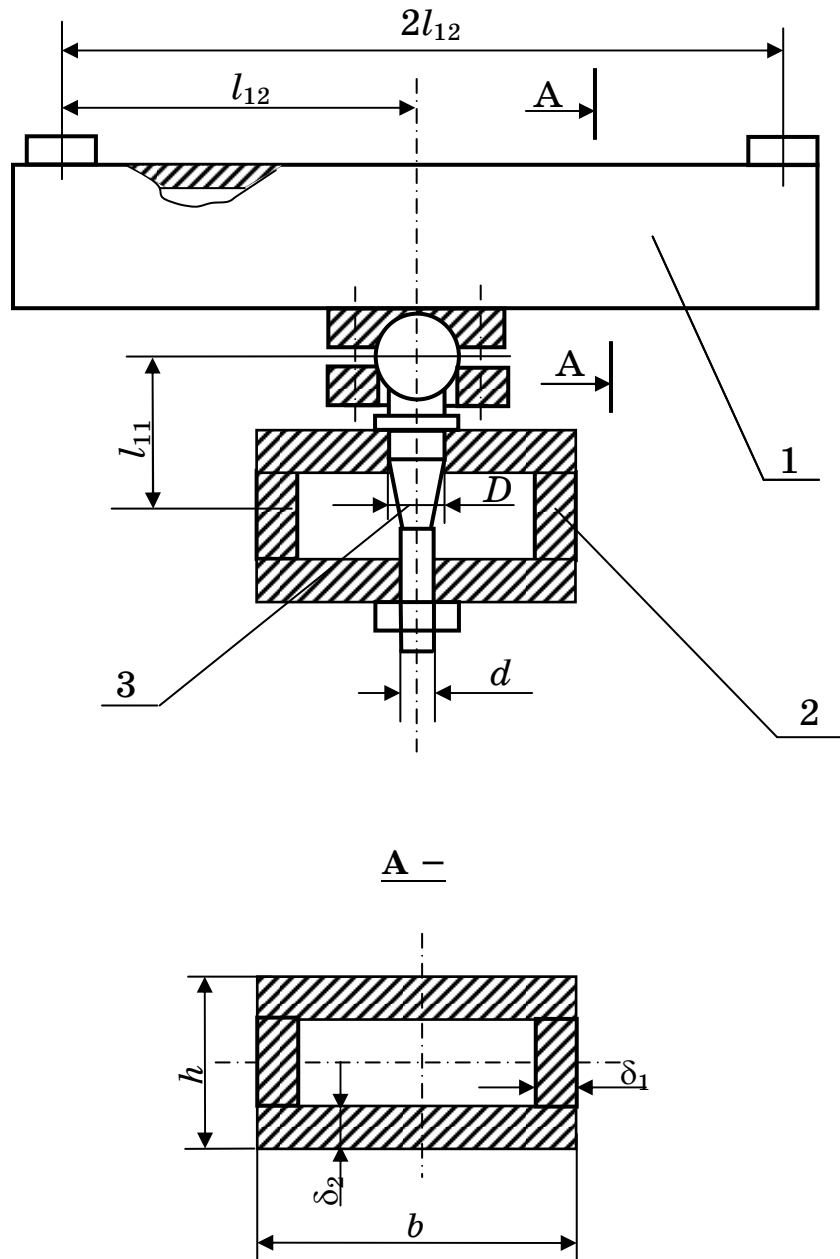


Рисунок 3 – Кріплення траверси до рухомої штанги

Визначаємо параметри сферичного пальця рухомої штанги. Найбільш небезпечним для сферичного пальця є п'ятий

розрахунковий випадок навантаження, коли він підлягає вигину у двох площинах. З умови міцності при вигині визначаємо діаметр D [6]:

$$D = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{M_z^2 + M_x^2}}{\pi[\sigma]}}, \quad (2)$$

де D – більший діаметр пальця (рис. 3), м.

Розкриваємо вирази у формулі (2):

$$\begin{aligned} M_z &= F_{x5}l_{11}; \\ F_{x5} &= \left\{ m_{\delta}gL_1^{(\delta)} + mg[L_2/(L_{\delta} + L_n)](L_{\delta}^{(\delta)} + L_3^{(\delta)}) \right\} fK_{\partial 5}/L_{\delta}^{(\delta)}; \\ M_x &= F_{z5}l_n; \\ F_{z5} &= \left\{ m_{\delta}gL_1^{(\delta)} + mg[L_2/(L_{\delta} + L_n)](L_{\delta}^{(\delta)} + L_3^{(\delta)}) \right\} L_k fK_{\partial 5}/2L_{\delta}^{(\delta)}(L_{\delta} + L_n). \end{aligned}$$

У цих та наступних виразах індекс ” δ ” означає належність буксировщику.

Визначаємо параметри горизонтальної полиці рухомої штанги, для якої найтяжчим є п'ятий розрахунковий випадок, коли вона підлягає вигину у двох площинах, а також крученню. У такому разі найбільш раціональним є закритий тонкостінний профіль. Записуємо умову міцності при складному напруженому стані:

$$\sigma_{екв.} = \sqrt{\left(\frac{6M_z}{2\delta_1 h^2 + 6bh\delta_2} + \frac{6M_y}{2\delta_2 b^2 + 6bh\delta_1} \right)^2 + 3 \left(\frac{M_{кр}}{2(bh - \delta_1 h - \delta_2 b)\delta_1} \right)^2} \leq [\sigma], \quad (3)$$

де $\sigma_{екв.}$ – еквівалентне напруження, Па;

$M_{кр}$ – крутний момент, Н·м;

b – ширина перетину, м;

h – висота перетину, м;

δ_1 – товщина стінок поперечного перетину, м;

δ_2 – товщина полок поперечного перетину, м.

Розкриваємо вирази в умові міцності (3):

$$\begin{aligned} M_z &= F_{x5}l_{11} + F_{y5}l_{10}; \quad F_{y5} = mgL_2/(L_{\delta} + L_n); \quad M_{кр} = F_{z5}l_{11}; \quad M_y = F_{z5}l_{11}; \\ F_{z5} &= \left\{ m_{\delta}gL_1^{(\delta)} + mg[L_2/(L_{\delta} + L_n)](L_{\delta}^{(\delta)} + L_3^{(\delta)}) \right\} L_k fK_{\partial 5}/2L_{\delta}^{(\delta)}(L_{\delta} + L_n). \end{aligned}$$

Задаючись $\delta_1 = \delta_1^{(1)} = 0,005$ м, $\delta_1 = \delta_1^{(2)} = 0,01$ м, ..., $\delta_1 = \delta_1^{(n)} = \delta_1^{(n-1)} + 0,005$ м, приймаємо мінімальне значення, яке відповідає умові міцності (3).

Визначаємо параметри вертикальної стійки рухомої штанги. Для вертикальної стійки найтяжчим є п'ятий розрахунковий випадок, коли вона підлягає вигину у двох площинах та крученню, найбільш раціональним у такому разі є закритий тонкостінний профіль. Записуємо умову міцності:

$$\sigma_{екв.} = \sqrt{\left(\frac{6M_z}{2\delta_1 h^2 + 6bh\delta_2} + \frac{6M_x}{2\delta_2 b^2 + 6bh\delta_1}\right)^2 + 3\left(\frac{M_{kp}}{2(bh - \delta_1 h - \delta_2 b)\delta_1}\right)^2} \leq [\sigma]. \quad (4)$$

Розкриваємо вирази в умові міцності (4):

$$M_x = F_{z5}l_{11}; \quad M_{kp} = F_{z5}l_{10}.$$

$$\text{Задаючись} \quad \delta_1 = \delta_1^{(1)} = 0,005 \text{ м}, \quad \delta_1 = \delta_1^{(2)} = 0,01 \text{ м}, \quad \dots,$$

$\delta_1 = \delta_1^{(n)} = \delta_1^{(n-1)} + 0,005 \text{ м}$, приймаємо мінімальне значення, яке відповідає умові міцності (4).

Визначаємо параметри нерухомої штанги, для якої найбільш небезпечним є перший розрахунковий випадок. Штанга вигинається у одній площині. Приймаючи закритий тонкостінний перетин, визначаємо товщину стінок δ_1 :

$$\delta_1 = \frac{3(M_z - [\sigma]bh\delta_2)}{[\sigma]h^2}. \quad (5)$$

Розкриваємо вирази у формулі (5):

$$M_z = F_{y1}(l_4 + l_{10}); \quad F_{y1} = mgK_{\partial 1}L_2/(L_\delta + L_n).$$

Визначаємо параметри кронштейна кріплення нерухомої штанги. Для кронштейна найбільш небезпечним є перший випадок навантаження. Визначаємо параметри основних силових елементів, приймаючи трубчасті перетини:

$$\alpha = \frac{d}{D} = \sqrt{\frac{\pi D^2[\sigma] - 4N_x}{\pi D^2[\sigma]}}, \quad (6)$$

де d – внутрішній діаметр трубчастого перетину, м;

D – зовнішній діаметр трубчастого перетину, м.

Розкриваємо невідомі вирази у формулі (6):

$$N_x = F_{y1}[(l_4 + l_{10})/2l_2] \operatorname{ctg} \alpha; \quad F_{y1} = mgK_{\partial 1}L_2/(L_\delta + L_n).$$

Для підкосів кронштейна

$$\alpha = \frac{d}{D} = \sqrt{\frac{\pi D^2[\sigma] - 4N_x^{(k)}}{\pi D^2[\sigma]}}. \quad (7)$$

Розкриваємо вирази у формулі (7):

$$N_x^{(k)} = F_{y1} (l_4 + l_{10}) / 2l_2 \sin \alpha; \quad F_{y1} = mgK_{\delta 1} L_2 / (L_{\delta} + L_n).$$

Для підносів кронштейна скористаємося умовою рівномірності на зріз та змикання [6]:

$$d = \frac{2\alpha[\sigma]\delta}{\pi[\tau]}, \quad (8)$$

де d – діаметр пальця, м;

α – емпіричний коефіцієнт;

δ – товщина проушини, м;

$[\sigma]$ – допустиме напруження зминання, Па;

$[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, Па.

Висновки. Таким чином, розроблені алгоритм та методика проектувального розрахунку на міцність, направлені на визначення раціональних параметрів основних силових елементів підйомно-зчеплювального пристрою буксировщиків кар’єрних автосамоскидів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бейгул В.О., Дорофеев В.В., Лепетова А.Л. К вопросу о проектировании подъемно-сцепных устройств буксировщиков карьерных автосамосвалов // Сб. науч. тр. КМТИ: Механизация производственных процессов рыбного хозяйства, промышленных и аграрных предприятий. – Керчь: КМТИ, 2006. – Вып. 7. – С. 103–106.
2. Веселов Г.П., Густомясов А.Н., Колмаков В.И. Аналитическое исследование колебаний системы тягач-прицеп // Известия вузов. Машиностроение. – 1988. – №5. – С. 92–97.
3. Лобас Л.Г., Ващенко Ю.Л. Динамическое поведение двухзвенного автопоезда вблизи границы области устойчивости // Прикладная механика. – 1991. – Т. 27. – №12. – С. 85–91.
4. Афанасьев В.Л., Хачатуров А.А. Статистические характеристики микропрофиля автомобильных дорог и колебания автомобиля // Автомобильная промышленность. – 1996. – №2. – С. 23–27.
5. Барахтанов Л.В. Исследование статистических характеристик микропрофиля пересеченной местности и колебаний корпуса вездеходных машин. – Дис. ... канд. техн. наук. – Горький, 1972. – 216 с.
6. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с.

Получено 21.06.2007 г.

К РЕШЕНИЮ МНОГОСЛОЙНОГО ПАКЕТА ОБОЛОЧЕК**Введение**

Обычно при решении задач слоистых оболочек и пластин, в основу закладываются различные гипотезы относительно характера деформирования всего пакета в целом [1,2]. В предлагаемой работе многослойная оболочка, работающая в условиях плоской деформации, рассматривается как пакет оболочек. Для каждого слоя используются уточненные уравнения теории оболочек, приспособленные к решению контактных задач [3] со специальными коэффициентами, дающими возможность получить распределение контактного взаимодействия между слоями, достаточно близкое к действительному при любой нагрузке [4]. Ниже предлагаемый подход к решению многослойного пакета оболочек был изложен применительно к многослойному пакету оболочек в работе [5].

Постановка задачи

Рассмотрим пакет N одинаковых в плане оболочек, соединенных между собой либо жестко (сцепленный пакет) либо только по нормали к поверхности (односторонний гладкий контакт слоев пакета).

Каждый k -й слой пакета будем описывать уточненными уравнениями плоской деформации цилиндрической оболочки, которые в матричной форме имеют вид:

$$\delta_k \frac{d}{d\varphi} Z_k = w_k \cdot Z_k - \frac{1}{B_k} \cdot \Pi_k^{(i)} \cdot q_k^{(i)}, \quad (1)$$

$$U_k^{(j)} = A_k^{(j)} \cdot Z_k - \frac{1}{B_k} \cdot L_k^{(j,i)} \cdot q_k^{(i)}. \quad (2)$$

Здесь

$\delta_k = \frac{h_k}{R_k}$ - относительная толщина k -ой оболочки, h_k , R_k - толщина

и средний радиус k -ой оболочки; φ - угловая координата;

$$A_k^{(j)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{j}{2} & -\frac{2-\nu_k}{1-\nu_k} \alpha_{13k}^{(j)} \\ 1 & -\frac{\nu_k}{1-\nu_k} \left(\frac{j}{2} + 0,15 \frac{1-\nu_k}{\nu_k} \delta_k \right) & -\frac{\nu_k}{1-\nu_k} \left(1,2 + j \delta_k \frac{1-\nu_k}{2\nu_k} \right) & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \\
 L_k^{(j,i)} = \begin{vmatrix} -\frac{2-\nu_k}{1-\nu_k} \lambda_{1k}^{(j,i)} + \delta_k^2 \Lambda_{11k}^{(j,i)} \frac{d^2}{d\varphi^2} & \delta_k \Lambda_{13k}^{(j,i)} \frac{d}{d\varphi} \\ -\delta_k \Lambda_{31k}^{(j,i)} \frac{d}{d\varphi} & -\Lambda_{33k}^{(j,i)} \end{vmatrix}, \quad U_k^{(j)} = \begin{vmatrix} u_{2k}^{(j)} \\ u_{3k}^{(j)} \end{vmatrix}, \quad q_k^{(i)} = \begin{vmatrix} q_{2k}^{(i)} \\ q_{3k}^{(i)} \end{vmatrix}, \quad B_k = \frac{E_k}{1-\nu_k}, \\
 w_k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_k & -1 & \frac{2b}{1-\nu_k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\delta_k & 1 & b_{1k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{1k} & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_k & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad Z_k = \begin{vmatrix} V_{3k}/h_k \\ T_{2k}/h_k B_k \\ M_{2k}/h_k^2 B_k \\ V_{2k}/h_k \\ \gamma_{2k} \\ T_{3k}/h_k B_k \end{vmatrix}, \quad \Pi_k^{(i)} = \begin{vmatrix} 2\pi_{3k}^{(i)}/(1-\nu_k) & 0 \\ 1 & 0 \\ i/2 & 0 \\ \delta_k \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \pi_{11k}^{(i)} \frac{d}{d\varphi} & \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \pi_{13k}^{(i)} \\ \delta_k \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \pi_{21k}^{(i)} \frac{d}{d\varphi} & \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \pi_{23k}^{(i)} \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

T_{2k} , T_{3k} - нормальные и поперечные усилия в оболочке, M_{2k} - изгибающие моменты, V_{2k} , V_{3k} , γ_{2k} - соответствующие обобщенные перемещения, $u_{2k}^{(j)} = u_{2k}^{(j)}\left(\varphi, j \frac{h}{2}\right)$, $u_{3k}^{(j)} = u_{3k}^{(j)}\left(\varphi, j \frac{h}{2}\right)$ - касательные и нормальные перемещения точек лицевых поверхностей оболочки, $j = \pm 1$ - вогнутая и выпуклая поверхности оболочки, $i = \pm j$ - индекс суммирования,

$$b = 1,2, \quad b_{1k} = \left(1 + 1,2 \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \right) \delta_k, \quad \pi_{3k}^{(i)} = \frac{1}{10} + \delta_k (0,067 - 0,084 \nu_k), \\
 \pi_{11k}^{(i)} = \frac{1}{12} + i \delta_k \left(0,025 + \frac{1-\nu_k}{\nu_k} \cdot 0,05 \right), \quad \pi_{21k}^{(i)} = \frac{i}{10} + \delta_k \left(0,051 + \frac{1-\nu_k}{\nu_k} \cdot 0,1 \right), \\
 \pi_{13k}^{(i)} = \frac{i}{2} + \delta_k \left(0,167 + 0,15 \cdot \frac{1-\nu_k}{\nu_k} \right), \quad \pi_{23k}^{(i)} = 1,2 + i \delta_k \frac{1-\nu_k}{\nu_k}, \\
 \alpha_{13k}^{(j)} = \frac{j}{2} + \frac{\delta_k}{2-\nu_k} (0,43 - 0,07 \nu_k), \quad \lambda_{1k}^{(j,i)} = \frac{1}{12} + \frac{ij}{20} + \frac{i+j}{2} \delta_k (0,00095 + 0,0495 \nu_k), \\
 \Lambda_{11k}^{(j,i)} = \frac{1+ij}{120} + \frac{i+j}{2} \delta_k \cdot 0,003, \quad \Lambda_{13k}^{(j,i)} = \Lambda_{31k}^{(j,i)} = \frac{i+j}{20} - \delta_k \frac{1+ij}{30}, \quad \Lambda_{33k}^{(j,i)} = \frac{1+ij}{4} - \frac{i+j}{2} \delta_k \cdot 0,15$$

- коэффициенты уточненной теории оболочек [4].

Если на стороне j оболочки заданы перемещения $u^{(j)}(\varphi)$, то нагрузка $q^{(j)}(\varphi)$ на этой стороне ($i = j$) будет представлять собой

неизвестное контактное взаимодействие. Интегрируя систему (1), находим

$$Z_k(\varphi) = \frac{1}{\delta_k B_k} \int_{\varphi_0}^{\varphi} K_k(\varphi - \psi) \Pi^{(i)} q_k(\psi) d\psi + K_k(\varphi - \varphi_0) Z_k(\varphi_0), \quad (3)$$

где $K_k(\varphi)$ - матрица Коши системы (1) имеет вид согласно

$$K_k(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & k_{12k}(\varphi) & k_{13k}(\varphi) & \sin \varphi & -\frac{\sin \varphi}{\delta_k} & k_{16k}(\varphi) \\ 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \frac{1 - \cos \varphi}{\delta_k} & 1 & 0 & 0 & \frac{\sin \varphi}{\delta_k} \\ -\sin \varphi & k_{42k}(\varphi) & k_{43k}(\varphi) & \cos \varphi & \frac{1 - \cos \varphi}{\delta_k} & -k_{12k}(\varphi) \\ 0 & k_{43k}(\varphi) & 12 \frac{\varphi}{\delta_k} & 0 & 1 & -k_{13k}(\varphi) \\ 0 & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$k_{12k}(\varphi) = \frac{\varphi \cdot \sin \varphi}{\delta_k^3} \beta_{1k} - \frac{1 - \cos \varphi}{\delta_k^3} \beta_{2k}; \quad \beta_{1k} = \frac{1}{2} \left(12 - 2 \cdot b_{1k} + \left(1 - \frac{2}{1 - \nu_k} b \right) \cdot \delta_k^2 \right);$$

$$\beta_{2k} = 12 - b_{1k} \delta_k^2; \quad k_{13k}(\varphi) = -\frac{1 - \cos \varphi}{\delta_k^2} \beta_{2k}; \quad k_{16k}(\varphi) = \frac{\varphi \cdot \cos \varphi - \sin \varphi}{\delta_k^3} \beta_{1k} + \frac{2b}{1 - \nu_k} \cdot \frac{\sin \varphi}{\delta_k};$$

$$k_{42k}(\varphi) = \frac{\varphi \cdot \cos \varphi - \sin \varphi}{\delta_k^3} \beta_{1k} + 12 \frac{\varphi - \sin \varphi}{\delta_k^3} + \frac{\sin \varphi}{\delta_k}, \quad k_{43k}(\varphi) = b_{1k} \sin \varphi + 12 \frac{\varphi - \sin \varphi}{\delta_k^2}.$$

Подставляя (3) в (2), получаем относительно контактных взаимодействий уравнения

$$L_k^{(j,i)} q_k^{(i)} + \frac{1}{\delta_k} \int_{\varphi_0}^{\varphi} A_k^{(j)} K_k(\varphi - \psi) \Pi^{(i)} q_k^{(i)}(\psi) d\psi = -B_k U_k + A_k^{(j)} K_k(\varphi - \varphi_0) Z_k(\varphi_0). \quad (5)$$

Будем вести счет оболочек в пакете, начиная с вогнутой стороны пакета (рис.1).

Краевые условия на лицевых поверхностях для пакета в целом заданы в виде:

$$\Gamma^{(+1)} \begin{pmatrix} U_1^{(+1)} \\ q_1^{(+1)} \end{pmatrix} = Q^{(+1)}; \quad \Gamma^{(-1)} \begin{pmatrix} U_N^{(-1)} \\ q_N^{(-1)} \end{pmatrix} = Q^{(-1)}, \quad (6)$$

где:

$U_1^{(+1)}$ - матрица перемещений на вогнутой стороне пакета; $U_N^{(-1)}$ - матрица перемещений на выпуклой стороне пакета; $q_1^{(+1)}$ - матрица нагрузок или контактных взаимодействий на вогнутой стороне пакета; $q_N^{(-1)}$ - матрица нагрузок или контактных взаимодействий на выпуклой стороне пакета; $\Gamma^{(+1)}$ - прямоугольная матрица, определяемая видом краевых условий на вогнутой лицевой

поверхности пакета; $\Gamma^{(-1)}$ - прямоугольная матрица, определяемая видом краевых условий на выпуклой лицевой поверхности пакета; $Q^{(+1)}$ - матрица заданных перемещений или нагрузок на вогнутой лицевой поверхности пакета; $Q^{(-1)}$ - матрица заданных перемещений или нагрузок на выпуклой лицевой поверхности пакета.

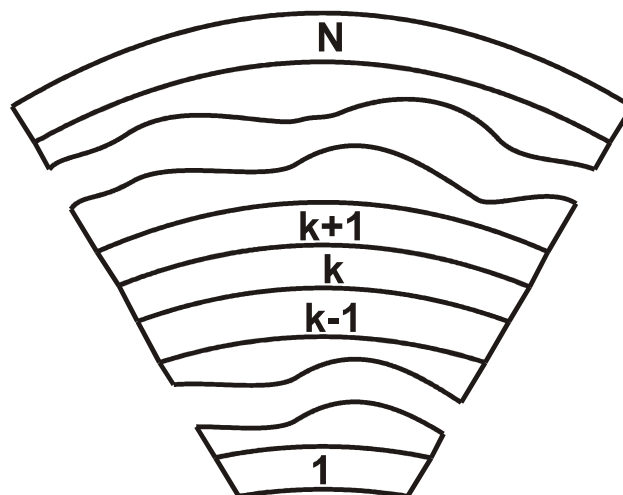


Рисунок 1

Для незамкнутых оболочек пакета должны быть заданы краевые условия на торцах

$$\Gamma_{k,(j)} Z_k^{(j)} = O_k^{(j)}, \quad (7)$$

где

k - номер соответствующей оболочки, $j = -1$ - левый торец оболочки, $j = +1$ - правый торец оболочки; $\Gamma_{k,(j)}$ - матрица, определяемая видом торцевых краевых условий; $Z_k^{(j)}$ - матрица значений переменных состояний или их комбинаций, выходящих на торцы оболочки, определяемых из краевых условий; $O_k^{(j)}$ - заданные переменные состояния или их комбинации на торцах.

Для замкнутых оболочек пакета для определения начальных значений переменных состояния $Z_k(\varphi_0)$ используются условия цикличности

$$(1 - K_k(-2\pi)) \cdot Z_k(\varphi_0) = -\frac{1}{\delta_k B_k} \int_0^{2\pi} K_k(-\varphi) \Pi_k^{(i)} q_k(\varphi_0 + \varphi) d\varphi. \quad (8)$$

Задача состоит в определении контактных взаимодействий между оболочками и между пакетом в целом с другими телами согласно условиям (6). Используя дискретную постановку, задачу сводим к краевой задаче для пакета в целом как одной оболочки. Это

достигается путем исключения внутренних контактных взаимодействий между оболочками с помощью рекуррентных соотношений, устанавливаемых на основании условий сопряжения оболочки в пакет.

Алгоритм решения задачи

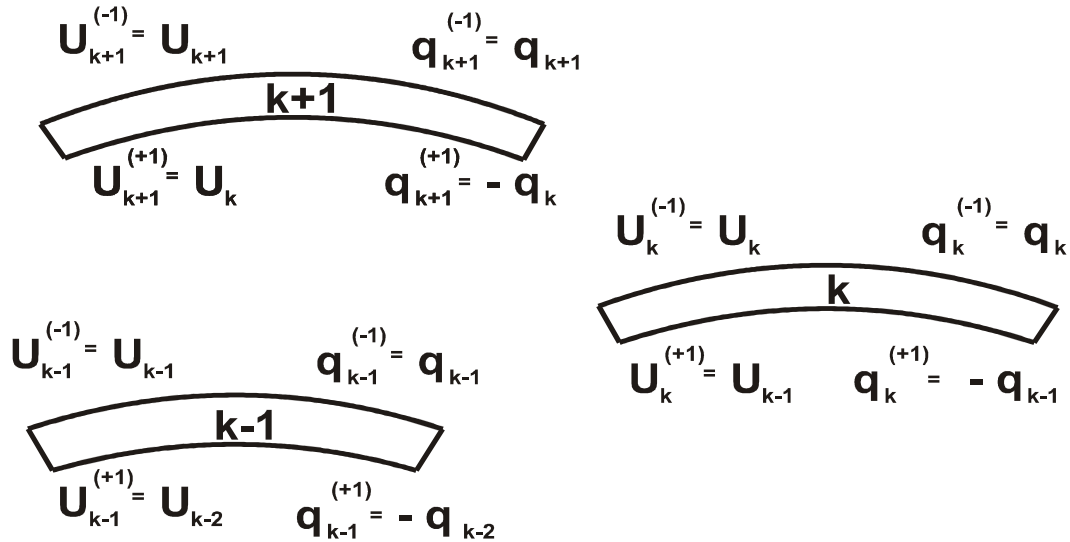


Рисунок 2

Рассмотрим k -ю, $(k+1)$ -ю, $(k-1)$ -ю оболочки (рис.2) и введем обозначения

$$U_k^{(-1)} = U_k; \quad q_k^{(-1)} = q_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

Тогда в силу условий сопряжения:

$$U_k^{(+1)} = U_{k-1}^{(-1)}, \quad q_k^{(+1)} = -q_{k-1}^{(-1)} \quad (10)$$

имеем

$$U_k^{(+1)} = U_{k-1}; \quad q_k^{(+1)} = -q_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, N. \quad (11)$$

В этом случае в интегральной постановке одномерных контактных задач, контактные соотношения для двух соседних оболочек k -ой и $(k+1)$ -ой на их общей границе приобретают вид:

- на выпуклой границе k -ой оболочки

$$-K_k^{(-1,+1)}q_{k-1} + K_k^{(-1,-1)}q_k + I_k^{(-1)}Z_k(x_0) = U_k^{(-1)} = U_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \quad (12)$$

- на вогнутой границе $(k+1)$ -ой оболочки

$$-K_{k+1}^{(+1,+1)}q_k + K_{k+1}^{(+1,-1)}q_{k+1} + I_{k+1}^{(+1)}Z_{k+1}(x_0) = U_{k+1}^{(+1)} = U_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

В формулах (12), (13) введены обозначения

$$K_k^{(j,i)}q_k = L_k^{(j,i)}q_k + \frac{1}{\delta_k} \int_{\varphi_0}^{\varphi} A_k^{(j)}K_k(\varphi - \psi)\Pi^{(i)}q_k^{(i)}(\psi)d\psi, \quad I_k^{(j)} = A_k^{(j)}K_k(\varphi - \varphi_0). \quad (14)$$

Исключая из соотношений (12), (13) перемещения U_k , приходим к следующей зависимости между контактными взаимодействиями

$$\begin{aligned} & K_{k+1}^{(-1,+1)} q_{k+1} + I_{k+1}^{(-1)} \cdot Z_{k+1}(x_0) = \\ & = -K_k^{(+1,-1)} q_{k-1} + (K_k^{(+1,+1)} + K_{k+1}^{(-1,-1)}) q_k + I_k^{(+1)} \cdot Z_k(x_0); \quad k=1,2,\dots,N-1. \end{aligned} \quad (15)$$

Если к соотношению (15) добавить тождество $q_k = q_k$ и краевые условия на торцах (7) для незамкнутых оболочек или условие периодичности (8) для замкнутых оболочек с учетом выражений переменных состояния (3), получим рекуррентное соотношение, представимое в матричной форме в виде:

$$M_{k+1} t_{k+1} = N_k t_k + O_{k+1}, \quad (16)$$

где

$$t_k = \begin{Bmatrix} q_{k-1} \\ q_k \\ Z_k(\varphi_0) \end{Bmatrix}; \quad O_{k+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ O_{k+1}^{(+1)} \\ O_{k+1}^{(-1)} \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

Соотношения (16) представляют собой интегро-дифференциальные зависимости между основными неизвестными t_k и t_{k+1} соседних пластин. Эти соотношения допускают разрешение относительно основных неизвестных t_{k+1} , однако, в общем случае выполнить это в замкнутом виде затруднительно. Поэтому заменим эти уравнения дискретным аналогом (производные – конечными разностями, интегралы – конечными суммами). При этом компоненты матриц – столбцов t_k будут представлять собой значения этих величин на множестве дискретных точек, определяемых видом интерполяционных и квадратурных формул, а элементы матриц M_{k+1} , N_k – коэффициенты указанных формул.

Разрешая соотношения (16) относительно t_{k+1} , приходим к следующим рекуррентным соотношениям

$$t_{k+1} = M_{k+1}^{-1} N_k t_k + M_{k+1}^{-1} O_{k+1}, \quad k=1,2,\dots,N-1. \quad (18)$$

Применяя последовательно полученное соотношение, приходим к выражению основных неизвестных k -ой пластины через основные неизвестные первой пластины.

Аналогично подходу к решению многослойного пакета пластин, изложенному в работе [5], подставляем выражения основных неизвестных для N -ой оболочки через основные неизвестные первой оболочки в краевые условия на лицевых поверхностях для пакета в

целом (6) и добавляя условия на торцах (7) или условия цикличности (8) для первой оболочки, получаем полную систему уравнений относительно основных неизвестных для первой оболочки. Обращая эту систему находим t_1 , а затем по рекуррентным соотношениям (18) определяются основные неизвестные для остальных оболочек пакета.

Иллюстрация на примере пакета оболочек под действием равномерного внутреннего давления

В качестве тестового примера рассмотрим пятислойный пакет оболочек под действием равномерного внутреннего давления q (рис.3). Каждый слой при этом представляет собой круглую трубу, работающую в условиях плоской деформации под действием внутреннего и внешнего равномерных давлений.

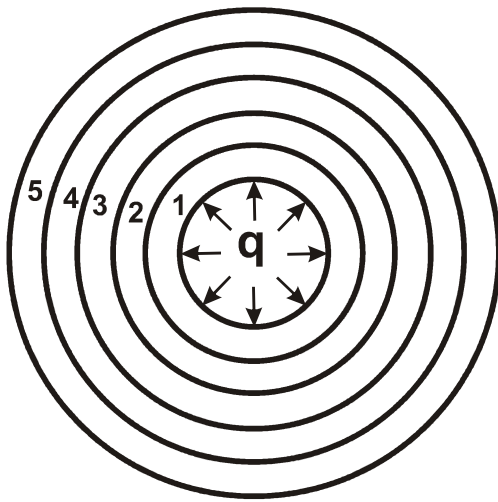


Рисунок 3

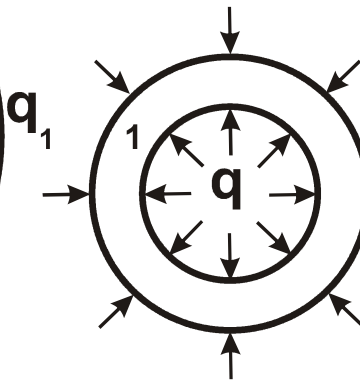


Рисунок 4

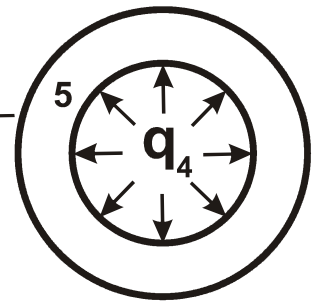


Рисунок 5

Для первого слоя давление q на вогнутой поверхности задано, а на выпуклой возникает неизвестное контактное взаимодействие q_1 (рис.4). Для пятого слоя (рис.5) выпуклая поверхность свободна, а на вогнутой – неизвестное контактное взаимодействие q_4 . Для промежуточных слоев на обеих поверхностях неизвестные контактные взаимодействия. Для такой осесимметричной задачи в постановке теории упругости формулы Ламе для каждого слоя дают выражения радиальных перемещений лицевых поверхностей трубы через контактные давления или нагрузки.

Таким образом, есть возможность с помощью указанного выше алгоритма получить решение рассматриваемой задачи и в постановке теории упругости.

В таблицах 1, 2 приведены значения относительных контактных взаимодействий $\frac{q_i}{q}$ ($i=1,2,3,4$) между слоями в постановках теории упругости и используемой уточненной теории оболочек: для тонкого пакета относительной толщины $\delta=0.05$ (табл.1), для толстостенного пятислойного цилиндра относительной толщины $\delta=0.25$ (табл.2). При этом жесткости и относительные толщины отдельных слоев между собой равны.

Таблица 1

	Теория упругости	Теория пластин
q_1/q	0.808	0.796
q_2/q	0.61	0.594
q_3/q	0.408	0.394
q_4/q	0.204	0.196

Таблица 2

	Теория упругости	Теория пластин
q_1/q	0,842	0,778
q_2/q	0,652	0,567
q_3/q	0,441	0,368
q_4/q	0,22	0,179

Выводы

Из рассмотренной задачи следует, что отличие относительного контактного взаимодействия между слоями пакета в постановках уточненной теории оболочек и теории упругости колеблется от 7,6% до 18% для многослойного толстостенного цилиндра и от 1,5% до 4% - для тонкого пакета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями / Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. – Киев: наук. Думка, 1988.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1974. – 360 с.
3. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.:Машиностроение, 1980.
4. Наумова И.Ю. Построение уравнений обобщенной теории пластин, применяемых в контактных задачах. Днепропетровск, 1990. 82с. Деп. В УкрНИИНТИ 07.03.90, №05-Ук90.
5. Наумова И.Ю. Системный подход к решению одномерных контактных задач пластин // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 1(48) – Дніпропетровськ. 2007 – С. 11-19.

Получено 18.06.2007 г.

УДК 517.5

А.Н. Давидчик

СПЛАЙНЫ К ПРИБЛИЖЕНИЮ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение. Рассматривается множество функций имеющих непрерывные частные производные на квадрате и их приближение сплайн-функциями.

Постановка задачи. Множество функций $f(x, y)$, имеющих непрерывные частные производные p -го порядка по x и по y на квадрате Q ($0 \leq x, y \leq 1$), обозначим через C^p ($p = 0, 1, 2, \dots; C^0 = C$). Пусть далее $\Delta = \{[0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1]$

$[0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = 1]\}$ произвольное фиксированное разбиение квадрата Q

$$\Delta_1 = \max_i (x_i - x_{i-1}), \Delta_2 = \max_{j_1} (y_j - y_{j-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Каждой функции $f(x, y) \in C^1$ поставим в соответствие сплайн-функцию $S_{m,n}(f; x, y) \in C^2$ ($r = 1, 2, \dots$), однозначно определенную следующими требованиями: 1) на каждом прямоугольнике $Q_{k,i}$ ($x_{k-1}, x_k; y_{i-1}, y_i$) функция

$S_{m,n}(f; x, y)$ – алгебраический многочлен $(2r+1)$ -ой степени по x и y ,

$$2) S_{m,n}(f; x_k, y_i) = f(x_k, y_i);$$

$$3) \frac{\partial S_{m,n}(f; x_k, y_i)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_k, y_i)}{\partial x};$$

$$\frac{\partial S_{m,n}(f; x_k, y_i)}{\partial y} = \frac{\partial f(x_k, y_i)}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^{\ell+j} S_{m,n}(f; x_k, y_i)}{\partial x^\ell \partial y^j} = 0; \quad \begin{matrix} \ell, j = 0, 1, 2, \dots, r; \\ \ell + j \geq 2. \end{matrix}$$

Если вместо требования 3) выполняется следующее условие

$$\frac{\partial^{\ell+j} S_{m,n}(f; x_k, y_i)}{\partial x^\ell \partial y^j} = 0; \quad \begin{matrix} \ell, j = 0, 1, 2, \dots, r; & k = 0, 1, 2, \dots, m; \\ \ell + j \geq 1, & i = 0, 1, 2, \dots, n, \end{matrix}$$

то такой сплайн обозначим через $S_{m,n}^0(f; x, y)$.

Основное содержание. 1. Обозначим через $W^{1,1}H_\omega$ совокупность функций $f(x, y) \in C^1$, удовлетворяющих условиям

$$\left| \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_2, y_2)}{\partial x} \right| \leq \omega_1(|x_1 - x_2|) + \omega_2(|y_1 - y_2|);$$

$$\left| \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_2, y_2)}{\partial y} \right| \leq \bar{\omega}_1(|x_1 - x_2|) + \bar{\omega}_2(|y_1 - y_2|),$$

где $\omega_1(t)$, $\omega_2(z)$, $\bar{\omega}_1(u)$, $\bar{\omega}_2(v)$ – заданные модули непрерывности. В случае, если $\omega_2(z) \equiv \bar{\omega}_1(u) = 0$, то такой класс обозначим через $W^{1,1}H_\omega^\circ$.

Для произвольной функции $f(x, y) \in C$ рассмотрим

$$e(f; x, y) = f(x, y) - S_{m,n}(f; x, y). \quad (1)$$

Заметим, что сплайн $S_{m,n}(f; x, y)$ в любой точке прямоугольника $Q_{k,i}$ однозначно определяется высотой, длиной прямоугольника $Q_{k,i}$ и значениями функции $f(x, y)$ и ее частных производных $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ в вершинах этого прямоугольника. Поэтому без ограничения общности мы можем считать, что $0 \leq x \leq x_1 = h$, $0 \leq y \leq y_1 = g$. Для $S_{m,n}(f; x, y)$ на прямоугольнике $P = [0, h; 0, g]$ имеем следующее представление

$$\begin{aligned} S_{m,n}(f; x, y) = & [f(0, 0) \cdot H_0(h; x) \cdot H_0(g; y) + f(h, 0) \cdot H_0(h; h - x) \cdot H_0(g; y) + \\ & + f(0, g) \cdot H_0(h; x) \cdot H_0(g; g - y) + f(h, g) \cdot H_0(h; h - x) \cdot H_0(g; g - y)] + \\ & + [f'_x(0, 0) \cdot H_1(h; x) \cdot H_0(g; y) - f'_x(h, 0) \cdot H_1(h; h - x) \cdot H_0(g; y) + \\ & + f'_x(0, g) \cdot H_1(h; x) \cdot H_0(g; g - y) - f'_x(h, g) \cdot H_1(h; h - x) \cdot H_0(g; g - y) + \\ & + f'_y(0, 0) \cdot H_0(h; x) \cdot H_1(g; y) + f'_y(h, 0) \cdot H_0(h; h - x) \cdot H_1(g; y) - \\ & - f'_y(0, g) \cdot H_0(h; x) \cdot H_1(g; g - y) - f'_y(h, g) \cdot H_0(h; h - x) \cdot H_1(g; g - y)] = J_1 + J_2, \end{aligned}$$

где $H_k(q; t) = \sum_{s=0}^{r-k} \frac{(r+s)!}{r!s!k!} \cdot t^{k+s} (q-t)^{r+1}$, $k = 0, 1$.

Из равенства (1) и (2) имеем

$$e(f; x, y) = H_0(g; y) \cdot \int_0^h \frac{\partial f(t, 0)}{\partial t} Q(t) dt + H_0(g; g - y) \int_0^h \frac{\partial f(t, g)}{\partial t} Q(t) dt +$$

$$+ H_0(h; x) \cdot \int_0^g \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} P(z) \partial z + H_0(h; h-x) \int_0^g \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} P(z) \partial z - J_2,$$

где

$$Q(t) = \begin{cases} H_0(h; x), & 0 \leq t \leq x; \\ -H_0(h; h-x), & x < t \leq h; \end{cases} \quad P(z) = \begin{cases} H_0(g; y), & 0 \leq z \leq y; \\ -H_0(g; g-y), & y < z \leq g. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. Для $r=1, 2$ имеет место неравенство

$$\sup_{f \in W^{1,1} H_\omega} |e(f; x, y)| \leq \bar{\varepsilon}_{r,1}(\omega_1, h, x) + \bar{\varepsilon}_{r,1}(\bar{\omega}_2, g, y) + \\ + \min \left\{ [H_1(g; y) + H_1(g; g-y)] \cdot [H_0(h; x) \bar{\omega}_1(x) + H_0(h; h-x) \bar{\omega}_1(h-x)]; \right. \\ \left. [H_1(h; x) + H_1(h; h-x)] \cdot [H_0(g; y) \omega_2(y) + H_0(g; g-y) \omega_2(g-y)] \right\},$$

а для выпуклых модулей непрерывности

$$\sup_{f \in W^{1,1} H_\omega} \|e(f; x, y)\| \leq \bar{\varepsilon}_{r,1} \left(\omega_1, \Delta_1, \frac{\Delta_1}{2} \right) + \bar{\varepsilon}_{r,1} \left(\bar{\omega}_2, \Delta_2, \frac{\Delta_2}{2} \right) + \\ + \min \left\{ \frac{\Delta_2}{4} \cdot \bar{\omega}_1 \left(\frac{\Delta_1}{2} \right); \frac{\Delta_2}{4} \omega_2 \left(\frac{\Delta_2}{2} \right) \right\},$$

где

$$\varepsilon_{r,1}(\omega, q, t) = H_0(q, t) \cdot \int_0^{\xi(t)} \omega(z) \partial z + H_0(q; q-t) \cdot \int_0^{\xi(q-t)} \omega(z) \partial z + \\ + H_0(q, t) \cdot H_0(q; q-t) \cdot \int_0^{\eta(t)-\xi(t)} \omega(z) \partial z,$$

$$\xi(t) = H_1(q; t) \cdot H_0^{-1}(t); \quad \eta(t) = q - \xi(q-t).$$

Следствие 1. Имеют место неравенства для $r=1, 2, \dots$

$$\sup_{f \in W^{1,1} H_\omega^0} |e(f; x, y)| \leq \varepsilon_{r,1}(\omega_1, h, x) + \bar{\varepsilon}_{r,1}(\bar{\omega}_2, g, y), \quad (4)$$

$$\sup_{f \in W^{1,1} H_\omega^0} \|e(f; x, y)\| \leq \bar{\varepsilon}_{r,1} \left(\omega_1, \Delta_1, \frac{\Delta_1}{2} \right) + \bar{\varepsilon}_{r,1} \left(\bar{\omega}_2, \Delta_2, \frac{\Delta_2}{2} \right). \quad (5)$$

При $r=1, 2$ в (4) и (5) знак равенства имеет место для любых выпуклых модулей непрерывности $\omega_1(t)$ и $\bar{\omega}_2(z)$.

Обозначим через $W^{1,1}$ КМ – класс функций, частные производные удовлетворяют условиям

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right| \leq K, \quad \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq M, \quad (x, y) \in Q.$$

Следствие 2. Определяем равенство

$$\sup_{f \in W^{1,1}_{KM}} |e(f; x, y)| = K[H_0(h; x) \cdot x + H_0(h, h-x) \cdot (h-x) + H_1(h; x) + H_1(h; h-x)] + M[H_0(g; y) \cdot y + H_0(g, g-y) \cdot (g-y) + H_1(g; y) + H_1(g; g-y)] = \bar{e}(x, y), \quad (x, y) \in P,$$

$$\sup_{f \in W^{1,1}_{KM}} \|e(f; x, y)\| = \bar{e}\left(\frac{\Delta_1}{2}, \frac{\Delta_2}{2}\right) = K\left[\frac{\Delta_1}{2} + \frac{\Delta_2}{4}\right] + M\left[\frac{\Delta_2}{2} + \frac{\Delta_2}{4}\right].$$

Оценку сверху для $|e(f; x, y)|$ нетрудно получить из (3), а оценка снизу следует из того, что для функции $f_\varepsilon(t, z) \in W^{1,1}_{KM}$ частные производные которой определены уравнениями

$$\frac{\partial f_\varepsilon(t, z)}{\partial t} = \begin{cases} \frac{K}{\varepsilon}t - K, & 0 \leq t < 2\varepsilon, \\ K, & 2\varepsilon \leq t < x - \varepsilon, \\ -\frac{K}{\varepsilon}(t - x), & x - \varepsilon \leq t < x + \varepsilon, \\ -K, & x + \varepsilon \leq t < h - 2\varepsilon, \\ \frac{K}{\varepsilon}(t - h) + K, & h - 2\varepsilon \leq t \leq h, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_\varepsilon(t, z)}{\partial z} = \begin{cases} \frac{M}{\varepsilon}z - M, & 0 \leq z < 2\varepsilon, \\ M, & 2\varepsilon \leq z < y - \varepsilon, \\ -\frac{M}{\varepsilon}(z - y), & y - \varepsilon \leq z < y + \varepsilon, \\ -M, & y + \varepsilon \leq z < g - 2\varepsilon, \\ \frac{M}{\varepsilon}(z - g) + M, & g - 2\varepsilon \leq z \leq g, \end{cases}$$

выполняется равенство

$$e(f_\varepsilon; x, y) = \bar{e}(x, y) - \frac{5\varepsilon}{2}(K + M).$$

Положим для $(x, y) \in Q_{k+1, i+1}$

$$h_k = x_{k+1} - x_k, \quad g_i = y_{i+1} - y_i, \quad \alpha_k^{(1)} = \frac{x_{k+1} - x}{h_k}, \quad \beta_k^{(1)} = \frac{x - x_k}{h_k},$$

$$\alpha_i^{(2)} = \frac{y_{i+1} - y}{g_i}, \quad \beta_i^{(2)} = \frac{y - y_i}{g_i}, \quad (k = 0, 1, \dots, m-1; i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Исходя из представления (2) для сплайна $S_{m,n}^0(f; x, y)$, можно получить следующее представление

$$\begin{aligned} S_{m,n}^0(f; x, y) = & f(x_k, y_i) \cdot F_r(\alpha_k^{(1)}) \cdot F_r(\alpha_i^{(2)}) + \\ & + f(x_{k+1}, y_i) \cdot F_r(\beta_k^{(1)}) \cdot F_r(\alpha_i^{(2)}) + f(x_k, y_{i+1}) \cdot F_r(\alpha_k^{(1)}) \cdot F_r(\beta_i^{(2)}) + \\ & + f(x_{k+1}, y_{i+1}) \cdot F_r(\beta_k^{(1)}) \cdot F_r(\beta_i^{(2)}), \end{aligned}$$

$$\text{где } F_r(u) = u^r \cdot \sum_{s=0}^{r-1} C_{s+r-1}^{r-1} (1-u)^s, \quad C_{m+n}^n = \frac{(m+n)!}{m! n!}$$

Обозначим через H_{ω_1, ω_2} совокупность функций, удовлетворяющих на Q условию

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \omega_1(|x_1 - x_2|) + \omega_2(|y_1 - y_2|).$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного разбиения Δ и произвольных модулей $\omega_1(t)$, $\omega_2(z)$ имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in H_{\omega_1, \omega_2}} \|f(x, y) - S_{m,n}^0(f; x, y)\|_c = & \max_{\alpha_1 + \beta_1 = 1} [\omega_1(\Delta_1 \cdot \beta_1) \cdot F_r(\alpha_1) + \\ & + \omega_1(\Delta_1 \cdot \alpha_1) \cdot F_r(\beta_1)] + \max_{\alpha_2 + \beta_2 = 1} [\omega_2(\Delta_2 \cdot \beta_2) \cdot F_r(\alpha_2) + \omega_2(\Delta_2 \alpha_2) \cdot F_r(\beta_2)] = \\ & = M_r(\omega_1, \omega_2), \quad r = 1, 2. \end{aligned}$$

Используя представление (6) для $(x, y) \in Q_{k+1, i+1}$ получим

$$\begin{aligned} \sup |f(x, y) - S_{m,n}^0(f; x, y)| \leq & \omega_1(x - x_k) \cdot F_r(\alpha_k^{(1)}) + \\ & + \omega_1(x_{k+1} - x) \cdot F_r(\beta_k^{(1)}) + \omega_2(y - y_i) \cdot F_r(\alpha_i^{(2)}) + \omega_2(y_{i+1} - y) \cdot F_r(\beta_i^{(2)}) = \\ & = \omega_1(h_k \cdot \beta_k^{(1)}) \cdot F_r(\alpha_k^{(1)}) + \omega_1(h_k \cdot \alpha_k^{(1)}) \cdot F_r(\beta_k^{(1)}) + \\ & + \omega_2(g_i \cdot \beta_i^{(2)}) \cdot F_r(\alpha_i^{(2)}) + \omega_2(g_i \cdot \alpha_i^{(2)}) \cdot F_r(\beta_i^{(2)}) \leq M_r(\omega_1, \omega_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Для $f_0(x, y) = f_0(x) + f_0(y)$ в (7) имеет место знак равенства. Функции $f_0(x)$ и $f_0(y)$ определяются как и в работе 2. Отсюда и следует теорема 2.

Выводы. Получены две теоремы для аппроксимации функции класса

$W^{1,1}$ КМ (имеющих ограниченные частные производные на квадрате) сплайн-функциями.

Получено 21.06.2007 г.

УДК 620.17

Х.А. Аскеров, А.Д. Ахмедов

ВЛИЯНИЕ ЛЕГИРОВАНИЯ И СТЕПЕНИ ДЕФОРМАЦИИ НА СТРУКТУРЫ И СВОЙСТВА ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТАННОЙ СТРОИТЕЛЬНОЙ СТАЛИ

Термическое упрочнение строительных сталей имеет чрезвычайно важное прикладное значение. Наличие фундаментальных работ по термическому упрочнению низколегированных сталей позволило принципиально решить эту проблему в промышленности. Вместе с тем длительное время технология термического упрочнения ставило своей задачей получение в прокате однородных или близких к ним структурных состояний в результате мартенситного и промежуточного превращений. Это удалось осуществить на прокатных профилях малого сечения и простой формы. Рост размеров сечений и усложнение их формы при существующих мощностях термического упрочнения делает эту задачу трудно выполнимой.

Сравнительно низкая прокаливаемость стали и технологические особенности термоупрочнения неизбежно приводят к значительной неоднородности структуры и свойств по сечению проката.

Поверхностные слои, подвергнутые наиболее интенсивному охлаждению, обладают более высокой твердостью и прочностью, а центральные – наоборот, более пластичны.

В тоже время современные достижения в разработке композитных сталей показывают, что материалы с заметно различающимися свойствами их структурных составляющих могут обладать весьма удачным сочетанием прочности и вязкости.

Даже тот незначительный опыт исследования и применения проката малоуглеродистой стали, имеющего макроструктурную неоднородность с более прочным поверхностным слоем, показывает, что нетрадиционные для такого проката особенности не препятствуют его эффективному использованию в конструкциях. Более того, структурная макронеоднородность в ряде случаев приводит к повышению усталостной прочности и вязкости материала. Такое

повышение свойств обусловлено как высокими свойствами отдельных слоев, так и слоистостью материала.

Логичным выходом из создавшегося положения является создание в низкоуглеродистых сталях при термическом упрочнении регламентированной макроструктурной неоднородности. Для этого необходимо преодолеть трудности при идентификации сложных, смешанных структур, образующихся в низколегированных сталях при их термическом упрочнении, и в осмыслении соответствующего им комплекса механических свойств. Еще в большей степени это относится к сталям, термически упрочненным в промышленных условиях.

С этих позиций в работе рассматривается структура и свойства строительной стали 09Г2ФБ при реализации эффекта термического упрочнения в промышленных условиях.

Исследования проводили на стали марки 09Г2ФБ промышленной выплавки. Термическая обработка проводилась по оптимальному режиму: нагрев слэбов до температуры 1150°C 5-6 ч.; прокатка в черновой клетии до толщины 50 мм за 9 проходов; подстуживание проката на воздухе перед чистовой клетью до 820°C, окончательная прокатка в чистовой клетии на толщину 17,5 мм за 8 проходов : температура конца прокатки 740-720°C, ускоренное охлаждение проката со скоростью 40°C /с.

Такой режим термического упрочнения привел к формированию неоднородных структур по сечению (толщине) поката (рис. 1). Центральные слои имеют мелкозернистую структуру полигонизированного феррита и перлита (рис.2, в). По мере приближения к поверхности размер зерна феррита уменьшается и приобретает игольчатые очертания (рис.2, а, б).

Анализ поверхностных слоев показал, что формирующиеся в нем структуры могут быть классифицированы по мере приближения к поверхности, как феррито-перлитная повышенной дисперсности, игольчатого феррита, верхнего бейнита, нижнего бейнита и реечного дислокационного мартенсита. Микрофотографии этих структур приведены на рис.3. Отмечаются следующие особенности, которые позволяют идентифицировать данные структуры : игольчатый феррит – отсутствие карбидных выделений и повышенная плотность дислокаций в феррите (рис.3 а, б, в); верхний бейнит – выделение

карбидной фазы в виде пленки по границам реек (рис.3 г); нижний бейнит – выделение карбидной фазы типа цементита под углом 55 градусов к рейкам и более крупные карбидные выделения на стыках зерен ; реечный дислокационный мартенсит – выделение внутри реек карбидной фазы типа Fe_3C , ориентированной по трем кристаллографическим плоскостям.

Анализируя тонкую структуру центральных слоев, необходимо отметить некоторые особенности строения образующегося в конечной структуре пластинчатого перлита (рис. 3 д, е) . Перлитная структура весьма дисперсна и не отличается высокой плотностью дислокаций. В феррите наблюдается увеличенная плотность дислокаций, образуются их нерегулярные сплетения, а местами и ячеистая субструктура (рис.3д). Повышается доля ферритных зерен, содержащих внутри себя субзерна, ограниченные полигональными дислокационными стенками. По мере приближения к центру проката морфология и дисперсность структуры практически идентична структуре, получаемой в этой стали после контролируемой прокатки (рис. 3, з) .

Получен следующий комплекс механических свойств: $\sigma_B = 800$ МПа, $\sigma_T = 720$ МПа, $\delta = 27\%$. Это значительно выше механических, полученных на материале той же плавки после контролируемой прокатки : $\sigma_B = 580$ МПа, $\sigma_T = 510$ МПа, $\delta = 25\%$. Структурная неоднородность, выраженная в повышении прочности поверхностного слоя, не оказывает влияния на показатели ударной вязкости, которые определялись на образцах, вырезанных с поверхностного и центральных слоев. Интересно отметить, что при нанесении надреза на поверхности проката ударная вязкость оказывалась во всех случаях выше, чем при надрезе перпендикулярно прокату.

Создание при термическом упрочнении регламентированной макронеоднородной структуры с более прочными поверхностными слоями позволяет значительно повысить прочность малоperlитной стали при сохранении вязкости проката. Высокая вязкость обусловлена морфологией и вязкостью поверхностных структур и благоприятным влиянием внутренних пластичных слоев, выступающих в качестве энергоемкого “гасителя” вязкой или хрупкой трещины.

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:

1. Рекомендовать применение режимов термической обработки, приводящих к созданию в прокате регламентированной макронеоднородности.
2. Создание регламентированной макронеоднородности структуры с более прочными поверхностными слоями является эффективным методом повышения прочности проката для металлических конструкций.

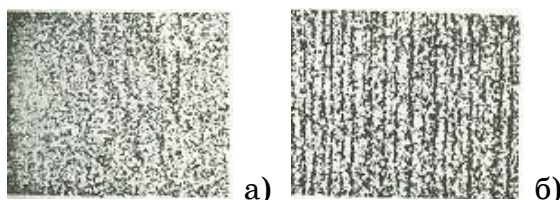


Рисунок 1 - x100: а) поверхность ; б) центр

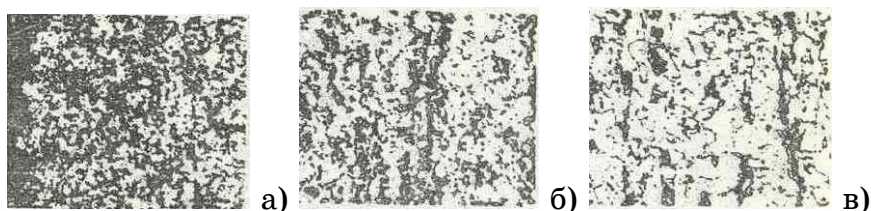


Рисунок 2 - x500: а) поверхность; б) I/4 толщины от поверхности; в) центр.

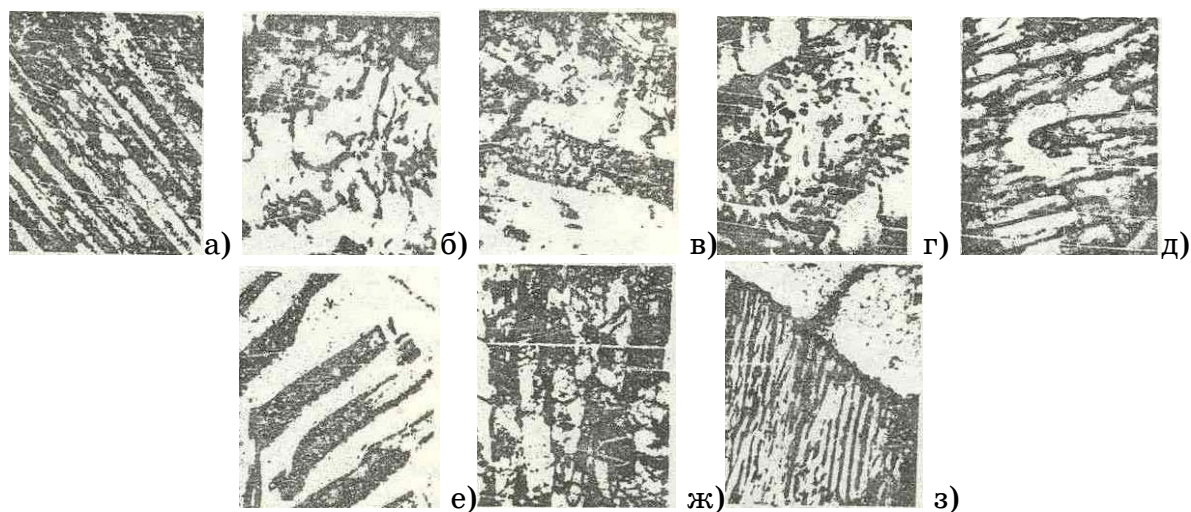


Рисунок 3 - Уменьшено I/4 : а) x 13000; б) x43000; в) x18000; г) x7000; д) x28000; е) x68000; ж) x30000; з) x18000

ЛИТЕРАТУРА

1. Большаков В.И., Монгайт И.А. Закалка с прокатного нагрева малоperlитной конструкционной стали, микролегированной ниобием и ванадием. Металловедение и термическая обработка металлов, 1983, №12, с 42-44.
2. Большаков В.И., Стародубов К.Ф. , Тылкин М.А. Термическая обработка строительной стали повышенной прочности, М : Металлургия , 1977 с. 200.

3. Большаков В.И., Смольянинова Н.А. , Антонов С.М. – Термическое упрочнение малоperlитных сталей с прокатного нагрева. В кн : Производство и применение термически упрочненного проката в строительстве, - Днепропетровск, 1989, с 24-28
4. И.Н.Голиков, М.И Гольдштейн, И.И. Мурзин. Ванадий в стали. М : Металлургия, 1968, с.290
5. А.Н. Лукьянскова, В.И.Большаков, Х.А.Аскеров. Определение рациональных режимов охлаждения термически упрочненного проката из низколегированной строительной стали – В кн. : Тезисы докладов научно-технического симпозиума. – М:МДНТП, 1989, с 79-81.
6. Большаков В.И., Аскеров Х.А. Карбидообразование и упрочнение строительных сталей с ванадием. В кн: Перспективные задачи инженерной науки., GAUDEAMUS, 2001, Выпуск 2, с.115.

Получено 18.04.2007 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Гнитько В.И., Еселева Е.В. Применение метода граничных элементов к расчету колебаний оболочек вращения, содержащих жидкость	3
Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамическое поведение сферических оболочек на упругом основании при импульсных нагрузках	9
Григор’єва Л.О. Електропружні коливання п’єзокерамічного циліндра при нестационарних збуреннях	14
Хома І.Ю., Хома Ю.І. Термонапружений стан нетонких анізотропних оболонок з початковими напруженнями і деформаціями	18
Левченко В.В., Зинчук Л.П. Распространение магнитоэлектрoупругих сдвиговых волн в слоисто-периодических структурах типа «феррит-пьезоэлектрик»	21
Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Штанцель Э.А. Динамическое поведение трехслойных балок в рамках прикладных теорий при нестационарных нагружениях	27
Бабич І.Ю., Семенюк Н.П., Жукова Н.Б. Влияние свойств композиционных материалов на устойчивость некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии или внешнем давлении	35
Шульга М.О. До теорії електромеханічних неосесиметричних коливань п’єзокерамічних пластин з товщинною поляризацією	39
Шульга Н.Д. Форми коливань на границях зон пропускання одномірних хвиль в двокомпонентних шаруватих композитах з міжфазними недосконалостями	44
Бабич С.Ю., Борисов Е.Н., Глухов Ю.П. К решению одной динамической задачи для двухслойного предварительно напряженного полупространства с использованием комплексных потенциалов	50
Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Об одной задаче о воздействии подвижной нагрузки на слоистое полупространство с начальными напряжениями	53
Савченко В.Г. Численное исследование неосесимметричного деформирования тел вращения с учетом вида напряженного состояния	59
Павленко А.М., Соколовская И.Е. К определению скорости и траектории движения частицы в потоке теплоносителя	65

Кулик А.Б. Коливання рідини в рухомій порожнині з жорсткими перегородками	71
Полищук С.З., Голуб В.В., Пивень В.А., Шпирок Д.М., Дорошенко Ю.В., Романенко А.В., Пустоварова Т.М. Новые подходы к оценке устойчивости откосов и склонов	76
Аникьев И.И., Михайлова М.И., Сущенко Е.А. Действие импульсного давления на тонкую упругую пластину с разрезом	83
Чехов В.Н., Ткаченко Э.А. Устойчивость слоистых покрытий в трибосопряжении при жидкостной смазке поверхностей контакта..	88
Шнеренко К.И., Годзула В.Ф. Напряженно-деформированное состояние усеченной конической оболочки из композитного материала	94
Щурук Г.И. Особенности влияния относительной толщины оболочки на волновой процесс в системе оболочка-вязкая жидкость	97
Врублевская В.И., Невзорова А.Б., Макеев В.В., Врублевский В.Б., Барбуль С.О. Применение модифицированной древесины в узлах трения посевной сельскохозяйственной техники	101
Стеблянко П.А. Использование двумерных напряженных сплайнов при решении связанных нестационарных задач теории термоупругопластичности	109
Бинкевич В.В., Усиченко И.В. Информационные технологии в интегрированных системах автоматизации управления	125
Зеленцов Д.Г., Храпач Ю.А., Солодка Н.А. Учет концентраторов коррозии при решении задачи долговечности сжатых стержней....	132
Бейгул В.О., Лепетова Г.Л., Щербинська Г.О., Бейгул О.О. Обґрунтування раціональних параметрів підйомно-зчеплювального пристрою буксировщиків кар’єрних автосамоскидів.....	137
Наумова И.Ю. К решению многослойного пакета оболочек	145
Давидчик А.Н. Сплайны к приближению функций двух переменных	153
Аскеров Х.А., Ахмедов А.Д. Влияние легирования и степени деформации на структуры и свойства термомеханической обработанной строительной стали	158

РЕФЕРАТЫ

Гнітько В.І., Єселева О.В. **Застосування методу граничних елементів до розрахунку коливань оболонок обертання, що містять рідину** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.3-8.

Запроповано підхід до визначення напруженого та деформованого стану в оболонках обертання, що взаємодіють з рідиною, при динамічних навантаженнях. Розв'язання задачі засновано на використанні методу граничних інтегральних рівнянь і методу граничних елементів. Для визначення гідродинамічного тиску рідини на оболонку отримані чисельні розв'язки систем сингулярних інтегральних рівнянь. Проведено чисельні дослідження коливань напівсферичної оболонки з рідиною.

УДК 539.3

Головко К.Г., Луговий П.З., Мейш В.Ф. **Динамічна поведінка сферичних оболонок на пружній основі при імпульсному навантаженні** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.9-13.

Розглянуту постановку задачі про динамічну поведінку сферичної оболонки на пружній основі. Приведено чисельний алгоритм розв'язку задачі з врахуванням пружної основи та проведено аналіз отриманих результатів.

Бібл. 7, іл. 2.

Григор'єва Л.О. **Електропружні коливання п'єзокерамічного циліндра при нестационарних збуреннях** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.14-17.

Хома І.Ю., Хома Ю.І. **Термонапружений стан нетонких анізотропних оболонок з початковими напруженнями і деформаціями** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.18-20.

Изложен способ построения уравнений равновесия нетонких анизотропных оболочек с начальными напряжениями и деформациями при установившемся температурном поле. В основу его положен метод разложения искоемых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины. Относительно коэффициентов разложения как функций двух независимых переменных вариационным способом составляется система дифференциальных уравнений и соответствующие ей граничные условия. Предполагается, что начальные напряжения и перемещения определяются из решения соответствующей линейной краевой задачи.

УДК 534.21:537.634

Левченко В.В., Зінчук Л.П. **Поширення магнітоелектропружних хвиль зсуву в шарувато-періодичних ферит-п'єзоелектричних структурах** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.21-26.

Розроблено підхід до побудови дисперсійних рівнянь для нормальних магнітопружних хвиль зсуву, що поширюються у металізованих шарувато-періодичних ферит-п'єзоелектричних структурах та виявлено особливості впливу магнітних властивостей фериту на дисперсійні характеристики хвиль.

Бібл. 5.

УДК 539.3

Мейш В.Ф., Мейш Ю.А., Штанцель Е.А. **Динамічна поведінка тришарових балок в рамках прикладних теорій при нестационарних навантаженнях** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.27-34.

На основі прикладних теорій тришарових балок розглянуто задачі про вимушені коливання. В частковому випадку проведено порівняння з аналітичними та експериментальними даними.

Бібл.5, табл. 2.

Бабич И.Ю., Семенюк Н.П., Жукова Н.Б. **Влияние свойств композиционных материалов на устойчивость некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии или внешнем давлении** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.35-38.

М.О.Шульга **До теорії електромеханічних неосесиметричних коливань п'єзокерамічних пластин з товщиною поляризацією** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.39-43.

Н.Д.Шульга **Форми коливань на границях зон пропускання одномірних хвиль в двокомпонентних шаруватих композитах з міжфазними недосконалотями** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.44-49.

УДК 539.3

Бабич С.Ю., Борисов Е.Н., Глухов Ю.П. **К решению одной динамической задачи для двухслойного предварительно напряженного полупространства с использованием комплексных потенциалов** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.50-52.

С использованием комплексных потенциалов исследовано влияние начальных напряжений на параметры напряженно-деформируемого состояния слоистого полупространства при воздействии на него подвижной нагрузки.

Библ. 5

УДК 539.3

Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. **Об одной задаче о воздействии подвижной нагрузки на слоистое полупространство с начальными напряжениями** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.53-58.

Рассмотрена плоская задача для двухслойного полупространства, состоящего из пластины и подстилающего ее предварительно напряженного полупространства при воздействии подвижной нагрузки. Исследовано влияние учета инерции вращения при различных начальных напряжениях и условиях сопряжения пластины и полупространства.

Савченко В.Г. **Численное исследование неосесимметричного деформирования тел вращения с учетом вида напряженного состояния** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.59-64.

Предложена методика учета вида напряженного состояния в процессах деформирования при исследовании термоупругопластического напряженно-деформированного состояния составных тел вращения при неосесимметричном нагружении и нагреве.

Павленко А.М., Соколовская И.Е. **К определению скорости и траектории движения частицы в потоке теплоносителя** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.65-70.

В статье приводятся экспериментальные данные, на основании которых создана математическая модель движения частиц в вихревом слое при термообработке с учетом изменения их размеров. Определены особенности движения частиц в вихревом аппарате, получены зависимости, позволяющие управлять продолжительностью термической обработки, на основании которых можно спроектировать устройство для сушки дисперсных частиц.

Кулик А.Б. **Колебания жидкости в подвижной полости с жесткими перегородками** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51) .- Дніпропетровськ, 2007. - С.71-75.

Рассматривается задача колебания жидкости в полостях прямоугольной формы. Математическая модель дискретизируется с использованием квадратурно – коллокационного метода. Приводится конструктивное представление решения задачи,

описывающее моделирование колебаний жидкости в полостях с перегородками. Найдены уравнения линий тока и построены кривые для полостей с вмонтированными ребрами – перегородками. Проиллюстрированы поведения линий. Результаты работы могут быть инструментальным компьютерным средством при решении ряда важных задач гидромеханики, связанных с исследованием колебания свободной поверхности.

Поліщук С.З., Голуб В.В., Півень В.О., Шпірок Д.М., Дорошенко Ю.В., Романенко О.В., Пустоварова Т.М. **Нові підходи щодо оцінки стійкості укосів і схилів** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51). - Дніпропетровськ, 2007. - С.76-82.

За останнє десятиліття з'явилися нові уявлення стосовно форми і місцеположення поверхонь зрушення масивів ґрунту і гірських порід. Пропонується новий методичний підхід щодо оцінки стійкості укосів і схилів який дозволяє більш повно врахувати реальну структуру порідного масиву та усунути при оцінці стійкості додаткові геометричні зв'язки, що обумовлені формами поверхонь зрушення, які необґрунтовано застосовуються.

УДК 539.3

Аникьев И.И., Михайлова М.И., Сущенко Е.А. **Действие импульсного давления на тонкую упругую пластину с разрезом** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51).- Дніпропетровськ, 2007. - С.83-87.

Экспериментально исследовано влияние прямолинейного разреза на деформированное состояние тонкой упругой пластины при нормальным падении слабой ударной волны в воздухе.

Библ. 5, ил. 3.

УДК 539.3

Ткаченко Э.А., Чехов В.Н. **Устойчивость слоистых покрытий в трибосопряжении при жидкостной смазке поверхностей контакта** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51).- Дніпропетровськ, 2007. - С.88-93.

Рассматривается проблема поверхностной потери устойчивости в слоистом покрытии при совместном действии следящих поверхностных нагрузок и стационарного температурного поля. Материал слоев и основания считается линейно упругим, ТРАНСВЕРСАЛЬНО – ИЗОТРОПНЫМ. Между отдельными элементами слоистой среды предполагается выполнение условий абсолютно жесткого силового и идеального теплового контактов.

УДК 539.3

Шнеренко К.І., Годзула В.Ф. **Напружено-деформований стан зрізаної конічної оболонки з композитного матеріалу** // Системні технології. Регіональний

міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51).- Дніпропетровськ, 2007. - С.94-96.

Подана методика визначення напружень в композитній зрізаній конічній оболонці, послабленій круговим отвором. Використано модель оболонок типу Тимошенка. Застосовано метод скінчених елементів. Досліджено розподіл напружень навколо отвору залежно від зміни параметрів оболонки.

Бібл. 4, табл. 1.

УДК 539.3

Г.І.Щурук **Особливості впливу відносної товщини оболонки на хвильовий процес в системі оболонка – в'язка рідина** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.-Випуск 4(51).- Дніпропетровськ, 2007. - С.97-100.

Розглянуто процес розповсюдження осесиметричних хвиль в ортотропній циліндричній оболонці, що містить в'язку стисливу рідину. Аналіз проведено в рамках лінійних рівнянь теорії оболонок типу С.П.Тимошенка та лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса для рідини. Досліджено вплив відносної товщини оболонки на частотно-фазові характеристики системи.

Бібл. 2, іл.2.

УДК 631.33.024.2/.3

Врублевская В.И., Невзорова А.Б., Макеев В.В., Врублевский В.Б., Барбуль С.О. **Применение модифицированной древесины в узлах трения посевной сельскохозяйственной техники** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. - Випуск 4(51).- Дніпропетровськ, 2007. - С.101-108.

Изложенные в настоящей работе результаты теоретических и экспериментальных исследований позволили обосновать применение модифицированной древесины в узлах трения посевной сельскохозяйственной техники на примере сеялок СПУ-6М и СТВ-3,6 для повышения ресурса работы в абразивно-агрессивных и влажных средах, уменьшения металлоемкости и массы, снижения себестоимости их изготовления.

Библ. 5, ил. 2.

УДК 539.3

Стеблянко П.О. **Застосування двовимірних напружених стлайнів при розв'язанні зв'язаних нестационарних задач теорії термопружнопластичності** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 4 (51).- Дніпропетровськ, 2007.- С.109-124

Розроблено чисельний метод розв'язання просторових зв'язаних нестационарних задач теорії термопружнопластичності для випадку, коли елемент тілі деформується по прямолінійних траєкторіях та траєкторіях малої кривизни. Метод базується на

розщепленні повної системи рівнянь по координатах у сполучі з апроксимацією невідомих величин за допомогою двовимірних напружених сплайнів, що сприяє суттєвому підвищенню його ефективності.

Бібл. 30., іл. 2.

УДК 681.323

Бінкевич В.В., Усиченко І. В. **Інформаційні технології в системах автоматизації управління** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 4 (51) – Дніпропетровськ, 2007. – С. 125-131.

У статті наводяться деякі дані про розробку інтегрованих автоматизованих систем керування в чорні металургії України. На основі досвіду робіт розглядаються напрямки удосконалення інтегрованих інформаційних технологій.

Бібл. 6.

УДК 539.3

Зеленцов Д.Г., Храпач Ю.А., Солодка Н.А. **Учет концентраторов коррозии при решении задачи долговечности сжатых стержней** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.-Випуск 4 (51).-Дніпропетровськ, 2007.- С.132-136.

В данной работе анализируется долговечность стержневых конструкций, имеющих сварные соединения. В качестве примера рассматривается задача долговечности сжатого стержня, собранного посредством сварки из двух уголкового профилей. Сделан вывод о нецелесообразности применения сварных соединений в конструкциях, подверженных воздействию коррозии.

УДК 629.025:539.4

Бейгул В.О., Лепетова А.Л., Щербинская Г.А., Бейгул О.А. **Обоснование рациональных параметров подъемно-цепного устройства буксировщиков карьерных автосамосвалов** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 4 (51).- Дніпропетровськ, 2007.- С.137-144.

Разработаны алгоритм выбора рациональных параметров и методика проектировочного расчета на прочность основных силовых элементов подъемно-цепного устройства буксировщиков карьерных автосамосвалов.

Библ. 6, илл. 3.

УДК 539.3

Наумова И.Ю. **К решению многослойного пакета оболочек** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 4 (51).- Дніпропетровськ, 2007.- С.145-152.

Многослойная цилиндрическая оболочка представлена в виде пакета оболочек. Состояние плоской деформации каждой оболочки описывается уточненными уравнениями для контактных задач. Задача об определении контактных

взаимодействий между оболочками сводится к краевой задаче для пакета в целом относительно контактного взаимодействия между первой и второй оболочками. Посредством рекуррентных соотношений определяются контактные взаимодействия между остальными оболочками. На примере пятислойной оболочки иллюстрируется сравнение решений в постановках уточненной теории оболочек и теории упругости.

Библ.5, табл.2, ил.5.

УДК 517.5

Давидчик О.М. **Сплайни до наближення функцій двох змінних** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 4 (51).- Дніпропетровськ, 2007.- С.153-157.

Розглянута множина функцій, що мають неперервні частинні похідні на квадратах та їх наближення сплайн-функціями.

УДК 620.17

Аскеров Х.А., Ахмедов А.Д. **Влияние легирования и степени деформации на структуры и свойства термомеханической обработанной строительной стали** // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць.- Випуск 4 (51).- Дніпропетровськ, 2007.- С.158-162.

UDC 528.235:681.3:628.1

Gnitko V., Yeseleva E. **Boundary Element Method Applied to Dynamic Analysis of the Shells of Revolution Contained Fluid** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.3-8.

The computational method for fluid-shell interaction in dynamic analysis is proposed. The approach is based on the integral equation method and boundary element method implementation. Numerical solution of the singular integral equations is obtained for evaluation of hydrodynamic pressure of fluid. The numerical dynamic analysis of hemispherical shell interacting with fluid is investigated.

UDK 539.3

Golovko K., Lugovoy P., Meish V. **Dynamical behavior of spherical shells on elastic foundation under impulsive loads** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.9-13.

The statement of problems of dynamical behavior of spherical shells on elastic foundation is considered. The numerical algorithm and solutions of dynamical problems taking account of elastic foundation are obtained and the analysis of the received results is carried out.

Bibl. 7, ill.24.

Grigoryeva L. O. **Electroelastic Vibrations of the Piezoceramical Cylinder under Unsteady Excitation** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.14-17.

Vibration problem of radial poled piezoceramic cylinder under electric potential nonsteady is considered. Dynamical electromechanical cylinder state analysis is conducted, electric and mechanical features progress in time are built and these features distribution in short cylinder section are investigated. It is determined one-dimensional and two-dimensional vibration zones in the cylinder section.

Khoma I.Yu., Khoma Yu.I. **A thermally stress state of nonthin anisotropic shells with initial stresses and deformations** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.18-20.

A method of a construction of equilibrium equations for anisotropic shells with initial stresses and deformations under a steady temperature field is presented. An approach is based on a method of expanding the unknown functions in a Fourier series in Legendre polynomials of the thickness coordinate. By use of a variational method a system of differential equations and corresponding boundary conditions in terms of the coefficients of a decomposition as functions of two independent variables is formed. It is assumed that the initial stresses and displacement are determined from the solutions of the corresponding linear boundary problem.

UDC 534.21:537.634

Levchenko V.V., Zinchuk L.P. **Propagation of magneto-electroelastic shear waves in stratified-periodic ferrite/piezoelectric structures** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.21-26.

This paper describes an approach to the construction of dispersion equations for the shear normal magneto-electroelastic waves in a metal coated stratified-periodic ferrite/piezoelectric structures. The analysis of the got dispersion equations is conducted and the features of ferrite magnetic properties influence are also established.

Bibl. 5.

UDK 539.3

Meish V.F., Meish Yu.A., Stantcel E.A. **Dynamical behavior of three – layered beam in the framework of applied theories under impulsive loads** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.27-34.

On the basis of the applied beam models nonstationary problems of the forced vibrations of three-layered beams are solved and analyzed. In particular, the indirect comparison with the analytical and experimental data results are obtained.

Babich I.Yu., Semenyuk M.P., Zhukova N.B. **Influence of composite materials properties on stability of noncircular cylindrical shells under axial compression or external pressure** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.35-38.

The stability problem of cylindrical shells under axial compression and external pressure is considered. The shells consist of cylindrical sections. A Timoshenko-type shell theory is used. It is shown that choice of suitable parameters of shells sections leads to a significant increase in the critical load.

Shul'ga M.O. **To the theory of electromechanics non-axis-symmetrical vibrations of piezoceramic plates with thickness polarization** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.39-43.

The solution of equation of planar vibrations of piezoceramic plates with thickness polarization by wave potentials is presented. The well-posed solution of non-axis-symmetrical problem about resonance vibrations of ring plate with the radial cuts of electrodes is given.

Shul'ga N.D. **Wave forms on one-dimensional wave transmission regions boundaries in two component layered composites with interface imperfections** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.44-49.

Elastic one-dimensional wave forms in two component orthotropic composites at imperfect interface contact on the boundaries of transmission regions are investigated. The displacements symmetry (asymmetry) relatively layer middle planes are established. For specific material rebuilding of forms with boundary frequencies increasing are accounted.

Babich S. Yu., Borysov E. M., Glukhov Yu.P. **To the solution of a dynamical problem for two laired beforehand stressed half-space with use of complex potentials** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.50-52.

With use of complex potentials investigated influence of initial stresses on the parameters of stress- strain state of laired half-space at action moving load on it.

УДК 539.3

Babich S.Y., Glukhov Y.P. **About one task about the affecting of moving load on stratified semispace with initial stresses** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.53-58.

A plane problem for two-layered semispace, composed of plate and spreading it prestressed semispace with the influence of moving load, is examined. The influence of counting of rotary inertia is investigated with different initial stresses and conditions of junction of plate and semispace.

Savchenko V.G. **Numerical Studying the Non-Axisymmetric the Deformation of the Bodies of Revolution with Allowance for the Form of Stress State** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.59-64.

A technique for allowance of the form of stress state in the processes of deforming the isotropic materials is proposed for thermoelastoplastic stress-strain state of the composite bodies of revolutions under non-axisymmetrical loading and heating.

Pavlenko A.M., Sokolovskaya I.E. // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.65-70.

In article experimental data are presented, on the basis of which a mathematical model is created of motion of particles in the vortical layer at the heat treatment taking into account the change of their sizes. Features are definite of motion of particles in the vortical vehicle, dependences are got, allowing to handle by duration of heat treatment, on the basis of which it is possible to project the device for drying of dispersion particles.

Kulyk A. **Oscillation of liquid in movable tank with edges rigid** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.71-75.

The task of oscillation of a liquid in rectangular form tank is examined. The mathematical model is discretized with quadrature collocation method. The constructive representation of solution of the task which describes simulations of oscillations of a liquid in tanks with edges –partitions has been resulted. The equation of lines of current is found and curves for tank with building – in ribs are constructed. The behavior of lines is illustrated. The results of research can be a tool for computer resource at solution of a number of the important tasks of hydrodynamics, which are connected with the research of a free surface oscillation.

Polishchuk S.Z., Golub V.V., Piven V.A., Shpirok D.M., Doroshenko J.V., Romanenko A.V., Pustovarova T.M. **New approaches to an estimation of a stability of slopes** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.76-82.

For last ten years new knowledge of the shape and location of surfaces of sliding of massifs of a ground and rocks have appeared. More physically justified new methodical approach which is founded on application of composite surfaces of sliding (consisting of integrated surfaces and surfaces of the least resistance) is offered.

The new methodical approach to an estimation of a stability of slopes allows to take into account more correctly real structure of a rock mass at the expense of elimination of calculations of a stability of additional geometrical links, which form by a priori preset shapes of surfaces of sliding. Moreover, the new approach for the first time enables is physically argued (without superposition on a massif of geometrical links) to execute statements of tasks about an estimation of a stability of slopes and effectively to solve tasks in view.

UDC 539.3

Anik'ev I.I., Mikhailova V.I., Sushchenko E.A. **Action of impulsive pressure on thin elastic plate with cut** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P. 83-87.

The influence of straight cut on the strained state of thin elastic plate under normal action of weak shoke wave in air is investigated experimentally.

Bibl. 5, ill. 3.

Chehov V.N., Tkachenko E.A. **Stability of layered coverings in tribointerface at liquid greasing of surfaces of contact** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.88-93.

A problem of surface stability loss in the laminated coating under mutual ; effect of tracing surface loadings and stationary temperature field is considered. The layers material and foundation are considered linearly elastic, transversally isotropic ones. The fulfillment of conditions of absolutely rigid force and ideal contacts is supposed between separate elements of the laminated medium.

UDK 539.3

Shnerenko K.I., Godzula V.F. **Stress-strain state of composite frustum of conical shell** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.94-96.

The method of determination of stress-strain state in composite frustum of conical shell with circular hole was given. The shells model of Timoshenko was used. The method of finite elements was used. The stress-strain distribution around the hole on changed of shell parameters was investigated.

Bibl 4, tab. 1.

UDK 539.3

G.I.Shchuruk **Singularities of influence of relative thickness of shell on wave process in a system of shell- viscosity liquid** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.97-100.

The process of nonaxisymmetrical waves distribution in the cylindrical orthotropic shell containing viscous compressible liquid was considered. The analysis was spent within the framework of the linear equations of S.P.Timoshenko type for the shell and linearized Navier-Stokes equation for liquid. The influence of relative thickness of shell on the frequency phases characteristics of the system was investigated.

Bibl. 2, ill.2.

UDC 631.33.024.2/.3

Vrublevskaya V.I., Nevzorova A.B., Makeyev V.V., Vrublevsky V.B., Barbul S.O., **Application of modified wood in friction units of sowing agricultural machinery** // System technologies. - N 4(51). - Dnepropetrovsk, 2007. – P.101-108.

Results of theoretical and experimental researches have allowed to prove application modified wood in friction units of sowing agricultural machinery for increase resource of work in abrasive, aggressive and damp environments, reduction of metal consumption and weight, decrease in the cost price of their manufacturing by the example of seeders SPU-6M and SES-3,6.

Bibl. 5, ill. 2.

UDS 539.3

Steblyanko P. **Application of the two-dimensional strength splines at the decision connected non-stationary problems of theory thermal-elastic-plasticity** // System technologies.- № 4 (51).- Dnepropetrovsk, 2007.- P.109-124.

Thermal-elastic-plasticity the numerical method of the decision of the spatial connected non-stationary problems of the theory is developed for a case when the element of a body is deformed on rectilinear trajectories and trajectories of small curvature. The method is founded on splitting of full system of the equations on coordinates in a combination to approximation of unknown sizes by means of the two-dimensional strength splines that promotes essential increase of its efficiency

Bibl. 30. ill. 2.

УДК 681.323

Binkevich V.V., Usichenko I.V. **Information technology in integrated systems automation of management** // System technologies.- № 4 (51).- Dnepropetrovsk, 2007.- P.125-131.

In clause some data on development of the integrated automated control systems in black metallurgy of Ukraine are resulted. On the basis of experience of jobs the directions of perfection of the integrated information technologies are considered.

Bibl. 6.

UDC 539.3

Zelentsov D.G., Khrapach J.A., Solodkaya N.A. **Concentrator of corrosion at decision of task of longevity of the compressed bars** // System technologies.- № 4 (51).- Dnepropetrovsk, 2007.- P. 132-136.

Longevity of bar constructions having the welded connections is analysed in this work. As an example the task of longevity of the compressed bar collected by means of welding from two corner types is examined. A conclusion about pointlessness of application of the welded connections in constructions subject to influence of corrosion is done.

UDC 629.025:539.4

Beygul V.O., Lepetova A.L., Scherbinska G.O., Beygul O.A. **The Basis of Rational Parameters for Lift-Towing Device of Mining Dumpers Motor Tugs** // System technologies.- № 4 (51).- Dnepropetrovsk, 2007.- P. 137-144.

The algorithm of rational parameters choice and methods of structural design for lift-towing device of mining dumpers motor tugs has been worked out.

Bibl. 6, ill. 3.

UDC 539.3

Naumova I.U. **To solve of polylayer packet of shells** // System technologies.- № 4 (51).- Dnepropetrovsk, 2007.- P.145-152.

Polylayer cylinder shells presented in form of packet shells. The condition of plane deformation of every shell described with more accurate equation. The problem of definition contact interaction between shells reduced to edge problem of whole packet relatively of contact interaction between first and second shells. The contact interaction between rest shells definite by means of recurrent correlations. The comparison of solutions in productions of

more accurate theory of shells and theory of elasticity illustrated on example of 5 – layer shell.

Bibl.5, tabl.2, ill.5.

UDC 517.5

Davidchik A. **Splines to approximation of two variables** // System technologies.- № 4 (51).- Dnepropetrovsk, 2007.- P. 153-157.

The set of functions having continuous private derivatives on a square and their approximation a spline-functions is considered.

UDC 620.17

Аскеров Х.А., Ахмедов А.Д. **About influence of alloying and deformation degree on structures and properties of thermo-mechanical steel** // System technologies.- № 4 (51).- Dnepropetrovsk, 2007.- P.158-162.

АВТОРЫ ВЫПУСКА

Аникьев Иван Илларионович - с.н.с., к.т.н., с.н.с., Институт механики НАНУ.

Аскеров Х.А. - к.т.н., доцент кафедры металловедения и механики машин, Азербайджанский архитектурно-строительный университет.

Ахмедов А.Д. - к.т.н., доцент кафедры металловедения и механики машин, Азербайджанский архитектурно-строительный университет.

Бабич И.Ю. – Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины.

Бабич Степан Юрійович – д.т.н., профессор кафедры вищої математики, Київський національний економічний університет.

Бинкевич Владимир Васильевич – к.т.н., доцент кафедры экономической информатики НМетАУ.

Борисов Євген Миколайович – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої математики, Київський національний економічний університет.

Глухов Юрій Петрович – к.ф.-м.н., доцент кафедры інформатики і математики, Кременчуцький державний політехнічний університет.

Гнисько В.И - Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Годзула В.Ф. - к.ф.-м.н., Институт механіки ім.С.П.Тимошенка НАН України.

Григор'єва Л.О. - Институт механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, м. Київ.

Давидчик Александр Николаевич - к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики, Днепропетровский государственный технический университет.

Еселева Е.В. - Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины.

Жукова Н.Б.- Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины.

Зеленцов Дмитрий Геннадьевич – к.т.н, доцент, заведующий кафедры высшей математики Государственного высшего учебного заведения «Украинский государственный химико-технологический университет».

Зинчук Любовь Павловна – с.н.с., канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела электроупругости, Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, г. Киев.

Кулик Анатолій Борисович – к.ф.–м.н., доцент, кафедра вищої математики, Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана.

Левченко Владимир Владимирович – с.н.с., канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела электроупругости, Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, г. Киев.

Луговой Петр Захарович – д.т.н., профессор, заведующий отделом строительной механики, Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины.

Мейш Владимир Федорович – д.ф.–м.н., профессор, ведущий научный сотрудник отдела динамики и устойчивости сплошных сред, Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины.

Михайлова Мария Ивановна - с.н.с., д.т.н., в.н.с., Институт механики НАНУ.

Наумова Ирина Юрьевна – к.ф.-м.н., доцент кафедры строительной механики НМетАУ.

Павленко А.М. - д.т.н., профессор, Днепродзержинский государственный технический университет.

Пустоварова Татьяна Михайловна – к.б.н., доцент кафедры инженерной экологии и охраны труда, НМетАУ.

Савченко В.Г.- Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины.

Семенюк Н.П.- Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины.

Соколовская И.Е.– аспирант, Днепродзержинский государственный технический университет.

Стеблянок Павел Алексеевич – д.ф.-м.н., профессор, Днепродзержинский государственный технический университет.

Сущенко Евгений Алексеевич - с.н.с., к.т.н., с.н.с., Институт механики НАНУ.

Ткаченко Э.А. – Институт механики НАН Украины им. С.П. Тимошенко.

Усиченко Ирина Владимировна – к.ф.-м.н., ассистент кафедры менеджмента НМетАУ.

Хома І.Ю. - Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка Національної Академії Наук України.

Хома Ю.І. - Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка Національної Академії Наук України.

Чехов В.Н. - Институт механики НАН Украины им. С.П. Тимошенко.

Шнеренко К.І.- д.т.н., проф., Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАН України.

Шульга М.О.– Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України м. Київ.

Шульга Н.Д.– Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України м. Київ.

Щурук Г.І. - к.ф.-м.н., Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України.

Барбуль Сергей Олегович – инженер, ДГТУ.

Врублевская В.И. - к.т.н, доцент, Минский государственный университет.

Врублевский В.Б. - к.т.н, доцент, Минский государственный университет.

Головко К.Г. - к.т.н, Институт механики НАН Украины.

Голуб Виталий Васильевич - к.т.н, Институт проблем природокористування та екології НАН України.

Дорошенко Ю.В. - к.т.н, Институт проблем природокористування та екології НАН України.

Макеев В.В. - к.т.н, доцент, Минский государственный университет.

Невзорова А.Б. - к.т.н, доцент, Минский государственный университет.

Пивень В.О. - к.т.н, Інститут проблем природокористування та екології НАН України.

Романенко О.В. - к.т.н, Інститут проблем природокористування та екології НАН України.

Полищук Сергей Зиновиевич - д.т.н, професор, Інститут проблем природокористування та екології НАН України.

Шпірок Д.М. - к.т.н, Інститут проблем природокористування та екології НАН України.