

А.Н. Хомченко, О.І. Литвиненко, О.М. Дудченко, І.О. Астіоненко
СТЕРЕОМЕТРІЯ СТИСНУТИХ КОНОЇДІВ
ТА ФІЗИЧНА АДЕКВАТНІСТЬ БАЗИСІВ ЕЛЕМЕНТА Q8

Анотація. У роботі розглядаються нові моделі базисів серендипових скінченних елементів (ССЕ) Q8. Стандартний елемент Q8 використовують у методі скінченних елементів (МСЕ) вже більше 50 років, незважаючи на фізичну неадекватність спектра еквівалентних вузлових навантажень. За останні роки бібліотека серендипових скінченних елементів суттєво поповнилася нестандартними (альтернативними) моделями. Були встановлені причини неадекватності спектра і запропоновані "рецепти" усунення цього недоліку стандартних серендипових моделей. Нові підходи до моделювання базисів за допомогою ієрархічних форм змушують відмовитись від коноїдів – лінійчатих поверхонь, які асоціюються із проміжними вузлами стандартних елементів. На думку авторів, ці поверхні Каталана (1843 р.) недостатньо вивчені і заслуговують на увагу сучасних дослідників. Тому дослідження тривають і сьогодні, відмовлятися від коноїдів не обов'язково. У роботі показано, як шляхом стиснення поверхні коноїда можна отримати математично обґрунтований і фізично адекватний спектр вузлових навантажень. Цікаво, що такі можливості закладені в тригонометричних функціях, популярність яких у МСЕ неухильно зростає.

Ключові слова: базисні функції скінченного елемента Q8, коноїд поліноміальний, коноїд тригонометричний, еквівалентні вузлові навантаження, ефект стиснення напрямної коноїда.

Постановка проблеми. Проблема, як завжди в МСЕ, пов'язана із побудовою базису скінченних елементів (СЕ), який задовольняє умовам інтерполяційної гіпотези Лагранжа. Особливо це стосується стандартних серендипових СЕ, які математично обґрунтовані, але фізично неадекватні (на думку інженерів – прихильників механічних аналогій). Йдеться про від'ємні навантаження в кутових вузлах, які можна спостерігати, наприклад, на елементах Q8 і Q12. Виявлено, що ефект "гравітаційного відштовхування" в кутових вузлах спричиняють проміжні вузли, які не виправдано перевантажені. Вузлове навантаження залежить від об'єму між відповідною базисною поверхнею і площиною носія. Коноїд - це лінійчата поверхня з нульовою кривиною Гаусса. "Жорстка" модель коноїда містить надлишковий об'єм тіла. Тому у 2016 р. автори роботи запро-

понували іншу стереометрію моделі Q8, відмовившись від коноїдів [1, 2]. Нові моделі отримали фізичну адекватність, але втратили технологічну привабливість для архітекторів і будівельників. Сьогодні ми переконалися, що відмовлятися від коноїдів не обов'язково. У цій роботі ми зменшуємо навантаження на проміжний вузол за рахунок стиснення напрямної коноїда. Твірна лишається прямолінійною. Виявляється, що нову стереометрію коноїдів краще створювати за допомогою тригонометричних функцій. Використання неполіноміальних апроксимацій в МСЕ нікого не дивує.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Лінійчаті поверхні Каталана, зокрема коноїди, відомі з 1834 року. В МСЕ коноїди з'явилися у 1968 р., коли Ергатудіс, Айронс і Зенкевич [3] методом підбору сконструювали поліноміальні базисні функції для СЕ першого порядку (Q4), другого порядку (Q8) і третього порядку (Q12). Ці елементи належать до стандартних і мають назву – серендипові (інша назва – ізопараметричні). На практиці найчастіше використовують елементи Q8, які в комбінації з трикутниками T6 ефективно працюють в областях з криволінійними границями.

