«Системні технології» 3 (164) 2026 «System technologies»
DOI 10.34185/1562-9945-3-164-2026-16
УДК 519.8

А.В. Лозовський, В.О. Шведов

МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН ІЗ РОЗМІЩЕННЯМ ЦЕНТРІВ ПІДМНОЖИН ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Анотація. У статті розглядаються методи та алгоритми розв'язання динамічних задач оптимального розбиття множин із розміщенням центрів підмножин та інтегральними обмеженнями. Досліджуваний клас задач виникає у багатьох прикладних контекстах, зокрема у логістиці, задачах просторового розподілу ресурсів і територіального зонування, де параметри моделі змінюються з часом.
Запропонований підхід базується на математичній формалізації задач оптимального розбиття множини з урахуванням часової динаміки щільності та передбачає одночасну оптимізацію структури розбиття і положення центрів підмножин. Інтегральні обмеження інтерпретуються, як обмеження на узагальнені характеристики підмножин і суттєво впливають на властивості оптимальних розв'язків.
Основну увагу приділено теоретичному обґрунтуванню моделі, аналізу властивостей задачі та побудові математичного алгоритму її розв'язання. Отримані результати демонструють узгодженість запропонованого підходу з класичними моделями оптимізації та підтверджують його придатність для опису динамічних процесів у задачах оптимального розбиття множин.
Ключові слова: оптимальне розбиття, розсміщення цетрів, інтегральні обмеження, логістичні задачі, динамічні моделі, просторове зонування, розподіл ресурсів, чисельне моделювання.

Постановка проблеми. Задача оптимального розбиття множини з розміщенням центрів підмножин є важливою проблемою математичного програмування, що має широкий спектр практичних застосувань – від логістики та управління ресурсами до просторового планування. Класичні постановки задач оптимального розбиття, як правило, передбачають фіксоване розташування центрів підмножин або кластерів, що істотно спрощує пошук оптимального розбиття. Проте в реальних системах положення центрів можуть змінюватися під впливом зовнішніх факторів або внаслідок необхідності адаптації до нових умов, що зумовлює потребу у формулюванні та розв'язанні динамічних задач оптимального розбиття множини з одночасним визначенням координат центрів.

Подібні динамічні задачі є значно складнішими, оскільки вимагають одночасної оптимізації розбиття елементів множини та визначення координат центрів підмножин, які можуть змінюватися з часом. Такий підхід забезпечує більшу гнучкість моделювання та дає змогу враховувати адаптивні процеси в системах, що перебувають у стані

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

змін. Для розв'язання задач цього класу зазвичай застосовуються методи теорії оптимального розбиття множин, диференціальних рівнянь та чисельні методи.

Додатково слід зазначити, що у межах запропонованого підходу динамічна щільність відіграє визначальну роль у формуванні просторової структури розбиття, оскільки саме її еволюція зумовлює перерозподіл навантажень між підмножинами. Зміна щільності в часі безпосередньо впливає на доцільність розміщення центрів підмножин, змушуючи їх адаптивно зміщуватися у напрямках підвищеної інтенсивності або попиту. Таким чином, координати центрів розглядаються не як фіксовані параметри, а як динамічні змінні, узгоджені з поточним станом щільності, що дозволяє забезпечити більш адекватне відображення реальних просторово-часових процесів та підвищити ефективність отриманих розв'язків.

Під динамічною неперервною лінійною однопродуктовою задачею оптимального розбиття множини Ω з *n*-вимірного евклідова простору E_n на її неперетинні підмножини $\Omega_1,...,\Omega_N$ (серед яких можуть бути й порожні) за наявності обмежень у формі рівностей та нерівностей із відшуканням координат центрів $\tau_1,...,\tau_N$ цих підмножин відповідно розумітимемо наступну задачу.

Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом множина у n-вимірному евклідовому просторі E_n.

