

О.Г. Гоман, В.А. Катан, В.Ю. Клим

МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РАБОЧИХ ЭЛЕМЕНТОВ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ЖИДКОСТЬЮ

Аннотация. Предложена модель ударного взаимодействия плоского рабочего элемента гидродинамического аппарата со свободной поверхностью жидкости. Задача об ударном взаимодействии жидкости и наклонной пластинки сведена к краевой смешанной задаче для некоторой функции комплексной переменной, связанной с комплексным потенциалом течения. Задача об определении положения зоны отрыва течения при ударном взаимодействии наклонной пластинки и жидкости сведена к решению трансцендентного уравнения относительно координаты начальной точки отрыва с использованием формул Адамара – Манглера. В широком диапазоне углов наклона пластинки к свободной поверхности жидкости определены положения зон инерционного отрыва течения, а также гидродинамические распределенные и суммарные характеристики пластинки.

Ключевые слова: удар, отрыв течения, наклонная пластинка, формулы Адамара – Манглера.

Введение и постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов гидродинамики опирается на постановку и решение краевых задач теории аналитических функций. При этом главной проблемой исследователей является получение конечных решений в аналитическом виде. Исследование гидродинамического ударного взаимодействия остается актуальной задачей в связи с широкой применимостью ее результатов для улучшения эксплуатационных характеристик высокоскоростных гидродинамических аппаратов и их рулевых устройств.

Ранее в работе [1] получено аналитическое решение задачи об ударном взаимодействии жидкости и наклонной пластины, находящейся на ее свободной поверхности, в виде квадратур, а следующая работа содержит частный случай данной задачи для угла наклона пластинки в 45° , где аналитическое решение представлено через элементарные функции [2].

Пусть наклонная пластина ширины b расположена под углом $\alpha\pi$ на свободной поверхности несжимаемой идеальной жидкости, находящейся в покое и занимающей полупространство. Ось Oy декартовой системы координат, как и раньше, направим по нормали к невозмущенной свободной поверхности жидкости внутри последней, а ось Ox – вдоль свободной поверхности (рис. 1).

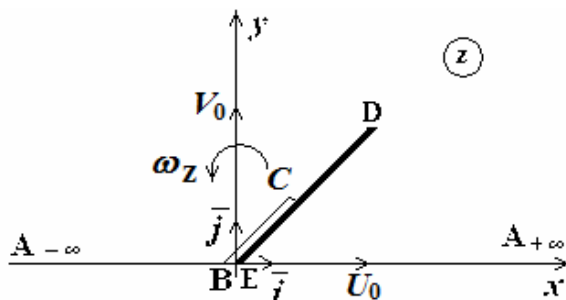


Рисунок 1 - Область решения задачи с учетом зоны отрыва течения

Предполагается, что в результате удара пластинка приобретает скорость

$$\vec{V} = (U_0 - \omega_z y) \vec{i} + (V_0 + \omega_z x) \vec{j},$$

где U_0 – поступательная скорость вдоль оси Ox , V_0 – поступательная скорость вдоль оси Oy , ω_z – угловая скорость. Вследствие наличия отрыва условие безотрывности обтекания распространяется только на участке контура CDE , причем положение точки C заранее неизвестно, и имеет вид

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{CDE} = \vec{V} \cdot \vec{n}.$$

Тогда для участков CD и DE запишем следующие выражения

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{CD} = \vec{V} \cdot \vec{n}_r = V_{n_r} = -U_0 \sin \alpha\pi + V_0 \cos \alpha\pi + \omega_z (x \cos \alpha\pi + y \sin \alpha\pi),$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{DE} = \vec{V} \cdot \vec{n}_f = V_{n_f} = U_0 \sin \alpha\pi - V_0 \cos \alpha\pi - \omega_z (x \cos \alpha\pi + y \sin \alpha\pi).$$

На свободной границе – оси Ox и участке отрыва BC – имеем условие равенства нулю импульсивного давления $\phi = 0$. Следовательно получили смешанную задачу для гармонической функции – потенциала скоростей ϕ .