Більше детальної інформації можна знайти в [4-7]. Особливість всіх стандартних серендипових СЕ в тому, що базисні поверхні проміжних вузлів – коноїди. Саме коноїди “відповідають” за те, що в кутових вузлах виникають неприродні (від’ємні) навантаження від рівномірної одиничної масової сили [6, 7]. Відвертий Зенкевич [6] називає такий розподіл протиприродним і без здорового глузду, а більш стриманий Фадєєв [7] назвав розподіл несподіваним. Зрозуміло, що фахівцям з будівельної механіки такий спектр не подобається. Тому почалися пошуки нестандартних підходів [8, 9] та альтернативних серендипових моделей [1, 10]. У роботах [1, 8, 9] аномалії спектра вузлових навантажень виправляються шляхом залучення ієрархічних форм поліномів. Про 41е поліноміальні базиси, зокрема тригонометричні, почали писати на початку 70-х років минулого століття. Про можливість тригонометричних базисів згадують провідні науковці [6, 11, 12], але конкретні приклади практично відсутні в доступних джерелах. Нижче, на прикладі елемента Q8, ілюструються можливості тригонометрії в задачах моделювання фізично адекватних базисів.

Мета дослідження – за допомогою тригонометричних базисів конструктивно довести існування математично обґрунтованих і (головне) фізично адекватних моделей серендипових елементів Q8.

Викладення основного матеріалу дослідження. Ми розглядаємо серендипів СЕ Q8 з носієм у формі канонічного квадрата: $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Вісім вузлів

елемента мають координати: кутові вузли 1(-1;-1); 2(1;-1); 3(1;1); 4(-1;1); проміжні вузли 5(0;-1); 6(1;0); 7(0;1); 8(-1;0). Нагадаємо, як виглядає базис елемента Standard Q8 [3, 5-7].

Повне уявлення про базис Q8 дають дві функції: “кутова” $N_1(x, y)$ (рис. 1) та “проміжна” $N_5(x, y)$ (рис. 2). Ці функції реалізують біквадратичну інтерполяцію і мають вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y), \text{ аналогічно для } i = 2, 3, 4;$$

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y), \text{ аналогічно для } i = 6, 7, 8,$$

де i – номер функції, що асоціюється з номером вузла.

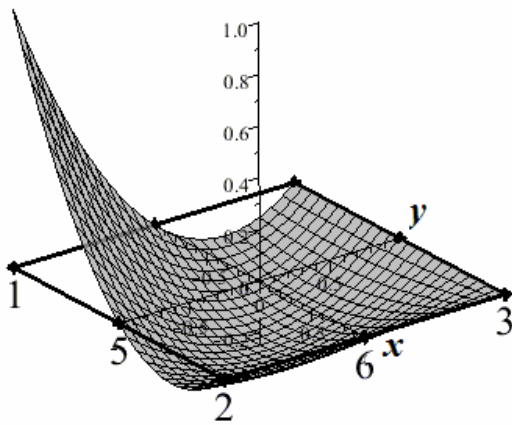


Рисунок 1 – Функція $N_1(x, y)$

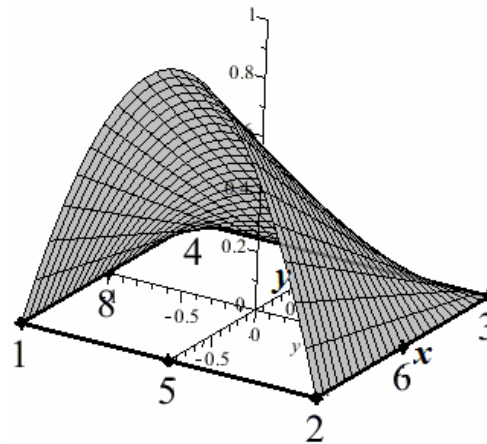


Рисунок 2 – Функція $N_5(x, y)$

Як бачимо, поверхня $N_5(x, y)$ – це коноід, в якому напрямною є парабола, а твірною – пряма.

