

М.М. Ленський, Г.Й. Михальчук

РЕАЛІЗАЦІЯ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ АЛГОРИТМУ BRANCH-CUT-AND-PRICE ДЛЯ ЗАДАЧІ МАРШРУТИЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ З ОБМЕЖЕННЯМИ НА ВАНТАЖОПІДЙОМНІСТЬ

Анотація. Ефективність транспортних перевезень істотно залежить від якості маршрутного планування. Тому для задач маршрутизації поряд із швидкими наближеними підходами зберігають значення точні методи, які дають змогу не лише побудувати план перевезень, а й підтвердити його оптимальність. У статті розглянуто реалізацію алгоритму *branch-cut-and-price* для точного розв'язання задачі маршрутизації транспортних засобів з обмеженнями на вантажопідйомність (*Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP*). Метою дослідження є опис реалізації, пояснення основних принципів її побудови та перевірка працездатності на стандартних тестових екземплярах. Метод поєднує модель розбиття множини (*set partitioning formulation*), генерацію стовпців, стартову евристику на основі алгоритму Кларка-Райта, округлені ємнісні нерівності (*Rounded Capacity Inequalities*) та точне розв'язання підзадачі маршруту. Щоб скоротити час обчислень, у межах генерації стовпців спочатку застосовується швидший евристичний пошук нових маршрутів, а якщо нових маршрутів не знайдено, виконується точний сертифікуючий етап. У результаті обчислювального експерименту на одинадцяти стандартних екземплярах розмірності від 16 до 60 вершин включно з депо в усіх випадках відтворено відомі оптимуми. Отримані результати підтверджують коректність реалізації та практичну придатність обраної організації обчислень у дослідженому діапазоні розмірностей.

Ключові слова: CVRP, маршрутизація транспортних засобів, *branch-cut-and-price*, генерація стовпців, розбиття множини, комбінаторна оптимізація, цілочисельне програмування, лінійна релаксація, точні та евристичні методи, логістика.

Вступ. Задачі маршрутизації транспортних засобів займають важливе місце в сучасних інформаційних технологіях підтримки логістичних рішень. Вони безпосередньо пов'язані з плануванням перевезень, розподілом навантаження між автомобілями та зниженням експлуатаційних витрат. Задача маршрутизації транспортних засобів з обмеженнями на вантажопідйомність належить до базових моделей транспортної логістики. Вона поєднує відносно просту прикладну інтерпретацію з високою комбінаторною складністю. Для таких задач на практиці застосовують як евристичні, так і точні методи. Перші дозволяють швидко будувати якісні плани перевезень, тоді як другі потрібні в ситуаціях, коли важливо не лише отримати добрий розв'язок, а й мати обґрунтоване

підтвердження його оптимальності. У цьому контексті схеми branch-cut-and-price становлять особливий інтерес, оскільки поєднують сильну математичну постановку, генерацію лише потрібних маршрутів і можливість завершити пошук із сертифікованим висновком про оптимальність.

Постановка проблеми. У стандартній постановці задачі маршрутизації транспортних засобів з обмеженнями на вантажопідйомність розглядається повний зважений граф $G = (V, E)$, де $V = \{0\} \cup C$. Тут вершина 0 відповідає депо, C є множиною клієнтів, q_i – попит клієнта i , Q – вантажопідйомність одного транспортного засобу, K – кількість доступних транспортних засобів, а c_{ij} – вартість переходу між вершинами i та j . Потрібно побудувати не більше ніж K маршрутів, кожний з яких відповідає одному транспортному засобу, починається і закінчується в депо, охоплює підмножину клієнтів без повторень, а сумарний попит клієнтів на ньому не перевищує Q . При цьому кожен клієнт має бути включений рівно до одного маршруту, а сумарна вартість усіх маршрутів має бути мінімальною. Ця задача є класичною для логістики, транспортного планування та інформаційних систем підтримки рішень [1]. У прикладних задачах важливі не лише наближені розв'язки, а й точні методи, здатні підтвердити оптимальність отриманого плану маршрутів. Саме тому побудова точних алгоритмів для CVRP залишається актуальною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Найрезультативніші точні підходи до розв'язання CVRP базуються на моделі розбиття множини, генерації стовпців і системі відсічень [2-6]. Такий підхід у літературі відомий як branch-cut-and-price; у близьких за змістом дослідженнях зустрічаються також назви branch-price-and-cut і branch-and-cut-and-price. Надалі для стислості використовується назва branch-cut-and-price. У роботах [4, 5] розглядається поєднання відсічень і генерації стовпців у точних алгоритмах для CVRP. Робота [3] є однією з ключових для точного розв'язання підзадачі маршруту як задачі елементарного найкоротшого шляху з ресурсними обмеженнями (Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints, ESPPRC). Робота [6] належить до характерних сучасних досліджень цього напрямку для CVRP. Водночас залишається важливою проблема поєднання швидкого пошуку нових маршрутів із суворим збереженням точності методу.

Мета дослідження. Метою роботи є застосування алгоритму branch-cut-and-price для точного розв'язання задачі маршрутизації транспортних засобів з обмеженнями на вантажопідйомність, пояснення ключових принципів його побудови та експериментальна перевірка методу на стандартних тестових екземплярах розмірності до 60 вершин.

Стаття має алгоритмічно-реалізаційний характер і присвячена реалізації відомої для CVRP схеми branch-cut-and-price. Основний результат роботи полягає в узгодженому поєднанні в одній коректно працюючій реалізації моделі розбиття множини, підзадачі маршруту, відсічень і розгалуження. Працездатність такої організації перевіряється на стандартних екземплярах.

Практичне значення такого підходу полягає не лише в отриманні якісного маршрутного плану, а й у можливості підтвердити його оптимальність у межах прийнятої математичної моделі. Для прикладних транспортних задач це є важливим, оскільки навіть невелика різниця в довжині або вартості маршрутів може накопичуватися у разі багаторазового повторення перевезень. Тому точні методи залишаються потрібними не тільки як теоретичний еталон для порівняння з евристичними, а й як інструмент обчислювальної перевірки якості рішень на задачах малої та середньої розмірності.

Викладення основного матеріалу дослідження.

Загальна схема методу. У запропонованому підході кожен допустимий маршрут розглядається як окрема змінна моделі розбиття множини (set partitioning formulation). Допустимим вважається маршрут, що починається і закінчується в депо, не порушує обмеження вантажопідйомності та не містить повторних відвідувань клієнтів. Нехай R – множина всіх таких маршрутів, c_r – довжина маршруту r , $a_{ir} = 1$, якщо маршрут r відвідує клієнта i , і $a_{ir} = 0$ інакше, x_r – бінарна змінна вибору маршруту, K – кількість доступних транспортних засобів. Тоді повна постановка головної задачі має вигляд:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{r \in R} c_r x_r, \\ & \text{за умов} \\ & \sum_{r \in R} a_{ir} x_r = 1, \quad i \in C, \\ & \sum_{r \in R} x_r \leq K, \\ & x_r \in \{0, 1\}, \quad r \in R. \end{aligned}$$

У наведеній постановці цільова функція мінімізує сумарну довжину обраних маршрутів, а обмеження гарантують однократне обслуговування кожного клієнта та дотримання обмеження на кількість маршрутів; при цьому змінна x_r показує, чи входить маршрут r до шуканого розв'язку. Такий спосіб постановки задачі добре узгоджується з процедурою генерації стовпців і дає сильну лінійну релаксацію. На практиці в межах branch-cut-and-price у кожному вузлі дерева пошуку розв'язується обмежена головна задача (restricted master problem). Вона містить лише частину стовпців з R , тобто поточний набір уже згенерованих маршрутів, і послідовно посилюється додаванням нових стовпців.

На початку роботи алгоритму стартова евристика на основі алгоритму Кларка-Райта [7] будує початковий план перевезень. Її основне призначення полягає у швидкому формуванні першого коректного розв'язку, який задає початкове значення цільової функції. Надалі алгоритм переходить до схеми branch-cut-and-price: у вузлі дерева

пошуку розв'язується обмежена головна задача, потім виконується породження нових маршрутів, а за потреби додаються відсічення і створюються дочірні вузли.

Підзадача породження маршрутів. Центральним елементом методу є підзадача, у якій для поточних двоїстих оцінок шукається маршрут з від'ємною зведеною вартістю. Саме такі маршрути можуть покращити поточний розв'язок лінійної релаксації головної задачі.

У базовій постановці, тобто без додаткових відсічень і обмежень розгалуження, якщо через π_i позначити двоїсті оцінки обмежень покриття клієнтів, а через $\sigma \leq 0$ – двоїсту оцінку обмеження на кількість маршрутів, то зведена вартість (reduced cost) маршруту r дорівнює

$$\bar{c}_r = c_r - \sum_{i \in C} \pi_i a_{ir} - \sigma.$$

З наведеної формули випливає, що необхідно знайти маршрут з $\bar{c}_r < 0$. Після додавання відсічень і обмежень розгалуження у виразі зведеної вартості враховуються також двоїсті оцінки відповідних активних обмежень, однак сам принцип пошуку не змінюється.

Пошук маршруту з від'ємною зведеною вартістю зводиться до задачі ESPPRC. У реалізації точний етап розв'язується методом динамічного програмування з розширенням марок (labels) [3]. У цьому підході кожна марка описує частковий маршрут, побудований на поточному кроці: вона задається поточною вершиною, накопиченим попитом, зведеною вартістю, посиланням на попередню марку та множиною вже відвіданих клієнтів. Послідовно розширюючи такі марки, алгоритм буде допустимі часткові шляхи та відкидає ті з них, що вже не можуть привести до кращого маршруту. Множина відвіданих клієнтів забезпечує пряму заборону повторних відвідувань, а посилання на попередню марку використовується для відновлення маршруту.

Домінування розглядається лише між марками з однаковою поточною вершиною. Марка l_1 відкидається, якщо існує марка l_2 з тією самою поточною вершиною, не більшою зведеною вартістю і не більшим накопиченим попитом, а множина відвіданих клієнтів у l_2 є підмножиною відповідної множини в l_1 ; принаймні одна з цих переваг має бути строгою. У сертифікуючому елементарному етапі таке домінування є безпечним, оскільки воно усуває лише ті марки, будь-яке допустиме продовження яких не може бути кращим за відповідне продовження домінуючої марки. За повної рівності істотних характеристик у реалізації застосовується технічне правило розв'язання випадку рівності, яке залишає одну з еквівалентних марок і не змінює множини доступних продовжень. У тих варіантах розв'язання підзадачі породження маршрутів, де додатково активні інші ресурсні стани, безпечне домінування ще обмежується сумісністю цих станів. Обмеження розгалуження враховуються через модифікацію допустимих переходів, а двоїсті оцінки активних відсічень безпосередньо входять до зведеної вартості.

Щоб зменшити час роботи, спочатку застосовується евристичний режим розв'язання цієї підзадачі з обмеженням простору пошуку. За певних налаштувань ал-

горитму він використовує спрощену перевірку того, що маршрут не містить повторних відвідувань клієнтів. Конкретні прискорювальні опції цього режиму розглядаються як параметри реалізації: вони можуть впливати на час роботи, але не змінюють критерію завершення, оскільки негативний результат евристичного етапу завжди перевіряється точним пошуком. Якщо в цьому режимі знаходиться маршрут-кандидат з від'ємною зведеною вартістю, його додають до головної задачі як новий стовпець. Якщо ж нових маршрутів не знайдено, алгоритм переходить до точного ESPPRC-пошуку з урахуванням активних обмежень поточного вузла. Лише цей етап дає підставу стверджувати, що маршрутів з від'ємною зведеною вартістю більше немає.

Саме підзадача породження маршрутів визначає, чи достатньо поточного набору стовпців для опису оптимального розв'язку лінійної релаксації головної задачі. Тому ефективність усього методу істотно залежить від того, наскільки швидко вдається знаходити маршрути з від'ємною зведеною вартістю і наскільки надійно встановлюється їх відсутність.

Посилення лінійної релаксації та розгалуження. Для покращення оцінки знизу в головній задачі використовуються округлені ємнісні нерівності (Rounded Capacity Inequalities, RCI) [4, 5]. Для підмножини клієнтів $S \subset C$ із сумарним попитом $d(S) = \sum_{i \in S} q_i$ така нерівність у маршрутній постановці має вигляд $\sum_{r \in R} \alpha_{Sr} x_r \geq 2[d(S)/Q]$, де α_{Sr} дорівнює кількості дуг маршруту r , що перетинають розріз між S та $C \setminus S$, тобто мають рівно одну кінцеву вершину в S .

Зміст цієї нерівності полягає в тому, що поточний дробовий розв'язок має забезпечувати достатню кількість виходів із множини S та входів до неї. У реалізації використовується процедурна евристична схема пошуку порушених нерівностей, а не повний алгоритм точного розділення для всіх можливих підмножин S . Спочатку за графом носія поточного дробового розв'язку будуються кандидатні підмножини клієнтів: зв'язні компоненти базового графа підтримки, компоненти порогових графів підтримки, а також множини, покращені локальними операціями вилучення або додавання окремих вершин. Для кожного такого кандидата перевіряється наведена умова, після чого до головної задачі додаються найсильніше порушені нерівності. Така процедура використовується лише для посилення лінійної релаксації; відсутність порушених нерівностей серед обраних кандидатів не трактується як повна сертифікація того, що жодної порушеної RCI більше не існує. Після додавання нових стовпців і відсічень лінійна релаксація перевизначається, а процес повторюється.

Якщо в поточному вузлі дерева пошуку отримано дробовий розв'язок, для розгалуження розглядаються дуги a з нецілим сумарним використанням $f(a) = \sum_{r \in R: a \in r} x_r$. Далі обирається дуга, для якої величина $|f(a) - 0,5|$ є мінімальною. Отже, розгалуження виконується за переходом між двома вершинами, сумарне використання якого в поточному дробовому розв'язку є нецілим і найближчим до 0,5.

У дослідженій реалізації для дуги, обраної для розгалуження, в одному дочірньому вузлі в головній задачі накладається умова $f(a) = 1$, а в іншому – умова $f(a) = 0$. У підзадачі породження маршрутів умова $f(a) = 0$ враховується прямою заборонаю дуги a . Умова $f(a) = 1$ переноситься через заборону всіх альтернативних виходів із початкової вершини дуги a та всіх альтернативних входів у її кінцеву вершину. Така модифікація допустимих переходів зберігає узгодженість між головною задачею і підзадачею породження маршрутів та не порушує коректності всієї схеми пошуку.

Забезпечення коректності схеми розв’язання. Для методу, орієнтованого на точне розв’язання, принципово важливо відрізнити прискорювальний пошук нових стовпців від сертифікації їх відсутності. У пропонованій схемі евристичний режим використовується лише на першому з цих етапів. Сертифікуючий етап не використовує послаблення елементарності й спирається тільки на точний ESPPRC-пошук. Тому завершення генерації стовпців не ґрунтується на наближених або евристичних ознаках.

Ключовий інваріант пропонованої схеми полягає в такому: якщо в поточному вузлі дерева точний ESPPRC-пошук з урахуванням активних відсічень і обмежень розгалуження не знаходить жодного маршруту з $\bar{c}_r < 0$, то серед усіх допустимих маршрутів цього вузла відсутні стовпці, здатні покращити лінійну релаксацію. Отже, поточний розв’язок обмеженої головної задачі є оптимальним для повної лінійної релаксації в даному вузлі. Саме ця обставина, а не негативний результат евристичного етапу, використовується як підстава для завершення генерації стовпців.

Якщо евристичний етап породження маршрутів знаходить нові стовпці, вони додаються до обмеженої головної задачі, після чого цикл генерації стовпців продовжується. Якщо ж нових маршрутів не знайдено, запускається точний ESPPRC-пошук з урахуванням активних обмежень поточного вузла. Отже, евристичний етап може лише прискорити виявлення покращувальних маршрутів, але не впливає на сертифікацію їх відсутності. Це дозволяє поєднати коректність схеми пошуку з економією часу на тих ітераціях, де нові маршрути знаходяться швидко.

Організація обчислювального експерименту. Для експериментальної перевірки було обрано одинадцять стандартних екземплярів CVRP серії P [8]. Разом вони охоплюють діапазон розмірностей від 16 до 60 вершин включно з депо та різну кількість доступних транспортних засобів. Повний перелік протестованих екземплярів і результати їх розв’язання наведено в табл. 1.

Експеримент має валідаційний характер. Його метою є перевірка реалізації алгоритму та оцінювання часу роботи в дослідженому діапазоні задач, а не широке порівняння з іншими реалізаціями точних методів. У такій постановці першорядним є факт відтворення відомого оптимального значення, тоді як час розв’язання використовується для характеристики обчислювальної поведінки методу.

Лінійні релаксації обмеженої головної задачі розв’язувалися засобами GLOP із пакета Google.OrTools 9.14.6206. Програмну реалізацію виконано мовою C# у проєкті з цільовою платформою .NET 9.0. Запуски в режимі Release виконувалися в ОС

Windows 11 на персональному комп'ютері з процесором AMD Ryzen 5 7600 (6 ядер, 12 потоків) та 32 ГБ оперативної пам'яті.

Усі наведені результати отримано в штатній конфігурації реалізації в режимі Release без зовнішнього обмеження часу. У табл. 1 для кожного екземпляра наведено отримане значення цільової функції та середній час, обчислений за результатами десяти завершених запусків; позначення екземплярів подано у стандартному вигляді, прийнятому для відповідних тестових наборів. Час вимірювався як повний час одного завершеного запуску алгоритму, після чого для кожного екземпляра обчислювалося середнє арифметичне за десятьма повторами. Для кожного запуску отримане значення цільової функції порівнювалося з відомим оптимумом.

Обраний набір тестів не охоплює всіх відомих класів екземплярів CVRP, однак дає змогу простежити поведінку реалізації на задачах різної розмірності та різної структурної складності в межах підтвердженого діапазону. Поєднання малих і середніх екземплярів дозволяє одночасно перевірити коректність реалізації та оцінити зміну обчислювальних витрат зі зростанням розмірності задачі.

Результати дослідження. Результати експерименту наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Результати тестування алгоритму на стандартних екземплярах CVRP

Екземпляр	Кількість вершин, включно з депо	Кількість доступних транспортних засобів	Відомий оптимум	Отримане значення	Середній час за 10 запусків, с
P-n16-k8	16	8	450	450	0,31
P-n19-k2	19	2	212	212	1,32
P-n20-k2	20	2	216	216	1,36
P-n21-k2	21	2	211	211	0,91
P-n22-k2	22	2	216	216	1,29
P-n23-k8	23	8	529	529	0,36
P-n40-k5	40	5	458	458	16,13
P-n45-k5	45	5	510	510	107,15
P-n50-k7	50	7	554	554	13,87
P-n50-k10	50	10	696	696	31,86
P-n60-k10	60	10	744	744	72,97

Із табл. 1 видно, що на всіх досліджених екземплярах в усіх десяти запусках отримані значення повністю збігаються з відомими оптимумами. Для малих задач із 16-23 вершинами включно з депо середній час розв'язання не перевищує 2 с. Для задач із 40-60 вершинами включно з депо середній час роботи змінюється в межах від 13,87 до 107,15 с. Водночас залежність середнього часу від кількості вершин не є монотонною: у цій серії запусків екземпляр із 45 вершинами виявився складнішим за обидва екземпляри з 50 вершинами. Це узгоджується з тим, що складність CVRP зале-

жить не лише від розмірності, а й від просторової структури клієнтів, місткості автомобілів та конфігурації попитів.

Наведені часові показники є середніми значеннями повного часу роботи всієї схеми branch-cut-and-price, отриманими за десятьма завершеними запусками кожного екземпляра, а не характеристиками окремої локальної процедури. Вони охоплюють розв'язання обмеженої головної задачі, породження нових маршрутів, додавання відсічень і проходження дерева розгалуження. Тому для середніх екземплярів визначальними чинниками виступають не лише розмірність задачі, а й те, наскільки швидко вдається стабілізувати лінійну релаксацію та завершити точний пошук маршрутів із від'ємною зведеною вартістю. Саме ці компоненти є природними кандидатами для подальшого прискорення методу.

Обговорення. Отримані результати підтверджують, що реалізація алгоритму коректно працює на розглянутому валідаційному наборі тестів і відтворює відомі оптимуми на всіх наведених екземплярах. Водночас наведені часові показники слід трактувати саме як характеристику обчислювальної поведінки методу в дослідженому діапазоні задач, а не як універсальну оцінку його ефективності для всіх класів екземплярів CVRP.

З методологічного погляду цінність такої реалізації полягає в тому, що вона дає змогу досліджувати окремі компоненти схеми точного розв'язання в узгодженому середовищі. За наявності коректно організованої взаємодії між обмеженою головною задачею, генерацією стовпців, відсіченнями та розгалуженням можна окремо оцінювати вплив прискорювальних рішень, не змішуючи питання швидкодії з питанням правильності завершення алгоритму. Саме в цьому сенсі навіть відносно компактна реалізація, перевірена на стандартних екземплярах, є корисною як основа для подальших алгоритмічних досліджень.

Подальше підвищення ефективності доцільно пов'язувати з удосконаленням найбільш витратних компонентів методу. Насамперед це стосується сильніших схем домінування в підзадачі маршруту, покращення стратегій додавання відсічень, точніших правил вибору об'єкта розгалуження та інших засобів стабілізації лінійної релаксації. Перевірка таких удосконалень на ширшому колі екземплярів має становити окремий етап подальшого дослідження.

Висновки. У статті подано реалізацію алгоритму branch-cut-and-price для задачі маршрутизації транспортних засобів з обмеженнями на вантажопідйомність та наведено результати її дослідження. У запропонованій схемі поєднано модель розбиття множини, генерацію стовпців, стартову евристику на основі алгоритму Кларка-Райта, округлені ємнісні нерівності та розгалуження за дугами.

Обчислювальний експеримент на одинадцяти стандартних екземплярах із 16-60 вершинами включно з депо показав, що реалізація алгоритму в усіх наведених випадках відтворює відомі оптимуми. Це підтверджує коректність реалізації на розглянутому наборі стандартних задач і свідчить про практичну придатність обраної організації обчислень у дослідженому діапазоні розмірностей. Подальшу роботу доцільно спрямува-

ти на адаптацію алгоритму до розв'язання екземплярів більшої розмірності та на подальше вдосконалення його найвитратніших компонентів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Archetti C., Coelho L.C., Speranza M.G., Vansteenwegen P. Beyond fifty years of vehicle routing: Insights into the history and the future. *European Journal of Operational Research*. 2026. Vol. 330, No. 2. P. 355-372. DOI: 10.1016/j.ejor.2025.06.014.
2. Costa L., Contardo C., Desaulniers G. Exact Branch-Price-and-Cut Algorithms for Vehicle Routing. *Transportation Science*. 2019. Vol. 53, No. 4. P. 946-985. DOI: 10.1287/trsc.2018.0878.
3. Feillet D., Dejax P., Gendreau M., Gueguen C. An exact algorithm for the elementary shortest path problem with resource constraints: Application to some vehicle routing problems. *Networks*. 2004. Vol. 44, No. 3. P. 216-229. DOI: 10.1002/net.20033.
4. Fukasawa R., Longo H., Lysgaard J., Poggi de Aragao M., Reis M., Uchoa E., Werneck R.F. Robust Branch-and-Cut-and-Price for the Capacitated Vehicle Routing Problem. *Mathematical Programming*. 2006. Vol. 106, No. 3. P. 491-511. DOI: 10.1007/s10107-005-0644-x.
5. Baldacci R., Christofides N., Mingozzi A. An exact algorithm for the vehicle routing problem based on the set partitioning formulation with additional cuts. *Mathematical Programming*. 2008. Vol. 115, No. 2. P. 351-385. DOI: 10.1007/s10107-007-0178-5.
6. Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Uchoa E. Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing. *Mathematical Programming Computation*. 2017. Vol. 9, No. 1. P. 61-100. DOI: 10.1007/s12532-016-0108-8.
7. Clarke G., Wright J. W. Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points. *Operations Research*. 1964. Vol. 12, No. 4. P. 568-581. DOI: 10.1287/opre.12.4.568.
8. All Instances – CVRPLIB. GALGOS – Algorithms, Optimization and Simulation Group. URL: <https://galgos.inf.puc-rio.br/cvrplib/index.php/en/instances> (date of access: 02.04.2026).

REFERENCES

1. Archetti C., Coelho L.C., Speranza M.G., Vansteenwegen P. Beyond fifty years of vehicle routing: Insights into the history and the future. *European Journal of Operational Research*. 2026. Vol. 330, No. 2. P. 355-372. DOI: 10.1016/j.ejor.2025.06.014.
2. Costa L., Contardo C., Desaulniers G. Exact Branch-Price-and-Cut Algorithms for Vehicle Routing. *Transportation Science*. 2019. Vol. 53, No. 4. P. 946-985. DOI: 10.1287/trsc.2018.0878.
3. Feillet D., Dejax P., Gendreau M., Gueguen C. An exact algorithm for the elementary shortest path problem with resource constraints: Application to some vehicle routing problems. *Networks*. 2004. Vol. 44, No. 3. P. 216-229. DOI: 10.1002/net.20033.
4. Fukasawa R., Longo H., Lysgaard J., Poggi de Aragao M., Reis M., Uchoa E., Werneck R.F. Robust Branch-and-Cut-and-Price for the Capacitated Vehicle Routing Problem. *Mathematical Programming*. 2006. Vol. 106, No. 3. P. 491-511. DOI: 10.1007/s10107-005-0644-x.

5. Baldacci R., Christofides N., Mingozzi A. An exact algorithm for the vehicle routing problem based on the set partitioning formulation with additional cuts. *Mathematical Programming*. 2008. Vol. 115, No. 2. P. 351-385. DOI: 10.1007/s10107-007-0178-5.
6. Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Uchoa E. Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing. *Mathematical Programming Computation*. 2017. Vol. 9, No. 1. P. 61-100. DOI: 10.1007/s12532-016-0108-8.
7. Clarke G., Wright J. W. Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points. *Operations Research*. 1964. Vol. 12, No. 4. P. 568-581. DOI: 10.1287/opre.12.4.568.
8. All Instances – CVRPLIB. GALGOS – Algorithms, Optimization and Simulation Group. URL: <https://galgos.inf.puc-rio.br/cvrplib/index.php/en/instances> (date of access: 02.04.2026).

Received 06.04.2026.

Accepted 08.04.2026.

Published 30.04.2026

Implementation and study of a branch-cut-and-price algorithm for the Capacitated Vehicle Routing Problem

The Capacitated Vehicle Routing Problem is a classical optimization problem arising in transportation logistics. Modern research addresses it with both heuristic and exact approaches. Among exact methods, the most effective ones are based on a set-partitioning formulation, column generation, cutting planes, and branching. Important components of such schemes are the exact solution of the route-generation subproblem as an Elementary Shortest Path Problem with Resource Constraints (ESPPRC) and the use of rounded capacity inequalities to strengthen the linear relaxation. At the same time, building an implementation in which these components interact consistently remains a technically demanding task.

The aim of the study is to apply a branch-cut-and-price algorithm for the exact solution of the Capacitated Vehicle Routing Problem, to explain how its main components are coordinated, and to validate the implementation on standard benchmark instances.

In the proposed implementation, each feasible route is treated as a variable of a set-partitioning model. An initial transportation plan is constructed by a Clarke-Wright-based heuristic. The algorithm then proceeds within the branch-cut-and-price framework: a restricted master problem is solved and new negative reduced-cost routes are generated. To accelerate computations, the implementation first applies a heuristic search; if it finds no improving columns, the algorithm switches to an exact certifying stage. The route-generation subproblem is formulated as an ESPPRC and solved by dynamic programming with label extension. Rounded capacity inequalities are used to improve the linear relaxation, and branching is performed on arcs. Computational experiments were carried out on eleven standard instances with 16 to 60 vertices, including the depot. Each instance was solved in ten sequential runs, and the article reports the average runtime. In every reported case, the implementation matched the known optimal values.

The study shows that the proposed implementation of branch-cut-and-price operates correctly on the considered set of standard instances and reproduces the known optimal solutions. The reported results confirm the practical applicability of this computational organization for small and medium-sized instances. Further work should focus on adapting the imple-

mentation to larger instances and improving the most time-consuming components of the method.

Keywords: CVRP, vehicle routing, branch-cut-and-price, column generation, set partitioning, combinatorial optimization, integer programming, linear relaxation, exact and heuristic methods, logistics.

Ленський Михайло Миколайович – аспірант кафедри інженерії програмного забезпечення та інформаційних технологій, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1445-2142>

Михальчук Ганна Йосипівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення та інформаційних технологій, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5476-6349>

Lenskyi Mykhailo – postgraduate student, Department of Software Engineering and Information Technologies, Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1445-2142>

Mykhalchuk Hanna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Software Engineering and Information Technologies, Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5476-6349>