Вид функции тока ψ на участке безотрывного обтекания EDC определяется соотношением

$$\psi = U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2} (x^2 + y^2).$$

Таким образом, в комплексной области $z = x + iy$ для функции

$$\chi = -iw = \psi - i\phi$$

получаем задачу Келдыша-Седова [3]:

на границе CDE задана ее действительная часть

$$\operatorname{Re} \chi|_{CDE} = U_0 y - V_0 x - \frac{\omega_z}{2} (x^2 + y^2),$$

а на границах $A_{-\infty}B$, BC , $EA_{+\infty}$ – мнимая часть в следующем виде

$$\operatorname{Im} \chi|_{A_{-\infty}B} = 0, \operatorname{Im} \chi|_{BC} = 0, \operatorname{Im} \chi|_{EA_{+\infty}} = 0.$$

Аналитическое исследование

Для произвольного угла наклона пластинки решение поставленной задачи $\chi(t)$ определяется формулой с неизвестным параметром q [1]

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \psi(t) - i\phi(t) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \sqrt{(t+q)(t-1)} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \left[b(U_0 \sin \alpha\pi - V_0 \cos \alpha\pi) J_1(t) - \frac{\omega_z b^2}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} J_2(t) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

В предположении о наличии только одной зоны отрыва, найдем ее положение (координату q) по принципу Огазо [4,5] с использованием сингулярных интегралов в смысле Адамара [6,7]. Для этого необходимо определить потенциал течения $\phi(t)$ на участке безотрывного обтекания $t = \xi + i0$, $\xi \in (-q, 1)$. Поскольку интегралы $J_1(t)$ и $J_2(t)$ являются интегралами типа Коши по отрезку действительной оси $\xi \in (-q, 1)$ с помощью формул Племеля-Сохоцкого при переходе из верхней полуплоскости в точку ξ_0 на отрезке $(-q, 1)$ получены выражения для $J_1^+(\xi_0)$ и $J_2^+(\xi_0)$, где $J_1(\xi_0)$ и $J_2(\xi_0)$ – особые интегралы в смысле главного значения Коши [8].

Выделяя действительные и мнимые части в решении (1), приходим к следующим выражениям для функции тока и потенциала течения на смоченной части пластинки:

$$\psi(\xi_0) = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\xi_0 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} (1-\xi_0)^\alpha \left[bU_n - \frac{\omega_z b^2}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\xi_0 + \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha} (1-\xi_0)^\alpha \right] \quad (4)$$

$$\phi(\xi_0) = \frac{1}{\pi} \sqrt{(\xi_0 + q)(1-\xi_0)} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left[bU_n J_1(\xi_0) - \frac{\omega_z b^2}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} J_2(\xi_0) \right], \quad (5)$$

где $U_n = U_0 \sin \alpha\pi - V_0 \cos \alpha\pi$ – проекция поступательной скорости на нормаль к передней стороне пластинки. Отметим, что выражение (4) является граничным условием на участке $(-q < \xi_0 < 1)$.

Согласно принципу Огазо приходим к следующему уравнению для определения параметра q [8]

$$bU_n J_1(-q) - \frac{\omega_z b^2}{2} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} J_2(-q) = 0. \quad (6)$$

Далее уравнение (6) запишем в виде зависимости кинематического параметра Λ_n от неизвестного q

$$\Lambda_n = \frac{\omega_z b}{U_n} = \frac{2J_1(-q)}{J_2(-q)} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}. \quad (8)$$

Для фиксированных значений угла наклона пластинки $\alpha\pi$ построены зависимости кинематического параметра $K = \frac{U_n}{\omega_z b}$ от положения

начальной точки отрыва q . Прежде всего, сравнение проведено для тех значений угла наклона пластинки, когда возможно получить точное аналитическое решение задачи: для случая горизонтального удара с вращением вертикальной пластины ($\alpha = 0,5$) и случая чисто вращательного удара пластины, наклоненной под углом $\pi/4$. Аналитические решения и решения, полученные через интегралы в смысле Адамара, сравнивались по зависимости кинематического параметра $K = \frac{U_0}{\omega_z b}$ от положения начальной точки отрыва q/b . Результаты расчетов для вертикальной пластинки представлены в виде графика за-

висимости кинематического параметра $\Lambda = \frac{\omega_z b}{V_0} = \frac{1}{K}$ от безразмерного

геометрического параметра q . При сравнении результатов с аналитическим решением получено полное совпадение [8].

Дальнейший качественный анализ формы кривой зависимости кинематического параметра Λ от положения точки отрыва при изменении угла наклона пластинки показывает ее неизменяемость по сравнению с задачей удара с вращением вертикальной пластинки. К тому же при значениях кинематического параметра, меньших минимума функции, реализуется режим с одной зоной отрыва. Значение минимума функции с уменьшением угла наклона пластинки незначительно уменьшается, что указывает на сужение множества значений кинематического параметра Λ отрыва, при которых реализуется течение с одной зоной. Для некоторых значений угла α построены графики, указаны особенности зависимости кинематического параметра $\Lambda = \Lambda(q)$, в случае $K = 0$ и $\alpha \rightarrow 0$ [9].