Потрібно розбити її на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1,...,\Omega_N$ (серед яких можуть бути й порожні) так, щоб

$$mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1,..., N,$$

де $mes(\cdot)$ – міра Лебега,

Позначимо клас усіх можливих розбиттів множини Ω на неперетинні підмножини $\Omega_1,...,\Omega_N$, через Σ_Ω^N, тобто

$$\Sigma_\Omega^N = \{(\Omega_1,...,\Omega_N) : \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, i \neq j, i, j = 1,..., N\}.$$

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega,$$

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження неперервних задач оптимального розбиття множин у науковій літературі з'явилися в другій половині XX століття [1-4]. Вони виникли як нескінченновимірні узагальнення задач оптимізації виробничо-транспортного планування. Автори систематизували існуючі підходи до постановки та розв'язання задач оптимального розбиття множин, описали класи алгоритмів, їхні властивості та типові області застосування таких задач. Більш детальний огляд наукових публікацій з цієї теми наведено в роботах [5] і [8].

Теоретичні основи таких задач закладені в працях О. М. Кісельової, зокрема – у монографії [7], де було систематизовано різні підходи до побудови неперервних моде-

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

лей оптимального розбиття множин, детально розглянуто їхні математичні властивості та наведено приклади практичних застосувань у галузях транспорту, економіки й управління ресурсами. У роботі також підкреслено важливість дослідження задач із фіксованими та змінними центрами, оскільки такі моделі дозволяють описувати широкий спектр реальних процесів, пов'язаних з оптимальним розподілом і плануванням.

Фундаментальні праці [6] та [8] окреслюють теоретичні основи задач оптимального розбиття з одночасним визначенням координат центрів підмножин. Незважаючи на узагальнений характер цих досліджень, у них наведено формальні специфікації, корисні для програмної розробки, зокрема щодо структури вхідних даних, представлення розбиття та візуалізації результатів.

Подальший розвиток основної концепції відбувся в наступних публікаціях [9-11], де було запропоновано динамічні модифікації задачі, що враховують зміну параметрів у часі. Це дало можливість застосовувати підхід оптимального розбиття до задач, у яких вхідні дані змінюються під впливом зовнішніх факторів, що особливо актуально для сучасних систем моніторингу, логістики та керування потоками.

Кілька міжнародних досліджень [12–16] зосереджені на задачах оптимізації форми та розбиття в механіці, спектральному аналізі та варіаційному численні. У працях, зокрема [12] і [14], доведено існування розв'язків для окремих класів задач оптимального розбиття, тоді як у роботі [13] досліджується мінімізація власних значень на розбитих областях. Незважаючи на іншу прикладну сферу, ці підходи можуть бути адаптовані до задач із фіксованими центрами шляхом введення геометричних обмежень.

Мета дослідження. Метою даної роботи є розробка методів і алгоритмів розв'язання динамічних задач оптимального розбиття множин із розміщенням центрів підмножин та інтегральними обмеженнями. Дослідження спрямоване на побудову математичної формалізації задач, у яких структура розбиття та положення центрів визначаються з урахуванням часової динаміки параметрів моделі.

Особливу увагу приділено аналізу властивостей сформульованих задач, врахуванню інтегральних обмежень та розробці алгоритму, що забезпечує узгоджене визначення оптимального розбиття і оптимального розміщення центрів у динамічному середовищі.

Викладення основного матеріалу дослідження. Знайти розбиття $\varpi = \{\Omega_1, \dots, \Omega_N\} \in \Sigma_\Omega^N$ множини $\Omega \subset E_n$, векторну функцію $\rho(x,t)$, визначену майже всюди (м.в.) для $x \in \Omega$ та всіх $t \in [0,T]$, і координати центрів $\tau = \{\tau_1, ..., \tau_N\} \subset \Omega^N$, які забезпечують

$$\inf_{\varpi \in \sum_{\Omega}^{N}; \{\tau_{1,\dots,}\tau_N\} \subset \Omega^N; \rho(x,t) \in L_2^N(\Omega \times \Omega \times [0,T])} F(\varpi, \tau, \rho(x,t)),$$

