

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОГО КОНТАКТНОГО ВЛИЯНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ ШИХТОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Аннотация.* Разработана математическая модель разрушения кубических образцов горных пород при наличии контактного трения. Разработан метод, алгоритм и программа расчета предельного вертикального напряжения в вершине развивающейся трещины и расчета предела прочности кубических образцов шихтового сырья с использованием трех показателей свойств (предел сопротивления материала сдвигу, угол внутреннего трения, коэффициент контактного трения), которые простыми способами могут быть установлены экспериментально в условиях горнорудных предприятий, где результаты расчета могут быть оперативно использованы для управления процессами дезинтеграции.

*Ключевые слова:* математическая модель, алгоритм, программа, прочность, разрушение, кубические образцы, горные породы шихтового сырья, трещина, внутреннее трение, контактное трение.

**Введение.** Ежегодно дроблению и измельчению подвергаются миллиарды тонн минерального сырья и других материалов. На эти цели затрачивается более 20% общего производства электроэнергии. На измельчающие тела и футеровку рабочих органов дезинтеграционных машин расходуется металла более 2,5% его производства. На обогатительных фабриках на операции дробления и измельчения приходится 50-60% общих капитальных затрат. В металлургической промышленности около 40% стоимости металла и более 50% энергии затрачивается на переработку железнорудного сырья. Поэтому оптимизация технологических процессов дезинтеграции и конструкций дробильно-размольного оборудования с целью снижения энергопотребления является актуальной задачей. Поэтому в работе ставится задача обосновать построение математической модели и разработать программу расчета прочности образцов горных пород с учетом влияния характеристик контактного трения.

**Основная часть.** В последнее время создан и успешно эксплуатируется новый класс дробильно-измельчительного оборудования [1], однако приме-

няемые технологические схемы разрушения не используют всех возможностей более эффективного процесса разрушения, базирующегося на использовании влияния внутреннего и внешнего трения возникающего при взаимодействии инструмента с породой.

О влиянии внешнего трения на прочностные характеристики горных пород указывают исследователи [2, 3], однако они не дают способа учета этого влияния. Поэтому возникает необходимость определения влияния внешнего и внутреннего трения при разрушении горных пород на их предел прочности. Анализ литературных источников последних лет [4,5] показывает, что здесь продолжают господствовать чисто эмпирические зависимости, основанные на статистических энергетических критериях работы разрушения (Риттингера) и т.н. «кинетике измельчения». Эмпирико-статистический подход тормозит изучение механизмов разрушения хрупких материалов, в частности Криворожских железистых кварцитов. В результате, среди ряда специалистов в этой сфере до сих пор существуют взгляды, как минимум, спорные с позиций механики хрупких и механики пластичных материалов.

Рассмотрим два варианта разработки математической модели применительно к характеристикам трения. Накопленных к настоящему времени экспериментальных данных не достаточно для построения статистически достоверных регрессионных зависимостей. Причина не в малом количестве уже проведенных экспериментов, а в форме изложения их результатов, которые, как правило, представляются в виде усредненных показателей нагрузок одноосного сжатия  $\sigma_c$ , растяжения  $\sigma_p$ , а также угла внутреннего трения  $\rho$  и сопротивления сдвигу  $k_n$ .

Горная порода, из которой добываются шихтовые материалы отличаются высокой вариабельностью свойств в пределах одного месторождения. В этих условиях использование средних показателей практически исключает возможность получения из них статистически значимой регрессионной зависимости, например такой как  $\sigma_c$  от  $\rho$ . В лучшем случае, усредненные данные могут качественно подтвердить или опровергнуть закономерность, полученную другим путем.

Что касается внешнего трения, то данные по его значениям вообще не приводятся, а в расчетах процессов дезинтеграции практически не учитываются.

Поэтому мы будем строить математическую модель на основе анализа теоретического решения задачи сжатия образца с учетом внешнего трения на

контакте.

**Алгоритм построения математической модели принимаем следующим:**

- формирование базы данных, включающей расчетные значения предельной внешней нагрузки  $\sigma_c$  при различных значениях внутреннего и внешнего трения;

- анализ однопараметрического влияния каждой из характеристик трения на величину предельной нагрузки;

- анализ однопараметрических связей внешних нагрузок с показателем касательного сопротивления сдвигу  $k_n$ ;

- подбор искомой регрессионной зависимости;

Основные условия при построении математической модели – обоснованный выбор механической модели – решение задачи по сжатию образца с учетом внешнего трения, которая служит источником базы данных.

Расчет прочности горных пород при сжатии с учетом внутреннего и внешнего трения проводим следующим образом.

На рис.1 представлена детализированная расчетная схема задачи. Внешние нагрузки – вертикальная  $\sigma_y$  и горизонтальная  $\sigma_x$  изображены на ней равномерно распределенными. Этот часто встречающийся в расчетной практике вариант выглядит не вполне обоснованным при действии внешнего контактного трения, порождающего касательные напряжения на границе  $\tau_k$ .