Для определения импульсивного давления на смоченной поверхности твердого тела используем формулу

$$p_t = -\rho\phi(\xi_0), \quad \xi_0 \in [-q, 1], \quad (9)$$

где ρ – плотность жидкости, а потенциал определяется как мнимая часть функции (1) и тогда в безразмерном виде импульсивное давление записывается в форме следующего выражения

$$\bar{p}_t = \frac{p_t}{\rho U_n b} = -\frac{1}{\pi} \sqrt{(\xi_0 + q)(1 - \xi_0)} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} \left[J_1(\xi_0) - \frac{\Lambda_n}{2} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} J_2(\xi_0) \right], \quad \xi_0 \in [-q, 1] \quad (10)$$

Построены графики зависимости импульсивного давления от безразмерной координаты $\bar{\xi} = \xi/b$ для фиксированного значения кинематического параметра. Выделены особенности поведения максимального импульсивного давления в зависимости от угла наклона пластинки и от кинематического параметра: при фиксированном значении угла наклона пластинки максимальное импульсивное давление возрастает от своего значения при предельном значении кинематического параметра до своего значения при стремлении кинематического параметра к отрицательной бесконечности; при фиксированном значении кинематического параметра максимальное значение импульсивного давления монотонно убывает при уменьшении угла наклона пластинки от 900 до 10 [10].

Далее проведены расчеты коэффициентов присоединенных масс $\bar{\lambda}_{11}$ для углов наклона пластинки $\alpha^0 = 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 10^\circ$ и 10 при предельном значении кинематического параметра $\Lambda_{пред}$ и при значениях $\Lambda = 0,5; 0; -1; -2; -100$. График одной из таких зависимостей представлен на рис.2.

Определение поля скоростей внутри области, занятой жидкостью, проводим согласно формуле:

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y = i \frac{d\chi}{dt} \cdot \frac{dt}{dz},$$

где $\chi = -iw$ – характеристическая функция течения и $\frac{dz}{dt} = F'(t)$ – производная от функции конформного преобразования.

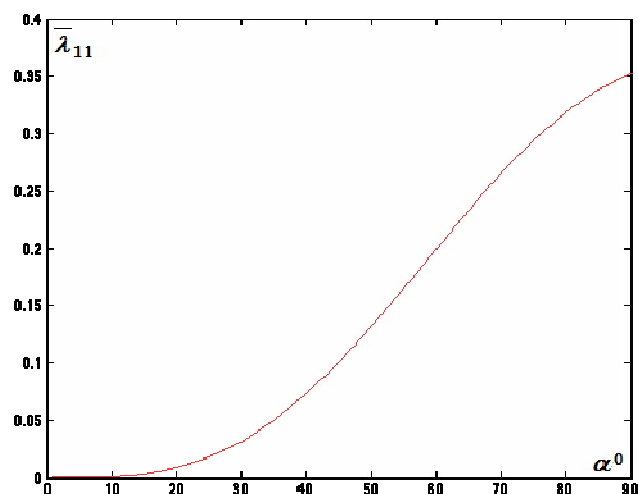


Рисунок 2 - Зависимость коэффициента присоединенной массы $\bar{\lambda}_{11}$ от угла наклона пластинки α^0 для $\Lambda = 0$

Если нормальная компонента скорости v_n на участке безотрывного обтекания определялась из граничного условия, то для получения касательной компоненты v_s используется процедура дифференцирования потенциала ϕ вдоль контура $v_s = \frac{\partial \phi}{\partial s}$, где координата s – длина дуги вдоль контура пластинки, при ее отсчете от точки Е.

Поскольку потенциал ϕ в процессе решения определялся первоначально в плоскости t как функция переменной ξ_0 , то справедливо следующее выражение:

$$v_s = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_0} \frac{\partial \xi_0}{\partial s}. \quad (11)$$

Нормальную компоненту скорости на указанных участках находим по формуле:

$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s}. \quad (12)$$

Построены графики зависимости безразмерной касательной скорости $\bar{v}_s$ на передней стороне пластины и безразмерной нормальной скорости $\bar{v}_n$ на свободной поверхности справа от пластины от безразмерной координаты $\bar{\xi} = \xi/b$ при определенных значениях угла наклона пластинки α и кинематического параметра Λ (рис.3, 4).