де

$$F(\varpi, \tau, \rho(x,t)) = \int_0^T \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} \left(c_i(x, \tau_i) + a_i\right) \rho(x,t)\, dx dt$$

за умов

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = f\left(\rho(x,t),x,t\right), 0 \le t \le T$$

$$\rho(x,t_0) = \rho_0(x)$$

та з інтегральними обмеженнями

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x,t)dxdt \le b_i; \quad i = \overline{1,N},$$

або

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x,t)dxdt = b_i; \quad i = \overline{1,N},$$

Також можлива комбінація з обмеженнями рівності і нерівності у постановці задачі, тоді обмеження можуть бути записані наступним чином

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x,t)dxdt = b_i, \quad i = 1,\dots,p,$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x,t)dxdt \le b_i, \quad i = p+1,..,N.$$

Загалом, інтегральні обмеження в задачах оптимального розбиття множин, а також у транспортних і логістичних моделях, відображають глобальні характеристики системи – сумарні запаси ресурсів або загальну пропускну спроможність. Саме тому вони відіграють принципову роль у прикладних постановках задач. Такі обмеження дають змогу адекватно моделювати, зокрема, загальний обсяг пального чи сировини, сукупну виробничу потужність підприємства, максимальну кількість місць у пунктах прийому (наприклад, у системах надання допомоги), а також сумарну пропускну здатність транспортних ділянок і сервісних елементів інфраструктури. На відміну від локальних обмежень, інтегральні умови поєднують рішення на різних ділянках простору та на різних часових інтервалах, що призводить до ускладнення математичної структури задачі та зумовлює необхідність застосування спеціалізованих аналітичних і чисельних методів її розв'язання.

Формула, яка задає часову динаміку щільності у вигляді відповідного диференціального рівняння, природним чином приводить до постановки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. У такій постановці початкове значення щільності інтерпретується як початкова умова, тоді як сама система описує еволюцію щільності в часі. Це дозволяє застосовувати стандартний апарат теорії задачі Коші: досліджувати існування та єдиність розв'язку, встановлювати умови стійкості та неперервної залежності від початкових даних, а також обирати відповідні чисельні методи для інтегрування системи (методи Рунге-Кутта, Ейлера). Подібна формалізація забезпечує матема-

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

тичну коректність моделі та дозволяє узгоджено описувати зміну щільності в часі з урахуванням вибраного механізму динаміки.

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1,...,\Omega_N$ з $\Omega \subset E_n$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на його неперетинні підмножини $\Omega_1,...,\Omega_N$, якщо

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega,\ mes\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right) = 0,\ i \neq j, i, j = 1,...,N,$$

де $mes(\cdot)$ означає міру Лебега.

м.в. для $x \in \Omega$, при фіксованих $\tau_i = (\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}) \in \Omega_i,\ i = 1,...,N$.

Тут $\rho\left(x,t\right)$ – шукана дійсна функція, визначена на $\Omega \times \left[0,T\right]$, яка неперервно диференційована за аргументом t на відрізку $\left[0,T\right]$ м.в. для $x = \left(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\right) \in \Omega$, обмежена та вимірна за аргументом x на Ω для всіх $t \in \left[0,T\right]$; $\rho_0\left(x\right)$ – задана невід'ємна функція, обмежена та вимірна за аргументом $x \in \Omega$, також може бути задана у вигляді числа; $f\left(\rho\left(x,t\right),x,t\right)$ – задана дійсна функція, неперервна та ліпшицева в межах свого визначення; $c_i\left(x,\tau_i\right)$ – визначені на $\Omega \times \Omega$ задані дійсні обмежені функції, вимірні за аргументом $x = \left(x^{(1)},...,x^{(n)}\right)$ при будь-якому фіксованому $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right),\ i = 1,...,N$; $\tau_1,...,\tau_N$ – сукупність деяких еталонних точок для підмножин $\Omega_1,...,\Omega_N$ відповідно, званих центрами цих підмножин ($\tau_i \in \Omega_i$, $i = 1,2,...,N$), причому координати центрів $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right),\ i = 1,2,...,N$, не відомі і вимагають свого визначення; $T > 0$ та $t_0 \in \left[0,T\right]$ задані числа; $a_1,...a_N$, $b_1,...,b_N$ – задані невід'ємні числа, причому

$$S = \int_0^T \int_\Omega \rho(x,t)dxdt \le \sum_{i=1}^{N} b_i, \quad 0 \le b_i \le S, \quad i = 1,...,N.$$