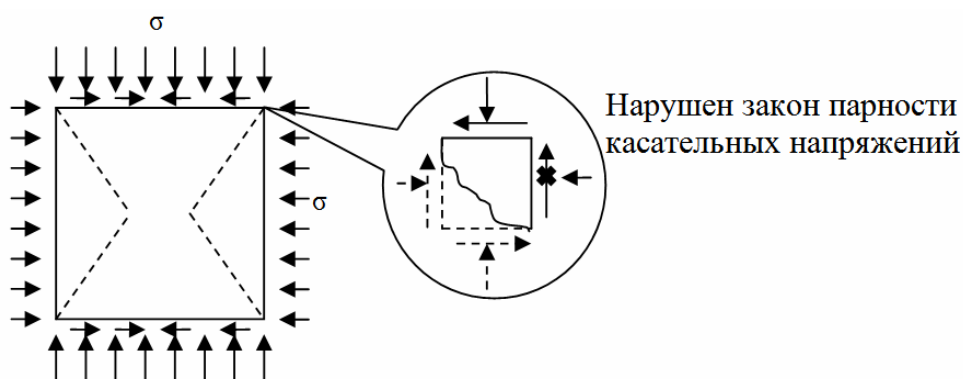


Рисунок 1 - Напряжения в угловой точке образца с прямоугольной формой под нагрузкой

Касательные усилия, действующие на поверхности элементарного прямоугольника, подчиняются закону парности – на смежных сторонах прямоугольника они равны по величине и «противоположны» по направлению – вращают весь прямоугольник в разные стороны.

Поскольку при одноосном сжатии (правая половина рисунка 1) по горизонтальной грани действует касательная сила  $\tau_k$ , то такая же по величине сила должна действовать и по боковой грани.

Однако, по условию отсутствия нагрузки боковая грань свободна от усилий, тогда и горизонтальная грань должна быть свободна от касательных усилий. Но касательные усилия на горизонтальной грани порождены трением от вертикальной нагрузки. Если они равны 0, то и вертикальные напряжения тоже равны 0 – получается парадокс.

Избежать этого парадокса можно двумя путями: - считать, что в процессе деформирования образец сохраняет прямоугольную форму. Исходя из этого можно определить, что при одноосном сжатии касательное напряжение  $\tau_k$  в точке а равно 0 как на вертикальной, так и на горизонтальной гранях образца. Признать, что и нормальное напряжение  $\sigma_y$  в точке а равно 0, поскольку именно оно порождает силу трения  $\tau_k$ . Т.е. отказаться от равномерного распределения сжимающей нагрузки

Считать, что в процессе деформирования образец приобретает выраженную бочкообразную форму (рис.2). Тогда вертикальное касательное усилие, возникающее по закону парности, сместится внутрь образца, а на искривленной боковой грани его не будет.

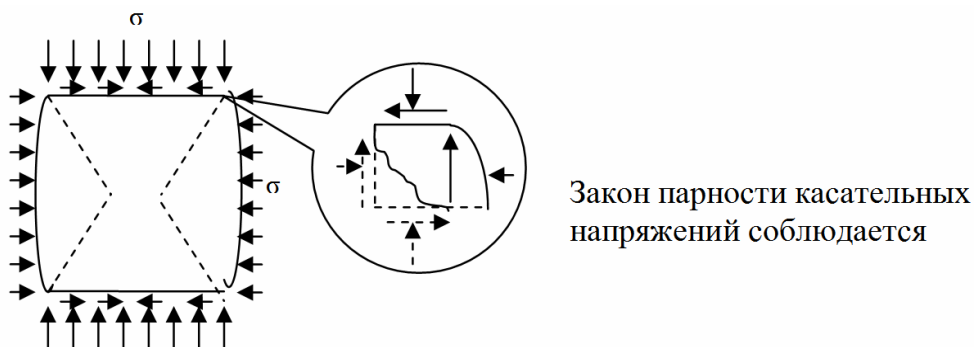


Рисунок 2 - Напряжения в угловой точке образца с бочкообразной формой под нагрузкой

Визуальные наблюдения показывают, что развитая бочкообразная форма характерна для образцов из пластичных материалов, а прямоугольная – для хрупких. Видимо, реальная форма хрупких образцов характеризуется слабо выраженным искривлением боковых поверхностей, а распределение внешней нагрузки – определенной неравномерностью, как это показано на рис.3.

Строго ответить на вопрос о действительном распределении вертикаль-

ной нагрузки по ширине контактной поверхности образца довольно сложно. Для этого надо решать контактную задачу, а это значит – дополнять уравнения равновесия не только условием предельного состояния, но и уравнениями перемещений и их связи с напряжениями. Фактически это обстоятельство означало бы переход от более простого метода характеристик к гораздо более сложному каноническому методу решения задачи.

Использование математического моделирования позволяет избежать этих трудностей – за счет отдельного учета влияния характеристик трения и контактных условий на величину предельной нагрузки.

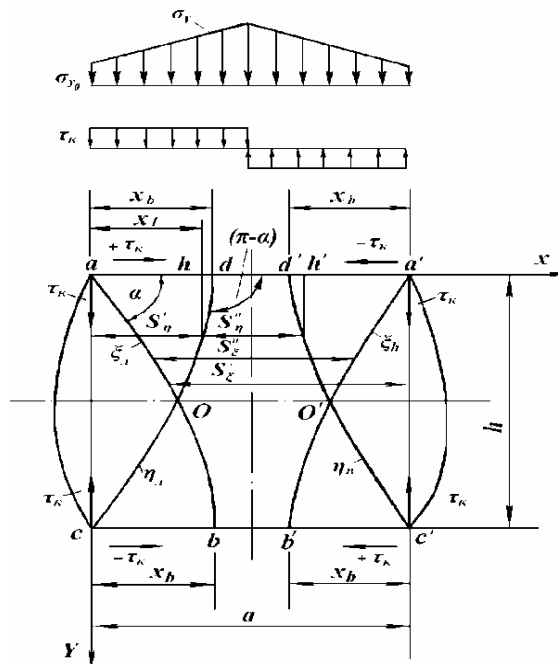


Рисунок 3 - Схема расчета предельной нагрузки

Посмотрим, еще раз на рисунки 2 и 3. Момент перехода в предельное состояние в угловой точке определяется только действующими в ней напряжениями и не зависит от напряжений в других точках образца. Зато он зависит от внутреннего (разумеется) и внешнего трения – если его нет, то нет и касательного напряжения.