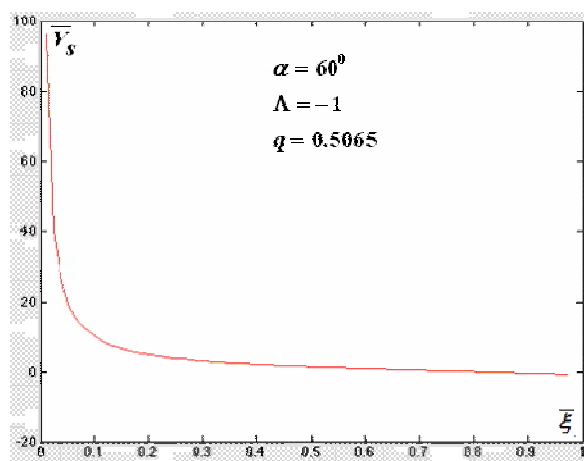


Рисунок 3 - Распределение безразмерной касательной скорости на передней стороне пластины по координате $\bar{\xi} = \xi/b$ для $\alpha = 60^\circ$ при $\Lambda = -1$

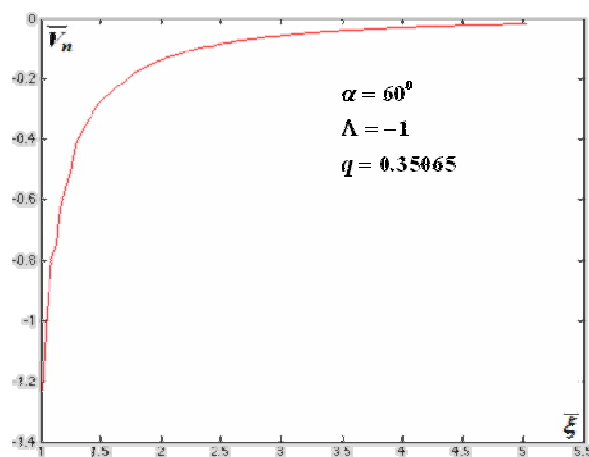


Рисунок 4 - Распределение безразмерной нормальной скорости на свободной поверхности справа от пластины в зависимости от координаты $\bar{\xi} = \xi/b$ для $\alpha = 60^\circ$ при $\Lambda = -1$

Выводы

Хорошее совпадение данных аналитического решения и решения, полученного через интегралы в смысле Адамара, доказывает возможность применения предложенного нового подхода в определении характеристик отрывных зон при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости. Полученные результаты математического моделирования рассмотренной сложной системы могут использоваться в инженерной практике для уточнения постановок задач, а также для корректной постановки и развития вычислительного эксперимента на стадии проектирования и расчета рабочих режимов реальных конструктивных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Катан, В.А. Ударное взаимодействие с несжимаемой жидкостью наклонной пластины, плавающей на ее поверхности, при ударе с вращением в условиях отрыва [Текст]/ В. А. Катан // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2013. – № 5 (21). – Вип. 17, Т.1. – С. 134 – 146.
2. Катан В.А. Моделирование ударного взаимодействия тела и жидкости со свободной поверхностью [Текст]/ В.А. Катан // Восточно-европейский журнал передовых технологий, Прикладная механика, 2014. 2/7(68). – С. 32 – 36.
3. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст]/ Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707с.
4. Норкин М.В. Смешанные задачи гидродинамического удара [Текст]/ М.В. Норкин. – Ростов-на-Дону, 2007. – 136 с.
5. Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств [Текст]/ Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М., 1979. – 576 с.
6. Общая теория аэродинамики больших скоростей под редакцией [Текст]/ Под ред. У.Р. Сирса. – М.: Воениздат, 1962. – 300 с.
7. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа [Текст]/ Ж. Адамар. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
8. Гоман О.Г. К вопросу об определении положения зоны отрыва течения при ударном взаимодействии твердого тела и жидкости [Текст]/ О.Г. Гоман, В.А. Катан // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2015. – № 5(23). – Вип. 19. – С. 15 – 20.
9. Гоман О.Г. Ударное взаимодействие жидкости и наклонной пластинки, находящейся на ее свободной поверхности. Определение положения зоны отрыва [Текст]/ О.Г. Гоман, В.А. Катан // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2016. – № 5(24). – Вип. 20. – С. 28 – 38.
10. Гоман О.Г. Ударное взаимодействие жидкости и наклонной пластинки, находящейся на ее свободной поверхности. Определение распределенных силовых характеристик/ О.Г. Гоман, В.А. Катан // Вісн. ДНУ. Сер.: Механіка. – 2017. – №5(25). – Вип.21. – С. 58 – 65.