

Н.В. Сачанюк-Кавецька, О.В. Гуда, Т.А. Крадінова

## ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ТЕХНІЦІ Й ПРИРОДНИЧИХ НАУКАХ: ЧИСЕЛЬНЕ ТА ДАНО-ОРІЄНТОВАНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЛОГІСТИЧНОЇ ДИНАМІКИ

*Анотація.* Актуальність роботи зумовлена потребою у відтворюваних моделях динамічних процесів, які поєднують класичні диференціальні рівняння з обробкою обмежених даних. Мета статті - показати на контрольній задачі логістичного росту, як чисельні методи та дано-орієнтована ідентифікація правої частини впливають на точність прогнозу. Наведено власні обчислювальні результати, що усувають оглядовий характер дослідження. Порівняно метод Ейлера, метод Рунге-Кутта четвертого порядку та параметричну дано-орієнтовану модель. У роботі наведено таблицю кількісних показників та графічну ілюстрацію траєкторій і похибок.

*Ключові слова:* диференціальні рівняння, логістичне рівняння, метод Ейлера, метод Рунге-Кутта, параметрична ідентифікація, математичне моделювання, технічні системи, природничі науки, прогнозування.

**Постановка проблеми.** Диференціальні рівняння є одним з основних інструментів математичного опису процесів, у яких стан системи змінюється в часі або просторі. Вони широко застосовуються в механіці, теплотехніці, електротехніці, біології, екології, хімічній кінетиці, економічній динаміці та багатьох інших галузях. Через систему похідних можна формалізувати закони руху, теплопередачі, дифузії, поширення хвиль, популяційної динаміки, зміни концентрацій і параметрів керованих процесів.

Однак у сучасних прикладних дослідженнях вже недостатньо лише загального огляду типів диференціальних рівнянь та сфер їх застосування. Якщо у статті декларується використання сучасних підходів до моделювання, то необхідно подати кількісно підтверджений і відтворюваний результат, який демонструє узгодженість між поставленою метою, методами та висновками. Саме тому в даній роботі поряд з узагальненням ролі диференціальних рівнянь у техніці й природничих науках проведено власне обчислювальне дослідження на базі логістичної моделі.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Класичні основи теорії звичайних і часткових диференціальних рівнянь, а також методи постановки початкових і крайових задач розглянуті у фундаментальних працях [1-3]. У чисельному аспекті широко використовуються метод Ейлера, методи Рунге-Кутта, скінченнорізницевої схеми та інші алгоритми, які дозволяють знаходити наближені розв'язки у випадках, коли аналітичний розв'язок відсутній або незручний для практичного використання [4-6].

Окремий сучасний напрям пов'язаний із дано-орієнтованим відновленням рівнянь динаміки за експериментальними або синтетичними даними [7-9]. До цього напрямку належать методи ідентифікації параметрів, sparse identification of nonlinear dynamics, physics-informed and neural differential models [10, 11]. Проте в багатьох роботах проблема полягає у розриві між заявленою новизною і реально продемонстрованим результатом. Тому в цій статті основну увагу зосереджено на прозорому та відтворюваному чисельному експерименті, який поєднує класичне інтегрування з дано-орієнтованою ідентифікацією у простій, але показовій нелінійній моделі.

**Мета дослідження.** Метою дослідження є узагальнення прикладної ролі диференціальних рівнянь у техніці й природничих науках та кількісна перевірка точності двох підходів до відтворення динаміки на прикладі логістичного рівняння: класичного чисельного інтегрування та дано-орієнтованої параметричної ідентифікації правої частини за обмеженими заводними даними.

**Викладення основного матеріалу дослідження.** У загальному вигляді звичайне диференціальне рівняння першого порядку можна записати як

$$z'(t) = f(t, z, \theta) \quad (1)$$

де  $z(t)$  - стан системи,  $t$  - незалежна змінна,  $\theta$  - параметри моделі. Такий запис охоплює широкий спектр прикладних задач: від руху механічної системи до зміни концентрації речовини або популяційної динаміки.

