УДК 519.71

Ю.Ф. Даниев, В.П. Пошивалов, Л.В. Резниченко

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ СРЕДНЕГО ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация. Рассмотрены вероятностные модели среднего остаточного ресурса технических систем с резервированием. Получены выражения для среднего остаточного ресурса технических систем с резервированием и экспоненциальным распределением наработки до отказа. Показано, что интенсивность отказов таких систем возрастает с течением времени, хотя интенсивность отказов нерезервированной системы от времени не зависит, из чего следует, что наступает такой момент времени, после которого использование резервированной системы себя не оправдывает.

Ключевые слова: модель, остаточный ресурс, резервирование, техническая система

Постановка проблемы. Решение проблемы обеспечения надёжности технических систем в известной мере определяется уровнем разработки моделей и методов оценки их ресурса. В дальнейшем под термином ресурс будем понимать период, который увязывается с наработкой технической системы (ТС) от начала его эксплуатации до перехода в предельное состояние. Далее будем считать, что исследуемая система работает без перерывов, т.е. наработка непрерывна. Применительно к эксплуатационным условиям ТС основным понятием ресурса является индивидуальный остаточный ресурс, т.е. продолжительность эксплуатации от конкретного момента времени до достижения некоторого предельного состояния. С этим понятием тесно связано и другое понятие - ресурсный отказ. Под ресурсным подразумевается отказ, в результате которого техническая система достигает предельного состояния. Следует отметить, что характеристики предельных состояний технических систем могут иметь различную природу и количественные параметры. Поэтому были введены следующие категории: назначенный, технический, экономический, маркет-ресурс, экологический и морально-эстетический ресурс [1-3, 5, 6].

Рассмотрим технический ресурс, который регламентируется предельным износом или ухудшением физических свойств материалов базовых конструктивных элементов технической системы до предельно допустимых значений, а также отказом одного или нескольких элементов, восстановление которых не предусмотрено нормативной документацией.

Из принципа стохастичности ресурса следует, что ресурс любой ТС является случайной величиной, которая описывается соответствующим видом распределения. Средний ресурс невосстанавливаемых систем T_C (математическое ожидание случайной наработки до первого отказа) можно представить в виде [1]

$$T_C = \int_0^{\infty} t g(t)\, dt, \tag{1}$$

где $g(t)$– плотность распределения наработки до отказа.

При этом справедливо следующее выражение

$$g(t) = \frac{dG(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}, \tag{2}$$

где $G(t)$ – функция распределения наработки до отказа;

$P(t)$ – вероятность безотказной работы (ВБР) на заданном интервале времени.

Известно, что остаточный ресурс – наработка ТС с момента времени τ – до перехода его в предельное состояние при установленных режимах применения и условиях эксплуатации. Если ς – наработка объекта от начала эксплуатации до перехода его в предельное состояние, то остаточная наработка ς_τ после времени τ – определяется по формуле

$$\varsigma_\tau = \varsigma - \tau,$$

где $\varsigma > \tau$.

Величина ς_τ является случайной, а значит, можно говорить о её числовых характеристик. Одной из её характеристик является средний остаточный ресурс

$$R(\tau) = M(\varsigma_\tau),$$

где $M(.)$ – символ математического ожидания.

 ISSN 1562-9945

Для оценки остаточного ресурса технического объекта по истечению времени τ вводится показатель «средний остаточный ресурс» в виде [3]

$$R(\tau)=\frac{\int_{\tau}^{\infty}P(t)\,dt}{P(\tau)}. \tag{3}$$

При этом $R(0)=T_C$ – средний ресурс системы.

Современной уровень развития сложных ТС, поставили перед разработчиками ряд проблем, связанных с обеспечением высокой надежности. Для обеспечения высокой надежности ТС применяют резервирование – метод повышения надежности объекта путем введения избыточности. В свою очередь, избыточность — это дополнительные средства и (или) возможности сверхминимально необходимых для выполнения объектом заданных функций. Резервирование широко используется в информационных системах для повышения надежности функционирования аппаратуры и программного обеспечения. В настоящее время мало исследованными являются вопросы, связанные с остаточным ресурсом резервированных систем.

Цель данной работы – разработка вероятностных моделей среднего остаточного ресурса систем с резервированием.

Основная часть. Существующие методы резервирования целесообразно разделять по следующим признакам: вид резервирования, способ соединения элементов, способ включения резерва, кратность резервирования, режим работы резерва, восстанавливаемость резерва. В дальнейшем рассмотрим структурное резервирование – один из видов резервирования, предусматривающее использование избыточных элементов, входящих в физическую структуру объекта. Суть структурного резервирования заключается в том, что в минимально необходимый вариант объекта вводятся дополнительные элементы.

Целесообразность применения резервирования определяется следующими факторами:

– исходным уровнем надёжности комплектующих изделий;

– заданным временем эксплуатации;

– наличием эффективной системы контроля и периодичностью проведения профилактики;

– возможностями использования менее избыточных методов повышения надёжности.