Значит, комбинация напряжений  $\sigma_y$  и  $\sigma_x$  для предельного состояния угловой точки будет одинаковой и для расчетной схемы рис.2 и для расчетной схемы рис.3, если в них одинаковы значения внутреннего и внешнего трения.

Это свойство справедливо не только для угловых точек, но и для всех точек контактной поверхности.

Разница только в том, что для угловых точек нам сразу известна величина

$\sigma_x$  – она равна боковой нагрузке образца, а для других точек контактной поверхности – нет. Но, и для этих точек комбинация  $\sigma_y$  и  $\sigma_x$  в предельном состоянии может быть посчитана по рис.2. А распределение  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  вдоль контактной поверхности (рис.3) учтено не зависимо от влияния характеристик трения.

Математическое выражение связи между комбинацией вертикальных и горизонтальных напряжений  $\sigma_y$  и  $\sigma_x$ , соответствующих предельному состоянию точки контактной поверхности образца с одной стороны, и величинами внутреннего и внешнего трения в этой точке с другой стороны, мы будем называть **математической моделью локального контактного влияния характеристик трения.**

При ее построении проигнорируем неравномерность распределения внешней нагрузки и будем руководствоваться расчетной схемой рисунка 2.

В работе [6] приведено уравнение активных касательных

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha \quad (1)$$

и нормальных напряжений на наклонной площадке

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_\alpha \sin 2\alpha \quad (2)$$

а также алгебраическое уравнение равновесия

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \mu^2)(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2} - \frac{\mu(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \quad (3)$$

и тригонометрических функций

$$\sin 2\alpha = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y) - 2\mu\tau_k}{\sqrt{(1 + \mu^2)[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2]}},$$
$$\cos 2\alpha = \frac{\mu(\sigma_x - \sigma_y) - 2\tau_k}{\sqrt{(1 + \mu^2)[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2]}}$$

где  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  - нормальные горизонтальные и вертикальные напряжения.

$\alpha$  - угол наклонной площадки, на которой эффективные касательные напряжения по Кулону имеет наибольшее значение.

В расчетной модели используем теории линий скольжения.

Сетка линии скольжения, отвечающая дифференциальным уравнениям равновесия, условиям предельного равновесного состояния и условиям на границах сечения деформируемого тела, обладает рядом свойств, которые позволяют построить ее в конкретных условиях. Прежде всего, сетка линий скольжения должна удовлетворять условиям на границах рассматриваемого сечения деформируемого тела, т.е. направление линий скольжения в каждой точке, в том числе и на внешнем контуре, должно совпадать с направлением активного главного касательного напряжения.

При отсутствии трения на поверхности контакта или на свободной поверхности при деформировании тела без внутреннего трения она должна пересекать контур под углом  $\frac{\pi}{4}$ , при деформировании тела с внутренним трением – при сжатии по Кулону – под углом  $\frac{\pi}{4} + \rho/2$ , при растяжении  $\frac{\pi}{4} - \rho/2$ .

Построение линий скольжения в общем случае для тел при наличии контактного трения и отсутствии внутреннего является довольно сложным, поэтому решение будем искать методом итерации с использованием ЭВМ на базе геометрических свойств линий скольжения, т.е. вместо общего решения в замкнутой форме будем определять искомые напряжения в конечном числе узловых точек сетки линий скольжения, как это принято в приближенных графических методах решения задач деформирования твердых тел.

Предельное вертикальное нормальное напряжение является наиболее важной характеристикой напряженно-деформированного состояния материала, для получения численных значений которой направлены разрабатываемые методы расчета напряженного состояния горных массивов. Метод расчета предельного вертикального напряжения [7] может быть разработан на основании полученных ранее уравнений. С помощью полученных выражений (3) и выражений тригонометрических функций  $\sin 2\alpha$  и  $\cos 2\alpha$  преобразуем выражение (1). После чего имеем

$$\tau_{\alpha} = \frac{\cos \rho}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2}.$$

Далее продифференцируем по  $\alpha$  уравнение (2)

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\alpha - 2\tau_k \cos 2\alpha.$$

Преобразуем это выражение с помощью упомянутых тригонометрических функций к виду

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -\cos \rho \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2}.$$

Из сравнения выражений первого выражения с третьим имеем

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\tau_{\alpha}.$$

Согласно Кулону  $\tau_{\alpha} = k + \mu\sigma_{\alpha}$ . После подстановки этого выражения со знаком минус, получим важное дифференциальное уравнение равновесного состояния материала на линии скольжения  $\xi$

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 2(k + \mu\sigma_{\alpha}). \quad (4)$$

Аналогично поступим с выражениями напряжений на линии скольжения  $\eta$ , угол наклона которой равен  $\pi - \alpha$ . Получим уравнение со знаком минус множителя  $(k + \mu\sigma_{\alpha})$

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2(k + \mu\sigma_{\alpha}). \quad (5)$$

Решение уравнения сводится к решению интеграла на линии скольжения между точками  $a$  и  $b$  (рис. 3)

$$\int_{\sigma_{\alpha_b}}^{\sigma_{\alpha_a}} \frac{d(k + \mu\sigma_{\alpha})}{\mu} = 2 \int_{\alpha_b}^{\alpha_a} d\alpha., \quad (6)$$

которое имеет вид

$$\frac{k_b + \mu\sigma_{\alpha_b}}{k_a + \mu\sigma_{\alpha_a}} = e^{2\mu\alpha_{ba}}. \quad (7)$$

Для того, чтобы определить предельное вертикальное нормальное напряжение, нужно  $\sigma_{\alpha}$  выразить через  $\sigma_y$ , знать предельное значение сопротивления сдвигу  $k_n$  материала в точке  $a$ , текущее значение  $k_b$  в упругой области на нижней контактной поверхности в точке  $b$ , угол поворота линий скольжения и, разумеется, коэффициенты внутреннего и внешнего трения.