Тут і надалі інтеграли розуміються у сенсі Лебега. Вважатимемо, що міра множини межових точок Ω_i, $i = 1,...,N$, дорівнює нулю.

У наведеній математичній постановці динамічної задачі оптимального розбиття незалежна змінна $t \in \left[0,T\right]$ може відігравати роль часової змінної, а $T > 0$ та $t_0 \in \left[0,T\right]$ – задані кінцевий та початковий моменти часу в досліджуваному динамічному процесі.

Метод розв'язання задачі. Введемо характеристичну функцію підмножини Ω_i:

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1, & x\in\Omega_i,\\ 0, & x\in\Omega\setminus\Omega_i,\ i=1,...,\ N,\end{cases}$$

та розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot),\tau,\rho(x,t))=\int_0^T\sum_{i=1}^N\int_\Omega\left(c_i\left(x,\tau_i\right)+a_i\right)\rho\left(x,t\right)\lambda_i\left(x\right)dxdt\,,$$

де вектор-функція $\lambda(x)$ має вигляд $\lambda(x)=(\lambda_1(x),...,\lambda_i(x),...,\lambda_N(x))$, $x\in\Omega$, $\tau=(\tau_1,...,\tau_N)\in\Omega^N$.

Очевидна така рівність,

$$I(\lambda(\cdot),\tau,\rho(x,t))=F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1,...,\tau_N\}).$$

Перепишемо задачу **A** у термінах заданих характеристичних функцій та підмножин Ω_i, $i=1,...,N$, у такому вигляді.

Задача B. Знайти пару елементів $(\lambda_*(\cdot),\tau_*)$, де $\lambda_*(x)\in\Gamma_1$, $\tau_*\in\Omega^N$, таку, що

$$I(\lambda_*(\cdot),\tau_*)=\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_1\times\Omega^N}I(\lambda(\cdot),\tau),$$

$$\Gamma_1=\left\{\lambda\left(x\right)=\left(\lambda_1\left(x\right),...,\lambda_N\left(x\right)\right)\in\Gamma_1'\ \text{ м.в. для } x\in\Omega;\right.$$

за умов

$$\int_0^T\int_{\Omega_i}\rho(x,t)dxdt=b_i,\quad i=1,...,p,$$

$$\left.\int_0^T\int_{\Omega_i}\rho(x,t)dxdt\le b_i,\quad i=p+1,..,N\right\},$$

де

$$\Gamma_1'=\{\lambda(x)=(\lambda_1(x),...,\lambda_N(x)):$$
$$\lambda_i(x)=0\vee1\text{ м.в. для } x\in\Omega,\quad i=1,...,N,$$
$$\sum_{i=1}^N\lambda_i(x)=1\ \text{ м.в. для } x\in\Omega\}.$$

$$\tau=\left(\tau_1,...,\tau_N\right)\in\underbrace{\Omega\times...\times\Omega}_{N}=\Omega^N$$

Від нескінченновимірної задачі **B** з булевими значеннями змінних $\lambda_i(\cdot)$, $i=1,...,N$, перейдемо до відповідної задачі зі значеннями функцій $\lambda_i(\cdot)$ з відрізку $[0,1]$.

Задача B.1. Знайти пару елементів $(\lambda_*(\cdot),\tau_*)$, де $\lambda_*(x)\in\Gamma_2$, $\tau_*\in\Omega^N$, таку, що

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

$$I(\lambda_*(\cdot),\tau_*) \quad \min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma_2\times\Omega^N} I(\lambda(\cdot),\tau),$$

$$\Gamma_2 = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x),...,\lambda_N(x)) : \lambda(x)\in\Gamma \text{ м.в. для } x\in\Omega;$$

за умов

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x,t)dxdt = b_i, \quad i = 1,..., p,$$

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x,t)dxdt \le b_i, \quad i = p+1,.., N\},$$

де

$$\Gamma = \{\lambda(x) : 0 \le \lambda_i(x) \le 1 \text{ для } x\in\Omega, i = 1,..., N, \ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1 \text{ м.в. для } x\in\Omega\}$$

$$\tau = \left(\tau_1,...,\tau_N\right) \in \underbrace{\Omega\times...\times\Omega}_{N} = \Omega^N$$

Вочевидь,

$$I\left(\lambda_*(\cdot),\tau_*\right) = \min_{\tau\in\Omega^N}[\min_{\lambda(\cdot)\in\Gamma_2} I\left(\lambda(\cdot),\tau\right)].$$

Задача **В.1** має розв’язок, та може бути розв’язана за допомогою функціонала Лагранжа, сформованого для задачі **В.1** таким чином:

$$L\left(\left\{\lambda(\cdot),\tau\right\},\Psi\right) = I\left(\lambda(\cdot),\tau\right) + \sum_{i=1}^{N}\psi_i\left(\int_0^T\int_{\Omega} \rho(x,t)\lambda_i dxdt - b_i\right)$$

де $\Psi = \left(\psi_1,...,\psi_i,...,\psi_N\right)$ – N-вимірний вектор дійсних чисел, які можуть бути, як більше нуля, так і менше; $\lambda\left(x\right) = \left(\lambda_1\left(x\right),...,\lambda_N\left(x\right)\right) \in \Gamma$ м.в. для $x\in\Omega$; $\tau = \left(\tau_1,...,\tau_i,...,\tau_N\right) \in \Omega^N$.

Висновки. У статті розглянуто методи та алгоритми розв’язання динамічних задач оптимального розбиття множин із розміщенням центрів підмножин та інтегральними обмеженнями. Досліджуваний клас задач виникає у багатьох прикладних контекстах, зокрема у логістиці, задачах просторового розподілу ресурсів і територіального зонування, де параметри моделі змінюються з часом.

Запропоновано підхід, який базується на математичній формалізації задач оптимального розбиття множини з урахуванням часової динаміки щільності та передбачає одночасну оптимізацію структури розбиття і положення центрів підмножин. Інтегральні обмеження інтерпретуються, як обмеження на узагальнені характеристики підмножин і суттєво впливають на властивості оптимальних розв’язків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бейко І. В., Кісельова О. М. Умови оптимальності межі розподілу зон територіального обслуговування. Застосування мат. методів до розв'язання виробничо-економічних задач: зб. науков. праць. Дніпр. держ. ун-т. Д., 1973. С. 53–55.
2. Кісельова О. М. Дослідження одного класу задач оптимального розбиття: автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.01. Київ. держ. ун-т. К., 1975. 15 с.
3. Кісельова О. М., Бейко І. В. Властивості оптимальних рішень для однієї задачі зрошення. Краєві задачі фільтрації: зб. науков. праць. ІМ АН УРСР. К., 1973. С. 255–261.
4. Balas E., Padberg M. W. Set Partitioning: A Survey. Comb. Optimization, Lect. Summer School Comb. Optimization. Urbino, 1977. Chichester, 1979. P. 151–210.
5. Кісельова О. М., Коряшкіна Л. С. Моделі та методи розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин: монографія. Київ: Наук. думка, 2013. 606 с.
6. Kiseleva O. M., Shor N. Z. Solution of the Problem of Optimal Partitioning Including Allocation of the Centers of Gravity of the Subsets. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1989, vol. 29, no. 3, pp. 47–56. DOI: 10.1016/0041-5553(89)90146-8.
7. Кісельова О. М., Шор Н. З. Неперервні задачі оптимального розбиття множин: теорія, алгоритми, застосування: монографія. Київ: Наук. думка, 2005. 564 с.
8. Кісельова О. М. Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування: монографія. Дніпро: Ліра, 2018. 532 с.
9. Kiseleva O. M., Koriashkina L. S., Shevchenko T. A. Solving the Dynamic Optimal Set Partitioning Problem with Arrangement of Centers of Subsets. Cybernetics and Systems Analysis, 2014, vol. 50, no. 6, pp. 842–853. DOI: 10.1007/s10559-014-9675-8.
10. Kiseleva E., Prytomanova O., Kuzenkov O. On the Dynamic Problem of Optimal Set Partitioning with Fixed Centers under Uncertainty. Problems of Control and Informatics, 2025, vol. 70, no. 4, pp. 6–23. DOI: 10.34229/1028-0979-2025-4-1.
11. Кісельова О. М., Кузенков О. О. Про динамічну задачу оптимального розбиття множин з відшуканням координат центрів підмножин. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління, 2025, вип. 65. С. 33–45. DOI: 10.26565/2304-6201-2025-65-03.
12. Buttazzo G., Dal Maso G. An Existence Result for a Class of Shape Optimization Problems. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1993, vol. 122, no. 2, pp. 183–195. DOI: 10.1007/BF00378167.
13. Caffarelli L. A., Lin F. H. An Optimal Partition Problem for Eigenvalues. Journal of Scientific Computing, 2007, vol. 31, no. 1–2, pp. 5–18. DOI: 10.1007/s10915-006-9114-8.
14. Conti M., Terracini S., Verzini G. On a Class of Optimal Partition Problems Related to the Fučík Spectrum and to the Monotonicity Formulae. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2005, vol. 22, pp. 45–72. DOI: 10.1007/s00526-004-0266-9.
15. Burger M., Hackl B., Ring W. Incorporating Topological Derivatives into Level Set Methods. Journal of Computational Physics, 2004, vol. 194, no. 1, pp. 334–362.

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

16. Amstutz S., Novotny A. A. Topological Optimization of Structures. Heidelberg: Springer, 2010.

REFERENCES

1. Beiko I. V., Kiseleva O. M. Conditions of Optimality for the Boundary of the Territorial Service Zone Distribution. Application of Mathematical Methods to Solving Production and Economic Tasks: Collection of Scientific Papers. Dnipropetrovsk State University. Dnipropetrovsk, 1973. P. 53–55.
2. Kiseleva O. M. Study of a Class of Optimal Partitioning Problems: Abstract of the Dissertation for the Degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences: Specialty 01.05.01. Kyiv State University. Kyiv, 1975. 15 p.
3. Kiseleva O. M., Beiko I. V. Properties of Optimal Solutions for an Irrigation Problem. Boundary Filtration Problems: Collection of Scientific Papers. Institute of Mathematics, Ukrainian SSR Academy of Sciences. Kyiv, 1973. P. 255–261.
4. Balas E., Padberg M. W. Set Partitioning: A Survey. Combinatorial Optimization: Lectures of the Summer School on Combinatorial Optimization. Urbino, 1977. Chichester et al., 1979. P. 151–210.
5. Kiseleva O. M., Koryashkina L. S. Models and Methods for Solving Continuous Optimal Partitioning Problems: Monograph. Kyiv: Naukova Dumka, 2013. 606 p.
6. Kiseleva O. M., Shor N. Z. Solution of the Problem of Optimal Partitioning Including Allocation of the Centers of Gravity of the Subsets. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1989, vol. 29, no. 3, pp. 47–56. DOI: 10.1016/0041-5553(89)90146-8.
7. Kiseleva O. M., Shor N. Z. Continuous Optimal Set Partitioning Problems: Theory, Algorithms, Applications: Monograph. Kyiv: Naukova Dumka, 2005. 564 p.
8. Kiseleva O. M. The Formation and Development of the Theory of Optimal Set Partitioning. Theoretical and Practical Applications: Monograph. Dnipro: Lira, 2018. 532 p.
9. Kiseleva O. M., Koryashkina L. S., Shevchenko T. A. Solving the Dynamic Optimal Set Partitioning Problem with Arrangement of Centers of Subsets. Cybernetics and Systems Analysis, 2014, vol. 50, no. 6, pp. 842–853. DOI: 10.1007/s10559-014-9675-8.
10. Kiseleva E., Prytomanova O., Kuzenkov O. On the Dynamic Problem of Optimal Set Partitioning with Fixed Centers under Uncertainty. Problems of Control and Informatics, 2025, vol. 70, no. 4, pp. 6–23. DOI: 10.34229/1028-0979-2025-4-1.
11. Kiseleva O. M., Kuzenkov O. O. On the Dynamic Problem of Optimal Set Partitioning with Finding the Coordinates of the Centers of Subsets. Bulletin of Kharkiv National University Named after V. N. Karazin. Series: Mathematical Modeling. Information Technologies. Automated Control Systems, 2025, issue 65, pp. 33–45. DOI:10.26565/2304-6201-2025-65-03.
12. Buttazzo G., Dal Maso G. An Existence Result for a Class of Shape Optimization Problems. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1993, vol. 122, no. 2, pp. 183–195. DOI: 10.1007/BF00378167.
13. Caffarelli L. A., Lin F. H. An Optimal Partition Problem for Eigenvalues. Journal of Scientific Computing, 2007, vol. 31, no. 1–2, pp. 5–18. DOI: 10.1007/s10915-006-9114-8.

14. Conti M., Terracini S., Verzini G. On a Class of Optimal Partition Problems Related to the Fučík Spectrum and to the Monotonicity Formulae. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2005, vol. 22, pp. 45–72. DOI: 10.1007/s00526-004-0266-9.
15. Burger M., Hackl B., Ring W. Incorporating Topological Derivatives into Level Set Methods. Journal of Computational Physics, 2004, vol. 194, no. 1, pp. 334–362.
16. Amstutz S., Novotny A. A. Topological Optimization of Structures. Heidelberg: Springer, 2010.
Received 10.04.2026.
Accepted 12.04.2026.
Published 30.04.2026

Methods and algorithms for solving dynamic optimal set partitioning problems with subset center placement and integral constraints

The paper presents an approach to solving solving dynamic optimal set partitioning problems with subset center placement and integral constraints. The considered class of problems arises in numerous applied contexts, including logistics, spatial resource allocation, and territorial zoning, where model parameters vary over time.

The proposed approach is based on a mathematical formalization of optimal set partitioning problems that accounts for the temporal dynamics of density and provides for the simultaneous optimization of the partition structure and the locations of subset centers. Integral constraints are interpreted as restrictions on generalized characteristics of subsets and significantly influence the properties of optimal solutions.

The primary focus is placed on the theoretical substantiation of the model, the analysis of problem properties, and the construction of a mathematical solution algorithm. The obtained results demonstrate the consistency of the proposed approach with classical optimization models and confirm its suitability for describing dynamic processes in optimal set partitioning problems.

Keywords: *optimal partitioning, center placement, integral constraints, logistics problems, dynamic models, spatial zoning, resource allocation, numerical modeling.*

Лозовський Артур Валентинович – аспірант кафедри прикладної математики, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Україна, Дніпро.
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-7013-7430
Шведов Владислав Олександрович – аспірант кафедри прикладної математики, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Україна, Дніпро.
ORCID: https://orcid.org/0009-0001-7399-1365

Lozovskyi Artur – PhD student, Department of Applied Mathematics, Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine, Dnipro.
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-7013-7430
Shvedov Vladyslav – PhD student, Department of Applied Mathematics, Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine, Dnipro.
ORCID: https://orcid.org/0009-0001-7399-1365

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)