В настоящее время для повышения надежности систем шрокое применение в практике проектирования ТС получило резервирование путем параллельного соединения элементов, когда все элементы находятся под нагружением (нагруженный резерв). Тогда при кратности резервирования m системы равнонадёжных элементов с параллельным резервированием ВБР будет равна

$$P_C(t) = \left[1 - \left(1 - P(t)\right)^{m+1}\right]. \qquad (4)$$

где $P(t)$ – ВБР элемента.

Учитывая, что

$$\left(1 - b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(-1\right)^k C_n^k b^k ,$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, выражение (1) можно записать в виде

$$P_C(t) = \sum_{k=1}^{m+1} \left(-1\right)^{k+1} C_{m+1}^k P^k(t), \qquad (5)$$

где

$$C_{m+1}^k = \frac{(m+1)!}{k!\left(m+1-k\right)!}.$$

Отметим, что справедливы соотношения [4]

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(-1\right)^{k+1} C_n^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad (6)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(-1\right)^k C_n^k = 0,$$

$$C_n^0 = 1.$$

Пусть наработка до отказа элемента описывается распределением Вейбулла. Тогда функция, плотность распределения и интенсивность отказов будут равны

$$G(t) = 1 - e^{-\lambda t^{\beta}}, \qquad (7)$$

$$g(t) = \beta \lambda t^{\beta-1} e^{-\lambda t^{\beta}},$$

$$\lambda(t) = \lambda k t^{\beta=1},$$

где λ и β – параметры распределения.

 ISSN 1562-9945

В этом случае ВБР будет равна

$$P(t) = e^{-\lambda t^{\beta}}. \qquad (8)$$

Пусть $\lambda t^{\beta} = a^{\beta}$ и учитывая [4], что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^{\mu}} dx = \frac{1}{\mu}\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right), \ [\operatorname{Re}\mu > 0]$$

можно получить, используя (1) и (8), средний ресурс элемента T определится по формуле

$$T = \int_0^{\infty} P(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t^{\beta}} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^{\beta}}}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}} da == \frac{1}{\beta\lambda^{\frac{1}{\beta}}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

Здесь $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ – гамма-функция, а $\Gamma(1) = 1$ и $\int_0^{\infty} t^{\nu-1} e^{-\mu t} dt = \frac{1}{\mu^{\nu}}\Gamma(\nu)$.

Пусть $P^{k}(t) = e^{-k\lambda t^{\beta}}$, тогда

$$\int_0^{\infty} P^{k}(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-k\lambda t^{\beta}} dt = \frac{1}{\beta(k\lambda)^{\frac{1}{\beta}}}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right). \qquad (9)$$

Учитывая (8) и (9), средний ресурс системы определится выражением $T_C = \int_0^{\infty} P_C(t)dt = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{k+1} C_{m+1}^{k} P^{k}(t)dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^{k+1} C_{m+1}^{k}}{k^{\frac{1}{\beta}}}$.

При $\beta = 1$ имеет место экспоненциальное распределение, то ВБР системы с одинаковыми параметрами λ примет вид

$$P_C(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} C_{m+1}^{k} e^{-k\lambda t}. \qquad (10)$$

Тогда, учитывая (5) и (6) средний ресурс ТС определится так

$$T_C = \int_0^{\infty} P_C(t)dt = \int_0^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} C_{m+1}^{k} e^{-k\lambda t}\right] dt = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^{k+1} C_{m+1}^{k}}{k} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}. \qquad (11)$$

Отметим, что соотношение (12) можно получить иначе, выполнив замену $1 - e^{-\lambda t} = x$ или $t = -\lambda^{-1}\ln(1-x)$. Тогда

$$T_C = \int_0^{\infty} P_C(t)dt = \int_0^{\infty} \left[1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}\right] dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^{1} \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x} dx = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{k}.$$

Учитывая (2) и (11) получим выражение для интенсивности отказов

$$\lambda_C\left(t\right)=\frac{g_C(t)}{P_C\left(t\right)}=-\frac{1}{P_C\left(t\right)}\frac{dP_C\left(t\right)}{dt}=$$
$$=\frac{\lambda\left(m+1\right)e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{m}}{1-(1-e^{-\lambda t})^{m+1}}= \quad . \tag{12}$$
$$=\frac{\lambda\sum\limits_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{m+1}}\left(\text{-}1\right)^{k+1}C_{m+1}^{k}ke^{-k\lambda t}}{\sum\limits_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{m+1}}\left(\text{-}1\right)^{k+1}C_{m+1}^{k}e^{-k\lambda t}}$$

Для высоконадёжных систем, удовлетворяющих условию $\lambda t\le 0,01$, функцию $e^{-\lambda t}$ можно представить в виде разложения $e^{-\lambda t}=1-\lambda t$. В этом случае выражения для основных показателей надёжности могут быть с достаточной для практики точностью представлены в виде

$$P_C(t)=1-(\lambda t)^{m+1}.$$
$$\lambda_C\left(t\right)=\frac{\lambda^{m+1}\left(m+1\right)\left(1-\lambda t\right)t^{m}}{1-\left(\lambda t\right)^{m+1}}. \tag{13}$$

