DOI 10.34185/1562-9945-4-135-2021-15
УДК 004.94: 517.9

Т.В. Селівьорстова, В.Ю. Селівьорстов, Ю.А. Мала

ДРОБНО-ДИФЕНЦІЙНИЙ ПІДХІД ДЛЯ ОПИСУ ПРОЦЕСУ ЖИВЛЕННЯ МЕТАЛІВ І СПЛАВІВ, ЩО ТВЕРДІЮТЬ В УМОВАХ РЕГУЛЬОВАНОГО ГАЗОВОГО ТИСКУ

Анотація. Для опису процесів фільтрації в складних дендритно-пористих середовищах запропонований ряд дробно-диференційних математичних моделей дифузійного типу. Описано нелінійне рівняння, що містить дробові похідні Рімана-Ліувілля за часом, яке може бути застосовано для коректного опису однофазної фільтрації не ньютонівської рідини в пористому середовищі.

Ключові слова: фільтрація; математична модель; дробна похідна; дрібно-диференційне рівняння; узагальнений закон Дарсі.

Вступ. Двохфазна зона, що утворюється при переході розплаву з рідкого в твердий стан, часто може характеризуватись аномальною кінетикою протікання. Особливості кінетики в цьому випадку виникає у зв'язку з виникненням ефектів просторової нелокальності і, в ряді випадків, ефектів пам'яті, що підкоряються різним ступеневим законам [1-3]. Математичним апаратом, що дозволяє адекватно описувати такі процеси, є теорія інтегро-диференціювання дробового порядку [4-6].

Цілю статті є викладення основних положень теорії інтегро-диференціювання дробового порядку та шляхи їхнього застосування для коректного опису масопереносу процесу живлення металів і сплавів, що твердіють в умовах регульованого газового тиску.

Дробно-дифенційні моделі фільтрації. Основна ідея моделювання полягає в заміні реального неоднорідного середовища двофазної зони модельним однорідним шраристим середовищем зі ступеневою пам'яттю та просторовою нелокальностю. При цьому реалізується неповний опис фільтраційного процесу диференціальним рівнянням дробового порядку, а наявність дробових похідних в модифікаціях основних законів і співвідношень свідчить про наявність, так званих, прихованих змінних [7].

© Селівьорстова Т.В., Селівьорстов В.Ю., Мала Ю.А., 2021

Модель однофазної фільтрації з дробовими похідними за часом. Розглянемо випадок однофазного течії. Відправною точкою для виведення моделі, як і в класичному випадку, служить рівняння нерозривності, яке для течії в шпаристому середовищі має вигляд

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}+div(\rho\mathbf{w})=q\,, \tag{1}$$

де ϕ - шпаристість середовища, ρ – щільність рідини, що фільтрується, $\mathbf{w}$ – вектор швидкості рідини, q – щільність внутрішніх джерел маси, t – час.

У загальному випадку шпаристість залежить як від тиску рідини, так і від напруженодеформованого стану середовища [8]. Дендритно-шпаристе середовище часто проявляє в'язкопружні властивості [9]. При цьому наявність розвиненої мережі дендритів з фрактальною структурою призводить до неадекватності класичних реологічних рівнянь Максвелла, Кельвіна-Фойгта або Зенера і вимагає переходу до їх дробнодіфференційних аналогів [10]. В результаті шпаристість буде функцією не тільки тиску, а й дробової похідної (або дрібного інтеграла) від тиску:

$$\varphi=\varphi\left(p,{}_0D_t^{\alpha}(p)\right),\ \alpha\in(-1,1)\,, \tag{2}$$

де p – тиск, α – порядок дробової похідної, ${}_0D_t^{\alpha}(p)$ – дробова похідна.

Вплив тріщин в шпаристому середовищі на фільтрацію рідини може бути враховано модифікацією закону Дарсі. У роботах [11-13] запропоновані різні дробнодіфференціальні узагальнення даного лінійного закону. Однак в загальному випадку закон фільтрації є нелінійним. Однією з можливих нелінійних модифікацій закону фільтрації є

$${}_0D_t^{\gamma}(\nabla p)=-F(|\mathbf{w}|)\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|},\ \gamma\in(0,1)\,, \tag{3}$$

де $F(z)$ – задана функція. У граничному випадку $\gamma=1$ рівняння (3) переходить у відомий [14] нелінійний закон фільтрації цілого порядку.