Угол наклона линии скольжения определим по известному уравнению.

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \rho/2 + \beta, \quad (8)$$

т.е.

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \rho/2 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Из известной методики[6]



$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b^2}} \quad (9)$$

В механике деформирования металлов [8] принято обозначать через  $\gamma$  меньший из углов, который образуют линии скольжения с касательной контактной поверхности. На основании выражения (8) при  $\rho=0$  получено

$$\gamma = \frac{\pi}{4} + \beta. \quad (10)$$

Общее выражение для определения нормального напряжения  $\sigma_\alpha$  на линии скольжения.

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sin \rho}{2} [2k \cos \rho - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \rho] = \\ &= \frac{(\sigma_x + \sigma_y) \cos^2 \rho}{2} - k \cos \rho \sin \rho. \end{aligned}$$

В работе [6] приводится значение  $\sigma_x$

$$\sigma_x = \frac{2(k + \mu\sigma_y)}{\cos \rho} (\sin \rho - \sqrt{1 - b^2}) + \sigma_y, \quad (11)$$

где  $b = \frac{\tau_k}{k_n + \mu\sigma_y}$

Тогда полусумма нормальных напряжений

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{(k_n + \mu\sigma_y)}{\cos \rho} (\sin \rho - \sqrt{1 - b^2}) + \sigma_y. \quad (12)$$

Беря значение полусуммы нормальных напряжений на основании выражения (12) имеем

$$\sigma_\alpha = \sigma_y (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b^2}) - k_n \cos \rho \sqrt{1 - b^2}. \quad (13)$$

Таким образом, мы имеем общие подстановочные формулы (8), (13), необходимые для решения уравнения (7).

Теперь предстоит найти выражение для расчета напряжений  $\sigma_{y_0}$  в угловой точке  $a$  (рис. 3), в которой предполагается, что  $\tau_{\square} = k_n$  – пределу прочности материала на сдвиг. Для этого используем уравнение (7). Решение этого уравнения осуществляем на основании выражений (8) и (13). Для точки  $a$ , учитывая, что в ней вследствие обнажения боковой поверхности нормальное напряжение  $\sigma_x$  равно нулю,

$$\sigma_\alpha = k_n \cdot \cos \rho \sqrt{1 - b_a^2}, \quad (14)$$

а в точке  $b$ , в которой  $\tau = k < k_n$ ,

$$\sigma_{a_b} = \sigma_y \left(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2}\right) - k \cdot \cos \rho \sqrt{1 - b_b^2}. \quad (15)$$

Угол поворота линии скольжения  $\alpha_{ba}$  определяется на основании уравнения (8)

$$\alpha_{ba} = \alpha_b - \alpha_a = \beta_b + \beta_a. \quad (16)$$

Следует подчеркнуть, что  $\beta_a$  при расчетах имеет отрицательный знак в верхней половине образца для линии скольжения  $\xi$  за счет отрицательности разности  $(\sin \rho - \sqrt{1 - b_a^2})$  в формуле (9), а в нижней – плюс. Угол  $\beta_b$  имеет знак плюс для всей линии скольжения  $\xi$ , так как он рассчитывается на нижней контактной плоскости.

Тогда выражение (8) с учетом (14) – (16) можно представить в виде

$$\frac{\left(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_a^2}\right) \cdot \left(k_b + \mu \sigma_{y_0}\right)}{k_n \left(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_a^2}\right)} = e^{2\mu(\beta_b + \beta_a)}.$$

После преобразований этого выражения для линии скольжения  $\xi$  (рис. 3) значение предельного продольного нормального напряжения в угловой точке

$$\sigma_{y_0} = \frac{1}{\mu} \left[ \frac{k_n \left(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_a^2}\right) e^{2\mu(\beta_b + \beta_a)}}{1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2}} - k_b \right]. \quad (17)$$

Теперь предстоит определить  $k_b$ . Здесь предполагается, что  $\sigma_y$  и  $k_n$  известно. Решение свелось к замене местами  $k_n$  и  $k$  и замене  $\beta_a$  на  $\beta_b$ .

Тогда

$$k_b = \frac{\left(k_n + \mu \sigma_{y_0}\right) \cdot \left(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_a^2}\right)}{\left(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2}\right) \cdot e^{2\mu(2\beta_b)}}. \quad (18)$$

Теперь необходимо определить параметры  $b_a$  и  $b_b$ ,  $\beta_a$  и  $\beta_b$ . Как отмечалось, что знак контактных касательных напряжений принимаем положительным на верхней плоскости левой продольной половины образца против направления поперечной деформации. Тогда на нижней плоскости этой половины знак будет отрицательным. На правой половине контактные касательные напряжения будут иметь соответственно обратные знаки (рис. 3).