Вузлові навантаження γ_i обчислюються за правилом інтегрального усереднення, яке відоме з часів Ньютона і Котеса:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dx dy, \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad (1)$$

де S – площа носія.

З геометричної точки зору γ_i – це середня апліката поверхні $N_i(x, y)$. Вузлові навантаження на стандартному Q8 такі:

$$\gamma_i = -\frac{1}{12}, \text{ для } i = 1, 2, 3, 4; \quad \gamma_i = \frac{1}{3}, \text{ для } i = 5, 6, 7, 8.$$

Тепер зрозуміло, що у цьому спектрі не подобається прихильникам механічних інтерпретацій. Феномен “гравітаційного відштовхування” зникає, як тільки $\gamma_5 \leq \frac{1}{4}$.

Інакше кажучи, все залежить від об’єму між поверхнею коноїда і площиною носія, точніше від середньої аплікати коноїда. Треба шукати альтернативні базиси Q_8 , для яких виконується умова $V_i \leq 1$. Для стандартного базису ця умова не виконується: $V_5 = \frac{4}{3}$. Щоб зменшити об’єм під коноїдом, можна прогнути твірну, як це зроблено в роботі [1].

На жаль, при цьому зникають коноїди, а разом з ними зникають технологічні переваги та естетична привабливість моделі. Нижче показано, як зменшити об’єм під коноїдом шляхом стиснення напрямної. У цьому способі замість фрагмента параболи у ролі напрямної ми використовуємо фрагменти тригонометричних кривих. Ефект зменшення об’єму ілюструють наступні альтернативні моделі коноїдів (рис. 3-4):

$$\text{Модель 1: } \bar{N}_5(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \cdot (1 - y) ;$$

$$\text{Модель 2: } \bar{N}_5(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{2} \cdot (1 - y) ;$$

$$\text{Модель 3: } \bar{N}_5(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \cos^4 \frac{\pi x}{2} \cdot (1 - y) .$$

(2)

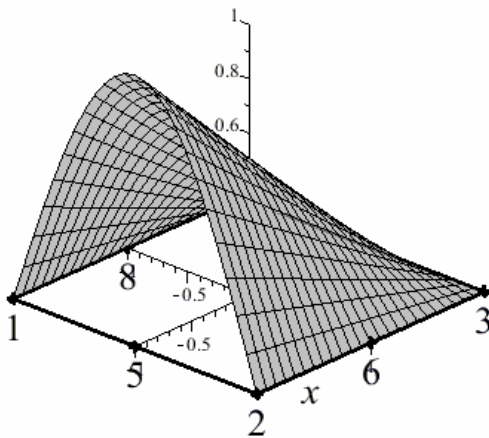


Рисунок 3 – Функція $\bar{N}_5(x, y)$
моделі 1

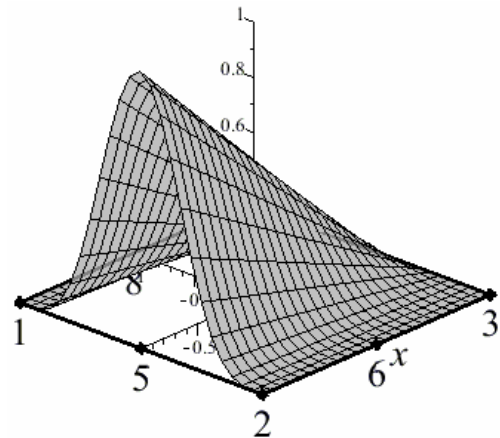


Рисунок 4 – Функція $\bar{N}_5(x, y)$
моделі 3

На цьому ми зупинили процедуру стиснення коноїдів, маючи на увазі адекватність математичної моделі і гіпотезу дифузійної плями. Йдеться про

схему двовимірних випадкових блукань Броунівських частинок з поглинаючими вузлами на границі носія.