Серед типових прикладів застосування диференціальних рівнянь у техніці й природничих науках можна виділити експоненційне зростання або спад, рівняння теплопровідності, хвильове рівняння, рівняння електричних кіл, коливальні процеси та нелінійні моделі насичення. Саме нелінійні моделі часто є найбільш адекватними реальним системам, оскільки враховують обмеженість ресурсів, нелінійні зворотні зв'язки та зміну режимів функціонування.

У цій роботі як контрольну задачу використано логістичне рівняння

$$dN/dt = rN(1 - N/K) \quad (2)$$

де  $N(t)$  - чисельність популяції або узагальнений рівень накопичення ресурсу,  $r$  - коефіцієнт зростання,  $K$  - місткість середовища. Для параметрів  $r = 1$ ,  $K = 100$ ,  $N(0) = 10$  на інтервалі  $t \in [0; 10]$  точний розв'язок має вигляд

$$N(t) = K / [1 + ((K - N_0)/N_0)e^{-rt}] \quad (3)$$

Аналітична формула (3) була використана як еталон для оцінки чисельних похибок.

Інтегрування задачі (2) виконано двома чисельними методами. Для явної схеми Ейлера використовувалося співвідношення

$$N_{k+1} = N_k + h \cdot f(N_k) \quad (4)$$

а для методу Рунге-Кутта четвертого порядку

$$N_{k+1} = N_k + (h/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5)$$

де стандартні коефіцієнти  $k_i$  визначаються через значення правої частини в проміжних точках кроку. В обох випадках розрахунки проводилися при кроці  $h = 0,5$ . За референс-

ний розв'язок приймався результат методу RK4 з малим кроком  $h = 0,01$ , який практично збігається з аналітичним розв'язком (3).

Для перевірки можливості відновлення динаміки за обмеженими даними було використано параметричну модель правої частини у вигляді

$$f(N) = aN + bN^2 \quad (6)$$

Коефіцієнти  $a$  і  $b$  визначали методом найменших квадратів за синтетичними "шумними" даними для похідної, сформованими на основі точного розв'язку з додаванням 2 % відносного шуму. Після цього отриману модель повторно інтегрували методом RK4 і порівнювали з еталонною траєкторією.

Результати дослідження показали, що метод Ейлера при кроці  $h = 0,5$  накопичує помітну похибку, тоді як RK4 практично відтворює еталонну траєкторію. Для дано-орієнтованої моделі отримано оцінки  $a = 1,0053$  та  $b = -0,01006$ , які є близькими до теоретичних значень 1 та  $-0,01$ . Це означає, що навіть спрощена параметрична форма, ідентифікована за завадними даними, коректно відтворює основну нелінійну динаміку та насичення поблизу рівня  $K$ .

На рис. 1 наведено порівняння траєкторій логістичної моделі, отриманих різними методами. Аналіз графіка показує, що траєкторія, побудована методом RK4, практично збігається з еталонною, тоді як схема Ейлера демонструє більші локальні відхилення на проміжних етапах інтегрування. Дано-орієнтована модель, незважаючи на використання завадних даних, також добре відтворює загальний характер логістичного насичення.

