УДК 534. 121:519.8

В.Н. Пилипчук, С.А. Волкова

АНАЛІЗ ОДНІЄЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ЕКОЛОГІЧНОЇ КОНКУРЕНЦІЇ

Анотація. Розглядається нелінійна динамічна система з імпульсною дією. Складність математичного формулювання проблеми для аналітичного дослідження систем з імпульсними впливами обумовлена не гладкістю відповідних динамічних процесів. Це призводить до необхідності розглядати замість однієї системи рівнянь цілої серії систем (в проміжках між імпульсами). Альтернативний шлях полягає у введенні в рівняння сингулярного функцій, що моделюють імпульси, і розгляду рівнянь як інтегральних тотожностей в рамках теорії розподілу. А це вимагає додаткових математичних обґрунтувань в нелінійному випадку.

Ключові слова: нелінійні системи, імпульсні впливи, негладке перетворення аргументу, функція Дірака.

Вступ

Традиційні підходи до моделювання імпульсних впливів так чи інакше зводяться до двох напрямків. Відповідно до першого, імпульсні дії моделюють так, що координати і швидкості підкоряються додатковим умовам в околиці точок локалізації імпульсів. Наприклад, завданням стрибка швидкостей в момент дії імпульсів

Другий напрямок спирається на теорію узагальнених функцій. В цьому випадку імпульсні дії моделюються за допомогою введення в рівняння сингулярного членів типу δ-функцій Дірака.

Основна перевага першого способу моделювання полягає в тому, що описують систему диференціальні рівняння такі ж, як і при відсутності імпульсів (Самойленко А.М., Перестюк М.О., Ахметов М.У.). Однак ці рівняння розглядаються окремо на кожному з інтервалів між імпульсами і, таким чином, замість однієї системи доводиться вирішувати цілу послідовність систем.

Другий спосіб моделювання дає єдину систему рівнянь на всьому часовому інтервалі без введення згаданих вище умов на змінні, але відповідний аналіз повинен бути виконаний коректно в рамках теорії узагальнених функцій (Владиміров В.С., Кеч В., Омельянов Г.А., Іванов В.К., Маслов В.П.), що вимагає у нелінійних випадках додаткового математичного обґрунтування.

У даній роботі для моделювання імпульсних процесів застосовується метод, сформульований Пилипчуком В.М. [1-3] і заснований на негладку перетворенні аргументу (часу). Такий похід дозволяє, з одного боку, побудувати математичну модель, яка містить δ-функцій Дірака, а з іншого, отримати її рішення у вигляді єдиного аналітичного вираження на всьому часовому інтервалі.

Слід зазначити, що виключення «внутрішніх» ударів за допомогою негладких перетворень просторових координат застосовував Журавльов В.Ф. Цей метод, по-видимому, безпосередньо застосуємо тільки до віброударних систем і систем з жорсткими не утримується зв'язками. При цьому, перетворенню піддається просторова координата, а не час. У використаному в роботі методі (метод Пилипчука В.М.), основному об'єкт перетворення - час, а не шукана функція.

Моделювання нелінійних систем
за допомогою негладкого перетворення часу

Ідея методу негладкого перетворення аргументу, сформульованого Пилипчуком В.Н. [1-4] полягає в тому, що дія імпульсів на систему моделюються за допомогою другої узагальненої похідної функції $\tau(t;\Theta)$.

$$\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{1+\Theta} & -1-\Theta+4k\le t\le 1+\Theta+4k\\ \dfrac{-t+2}{1-\Theta} & 1+\Theta+4k\le t\le 3-\Theta+4k\end{cases}$$

$$\tau(t+4)=\tau(t)$$

де Θ - параметр, що дозволяє моделювати різного типа імпульсні дії. Тобто моделюються два види імпульсних впливів: рівновіддалених (Θ =0) і не рівновіддалених (Θ≠ 0). При Θ = 0 функція τ(t;Θ) стає симетричною, її графік складається із склеєних відрізань (рис.1).

ISSN 1562-9945

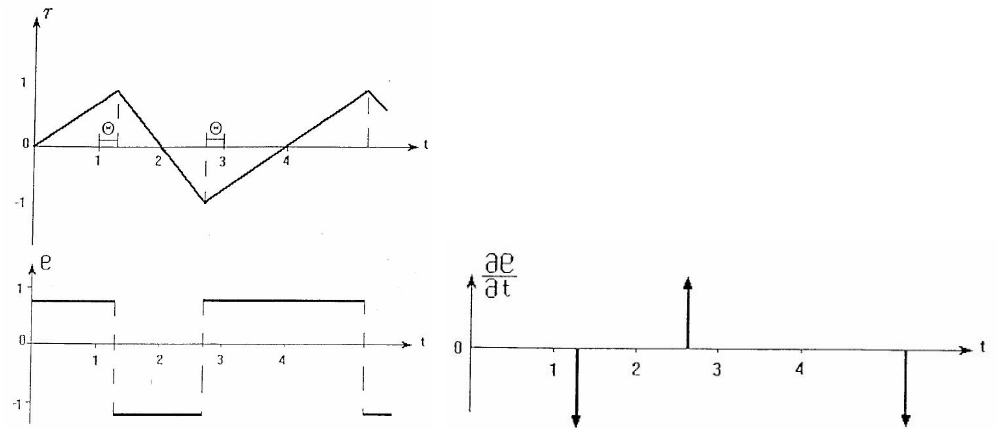

Рисунок 1 - Графік пилкоподібної функції $\tau(t;\Theta)$ та її похідних

Перша похідна має вигляд:

$$e(t;\Theta)=\frac{d\,\tau(t;\Theta)}{d\,t}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\Theta}, & -1-\Theta+4k\le t\le 1+\Theta+4k\\ \dfrac{-1}{1-\Theta}, & 1+\Theta+4k\le t\le 3-\Theta+4k\end{cases}$$

Друга похідна:

$$\frac{d^2\tau(t)}{dt^2}=\frac{de(t)}{dt}=\frac{2}{1-\Theta^2}\sum_{k=0}^{n}\left[\delta(t+1+\Theta-4k)-\delta(t-1-\Theta-4k)\right]$$

Квадрат похідної від функції $\tau(t;\Theta)$ є кускове - постійна функція з періодичною серією розривів першого роду. Тобто має місце співвідношення [1]

$$e^2=\propto+\beta\,e,\quad e\frac{d\,e(t)}{d\,t}=\frac{1}{2}\beta\frac{d\,e}{d\,t}\quad \propto=1/(1-\Theta^2)\quad \beta=-2\,\Theta/(1-\Theta^2) \qquad (1)$$

Отже, перший етап розробки моделей для нелінійних систем з періодичними миттєвими діями полягає в спеціальному описі імпульсів за допомогою функції $\dfrac{de(t;\Theta)}{d\,t}$.

Другий етап полягає в побудові математичної моделі, що враховує тимчасову локалізацію імпульсів, але що не містить сингулярних членів. Йдеться про створенні єдиної, "компактної" моделі, тобто моделі, що описує динаміку системи на всьому тимчасовому інтервалі. Розробка такої моделі заснована на методі негладкого перетворення часу $\{t\to\tau\}$:

$$x=X(\tau)+Y(\tau)\,e, \qquad (2)$$

Таким чином, нерівне перетворення аргументу дозволяє побудувати математичну модель у вигляді крайової умови на стандартному інтервалі, в ході розв'язання якої визначаються невідомі функції X,Y . Функції X(τ) та Y(τ) є неперервними. Перевага побудованої моделі в порівнянні з вихідним рівнянням, полягає в тому, що воно не містить функцій Діраку. Крім того, оскільки нова змінна τ є не лише обмеженою (-1 $\le \tau \le$ 1), але і періодичною по t, те розв'язок крайової задачі можна продовжити на всю числову вісь.

Побудова узагальненої математичної моделі екологічної конкуренції

Розглянемо математичну модель конкуренції однієї ізольованої популяції

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -p\,x - \dfrac{2q}{1-\Theta^2} \sum\limits_{k=0}^{n} \left[\delta\left(t - t_k^{+}\right) + \delta\left(t - t_k^{-}\right)\right] x - \varepsilon\, x^3 \end{cases}.$$

Її розв'язок будуємо у вигляді (2).

Перша похідна функції x(t) має вигляд

$$\dot{x} = \alpha\, Y' + \left(X' + \beta Y'\right) e + \underline{Y' \frac{d\,e}{d\,t}}.$$

Друга похідна функції x(t) має вигляд

$$\ddot{x} = \underline{\left(X' + \beta Y'\right)\frac{de}{dt}} + \alpha\left(X'' + \beta Y''\right) + \left(\beta X'' + (\beta^2 + \alpha) Y''\right) e.$$

Наявність функції $\frac{d\,e}{d\,t}$ у останньому виразі і в рівнянні загальної моделі дозволяє виключити цей член і побудувати математичну модель у вигляді крайової задачі, що не містить δ- функцію, відносно X,Y- компонент.

Введемо наступні позначення:

$$I_f = \left(1-\theta^2\right)^2 X^3 + 3\left(1-\theta^2\right) X\, Y^2 - 2\theta\, Y^3.$$

$$R_f = \left(1-\theta^2\right)^2 3X^2\, Y - 6\theta\left(1-\theta^2\right) X\, Y^2 + \left(1 + 3\theta^2\right) Y^3.$$

Прирівнюючи нулю окремо коефіцієнти при τ та e, отримуємо математичну модель, що описує поведінку системи в загальному випадку

$$(1-\theta^2)X'' - 2\theta Y'' + (1-\theta^2)^2 pX = -\varepsilon(1-\theta^2)^2 R_f \qquad (4)$$

 ISSN 1562-9945

$$(1+3\theta^2)Y'' - 2\theta(1-\theta^2)\quad X'' + (1-\theta^2)^2 pY$$

Разом з умовами

$$Y|_{\tau=\pm 1} = 0 \qquad (5)$$

$$(X' + qX)_{\tau=\pm 1} = [2\theta Y' + \theta^2(X' + qX)]_{\tau=\pm 1}$$

Співвідношення (4)–(5) утворюють крайову задачу для визначення функцій X і Y.