Кутові базисні функції Q8 конструюються за методом Тейлора [13] у вигляді лінійної комбінації гіпара і двох сусідніх коноїдів, наприклад,

$$\bar{N}_1(x, y) = \frac{1}{4} \cdot (1-x) \cdot (1-y) - \frac{1}{2} (\bar{N}_5(x, y) + \bar{N}_8(x, y)).$$

Обчислення вузлових еквівалентних навантажень дають наступні результати:

$$\text{для моделі 1: } \bar{\gamma}_1 = \frac{\pi - 4}{4\pi}; \bar{\gamma}_5 = \frac{1}{\pi};$$

$$\text{для моделі 2: } \bar{\gamma}_1 = 0; \bar{\gamma}_5 = \frac{1}{4};$$

$$\text{для моделі 3: } \bar{\gamma}_1 = \frac{1}{16}; \bar{\gamma}_5 = \frac{3}{16}.$$

Треба зауважити, що на $-1 \leq x \leq 1$ графік $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ (рис. 3) майже не відрізняється від стандарту $\varphi(x) = 1 - x^2$ (рис. 2). Те саме можна сказати про інтегральні характеристики $\bar{\gamma}_1$ і $\bar{\gamma}_5$ першої моделі. А якщо взяти $\pi = 3$, то навантаження співпадут із стандартними. Деформація стиснення почалася з моделі 1. Про це свідчить нерівність $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$. Модель 2 вже фізично адекватна, вона припиняє “гравітаційне відштовхування”: навантажені лише проміжні вузли. Модель 3 можна вважати кращою, тому що вона наближає теоретичні результати до емпіричних.

Цікаво відшукати серед поліноміальних моделей Q8 таку, що має інтегральні характеристики тригонометричної моделі 3, тобто $\frac{1}{16}$ і $\frac{3}{16}$. Для цього існує метод нематричної конденсації [1, 14], який дає наступні базисні функції:

$$\bar{N}_1(x, y) = \frac{1}{64} \cdot (1-x) \cdot (1-y) (21xy + 5x + 5y + 5), \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{1}{16};$$

$$\bar{N}_5(x, y) = \frac{1}{64} \cdot (1-x^2) \cdot (1-y) (11 - 21y), \quad \bar{\gamma}_5 = \frac{3}{16}.$$

Висновки. Тригонометричні моделі SE Q8 ще раз підтвердили, що серендипові елементи – невичерпне джерело важливої і цікавої інформації. Треба відзначити, що сьогодні необов’язково відмовлятися від коноїдів заради фізичної адекватності моделі. Коноїди мають також “історичне” значення для МСЕ. Перші базиси серендипових SE були сконструйовані із коноїдів (1968 р.). Еле-

гантний метод Тейлора (1972 р.) також спирається на коноїди. Нові результати показують, що тригонометричні базиси спроможні зберегти коноїди та забезпечити фізичну адекватність моделей.

ЛІТЕРАТУРА / LITERATURE

1. Хомченко А.Н., Астионенко И.А. Гауссова кривизна серендиповых поверхностей или как прогнуть коноид. Вісник ХНТУ. 2016. №3(58). С. 444-447.
2. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Астионенко И.А. Геометрия коноида и физическая неадекватность стандартных серендиповых элементов. Вісник Запорізького нац. ун-ту: Зб. наук. статей. Фіз.-мат. науки . Запоріжжя: ЗНУ, 2017. № 1. С. 337-342.
3. Ergatoudis J., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Curved isoparametric quadrilateral elements for finite element analysis, Int. J.Solid: Struct., 4, pp. 31-34. (1968).
4. Norrie D.H., de Vries G. An introduction to finite element analysis. Academic Press, N.Y. (1978).
5. Segerlind L.J. Applied finite element analysis. London: John Wiley (1975).
6. Zienkiewicz O.C. The finite element method in engineering science. McGraw-Hill, London. (1971).
7. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике, М.: Недра, 1987, 221 с.
8. Хомченко А.Н. Некоторые вероятностные аспекты метода конечных элементов. Ивано-Франковский ин-т нефти и газа. 1982, 9 с. – Деп. в ВИНТИ 18.03.82. № 1213 Деп.
9. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Астионенко И.А. Геометрия серендиповых полиномов: обратные задачи. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-техн. збірник. Київ: КНУБА, 2009. Вип. 82. С. 58-63.
10. Астионенко И.А., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. О серендиповых элементах с естественным спектром узловых нагрузок. Геометричне та комп'ютерне моделювання. Збірник наукових праць. Харк. держ. університет харчування та торгівлі. Харків, 2007. Випуск 17. С. 97-102.
11. Strang G., Fix G.J. An analysis of the finite element method: Englewood Cliffs, N.J. Prentice- Hall, Inc. (1973).
12. Oden J.T. Finite elements of nonlinear continua, McGraw Hill, N.Y. (1972).
13. Taylor P.L. On the completeness of shape functions for finite element analysis. J. Num. Meth. Eng., 4, № 1, pp. 17-22. (1972).