Для экспоненциального распределения можно получить выражение для среднего остаточного ресурса системы с параллельным резервированием (формула (3))

$$R_C\left(\tau\right)=\frac{\int\limits_{\tau}^{\infty}P_C\left(t\right)dt}{P_C\left(\tau\right)}=\frac{\sum\limits_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{m+1}}\left(\text{-}1\right)^{k+1}C_{m+1}^{k}\int\limits_{\tau}^{\infty}e^{-k\lambda t}dt}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+1}C_{m+1}^{k}e^{-k\lambda\tau}}=$$
$$=\frac{1}{\lambda}\frac{\sum\limits_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{m+1}}\frac{\left(\text{-}1\right)^{k+1}C_{m+1}^{k}\Gamma\left(1,k\lambda\tau\right)}{k}}{\sum\limits_{k=1}^{m+1}\left(-1\right)^{k+1}C_{m+1}^{k}e^{-k\lambda\tau}}. \tag{14}$$

Здесь $\Gamma\left(\alpha,u\right)=\int\limits_{u}^{\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ – неполная гамма – функция [4] и учтено, что $\int\limits_{u}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-\mu t}dt=\mu^{-\alpha}\Gamma\left(\alpha,\mu u\right)$.

 ISSN 1562-9945

Пусть $\gamma\left(\alpha,u\right)=\int\limits_0^u t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ – неполная гамма – функция [4], тогда можно получить другое выражение для среднего остаточного ресурса системы

$$R_C(\tau)=\frac{\int\limits_{\tau}^{\infty}P_C(t)dt}{P_C\left(\tau\right)}=\frac{T_C-\int\limits_9^{\tau}P_C\left(t\right)dt}{P_C\left(\tau\right)}= \tag{15}$$

$$=\frac{\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=1}^{m+1}\frac{\left(-1\right)^{k+1}C_{m+1}^k}{k}-\sum\limits_{\text{k=1}}^{\text{m+1}}\left(\text{-}1\right)^{k+1}C_{m+1}^k\int\limits_0^{\tau}e^{-k\lambda t}dt}{\sum\limits_{k=1}^{m+1}\left(-1\right)^{k+1}C_{m+1}^k e^{-k\lambda\tau}}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\frac{\sum\limits_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{\left(-1\right)^{k+1}C_{m+1}^k\left[1-\gamma\left(1,k\lambda\tau\right)\right]}{k}\right\}}{\sum\limits_{k=1}^{m+1}\left(-1\right)^{k+1}C_{m+1}^k e^{-k\lambda\tau}}.$$

Как из (14), так из (15) нетрудно видеть что при $\tau=0\,, R_C\left(0\right)=T_C=\frac{1}{\lambda}\sum\limits_{i=1}^{m+1}\frac{1}{k}$.

Выводы

Рассмотрены вероятностные модели среднего остаточного ресурса технических систем с резервированием. Получены выражения для среднего остаточного ресурса ТС с резервированием и экспоненциальным распределением наработки до отказа. Анализ этих систем показывает, что интенсивность отказов резервированной системы возрастает с течением времени, хотя интенсивность отказов нерезервированной системы от времени не зависит, из чего следует, что наступает такой момент времени, после которого использование резервированной системы себя не оправдывает. Поэтому, резервирование выгодно применять для систем кратковременного использования, а для критически важных систем и систем длительного использования использовать другие методы повышения надёжности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Острейковский В. А. Теория надежности / В. А. Острейковский. – М. : Высш. Шк., 2003. – 483 с.

2. Сухорученков Б. И. Методы контроля безопасности / Б. И. Сухорученков – М : Вузовская книга, 2017. – 330 с.

3. Бигус Г. А. Основы диагностики технических устройств и сооружений / Г. А. Бигус, Ю. Ф. Даниев, Н. А. Быстрова, Д. И. Галкин. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 445с.

4. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.

5. Пошивалов В. П. Системный подход к обеспечению надежности сложных систем / В. П. Пошивалов, Ю. Ф. Даниев, Л. В. Резниченко. // Системні технології : Регіональний міжвуз. сб. наук. праць. – Дніпро : НМАУ, 2017. – Вип. 2 (109). – С. 27 – 34.

6. Даниев Ю. Ф. Прогнозирование ресурса технических систем на основе вероятностных подходов и механики разрушения / Ю. Ф. Даниев, В. П. Пошива лов. // Математические проблемы технической механіки – 2016 : Матеріали Міжнар. наук. конф. : (13–15 квітня 2016 р., Дніпродзержинськ – Дніпропетровськ). – Дніпродзержинськ, Дніпропетровськ: Днепродзерж. держ. техн. ун-т, Нац. металург. академія України, 2016. – С.46.

7. Переверзев Е.С. Обслуживание технических систем с заданным ресурсом / Е.С. Переверзев, Ю.Ф. Даниев //Сучасні технології в аерокосмічному комплексі. Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції присвяченої 40-річчю польоту людини в космос, 4-6 вересня 2001 року, – Житомир, 2001.-с. 67

 ISSN 1562-9945