Параметры  $b_a$  и  $b_b$  определяются согласно этому положению

$$b_a = \frac{f_m \left(1 - \frac{2y}{h}\right) \cdot \sigma_{y_0}(x_a)}{k_n + \mu \sigma_{y_0}(x_b)}; \quad (19)$$

$$b_b = -\frac{f_m \sigma_{y_0}(x_b)}{\tau_b + \mu \sigma_{y_0}(x_b)}. \quad (20)$$

где  $\sigma_{y_0}(x_b)$  - функция распределения нормальных напряжений нижней контактной поверхности;  $x_b$  - абсцисса точки пересечения линии скольжения  $\xi$ , с нижней контактной плоскостью, так называемой в теории пластичности точки возврата второй линии скольжения  $\eta$  при  $y=h$ .

В силу того, что в точке  $a$  при достижении эффективного касательного напряжения  $\tau_a$  значения  $k_n$  - предела сопротивления материала сдвигу, образуется трещина, которая и развивается по траектории максимальных эффективных касательных напряжений, т.е. по линии скольжения. Поэтому в выражении (19) учтено линейное затухание касательных напряжений от внешнего трения. Точка  $b$  для линии скольжения  $\xi$  является неподвижной. Поэтому значение касательного напряжения от внешнего трения учтено значением абсциссы  $x_b$  при  $y=h$ . Знак минус и плюс в выражениях (19) и (20) свидетельствует о различной роли внешнего трения на контактных плоскостях, что будет показано в последующем.

Параметры  $\beta_a$  и  $\beta_b$  определяются с помощью уравнения (9).

$$\beta_a = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b_a \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_a^2}}; \quad (21)$$

$$\beta_b = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b_b \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_b^2}}. \quad (22)$$

И, в заключение, отметим, что угол наклона линий скольжения определяется по формулам (8) и (21), т.е.

$$\alpha_a = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b_a \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_a^2}}. \quad (23)$$

Теперь сведем формулы для расчета продольного нормального напряжения по линии скольжения  $\xi$  в угловой точке  $a$  (краевой приконтактной области) в систему:

$$\sigma_{y_0} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{k_n (1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_a^2}) \cdot e^{\pm 2\mu(\beta_b + \beta_a)}}{1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2}} - k_b \right); \quad (24)$$

$$k_b = \frac{1}{\mu} \frac{(k_n + \mu \sigma_{y_0}) \cdot (1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_a^2})}{(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2}) \cdot e^{\pm 4\mu\beta}}; \quad (25)$$

$$b_a = \frac{f_m \left(1 - \frac{2y}{h}\right) \cdot \sigma_{y_0}(x_a)}{k_n + \mu \sigma_{y_0}(x_a)}; \quad (26)$$

$$b_b = -\frac{f_m \sigma_{y_0}(x_b)}{k_b + \mu \sigma_{y_0}(x_b)}; \quad (27)$$

$$\beta_a = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b_a \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_a^2}}; \quad (28)$$

$$\beta_b = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b_b \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_b^2}}. \quad (29)$$

Угол наклона линии скольжения  $\xi$

$$\alpha_a = \frac{\pi}{4} + \rho/2 + \beta_a \quad (30)$$

Знак плюс в формулах (24) и (25) относятся к линии скольжения  $\xi$ , знак минус – к линии  $\eta$ .

Для расчета  $\sigma_y$  мы имеем систему из 6 уравнений при 12 параметрах, из которых три экспериментальные характеристики породы ( $k_n$ ,  $\mu$ ,  $f_m$ ) и два измеряемых геометрических параметра образца ( $a$ ,  $h$ ). В частном рассматриваемом случае принимаем  $a=h$ . В локальной области, например в точке  $a$ , эффективные касательные напряжения по Кулону  $\tau_{\ominus} \geq k_n$ . Подчеркиваем, что в отличие от жестко-пластической модели, в других точках на линии скольжения  $\xi$  материал находится в упругом состоянии, т.е. в этих точках  $\tau_{\ominus} = k < k_n$ , а при  $y = h$  и  $x = x_b$ ,  $\tau_{\ominus} = k_b < k_n$ . В момент выхода трещины в точку  $b$  напряжение  $k_b = k_n$ .

Функция  $\sigma_{y_0}(x_b)$  определяется конкретной закономерностью распределения нормальных и касательных напряжений на нижней контактной поверхности.

Решение системы уравнений производим методом итерации на ПЭВМ. Для этого разделяем образец на несколько слоев  $n$ , например на 18-20, исходя из высоты экрана монитора компьютера. Угол наклона линии скольжения слоя определяем на его верхней границе. По толщине слоя он принимается постоянным. Значения осей координат производим путем сложения соответствующих элементов  $\Delta y$  и  $\Delta x$ , при этом  $\Delta x$  определялся как  $\Delta x = \Delta y \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ . На экран выводятся задаваемые и расчетные параметры всех 18-20 слоев. Следующей операцией выводятся на экран изображения линий скольжения, выходящих из углов образца или из других задаваемых точек, определяемых особенностями линий скольжения. В таблице 1 приведены задаваемые параметры.

Перечень задаваемых параметров в программе расчета

Наименование параметра	Обозначение в программе
Коэффициент сопротивления сдвигу	к
Тангенс угла внутреннего трения ( $\text{tg } \rho$ )	$\mu$
Коэффициент внешнего трения	F max
Высота образца	Y max
Ширина образца	X max
Боковая нагрузка ( $\sigma_x$ )	0

В процессе расчета определялось значение вертикальной нагрузки  $Y_y$  (она на рисунках соответствует  $\sigma_y$ ) на разных стадиях развития трещины – от ее возникновения, до выхода на противоположную поверхность. Весь процесс разбит на 18 шагов, каждый из которых соответствует определенной длине трещины. 0 шаг соответствует зарождению трещины, а 18 – ее выходу на противоположную поверхность.