14. Литвиненко Е.И. Математические модели и алгоритмы компьютерной диагностики физических полей: дис. кандидата техн. наук: 05.13.06. Херсон, 1999. 172 с.

REFERENCES

1. Homchenko A.N., Astionenko I.A. Gaussova krivizna serendipoviyh poverhnostey ili kak prognut konoid. Visnik HNTU. 2016. 3 (58). 444-447.
 2. Homchenko A.N., Litvinenko E.I., Astionenko I.A. Geometriya konoida i fizicheskaya neadekvatnost standartnyih serendipoviyh elementov. Visnik Zaporizkogo nats. un-tu: Zb. nauk. statey. Fiz.-mat. nauki . Zaporizhzhya: ZNU, 2017. 1. 337-342.
 3. Ergatoudis J., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Curved isoparametric quadrilateral elements for finite element analysis, Int. J.Solid: Struct., 4, pp. 31-34. (1968).
 4. Norrie D.H., de Vries G. An introduction to finite element analysis. Academic Press, N.Y. (1978).
 5. Segerlind L.J. Applied finite element analysis. London: John Wiley (1975).
 6. Zienkiewicz O.C. The finite element method in engineering science. McGraw-Hill, London, (1971).
 7. Fadeev A.B. Metod konechnyih elementov v geomehanike, M.: Nedra, 1987, 221 s.
 8. Homchenko A.N. Nekotorye veroyatnostnyie aspektyi metoda konechnyih elementov. Ivano-Frankovskiy in-t nefti i gaza.1982,9 s.–Dep.vVINITI18.03.82.1213.
 9. Homchenko A.N., Litvinenko E.I., Astionenko I.A. Geometriya serendipoviyh polinomov: obratnyie zadachi. Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika. Mizhvidomchiy naukovu-tehn. zbirnik. Kiyiv: KNUBA, 2009. Vip. 82. 58-63.
 10. Astionenko I.A., Litvinenko E.I., Homchenko A.N. O serendipoviyh elementah s estestvennyim spektrom uzlovyih nagruzok. Geometrichne ta komp'yuterne modelyuvannya. Zbirnik naukovih prats. Hark. derzh. universitet harchuvannya ta torgivli. Harkiv, 2007. Vipusk 17. S. 97-102.
 11. Strang G., Fix G.J. An analysis of the finite element method: Englewood Cliffs, N.J. Prentice- Hall, Inc., (1973).
 12. Oden J.T. Finite elements of nonlinear continua, McGraw Hill, N.Y. (1972).
 13. Taylor P.L. On the completeness of shape functions for finite element analysis. J. Num. Meth. Eng., 4, № 1, pp. 17-22. (1972).
- Litvinenko E.I. Matematicheskie modeli i algoritmyi kompyuternoy diagnostiki fizicheskikh poley: dis. ... kandidata tehn. nauk: 05.13.06. Herson, 1999. 172 s.

Received 09.03.2021.
Accepted 11.03.2021.