Закон (3) є за своєю природою субдиффузійним і може бути використаний для моделювання фільтрації в природних дендритно-шпаристих середовищах, в яких дендрити розподілені в середньому рівномірно за обсягом. У цьому випадку основний потік рідини визначається саме плином по міждендритним каналам, а шпариста частина середовища справляє гальмуючу дію на потік і грає роль областей захоплення частинок рідини.

Вирішуючи (3) щодо швидкості, отримаємо

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

$$\mathbf{w} = -f\left({}_0D_t^\gamma\left(\nabla p\right)\right)\frac{\nabla p}{\left|\nabla p\right|},\ \gamma \in \left(0,1\right), \tag{4}$$

де $f\left(z\right) = F^{-1}\left(z\right)$.

Підстановка (2) і (4) в закон збереження (1) призводить до наступного нелінійного дрібно-диференційного рівняння фільтрації в'язкопружного середовища в дендритно-шпаристому середовищі:

$$\begin{gathered}\left(c_{f1} + c_{\phi 1}\right)p_t + c_{\phi\alpha}\,{}_0D_t^{\alpha+1}p + c_{f\beta}\,{}_0D_t^{\beta+1}p = \\ = q + \frac{1}{\phi}div\left[f\left({}_0D_t^\gamma\left(\nabla p\right)\right)\frac{\nabla p}{\left|\nabla p\right|}\right] + \frac{f\left({}_0D_t^\gamma\left(\nabla p\right)\right)}{\phi}\left(c_{f1}\nabla p + c_{f\beta}\,{}_0D_t^\beta\left(\nabla p\right)\right),\end{gathered} \tag{5}$$

де $c_{f1} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}$, $c_{\phi 1} = \frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial p}$ – класичні ізотермічні стисливості рідини і пористого середовища, відповідно, а

$c_{f\beta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\,{}_0D_t^\beta p}$, $c_{\phi\alpha} = \frac{1}{\phi}\frac{\partial\phi}{\partial\,{}_0D_t^\alpha p}$ – їх узагальнені дрібно-диференційні ізотермічні стисливості.

Рівняння (5) відноситься до класу нелінійних дрібно-диференційних рівнянь аномальної дифузії. У загальному випадку його аналіз являє собою досить нетривіальну задачу. Однак на практиці далеко не завжди всі ефекти, що враховуються рівнянням, проявляються одночасно і є значущими. В результаті з (6) можуть бути отримані різні сімейства простіших моделей.

Як приклад розглянемо випадок, коли впливом зміни пористості на фільтрацію можна знехтувати (ϕ = const), внутрішні джерела маси відсутні і модель є одновимірної. Тоді з (5) отримуємо

$$c_{f1}p_t + c_{f\beta}\,{}_0D_t^{\beta+1}p_x = \left[g\left({}_0D_t^\gamma\left(p_x\right)\right)\right]_x + g\left({}_0D_t^\gamma\left(p_x\right)\right)\left(c_{f1}p_x + c_{f\beta}\,{}_0D_t^\beta\left(p_x\right)\right), \tag{6}$$

де $g\left(z\right) = f\left(z\right)/\phi$. У припущенні малості градієнта тиску (часто справедливому при фільтрації) останнім доданком в правій частині (6) можна знехтувати як меншим у порівнянні з першим доданком правої частини. У цьому випадку (6) спрощується і набуває вигляду дробнодіфференційного узагальнення нелінійного телеграфного рівняння:

$$c_{f1}p_t + c_{f\beta}\,{}_0D_t^{\beta+1}p = \left[g\left({}_0D_t^\gamma\left(p_x\right)\right)\right]_x. \tag{7}$$

Виконаємо в даному рівнянні нелокальну заміну залежної змінної:

$$p_x = {}_0I_t^\gamma u,$$

де u – нова залежна змінна. Диференціюючи (7) по x і здійснюючи заміну змінних, в силу відомих [4, 5] властивостей операторів дробового інтегрування і диференціювання

$$ {}_0D_t^{\alpha}\,{}_0I_t^{\beta} = {}_0D_t^{\alpha-\beta},\ {}_0D_t^{\alpha}\,{}_0I_t^{\alpha} = 1, $$

отримаємо рівняння

$$ c_{f1}\,{}_0D_t^{1-\gamma}u + c_{f\beta}\,{}_0D_t^{1+\beta-\gamma}u = \left[g(u)\right]_{xx} $$

або

$$ c_{f1}\,{}_0D_t^{1-\gamma}u + c_{f\beta}\,{}_0D_t^{1+\beta-\gamma}u = \left[h(u)u_x\right]_x, \qquad (8) $$

де $h(u) = g'(u)$.