Не дивлячись на формально складніший вигляд, отримана модель (4)–(5) не містить сингулярних членів, і в цьому її основна перевага. Дія імпульсного збудження виявляється в крайових умовах з параметром q. При q=0 імпульси на систему не діють. Розв'язок задачі (4)–(5) може бути знайдено в класичному вигляді.

Висновки

1. Побудована математична модель внутрішньої конкуренції у залежності від народжуваності, загибель особин популяції, обмеженості природних ресурсів та структури популяції [5],[6]. Модель містить функції Дірака, які описують миттєву зміну чисельності популяції (у момент часу $t_k^+ = 3 - \Theta + 4k, k = 1,2,\ldots$n, відбувається збільшення чисельності популяції; при $t_k^- = 1 + \Theta + 4k, k = 1,2,\ldots$n – її зменшення.

2. За допомогою негладкого перетворення аргументу виконано перехід від моделі, що містить δ - функції до крайової задачі без функцій Дірака. Виключення функцій Дірака проведене за рахунок крайових умов.

Розглянуто два випадки:

- «малого дефіциту» природних ресурсів (ε<<1);
- "жорсткої" внутрішньовидової конкуренції (ε>1).

У першому випадку розв'язок знайдено за допомогою асимптотичних методів. У другому – використано чисельний метод Рунге-Кутта.

3. Проведено аналіз і порівняння результатів точного ($\Theta \neq 0$, ε - будь-яке), асимптотичного ($\Theta \neq 0$, $\varepsilon << 1$) і чисельного розв'язку ($\Theta \neq 0$, ε - будь-яке).

4. В результаті чисельного розрахунку встановлено три типи руху: періодичні, квазіперіодичні і хаотичні. При цьому визначальними параметрами системи є параметри ε (коефіцієнт загибелі особин) і параметр Θ (відношення між народжуваністю і загибеллю особин популяції).

5. При θ близькому до нуля (маємо природжену швидкість росту популяції) і θ=1 (кількість загиблих та народжених особин однакова) спостерігаються періодичні режими, тобто чисельність популяції не зменшується.

6. Результати чисельного дослідження моделі показали, що підвищена інтенсивність загибелі ε істотно змінює динаміку чисельності популяції. Модель допускає існування хаотичних режимів, які неможливі при досить «високій» пристосованості ($p=(2\pi)^2$) особин популяції. Хаотичні режими виникають при досить «низькій» пристосованості ($p=\pi^2$) особин популяції.

Підводячи підсумок приведеного аналізу різних режимів, породжених нелінійною моделлю динаміки популяції, можна зробити виводи. Одна група явищ пов'язана з існуванням регулярних і впорядкованих процесів типа граничних точок або циклів. У таких системах є порядок, що дозволяє передбачати майбутнє. Іншу групу складають хаотичні процеси, можливості, передбачення яких обмежені.

Крім того,

- взаємодія особин (наприклад, знаходження «шлюбних» пар) може привести до коливань чисельності популяції.
- при невеликому значенні коефіцієнта Мальтуса q (величина імпульсної дії не велика) існують періодичні і квазіперіодичні розв'язки. Із зростанням коефіцієнта Мальтуса (амплітуди імпульсної дії q) система втрачає стійкість, періодичні і квазіперіодичні режими зникають, і виникають складні процеси.

ЛІТЕРАТУРА

1. V. Pilipchuk Closed-form solutions for oscillators with inelastic impacts. // Journal of Sound and Vibration. – No. 359. – 2015. - p 154-167.

2. V. Pilipchuk Effective Hamiltonians for resonance interaction dynamics and interdisciplinary analogies // Procedia IUTAM 19, - 2016. pp. - 27-34

3. M Kovaleva, L Manevitch, V Pilipchuk Non-conventional phase attractors and repellers in weakly coupled autogenerators with hard excitation // EPL (Europhysics Letters). - 120 (3), 30007 – 2018.

4. Volkova S. A non-linear system using a non-smooth temporal transformation//Актуальные проблемы современных наук.Польша.-2012.–Т.42.-С.24-26

5. Pertseva T.A., Kireeva T.V., Bielosludtseva K.O, Volkova S.A. Immune and inflammatory predictors of survival in patients with severe community-acquired pneumonia//The pharma innovation journal.-Vol.3,No.3.–2014.– pp.21-26.