Стереометрия сжатых коноидов и физическая адекватность базисов элемента Q8

Рассматриваются новые модели базисов серендиповых конечных элементов Q8. За последние годы библиотека серендиповых конечных элементов существенно пополнилась нестандартными (альтернативными) моделями. Были установлены причины неадекватности спектра и предложены "рецепты" устранения этого недостатка стандартных серендиповых моделей. Новые подходы к моделированию базисов при помощи иерархических форм заставляют отказаться от коноидов – линейчатых поверхностей, которые ассоциируются с промежуточными узлами стандартных элементов. Нові дослідження показують, що відмовлятися від коноїдів не обов'язково. Показано, як путем сжатия поверхности коноида можно получить математически обоснованный и физически адекватный спектр узловых нагрузок.

Stereometry of compressed conoids and physical adequacy of q8 element bases

The paper considers new models of bases of serendipity finite elements (FE) Q8. The standard element Q8 has been used in the finite element method (FEM) for more than 50 years despite the physical inadequacy of the spectrum of equivalent nodal loads.

In recent years, the library of serendipity finite elements has been significantly replenished with non-standard (alternative) models. The reasons for the inadequacy of the spectrum were identified and "recipes" were proposed to eliminate this shortcoming of standard serendipity models. New approaches to modeling bases with the help of hierarchical forms force to abandon conoids - linear surfaces that are associated with intermediate nodes of standard elements. According to the authors, these Catalan surfaces (1843) are insufficiently studied and deserve the attention of modern researchers. Therefore, research is being conducted today, and it is not necessary to give up conoids. The paper shows how by compressing the surface of the conoid it is possible to obtain a mathematically sound and physically adequate spectrum of nodal loads. It is interesting that such capabilities are embedded in trigonometric functions, the popularity of which in the FEM is growing steadily.

The purpose of the research is to constructively prove the existence of mathematically substantiated and (most importantly) physically adequate models of serendipity elements Q8 with the help of trigonometric bases.

Trigonometric models of the finite element Q8 once again confirmed that serendipity elements are an inexhaustible source of important and interesting information. It should be noted that today it is not necessary to give up conoids for the sake of physical adequacy of the model. Conoids are also of "historical" importance to FEM. The first bases of serendipity FEs were constructed from conoids (1968).

Taylor's elegant method (1972) is also based on conoids. New results show that trigonometric bases are able to preserve conoids and ensure the physical adequacy of the models.

Хомченко Анатолий Никифорович - д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету імені Петра Могили (м. Миколаїв)

Литвиненко Олена Іванівна - к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова

Дудченко Олег Миколайович - к.т.н., професор кафедри інформаційних технологій та фізико-математичних дисциплін, заступник директора з навчальної роботи Херсонської філії Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова

Астіоненко Ігор Олександрович - к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету

Хомченко Анатолій Никифорович - д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Черноморського національного університету імені Петра Могили (г. Николаев)

Литвиненко Елена Ивановна - к.т.н., доцент, доцент кафедри інформаційних технологій і фізико-математических дисциплін Херсонського філіала Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова

Дудченко Олег Николаевич - к.т.н., професор кафедри інформаційних технологій і фізико-математических дисциплін, заступник директора по учебной работе Херсонського філіала Національного університету кораблебудування ім. адм. Макарова

Астіоненко Ігорь Александрович - к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математического моделювання Херсонського національного технічного університету

Khomchenko Anatoliy - doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Intellectual Information Systems of the Petro Mogyla Black Sea National University.

Lytvynenko Olena - ph.d., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Information Technologies and Physical and Mathematical Disciplines of the Kherson Branch of the National University of Shipbuilding named after adm. Makarova.

Dudchenko Oleh - ph.d., Professor of the Department of Information Technologies and Physical and Mathematical Disciplines, Deputy Director for Academic Affairs of the Kherson Branch of the National University of Shipbuilding named after adm. Makarova.

Astionenko Igor - ph.d., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Modelling of the Kherson National Technical University.