Как и следовало ожидать, с ростом трещины значение вертикальной нагрузки (несущей способности образца) монотонно снижается от максимального значения в момент зарождения трещины, соответствующего временному сопротивлению, до минимального значения, соответствующего остаточной прочности разрушенного образца (рис. 4).

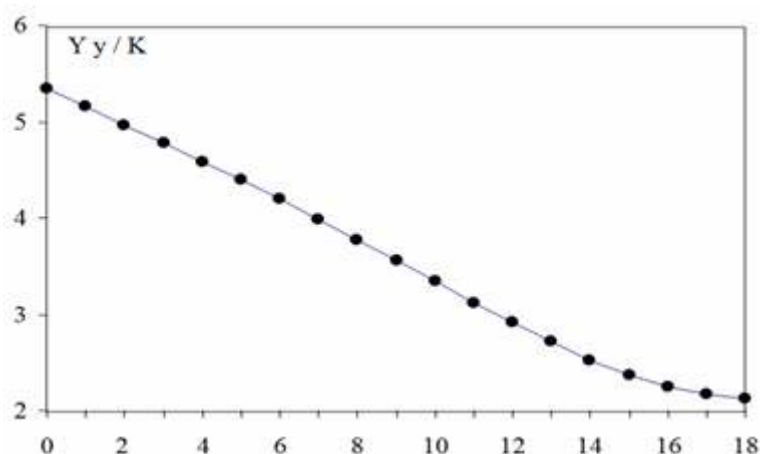


Рисунок 4 - Снижение несущей способности кубического образца при одноосном сжатии по мере развития трещины при  $\mu = 1$ ,  $f = 0,3$

В дальнейшем анализе под величиной  $Y_y$  будем подразумевать ее максимальное значение в момент зарождения трещины.

Анализ влияния коэффициента сопротивляемости сдвигу  $K$  на величину  $\sigma_c$  показал их пропорциональную зависимость, что позволяет в дальнейшем анализировать относительные величины  $Y_y/K$  и  $X_x/K$ .

$X_x$  соответствует  $\sigma_x$  на рисунках.

В таблицах 2 и 3 приведены значения максимальной вертикальной нагрузки  $Y_y/K$  в зависимости от коэффициентов внутреннего  $\mu$  и внешнего  $f$  трения при боковой нагрузке на образец кубической формы  $X_x/K$  равной 0 и 5 соответственно.

Таблица 2

Значения вертикальной нагрузки  $Y_y/K$  при одноосном сжатии ( $X_x = 0$ )

f	$\mu = \text{tg } \rho$					
	0	0,3	0,4	0,6	0,8	1
0	2	2,69	2,95	3,53	4,16	4,83
0,1	2	2,97	3,24	3,84	4,47	5,14
0,2	2	3,23	3,50	4,08	4,69	5,33
0,3	2	3,4	3,64	4,17	4,74	5,34
0,4	2			4,09	4,62	5,18

Таблица 3

Значения вертикальной нагрузки  $Y_y/(2K)$  при трехосном сжатии ( $X_x / K = 5$ )

f	$\mu = \text{tg } \rho$					
	0	0,3	0,4	0,6	0,8	1
0	4,57	7,2	8,41	11,33	14,98	19,4
0,1		7,83	9,12	12,2	16,01	20,57
0,2		8,16	9,5	12,66	16,49	21,05
0,3			9,37	12,51	16,28	20,71
0,4				11,82	15,44	19,67

По таблицам построены зависимости сжимающей нагрузки  $Y_y/K$  при одноосном сжатии кубических образцов от величины внешнего трения  $f$  при различных значениях внутреннего трения  $\mu$ , которые представлены на рис.5.

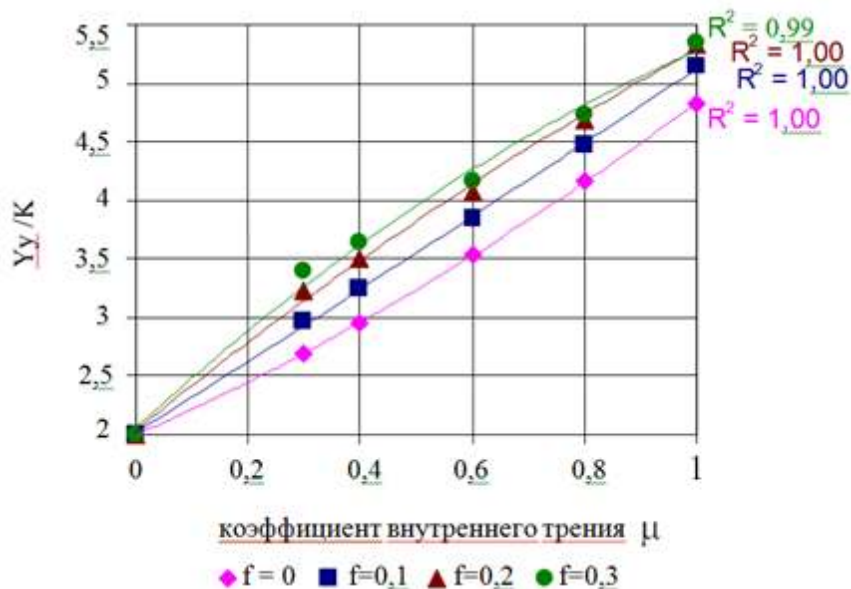


Рисунок 5- Влияние внутреннего трения на прочность одноосного сжатия кубического образца

По тем же таблицам построены и зависимости сжимающей нагрузки  $Yy/K$  при одноосном сжатии кубических образцов от величины внешнего трения  $f$  при различных значениях внутреннего трения  $\mu$ , которые представлены на рис. 6.