При $\beta < \gamma$ рівняння (8) буде рівнянням субдіффузійного типу, при $\beta = \gamma$ це буде рівняння дифузії з нелокальним обуренням, при $\beta > \gamma$ маємо диффузійно-хвильове рівняння.

Висновки. Використаний в роботі підхід носить феноменологічний характер, тому можливість їх застосовності в кожному конкретному практичному випадку повинна бути обґрунтована з використанням експериментальних даних, що підтверджують справедливість відповідних дрібно-диференціальних узагальнень феноменологічних гіпотез. Застосування даного підходу для опису динаміки процесу живлення двохфазної зони металів і сплавів, що твердіють в умовах регульованого газового тиску. Представлені в роботі дробно-диференційні моделі фільтрації відносяться до класу рівнянь аномальної дифузії. Характерною особливістю отриманих рівнянь, що відрізняє їх від відомих дрібно-диференційних моделей фільтрації, є їх нелінійність. При цьому моделі зберігають структуру класичних рівнянь фільтрації цілого порядку і переходять в них в граничних випадках, коли порядок дрібного диференціювання стає цілим.

Вивчення якісних властивостей отриманих рівнянь, а також побудова їх чисельних рішень є досить нетривіальними завданнями, які вимагають в кожному окремому випадку самостійного дослідження.

ЛІТЕРАТУРА / ЛИТЕРАТУРА

1. Газизов Р.К. Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах / Р.К. Газизов, С.Ю. Лукащук // Информатика, вычислительная техника и управление. – 2017. – №4. – С. 104–112.

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

2. Аномальная диффузия радионуклидов в сильнонеоднородных геологических формациях / под. Ред.Л. А. Большова. М.: Наука, 2010. 342 с.
3. Sahimi M. Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches. Weinheim: Wiley-VCH, 2011. 733 p.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
6. Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: изд-во «Артишок», 2008. 512 с.
7. Учайкин В. В. Механика. Основы механики сплошных сред. СПб.: изд-во Лань, 2017. 860 с.
8. Николаевский В. Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996. 448 с.
9. Ba J., Du Q., Carcione J. M., Zhang H., Muller T. M. Seismic exploration of hydrocarbons in heterogeneous reservoirs. Amsterdam: Elsevier, 2014. 370 p.
10. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models. Singapore: Imperial College Press,2010. 367 p.
11. Caffarelli L., Vazquez J. L. Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2011. V. 202. No. 2. P. 537–565.
12. Raghavan R. Fractional diffusion: performance of fractured wells // Journal Petroleum Science and Engineering. 2012. V. 92–93. P. 167–173.
13. Abiola O. D., Enamul H. M., Kassem M., Sidqi A. A. A modified memory-based mathematical model describing fluid flow in porous media // Computers and Mathematics with Applications. 2017. V. 73. No. 6. P. 1385–1402.
14. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.–Ижевск: РХД, 2006. 416 с.

REFERENCES

1. Gazizov R.K. Fractional-differential approach to modeling filtration processes in complex heterogeneous porous media / R.K. Gazizov, S.Yu. Lukashchuk // Informatics, computer technology and management. - 2017. - No. 4. - S. 104–112.
2. Anomalous Radionuclide Diffusion in Highly Heterogeneous Geological Formations, ed. By L. A. Bolshov, (in Russian). M.: Nauka, 2010.
3. Sahimi M. Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches. Weinheim: Wiley-VCH, 2011. 733 p.
4. S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, (in Russian). Minsk: Nauka I technika, 1987.

5. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
6. Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: изд-во «Артишок», 2008. 512 с. [V. V. Uchaikin, Fractional derivatives method, (in Russian). Ul'yanovsk: izd-vo "Artishok", 2008.]
7. V. V. Uchaikin, Mechanics. Basics of continuum mechanics, (in Russian). SPb.: izd-vo Lan', 2017.
8. V.N. Nikolaevsky, Geomechanics and fluidodynamics, (in Russian). M.: Nedra, 1996.
9. Ba J., Du Q., Carcione J. M., Zhang H., Muller T. M. Seismic exploration of hydrocarbons in heterogeneous reservoirs. Amsterdam: Elsevier, 2014. 370 p.
10. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models. Singapore: Imperial College Press, 2010.367 p.
11. Caffarelli L., Vazquez J. L. Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2011. V. 202. No. 2. P. 537–565.
12. Raghavan R. Fractional diffusion: performance of fractured wells // Journal Petroleum Science and Engineering. 2012. V. 92–93. P. 167–173.
13. Abiola O. D., Enamul H. M., Kassem M., Sidqi A. A. A modified memory-based mathematical model describing fluid flow in porous media // Computers and Mathematics with Applications. 2017. V. 73. No. 6. P. 1385–1402.
14. I. A. Charnyi, Underground hydro-gas dynamics, (in Russian). M.-Izhevsk: RChD, 2006.

Received 15.04.2021.
Accepted 17.04.2021.

Дробно-дифенциальный подход для описания процесса питания металлов и сплавов, затвердевающих в условиях регулируемого газового давления

Для описания процессов фильтрации в сложных дендритно-пористых средах предложен ряд дробно-дифференциальных математических моделей диффузионного типа. Описано нелинейное уравнение, содержащее дробные производные Римана-Лиувилля по времени, которое может быть применено для корректного описания однофазной фильтрации неньютоновской жидкости в пористой среде.

Fractional-differential approach to describe the process of feeding metals and alloys solidifying under controlled gas pressure

To describe the processes of filtration in the folding dendritic-porous middle of the proponation, a number of fractional-differential mathematical models of the diffusion type. Described non-linear, how to take the shot of the abducted Riman-Leeuwill for an hour, as it can be stuck for a correct description of the single-phase filtration of not Newtonian age in the porous middle.

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

The two-phase zone, which is established during the transition from melting from hard to hard mill, can often be characterized by abnormal kinetics of resistance. The peculiarities of kinetics in the whole range of winners are related to the issues of widespread nonlocality, in a number of types, memory defects, which adhere to the progressive laws. The mathematical apparatus, which allows to adequately describe such processes, is the theory of integration-differentiation of the fractional order.

Victorians in robotic thinking have a phenomenological character, so the possibility of their dependence in a specific, practical dermal condition is blamed on the basis of experimental results, so that the validity of other differences is confirmed. Stagnation of the given approach for describing the dynamics of the process of vitality of the two-phase zones and metals and alloys, which solidifies in the minds of a regulated gas vice. Presented in the fractional-differential robotic model of filtration are classified as abnormal diffusion. A characteristic feature of the ryvnyan, which is derived from different types of differential models of filtration, is not the same. With a whole model, they preserve the structure of the classical lines of filtration in the whole order and pass into them in boundary drops, if the order of the other differentiation is old.

Vivchennya yakisnyh authorities otrimanih ivnyans, and also prompts їh numerical decisions є to finish nontrivial zavdannyi, as vimagayut in the skin okremomu vampad of independent thought.

Селиверстова Татьяна Витальевна - к.т.н., доцент, доцент кафедры информационных технологий и систем, Национальная металлургическая академия Украины.

Селиверстов Вадим Юрьевич - д.т.н., профессор, кафедра литейного производства, Национальная металлургическая академия Украины.

Малая Юлия Анатольевна - доцент кафедры компьютерных наук и инженерии программного обеспечения, Университет таможенного дела и финансов.

Селівьорстова Тетяна Віталіївна - к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та систем, Національна металургійна академія України.

Селівьорстов Вадим Юрійович - д.т.н., професор, кафедра ливарного виробництва, Національна металургійна академія України.

Мала Юлія Анатоліївна - доцент кафедри комп'ютерних наук та інженерії програмного забезпечення, Університет митної справи та фінансів.

Selivyorstova Tatjana - candidate of technical science, assistant professor, Department of information technology and systems, The National Metallurgical Academy of Ukraine.

Selivyorstov Vadim - doctor of engineering's sciences, professor, Department of casting production, The National Metallurgical Academy of Ukraine.

Mala Yuliia - associated professor of computer science and software engineering chair, University of Customs and Finance.