

Г.І. Ларіонов, М.Г. Ларіонов

**ПРО ОДИН МЕТОД НАБЛИЖЕНОГО ВІДТВОРЕННЯ ФУНКЦІЇ  
У ОКОЛІ ТОЧКИ ІЗ ОБЛАСТІ ВИЗНАЧЕННЯ  
У АНАЛІТИЧНОМУ ВИГЛЯДІ**

*Анотація. У роботі розглянуто застосування точкової оцінки результатів отриманих чисельними методами. Результат точкової оцінки являє собою аналітичний вираз у вигляді добутку незалежних функцій від однієї змінної. Вираз застосовується до аналізу поведінки у околі обраної для досліджень точки.*

*У якості модельних для демонстрації запропонованого методу розглянуті задачі про наближене представлення декількох елементарних функцій з оцінкою його похибок. Запропоновано рекомендації щодо його використання.*

*Метод послідовної апроксимації МПА, запропонований для наближеного визначення закономірностей між параметрами системи, підтвердив свою працездатність. Відносні похибки для більшості параметрів не перевищують 7%, що є підтвердженням працездатності алгоритму, з одного боку, і можливості користування спрощеними формулами для інженерних розрахунків;*

*Представлення функцій добутку степеневими дає змогу швидко виконати оцінку їх впливу на результативну функцію;*

*Задовільні результати можуть бути отримані при вивченні процесів без стрибків і резонансів, проте це вже справа дослідника обрати точку для дослідження.*

*Ключові слова: числені методи, аналітичний враз, похибка, елементарна функція, апроксимація, процес, працездатність.*

**Основна частина.** Результати проведення експериментів з виявлення тих чи інших властивостей машин, механізмів, приладів, тощо найчастіше являють собою масиви чисельних даних.

Як правило, за результатами таких робіт проводили побудову математичної моделі, яка давала можливість узагальнити процес її вивчення. У якості таких моделей для опису функції якості (потужність у двигуна, швидкість обертання валу, потужність вихідного сигналу електронного приладу, кількість сірки у розплаві металу тощо), обирають або адитивну або мультиплікативну моделі від функцій незалежних змінних параметрів процесу, які представляли со-

бою апроксимації числових даних експерименту. Мультиплікативні моделі отримали широке застосування при обробці даних експерименту або моделювання. Проте не до кінця з'ясованим залишилась проблема вибору коефіцієнту апроксимації, або мультиплікатора, який передував добутку функцій. Цей мультиплікатор називають ще коефіцієнтом «незнання», а від його вибору залежать і оцінки отриманих даних. Більш детальне вивчення процесів проведення фізичних експериментів показав, що у значній більшості алгоритм дослідження складався з послідовності наступних кроків:

1. Обирають опорну точку  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \bar{D}$ , причому обирають, як правило, центроїд області визначення;
2. Проводять по шагову зміну одного із параметрів, причому всі інші залишаються фіксованими;
3. Обирають наступний параметр, фіксуючи всі інші, включаючи попередній;
4. Отримують форму представлення функції якості у вигляді, наприклад, добутку;
5. Обирають алгоритм вибору мультиплікатора, тобто коефіцієнта апроксимації.

Мультиплікатор почали обирати як функцію параметрів із області визначення. Виявилось, що попри високу точність та значні затрати на проведення експерименту, функція якості процесу має задовільну точність лише у околі опорної точки. Спроби визначення функції якості в інших точках позитивного результату не давали, не дивлячись на використання різних алгоритмів вибору мультиплікатора. З точки здорового глузду стає зрозуміло, що експеримент проведений у точці просто не може задовольняти точності визначення функції якості у інших точках і повинен бути не функцією координат, а числом для кожної точки із області визначення. Правило, за яким його можна знайти, буде наведено нижче.

З іншого боку, будь-який процес дослідження, який проводиться з допомогою експериментів, імітаційних або математичних моделей (ММ) і може бути представлений у вигляді «чорної скриньки» (рис. 1).



Рисунок 1 - Модель у вигляді чорної скриньки

де  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  параметри керування або змінні моделі:  $Y$  результуючий фактор або функція  $Y = Y(x_1, x_2, \dots, x_n)$  якості процесу форму якої необхідно відтворити за даними отриманими після комп'ютерної обробки. Модель може бути представлена як фізичними приладами, системами диференціальних рівнянь, математичними формулами та обчислювальними програмами або Пакетами Прикладних Програм (ППП) які її реалізують.

Результати досліджень з допомогою ММ, як правило, представляють собою матриці чисел або таблиці числових даних. Відтворення функцій здійснюється з використанням їх значень на сітці параметрів. Чим дрібніша сітка, чим точніше можна апроксимувати функцію. Для складних задач отримання значень функцій на сітці параметрів потребує значних витрат машинного часу, що робить проблему відтворення функцій практично неможливою.

Виникла ідея використання методики отримання ММ за спрощеною процедурою, як це роблять при проведенні експериментальних робіт до узагальненої моделі (рис. 1). За цим підходом отримання ММ здійснюється не на сітці параметрів, а в певній точці області їх визначення. Запропонований автором алгоритм [1] дозволяє суттєво зменшити обчислювальні витрати на відтворення функції якості, але лише у околі певної точки. Так, замість обчислення значень функції на сітці параметрів, вони обраховуються лише на координатних лініях, чим істотно зменшують кількість обчислень результативної функції (рис. 2).

Метод послідовної апроксимації (МПА) дозволяє представляти функцію в аналітичному вигляді (у вигляді добутку функцій кожна з яких залежить від однієї змінної) коли існують у табличній формі значення її на лініях утворених перетином функціональної поверхні координатними площинами, що проходять через обрану точку із області визначення (рис. 2).

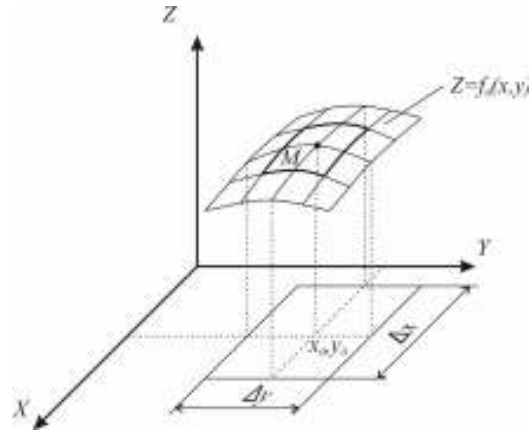


Рисунок 2 - Функція моделі

Досвід успішного використання МПА в задачах геотехнічної механіки [2,3] такого представлення показує, що рішення практичних задач може бути розширено на всю область визначення функції, не дивлячись на той факт, що похибки такого представлення зростають при наближенні до її границі та вони не перевищують величину 5-7%. Так виявилось що така точність є задовільною для інженерних розрахунків в галузі геотехнічної механіки, оскільки вихідні дані для цього визначаються з такою ж точністю..

Ця обставина надихнула автора сформулювати теорему про існування такого представлення для більш ширшого кола задач.

**Теорема:**

Нехай існує  $F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  яка є визначеною і неперервною у замкнутій області  $\bar{D}$ . Тоді у околі точки  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \bar{D}$  функція  $F(X)$  може бути наближено представлена у вигляді:

$$F(X) \approx \varphi(x_1, \dots, x_n) = \alpha_n \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$$

де  $g_i(x_i)$  - функції апроксимації для  $f_1, f_2, \dots, f_n$  які задані у табличній формі, а  $\alpha_n$  - коефіцієнт апроксимації, визначається у відповідності до формули:

$$\alpha_n = \frac{F(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)}{g_1(x_1^0)g_2(x_2^0) \dots g_n(x_n^0)}$$

Зазначені функції визначаються наступним чином:  
 $f_1(x_1) = F(x_1, x_1^0, \dots, x_n^0), f_2(x_2) = F(x_1^0, x_2, \dots, x_n^0), f_n(x_n) = F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n)$ .

Як засвідчує досвід використання вказаного підходу наближене представлення функції  $F(X) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  у околі точки  $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \bar{D}$  має достатню для інженерних розрахунків точність на всій області визначення  $\bar{D}$ .

Алгоритм МПА може бути представлений послідовністю наступних кроків:

Крок 1. Обираємо точку із області визначення функції  $M = M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), M \in \bar{D}$ ;

Крок 2. створюємо функцію  $f_1(x_1) = F(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ;

Крок 3. знаходимо вид функції  $g_1(x_1)$ , яка є апроксимацією для функції  $f_1(x_1)$ ;

Крок 4. Знаходимо  $\varphi_1(x_1)$  у відповідності до (1):  $\varphi_1(x_1) = \alpha_1 g_1(x_1)$ , де  $\alpha_1$  – коефіцієнт апроксимації;

Крок 5. Визначаємо функцію у околі точки  $M$  з рівності  $F(x_1) \approx \varphi_1(x_1)$ .

Повторюємо кроки 2-5 послідовно для змінних  $x_j (j = \overline{2, n})$  і отримуємо шука-  
не представлення:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \approx \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \alpha_n g_1(x_1) g_2(x_2) \dots g_n(x_n),$$

де  $\alpha_n$  – коефіцієнт апроксимації визначається як:

$$\alpha_i = \frac{f_i(x_i)}{\prod_{j=1}^i g_j(x_j^0)} \quad \text{та} \quad \alpha_n = \frac{F(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0)}{g_1(x_1^0) g_2(x_2^0) \dots g_n(x_n^0)}$$

#### Звернути увагу:

1. Вибір точки  $M = M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), M \in \bar{D}$  суттєвим чином впливає на вид відтвореної функції. Коли топографія функції невідома пропонується обирати точку в центрі області визначення і координати визначати згідно формул  $x_j = (b_j - a_j)/2$ , де  $a_j$  і  $b_j$  являють собою початки та кінці інтервалу зміни параметру  $x_j$  відповідно;

Виконання кроку 2 має мету отримання табличної форми функцій  $f_i$ . Якщо вихідна функція не визначена в аналітичному виді необхідно виконати обчислення для послідовності значень змінних з певним кроком. Як показав досвід використання МПА вибір величини кроку кожної змінної для обчислення значень функції незначною мірою впливає на точність відтвореної функції і більше залежить від знань дослідника особливостей фізики процесу, що досліджується.

Треба розуміти, що представлення поверхні шуканої функції відбувається з допомогою узагальненого гіперболічного гіперболоїду і сподіватись на рівномірну поведінку відносно похибки сподіватись не варто.

Також слід зауважити, що проблема вибору класів функцій апроксимації є однією з найважливіших проблем не тільки прикладної математики, а й технічних застосувань. Як свідчать робота [4], коефіцієнт варіації апроксимуючих функцій не може виступати у якості критерію вибору функцій. У якості критерію, який обмежує вибір класу апроксимуючих функцій пропонується обирати розмірність вихідної функції, якщо це можливо. Використання обмежень класу

апроксимуючих функцій є вкрай важливим для оцінювання впливу параметрів на результативну функцію.

Широке застосування МПА на практиці показало, що використання класу степеневих функцій є особливо ефективним для проведення оцінювання впливу параметрів на функцію якості. Метод оцінки впливу являє собою відтворення рішення задачі (коли вона побудована у вигляді описаних таблиць чисел) у вигляді добутку степеневих функцій і порівнянні їх показників. Чим більший показник степені, тим сильніший вплив параметра на функцію.

Для демонстрації роботи МПА виконаємо відтворення деяких аналітичних функцій. Коли побудована функція у табличній формі скористаємось МПА для того, щоб отримати відтворену функцію у аналітичній формі. Тоді виконується порівняння функцій та робиться висновок про ефективність методу. Для відтворення функцій оберемо «незручні» функції для представлення їх у вигляді добутку функцій, а саме:

$$f(x, y) = x + y; x, y \in (0,1), \quad f(x, y) = \sin(x + y); x, y \in (0,1) \quad M(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$$

### Задача № 1.

Виконаємо апробацію методу МПА для функції,  $f(x, y) = x + y; x, y \in (0,1)$ . Результати порівняння відтвореної і заданої функцій наведено нижче (рис. 3).

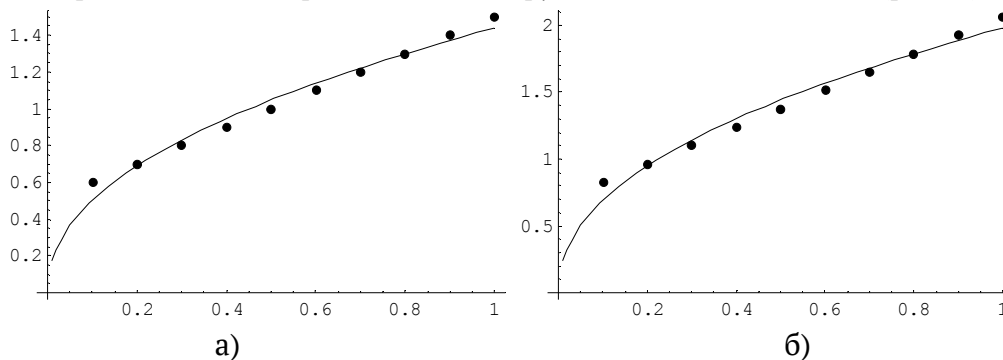


Рисунок 3 - Результати побудови функції за зміни  $x$  та  $y$ :

а) функція апроксимації  $f(x, y) = 1.43942x^{0.459}$  ;

б) функція апроксимації  $f(x, y) = 1.97882y^{0.459}$  .

Остаточно, у околі точки  $M(X_0)$  отримано відтворену функцію у вигляді формули:

$$\tilde{f}(x, y) = 1.97882x^{0.459145}y^{0.459145} .$$

### Задача № 2.

Виконаємо апробацію запропонованого методу для функції,  $f(x, y) = \sin(x + y); x, y \in (0,1)$ . Результати порівняння відтвореної і заданої функцій наведено нижче (рис. 4).

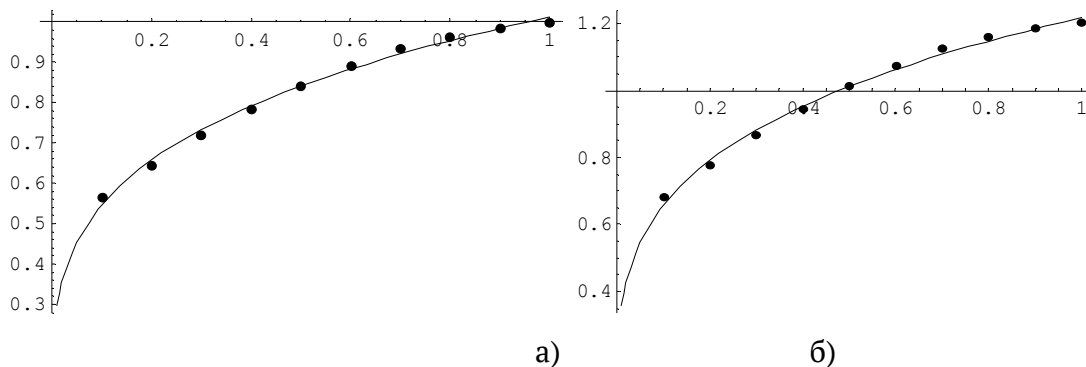


Рисунок 4 - Результати побудови функції за зміни  $x$  та  $y$

а) функція апроксимації  $f(x, y_0) = 1.01187x^{0.267759}$  ;

б) функція апроксимації  $f(x_0, y) = 1.21823y^{0.267759}$  .

Остаточно в околі точки  $M(X_0)$  отримано відтворену функцію у вигляді формули:

$$\tilde{f}(x, y) = 1.21823x^{0.267759}y^{0.267759} .$$

Результати аналізу відносної похибки  $err = \frac{f(x, y)}{\tilde{f}(x, y)} 100$  наведено на рис.5.

Слід зауважити, що обрано лінію  $x=y$ , похибка функції на якій є найбільшими.

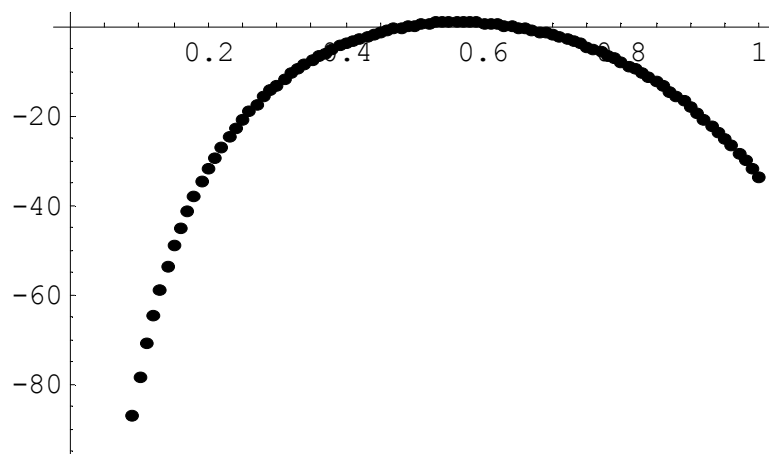


Рисунок 5 - Розподіл відносної похибки значень функції на лінії  $x=y$

#### Висновки:

1.Метод послідовної апроксимації МПА, запропонований для наближеного визначення закономірностей між параметрами системи, підтвердив свою працездатність. Відносні похибки для більшості параметрів не перевищують 7 %, що є підтвердженням працездатності алгоритму, з одного боку, і можливості користування спрощеними формулами для інженерних розрахунків;

2. Представлення функцій добутку степеневими дає змогу швидко виконати оцінку їх впливу на результативну функцію;

3. Задовільні результати можуть бути отримані при вивченні процесів без стрибків і резонансів, проте це вже справа дослідника обирати точку для дослідження.

#### ЛИТЕРАТУРА / LITERATURE

1. Ларіонов Г.І. Оцінювання конструктивних параметрів анкерного кріплення. Дніпропетровськ : Національна металургійна академія України, 2011. – 286с.
2. G.I. Larionov, N.G. Larionov 2012 *Evaluating of metal-resin anchor parameters influence on the support capacity*. Geotechnical Processes During Underground Mining, Taylor&Francis Group, London, pp.189-194.
3. G.I. Larionov, R. Kirija&D. Braginec 2013, *On parameters influence evaluating method application in some geotechnical tasks*. Mining of Mineral Deposites. Taylor&Francis Group, London: pp.247-255.
4. Ивахненко А.Г. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным / А.Г. Ивахненко, Ю.П. Юрачковский. – М.: Радио и связь, 1987. – 118.

#### REFERENCES

1. Larionov G.I., 2011 The anchor design parameter evaluating/Dnipropetrovs'k, eds. National metallurgy Academy of Ukraine. – p.286.
2. G.I. Larionov, N.G. Larionov 2012 *Evaluating of metal-resin anchor parameters influence on the support capacity*. Geotechnical Processes During Underground Mining, Taylor&Francis Group, London, pp.189-194.
3. G.I. Larionov, R. Kirija&D. Braginec 2013, *On parameters influence evaluating method application in some geotechnical tasks*. Mining of Mineral Deposites. Taylor&Francis Group, London: pp.247-255.
4. Ivahnenko A.G., Urachkovskiy U.P., 1987 Compound system modeling with experiment data. Moscow, eds, Radio and communication – p.118.

Received 11.03.2019.

Accepted 14.03.2019.

#### ***Об одном методе приближенного восстановления функции в окрестности точки из области определения в аналитическом виде***

В работе рассмотрено применение точечной оценки результатов полученных численными методами. Результат точечной оценки представляет собой аналитическое выражение в виде произведения независимых функций одной переменной. Выражение применяется для анализа поведения функции в окрестности, выбранной для исследования точки. В качестве модельных для демонстрации предложенного метода рассмотрены задачи о приближенном представлении ряда элементарных функций с оценкой его погрешностей. Даны рекомендации по его применению.

#### ***On one method of approach reconstruction table form function to analytical form in domain point vicinity***

Mathematical model researches data is in numeric matrices or numeric data tables, as usual. Functions reconstruction when it is in table numeric data form is made on parameter



mesh. Density parameter mesh reducing for reconstruction function problem will be urgency in spite of temporary computer speed operates.

Experimental data research allows obtaining the general algorithm for analytical form model reconstruction. The algorithm allow in high power reduce computer time waste for resultant function reconstruction but in point vicinity was proposed. So, instead of doing parameter mesh function values calculating, it is done in coordinate curves and as a result the resultant function number calculates are high reduced. The new sequence approximation method (SAM) allow to do analytical function form reconstruction (in univariable function product form) when it exist in table form in point vicinity. As experience is demonstrated, solutions of real tasks allow representing them in whole domain. In spite of the fact that the errors of the function representation raised up to domain boundary errors do not exceed 5-7%.. Thus influence parameter evaluating method consists of approximate solution reconstruction in form of exponent functions and its index exponent comparisons. Greater index value, stronger function parameter influence.

For testing the accuracy limits we make the reconstruction of some analytical form functions. Graphic dependencies are present.

**Ларионов Г.И.** – д.т.н., старший научный сотрудник отдела физико-механических основ горного транспорта, Институт геотехнической механики Академии наук Украины.

**Ларионов Н.Г.** – к.т.н., младший научный сотрудник отдела физико-механических основ горного транспорта, Институт геотехнической механики Академии наук Украины.

**Ларіонов Г.І.** – д.т.н., старший науковий співробітник відділу фізико-механічних основ гірничого транспорту, Інститут геотехнічної механіки Академії наук України.

**Ларіонов М.Г.** – к.т.н., молодший науковий співробітник відділу фізико-механічних основ гірничого транспорту, Інститут геотехнічної механіки Академії наук України.

**Larionov G.I.** - doctor of science, senior science researcher of physic and mechanic base of mine transport department, National Academy, institute of geotechnical mechanics, Dnipropetrovs'k, Ukraine.

**Larionov N.G.** - doctor of science, junior science researcher of physic and mechanic base of mine transport department, National Academy, institute of geotechnical mechanics, Dnipropetrovs'k, Ukraine.