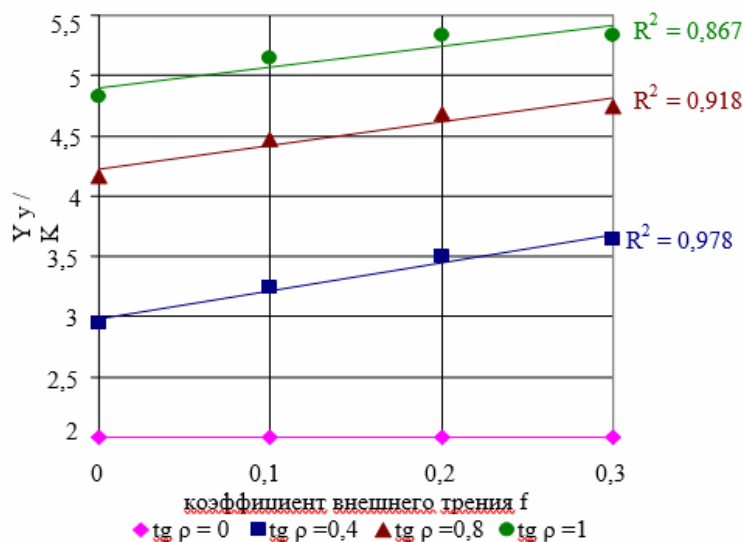


Рисунок 6 - Влияние внешнего трения на прочность одноосного сжатия кубического образца

Для большинства не шлифованных образцов горных пород и шихтового сырья значения внешнего трения  $f$  ниже и лежат в диапазоне 0,2 – 0,3. В реальном интервале изменения коэффициента внешнего трения в диапазоне от

0 – для тщательно отшлифованной поверхности, до 0,3 – для не шлифованной, его влияние на несущую способность кубического образца имеет практически линейный характер.

Степень влияния внешнего трения ниже, чем внутреннего. При изменении внешнего трения от 0 до максимума = 0,3 нагрузка меняется на 10–20%, а при изменении внутреннего трения  $\mu = \text{tg } \rho$  от 0 до максимума = 1 нагрузка увеличивается в 2,5 раза.

Не менее сильно несущая способность зависит от величины боковой нагрузки. Из рис.7 видно, что с ростом боковой нагрузки  $X_x/K$  от 0 до 5 предельная вертикальная нагрузка увеличивается в 4 раза (при  $\mu = 1$ ).

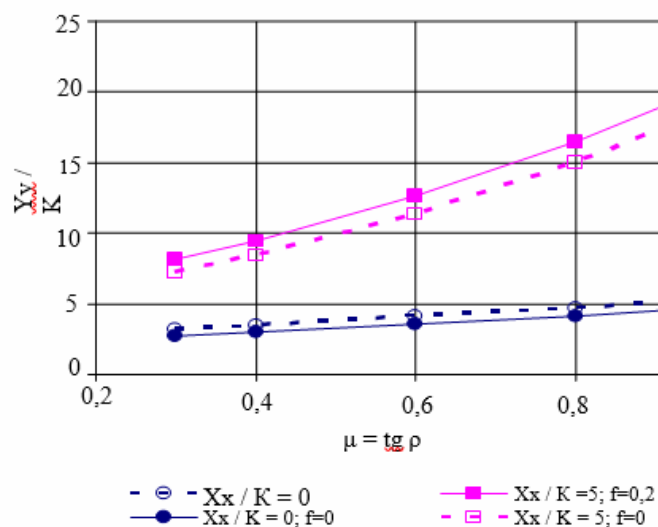


Рисунок 7 – Влияние величины боковой нагрузки кубического боразца  $X_x$  на вертикальную нагрузку

Полученные зависимости позволяют определить предельные значения вертикальных нормальных напряжений по всему образцу по мере развития трещины.

В заключение отметим, что изложенным методом можно проводить оценку напряженно-деформированного состояния материала при нормальных сжимающих нагрузках, не достигающих предела прочности.

Заключение. Разработан метод расчета нормальных напряжений в вершине трещины, формирующейся на линии скольжения.

Разработанная математическая модель соответствуют имеющимся литературным данным, в частности учитывают т.н. «масштабный эффект» и эффект высокой чувствительности прочности образцов к изменению типа нагрузки – с одноосного сжатия на сжатие со скольжением.



Основными факторами влияния внешнего трения являются перераспределение нормальных напряжений на поверхности контакта и формирование поперечных (горизонтальных) напряжений внутри образца даже при действии только продольной (вертикальной) внешней нагрузки.

Приведенная методика позволит в дальнейшем оптимизировать технологические параметры и конструкции действующего дробильного оборудования для снижения энергозатрат при дезинтеграции в горнорудной и металлургической промышленности.