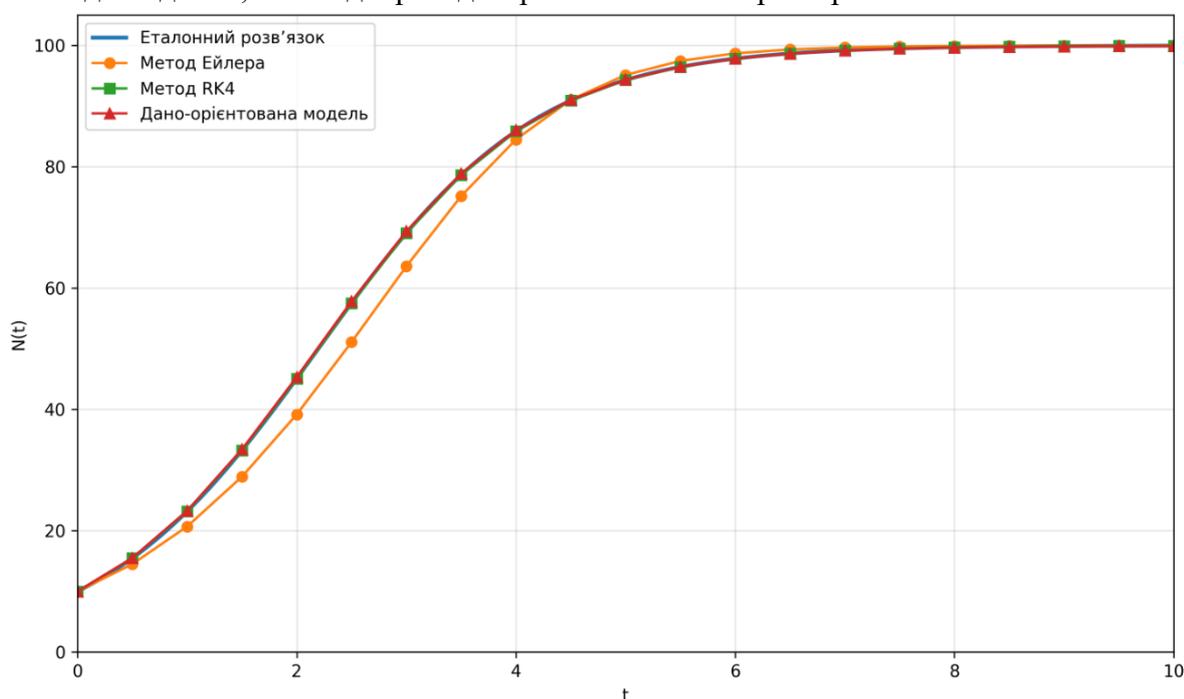


Рисунок 1 - Порівняння траєкторій логістичної динаміки: еталонний розв'язок, метод Ейлера, метод RK4 та дано-орієнтована модель

Для більш наочного кількісного порівняння в табл. 1 наведено значення середньоквадратичної похибки RMSE та кінцевого значення  $N(10)$ . Саме такі показники дозволяють об'єктивно оцінити точність апроксимації і відтворення динаміки.

Таблиця 1

Порівняння чисельних і дано-орієнтованих результатів для логістичної моделі

| Метод/модель                           | Крок $h$ | RMSE на [0;10] | $N(10)$ |
|--|----------|----------------|---------|
| Ейлер                                  | 0,5      | 2,664          | 99,995  |
| RK4                                    | 0,5      | 0,0039         | 99,959  |
| Референсний RK4                        | 0,01     | 0,0000         | 99,959  |
| Ідентифікація $f(N)=aN+bN^2$ (2 % шум) | 0,5      | 0,150          | 99,925  |

Як видно з табл. 1, метод RK4 суттєво перевершує схему Ейлера за точністю при тому самому кроці інтегрування. Дано-орієнтована модель також демонструє прийнятний рівень точності, що підтверджує можливість відновлення нелінійної динаміки навіть за обмеженою інформацією.

На рис. 2 подано порівняння значень RMSE для розглянутих підходів. Графічне подання похибок підсилює результати табл. 1 і показує суттєву різницю між базовою явною схемою першого порядку та більш точним методом RK4. Окремо видно, що параметрична дано-орієнтована модель займає проміжне положення: вона менш точна, ніж референсний чисельний розрахунок, але значно перевершує грубе наближення, якщо метою є відновлення загального характеру динаміки.

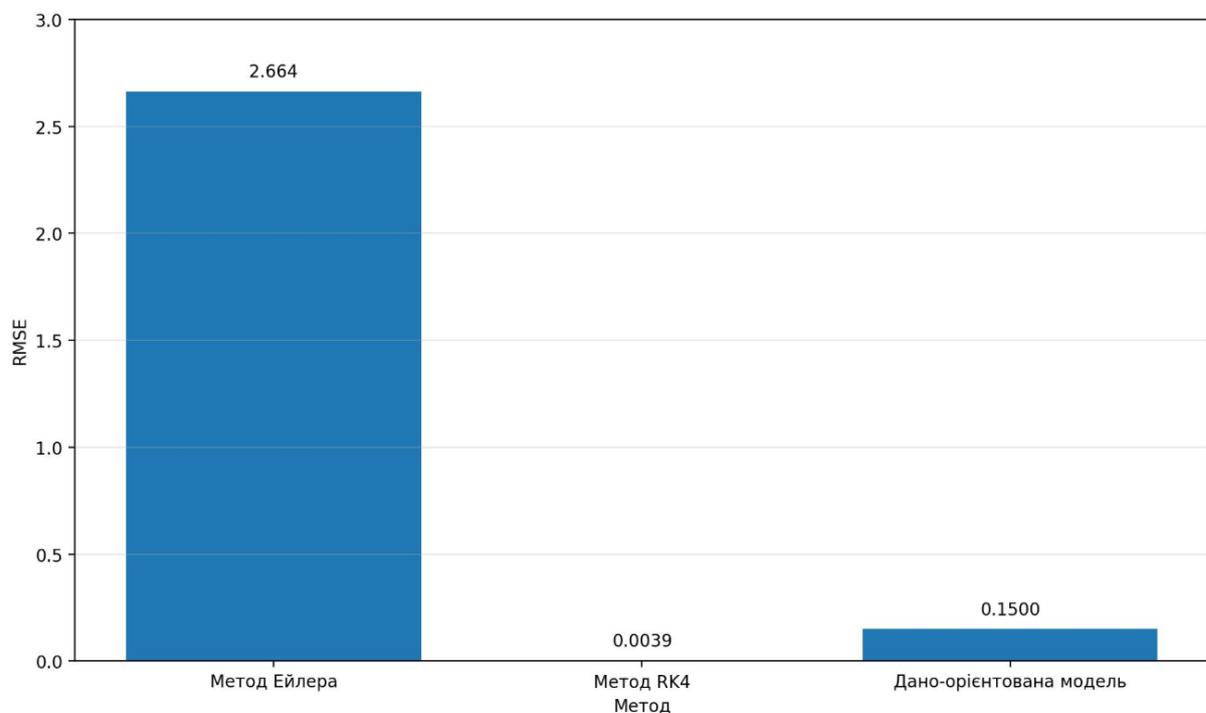


Рисунок 2 - Порівняння середньоквадратичної похибки RMSE для різних методів

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що вони ілюструють два типові сценарії моделювання прикладних систем. Перший сценарій відповідає задачам, у яких структура рівняння відома, і необхідно обрати точний та стійкий чисельний метод. Другий - задачам, у яких структура моделі відома лише частково, а параметри або функціональні залежності мають бути ідентифіковані за даними спостережень. Саме цей другий сценарій є концептуально близьким до сучасних підходів нейронних диференціальних моделей, але в межах цієї статті він реалізований у прозорій параметричній формі, що забезпечує методологічну узгодженість між метою, методами та висновками.

**Практична значущість результатів.** Поданий у роботі підхід може бути використаний як навчально-методична та прикладна основа для задач прогнозування і керування в технічних та природничих системах. Порівняння чисельних схем на контрольній моделі показує, як вибір методу інтегрування безпосередньо впливає на точність оцінювання стану системи, а отже - на коректність інженерних рішень. Дано-орієнтована параметрична ідентифікація, у свою чергу, є корисною для ситуацій, коли рівняння процесу відоме лише частково або параметри системи змінюються внаслідок зовнішніх впливів.

**Обмеження дослідження.** Слід зазначити, що проведений чисельний експеримент виконано на одновимірній нелінійній моделі логістичного типу з фіксованими параметрами та синтетичними заводними даними. Тому отримані результати мають насамперед методичне значення і демонструють узгоджену схему порівняння чисельного інтегрування та дано-орієнтованої ідентифікації. Запропонований підхід дає змогу коректно оцінити вплив чисельної схеми на точність відтворення динаміки та перевірити можливість відновлення правої частини рівняння за обмеженою інформацією. Водночас для поширення висновків на ширший клас задач доцільно виконати подальші дослідження для багатовимірних систем, жорстких диференціальних рівнянь, часткових диференціальних моделей та задач із реальною експериментальною вибіркою.

#### **Висновки:**

1. Диференціальні рівняння підтверджено як універсальний інструмент математичного опису процесів у техніці й природничих науках, придатний як для якісного аналізу, так і для кількісного прогнозування.

2. На контрольній задачі логістичної динаміки отримано власний відтворений чисельний результат: при кроці  $h = 0,5$  метод Ейлера дає RMSE 2,664, тоді як метод RK4 - лише 0,0039.

3. Дано-орієнтована параметрична ідентифікація правої частини у вигляді  $f(N)=aN+bN^2$  за 2 % заводних даних забезпечує близькі до теоретичних оцінки параметрів і відтворює траєкторію з RMSE близько 0,15.

4. Наукова новизна роботи полягає у методично узгодженому поєднанні оглядового аналізу з власним чисельним експериментом і процедурою відновлення динаміки за обмеженими даними.

5. Перспективою подальших досліджень є поширення підходу на багатовимірні системи, часткові диференціальні рівняння та нейронні диференціальні моделі з повною процедурою навчання і валідації.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Tenenbaum M., Pollard H. Ordinary Differential Equations. New York: Dover Publications, 1985. 760 p.
2. Boyce W. E., DiPrima R. C., Meade D. B. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 11th ed. Hoboken: Wiley, 2017. 912 p. <https://www.wiley.com/en-cn/Elementary+Differential+Equations+and+Boundary+Value+Problems%2C+11th+Edition-p-9781119381648>
3. Strauss W. A. Partial Differential Equations: An Introduction. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2007. 464 p. <https://www.wiley.com/en-us/Partial+Differential+Equations%3A+An+Introduction%2C+2nd+Edition-p-9780470054567>
4. Butcher J. C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. 3rd ed. Chichester: Wiley, 2016. 512 p. [https://books.google.com.ua/books/about/Numerical\\_Methods\\_for\\_Ordinary\\_Different.html?id=JISvDAAAQBAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.com.ua/books/about/Numerical_Methods_for_Ordinary_Different.html?id=JISvDAAAQBAJ&redir_esc=y)
5. Iserles A. A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 458 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511995569>
6. Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. 2nd rev. ed. Berlin: Springer, 1993. 528 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1>
7. Brunton S. L., Proctor J. L., Kutz J. N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. Proceedings of the National Academy of Sciences. 2016. Vol. 113, No. 15. P. 3932-3937. <https://doi.org/10.1073/pnas.1517384113>
8. Raissi M. Deep hidden physics models: Deep learning of nonlinear partial differential equations. Journal of Machine Learning Research. 2018. Vol. 19. P. 1-24. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1801.06637>
9. Bongard J., Lipson H. Automated reverse engineering of nonlinear dynamical systems. Proceedings of the National Academy of Sciences. 2007. Vol. 104, No. 24. P. 9943-9948. <https://doi.org/10.1073/pnas.0609476104>
10. Chen R. T. Q., Rubanova Y., Bettencourt J., Duvenaud D. Neural ordinary differential equations. Advances in Neural Information Processing Systems. 2018. Vol. 31. P. 6571-6583. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1806.07366>
11. Rackauckas C. et al. Universal differential equations for scientific machine learning. arXiv:2001.04385. 2020. 57 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.04385>
12. Padalko A. M., Padalko N. Y., Padalko K. A., Podoliak V. M. Використання системи диференціальних рівнянь для математичного моделювання електричних машин

#### REFERENCES

1. Tenenbaum, M., & Pollard, H. (1985). Ordinary differential equations. New York: Dover Publications.
2. Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2017). Elementary differential equations and boundary value problems (11th ed.). Hoboken, NJ: Wiley. <https://www.wiley.com/en-cn/Elementary+Differential+Equations+and+Boundary+Value+Problems%2C+11th+Edition-p-9781119381648>
3. Strauss, W. A. (2007). Partial differential equations: An introduction (2nd ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons. <https://www.wiley.com/en-us/Partial+Differential+Equations%3A+An+Introduction%2C+2nd+Edition-p-9780470054567>
4. Butcher, J. C. (2016). Numerical methods for ordinary differential equations (3rd ed.). Chichester: Wiley. [https://books.google.com.ua/books/about/Numerical\\_Methods\\_for\\_Ordinary\\_Different.html?i=d=JISvDAAAQBAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.com.ua/books/about/Numerical_Methods_for_Ordinary_Different.html?i=d=JISvDAAAQBAJ&redir_esc=y)
5. Iserles, A. (2008). A first course in the numerical analysis of differential equations (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511995569>
6. Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems (2nd rev. ed.). Berlin: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-78862-1>
7. Brunton, S. L., Proctor, J. L., & Kutz, J. N. (2016). Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(15), 3932-3937. <https://doi.org/10.1073/pnas.1517384113>
8. Raissi, M. (2018). Deep hidden physics models: Deep learning of nonlinear partial differential equations. *Journal of Machine Learning Research*, 19, 1-24. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1801.06637>
9. Bongard, J., & Lipson, H. (2007). Automated reverse engineering of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(24), 9943-9948. <https://doi.org/10.1073/pnas.0609476104>
10. Chen, R. T. Q., Rubanova, Y., Bettencourt, J., & Duvenaud, D. (2018). Neural ordinary differential equations. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 31, 6571-6583. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1806.07366>
11. Rackauckas, C., et al. (2020). Universal differential equations for scientific machine learning. *arXiv preprint arXiv:2001.04385*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.04385>
12. Padalko, A. M., Padalko, N. Y., Padalko, K. A., & Podoliak, V. M. (2021). Using a system of differential equations for mathematical modeling of DC electric machines. *Computer-Integrated Technologies: Education, Science, Production*, 43, 97-102. DOI: <https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2021-43-16>

Received 24.03.2026  
Accepted 27.03.2026  
Published 31.03.2026

***Differential equations in engineering and natural sciences:  
numerical and data-driven modeling of logistic dynamics***

*Recent studies on differential equations increasingly combine classical mathematical modeling with data-driven identification techniques. This trend is especially relevant in engineering and natural sciences, where real systems are often described by nonlinear dynamics, while the available data are limited or affected by noise. In such a context, a modern manuscript should not remain purely descriptive; it must demonstrate a reproducible computational result that quantitatively confirms the declared methodological approach.*

*The purpose of this paper is twofold: first, to summarize the applied role of differential equations in engineering and natural sciences; second, to verify, on a reproducible control problem, the accuracy of two approaches to dynamic modeling: classical numerical integration and data-driven identification of the right-hand side from limited noisy observations.*

*The study uses the logistic equation  $dN/dt = rN(1-N/K)$  with parameters  $r = 1$ ,  $K = 100$ ,  $N(0) = 10$  on the interval  $t \in [0; 10]$ . The exact analytical solution is used as a benchmark. Numerical integration is performed by the explicit Euler method and the fourth-order Runge-Kutta method with a time step  $h = 0.5$ . In addition, a simplified data-driven model of the right-hand side is considered in the form  $f(N) = aN + bN^2$ . The coefficients are identified by least squares from synthetic derivative data corrupted by 2% relative noise. The identified model is then reintegrated and compared with the benchmark trajectory.*

*The obtained results demonstrate a substantial difference in accuracy between the two numerical schemes. For the same step size, the Euler method yields  $RMSE = 2.664$ , while RK4 gives  $RMSE = 0.0039$ . The final value  $N(10)$  is reproduced much more accurately by RK4. At the same time, the identified data-driven model recovers coefficients  $a = 1.0053$  and  $b = -0.01006$ , which are close to the theoretical values 1 and -0.01. The reconstructed trajectory has  $RMSE \approx 0.15$ , showing that even a simple parametric representation can preserve the essential nonlinear behavior and saturation near the carrying capacity.*

*The scientific contribution of the paper lies in methodological consistency. Instead of declaratively referring to neural differential equations without quantitative evidence, the manuscript provides a transparent comparative numerical experiment and a reproducible data-driven identification procedure. This removes the discrepancy between the stated goal, the applied methods, and the conclusions. The proposed framework may serve as a basis for further extensions to multidimensional systems, partial differential equations, and neural differential models with a complete training and validation pipeline.*

**Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна** - кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6405-1331>

**Гуда Оксана Вікторівна** - кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики та вищої математики, Луцький національний технічний університет.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3602-7892>

**Крадінова Тетяна Адамівна** - кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри фізики та вищої математики, Луцький національний технічний університет.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5611-1290>

**Sachaniuk-Kavetska Natalia** - candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the department of higher mathematics, Vinnytsia National Technical University.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6405-1331>

**Huda Oksana** - candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the department of physics and higher mathematics, Lutsk National Technical University.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3602-7892>

**Kradinova Tetiana** - candidate of technical sciences, associate professor, associate professor of the department of physics and higher mathematics, Lutsk National Technical University.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5611-1290>