#### **ЛИТЕРАТУРА / ЛІТЕРАТУРА**

1. В.С. Блохин, В.И. Большаков, Н.Г. Малич. Основные параметры технологических машин. Машины для дезинтеграции твердых материалов: Учебное пособие ч.1 – Днепропетровск; ИМА - пресс. 2006. - 404с.
2. Барон, Л.И. Горно–техническое породоведение / Л.И. Барон. – М.: Наука, 1977. – 324 с.
3. Дудушкина К.И. Комплексный метод определения физико-механических свойств горных пород / К.И Дудушкина, Г.Ф. Бобров. – Новосибирск: Наука. - 1970.– С 49–64.
4. Анализ связи между контактными напряжениями при сжатии горных пород / Л.М. Васильев [и др.] // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2009. – Вып. 81. – С. 217-226.
5. Выскребенец, А.С. Коэффициент измельчаемости в мельницах динамического самоизмельчения / А.С. Выскребенец // Обогащение руд. – 2006. - №4.–С.3-4.
6. Панасюк, В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В.В. Панасюк. – К.: Наукова думка, 1968. – 245 с.
7. Васильев, Л.М. Метод расчета напряжений при внедрении штампа в упругий материал, обладающий внешним и внутренним трением / Л.М. Васильев, О.Н. Бычков // Новые методы разрушения и механика горных пород: сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины. – К.: Наук. думка, 1981. – С.3–8.Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением / М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. –423 с.

#### **REFERENCES**

1. V.S. Blokhyn, V.Y. Bolshakov, N.H. Malych. Osnovnyye parametry tekhnolohycheskykh mashyn. Mashyny dlia dezyntehratsyy tverdykh materyalov: Uchebnoye posoby ch.1 – Dnepropetrovsk; YMA - press. 2006. - 404s.
2. Baron, L.Y. Horno–tekhnicheskoye porodovedenye / L.Y. Baron. – M.: Nauka, 1977. – 324 s.

3. Dudushkyna K.Y. Kompleksnyi metod opredeleniya fyzyko-mekhanicheskikh svoystv hornnykh porod / K.Y. Dudushkyna, N.F. Bobrov. – Novosybyrsk: Nauka. – 1970. – S 49–64.
4. Analiz svyazy mezhdu kontaktnymy napriazheniyami pry szhatyy hornnykh porod / L.M. Vasylev [y dr.] // Neotekhnicheskaya mekhanika: Mezhdved. sb. nauch. tr. / УНТМ НАН України. – Днепропетровск, 2009. – Выр. 81. – S. 217-226.
5. Vyskrebenets, A.S. Koэффитsyent yzmelchaemosty v melnytsakh dynamicheskogo samoymelcheniya / A.S. Vyskrebenets // Obohashchenye rud. – 2006. - №4. – S.3-4.
6. Panasiuk, V.V. Predelnoe ravnovesye khrupkyykh tel s treshchynami / V.V. Panasiuk. – K.: Naukova dumka, 1968. – 245 s.
7. Vasylev, L.M. Metod rascheta napriazheniy pry vnedrenyy shtampa v upruhyi material, obladaiushchyy vneshnym y vnutrennym trenyem / L.M. Vasylev, O.N. Vyichkov // Новые metody razrusheniya y mekhanika hornnykh porod: sb. nauch. tr. / УНТМ НАН України. – K.: Nauk. dumka, 1981. – S.3–8. Storozhev, M.V. Teoriya obrabotki metallov davlenyem / M.V. Storozhev, E.A. Popov. – M.: Mashynostroyeniye, 1977. – 423 s.

Received 27.05.2021.  
Accepted 19.04.2021.

***Модельовання локального контактного впливу характеристик  
тертя на міцність шихтових матеріалів***

*Розроблено математичну модель руйнування кубічних зразків гірських порід при наявності контактної тертя. Розроблено метод, алгоритм і програму розрахунку граничного вертикального напруження у вершині тріщини, яка розвивається та межі міцності кубічних зразків шихтової сировини з використанням трьох показників властивостей (межа опору матеріалу зсуву, кут внутрішнього тертя, коефіцієнт контактної тертя), які простими способами можуть бути встановлені експериментально в умовах гірничорудних підприємств, де результати розрахунку можуть бути оперативно використані для управління процесами дезінтеграції.*

***Modeling the local contact influence of friction characteristics  
on the strength of charge materials***

*A mathematical model has been developed for the destruction of cubic rock samples in the presence of contact friction. The model corresponds to the available literature data, in particular, it takes into account the so-called. "Scale effect" and the effect of high sensitivity of the strength of samples to a change in the type of load - from uniaxial compression to compression with sliding. The main factors of the influence of external*

*friction are the redistribution of normal stresses on the contact surface and the formation of transverse (horizontal) stresses inside the sample even under the action of only a longitudinal (vertical) external load.*

*A method, an algorithm and a program for calculating the maximum vertical stress at the tip of a developing crack, which is formed on the slip line, have been developed.*

*A method is proposed for calculating the ultimate strength of cubic samples of charge raw materials using three property indicators (material shear resistance limit, internal friction angle, contact friction coefficient), which by simple methods can be established experimentally in mining enterprises, where the calculation results can be quickly used for control disintegration processes.*

*This will allow in the future to optimize the technological parameters and designs of the existing crushing equipment to reduce energy consumption during disintegration in the mining and metallurgical industries.*

**Малич Николай Григорьевич** – к.т.н., доцент, Национальная металлургическая академия Украины, Украина.

**Усов Олег Александрович** - к.т.н., с.н.с, Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины, Украина.

**Маліч Микола Григорович** - к.т.н., доцент, Національна металургійна академія України, Україна.

**Усов Олег Александрович** - к.т.н., с.н.с, Інститут геотехнічної механіки ім. Н.С. Полякова НАН України, Україна.

**Malich Mykola** - Ph.D., Associate Professor, National Metallurgical Academy of Ukraine, Ukraine.

**Usov Oleg** - Ph.D., senior researcher, Institute of Geotechnical Mechanics. N.S. Polyakova National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine.