DOI 10.34185/1562-9945-2-163-2026-07
УДК 519.8

А.В. Лозовський, С.В Лупинський

ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЛОГІСТИЧНИХ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН

Анотація. У статті розглянуто підхід до розв'язання широкого класу логістичних задач на основі методів теорії оптимального розбиття множин. Зокрема, запропоновано математичну формалізацію задач, пов'язаних із просторовим розміщенням об'єктів, оптимізацією маршрутів доставки, зонуванням територій та розподілом ресурсів, у вигляді задач оптимального розбиття множини з урахуванням заданих критеріїв ефективності. Основна увага приділена динамічним аспектам формулювання задачі, які передбачають зміну вхідних даних у часі, а також наявність стохастичних компонентів і невизначеності. Наведено алгоритмічні підходи до розв'язання таких задач, зокрема із застосуванням модифікованих евристичних і метаевристичних методів, а також елементів машинного навчання для прогнозування змін у параметрах системи. Отримані результати можуть бути використані для підвищення ефективності прийняття управлінських рішень у логістиці, урбаністиці та інших прикладних сферах, де важливо враховувати як структуру простору, так і динаміку змін.
Ключові слова: оптимальне розбиття, логістичні задачі, динамічні моделі, просторове зонування, розподіл ресурсів, чисельне моделювання.

Постановка проблеми. У сучасному світі логістика відіграє ключову роль у забезпеченні ефективного функціонування як комерційних, так і державних систем, що керують потоками матеріальних ресурсів, послуг та інформації. Логістичні задачі охоплюють надзвичайно широкий спектр прикладних проблем: оптимізацію маршрутів доставки, планування розміщення складів і сервісних центрів, територіальне зонування для обслуговування населення, організацію розподілу ресурсів за наявності обмежень і невизначеності та багато інших. Традиційно такі задачі розв'язуються із застосуванням методів дослідження операцій, математичного програмування, теорії графів, еволюційних обчислень та інших чисельних і аналітичних підходів.

Однак зі зростанням складності модельованих систем посилюється потреба у більш гнучких, узагальнених і масштабованих методах, здатних враховувати як просторову, так і часову структуру задач. Одним із перспективних напрямів у цьому контексті є використання теорії оптимального розбиття множин – підходу, що ґрунтується на пошуку найкращого способу поділу множини об'єктів або елементів на підмножини відповідно до заданих критеріїв. Такий підхід забезпечує природну формалізацію багатьох

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

логістичних задач, зокрема тих, що пов’язані з розміщенням, кластеризацією, зонуванням і балансуванням навантаження між зонами обслуговування.

Динамічні постановки задач оптимального розбиття множин мають особливе значення у випадках, коли вхідні параметри змінюються з часом або зазнають стохастичних впливів. У таких умовах розв’язки повинні бути адаптивними, а алгоритми – здатними до перерахунку та оновлення результатів у режимі реального часу або з урахуванням прогнозованих змін. Це відкриває широкі можливості для інтеграції методів машинного навчання, байєсівських підходів до обробки невизначеності, а також для побудови гібридних моделей, що поєднують аналітичну строгость із евристичною гнучкістю.

Метою цієї статті є дослідження потенціалу застосування методів теорії оптимального розбиття множин для розв’язання логістичних задач у динамічних середовищах. Зокрема, розглянуто математичні постановки відповідних задач, запропоновано алгоритмічні підходи до їх розв’язання та проведено чисельні експерименти для оцінювання ефективності розроблених методів. Основну увагу приділено просторовим аспектам задач транспортної логістики, що потребують урахування географічної структури, а також задачам динамічного перерозподілу ресурсів за умов невизначених початкових даних. Отримані результати підтверджують перспективність запропонованого підходу та його потенціал для подальших досліджень і практичного застосування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розв’язання логістичних задач із використанням методів оптимального розбиття множин є актуальною проблематикою сучасної прикладної математики та інформатики. Для глибшого розуміння розвитку цього напряму розглянемо ключові праці у відповідній галузі – від класичних досліджень до сучасних результатів.

Фішер [1] запропонував застосування лагранжевої релаксації для знаходження оптимальних розв’язків задач покриття та розбиття множин. Запропонований підхід суттєво підвищує якість і швидкість отримання оптимальних розв’язків, що має принципове значення для логістичних задач із великою кількістю елементів. Відтоді метод лагранжевої релаксації став одним із базових інструментів дослідження задач комбінаторної оптимізації, зокрема у логістичних застосуваннях.

Кісельова та Шор [2] дослідили неперервні задачі оптимального розбиття множин, запропонувавши фундаментальні принципи та алгоритмічні підходи до їх розв’язання. Їх монографічний підхід охоплює аналіз властивостей задач, розробку ефективних алгоритмів і розгляд практичних застосувань, зокрема у сфері логістики та оптимального розподілу ресурсів. Ця праця суттєво розширила межі класичної теорії оптимального розбиття множин, адаптувавши її до неперервних і динамічних постановок задач.

У статті Кісельової, Притоманової та Гарт [3] запропоновано метод розв’язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття з урахуванням розміщення центрів підмножин. Авторами розроблено алгоритми, що поєднують методи комбінаторної оптимізації з евристичними підходами для адаптивного просторового розподілу елементів. Такий підхід є особливо актуальним для задач транспортної логістики в умовах динамічної зміни параметрів.

У цій же роботі [4] авторами запропоновано алгоритм побудови діаграм Вороного з оптимальним розміщенням генераторів на основі теорії оптимального розбиття множин. Це забезпечує можливість моделювання просторових розподілів об’єктів, що має безпосереднє застосування у задачах територіального зонування та оптимізації маршрутів.

У нещодавньому дослідженні Lin, Zhang та Li [5] розглянуто задачу оптимального нерозміченого розбиття множин із застосуванням до оцінювання ризиків. Авторами запропоновано сучасні математичні моделі та методи, які враховують невизначеність даних і забезпечують гнучку адаптацію до змін вхідної інформації, що є надзвичайно важливим для динамічних логістичних систем.

Samer та співавтори [6] представили новий підхід до узагальнених задач оптимального розбиття множин, заснований на релаксації узгодження – що дозволило суттєво розширити клас задач, придатних до розв’язання. Запропоновані методи демонструють високу ефективність при розв’язуванні великомасштабних задач із різними типами обмежень, характерних для логістичних систем.

Pintér [7] досліджував задачі глобальної оптимізації початкових центрів кластеризації для моделей розбиття множин – що сприяє формуванню більш якісних початкових наближень для ітераційних алгоритмів. Такий підхід підвищує загальну ефективність пошуку оптимальних розв’язків у задачах логістичного зонування.

Fekete, Koehler та Teich [8] запропонували методи багатовимірного пакування з урахуванням порядкових обмежень – які мають прикладне значення для планування складських і транспортних систем. Ця робота розширює класичні підходи до розбиття шляхом включення додаткових умов та обмежень.

Mallozzi, Puerto та Rodríguez-Madrena [9] розглядали задачі розміщення та розподілу з урахуванням просторових характеристик об’єктів – що є важливим для проєктування складських комплексів і логістичних хабів, де геометричні параметри та просторове розташування відіграють визначальну роль.

Класичні підручники Ahuja, Magnanti та Orlin [10], Nemhauser і Wolsey [11], а також Dantzig і Thapa [12] і надалі залишаються базовими джерелами для вивчення потоків у мережах, цілочислової оптимізації та лінійного програмування – напрямів, що становлять теоретичну основу багатьох сучасних методів розв’язання логістичних задач.

Довідковий посібник Gurobi Optimizer Reference Manual [13] ілюструє практичне застосування сучасних комерційних систем оптимізації для розв’язання складних оптимізаційних задач, зокрема задач оптимального розбиття множин і транспортної логістики.

У роботі Burke та Kendall [14] представлено сучасні методології пошуку та підходи до підтримки прийняття рішень – включно з евристичними й метаевристичними

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

алгоритмами, що широко використовуються для розв’язання складних оптимізаційних задач у логістиці.

Hwang, Richards та Winter [15] здійснили ґрунтовне дослідження задачі дерева Штейнера – однієї з ключових задач теорії графів і мережевої оптимізації, яка має важливі прикладні застосування у проєктуванні транспортних та комунікаційних мереж.

Отже, сучасний розвиток теорії оптимального розбиття множин і методів комбінаторної оптимізації відкриває широкі можливості для розв’язання складних логістичних задач із урахуванням просторових, часових і стохастичних аспектів. Поєднання класичних теоретичних засад із новими алгоритмічними підходами та потужними програмними засобами формує надійну основу для подальших досліджень і практичних застосувань.

Мета дослідження. Метою даної роботи є розробка підходу до розв’язання широкого класу логістичних задач на основі методів теорії оптимального розбиття множин. Зокрема, дослідження спрямоване на математичну формалізацію задач, пов’язаних із просторовим розміщенням об’єктів, оптимізацією маршрутів доставки, зонуванням територій та розподілом ресурсів, у вигляді задач оптимального розбиття множини з урахуванням заданих критеріїв ефективності.

Особлива увага приділена динамічним аспектам задачі, що передбачають зміну вхідних даних у часі, а також наявність стохастичних компонентів і невизначеності.

Викладення основного матеріалу дослідження. Знайти розбиття $\varpi = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\} \in \Sigma_\Omega^N$ множини $\Omega \subset E_n$ і векторну функцію $\rho(x,t)$, визначену майже всюди (м.в.) для $x \in \Omega$ та всіх $t \in [0,T]$, які забезпечують

$$\inf_{\varpi \in \sum_\Omega^N;\, \rho(x,t) \in L_2^N(\Omega \times [0,T])} F(\varpi, \rho(x,t)),$$

де

$$F(\varpi, \rho(x,t)) = \int_0^T \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (c_i(x, \tau_i) + a_i) \rho(x,t) dxdt$$

за умов

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = f(\rho(x,t), x, t), 0 \le t \le T$$

$$\rho(x, t_0) = \rho_0(x)$$

та з інтегральними обмеженнями

$$\int_0^T \int_{\Omega_i} \rho(x,t) dxdt = b_i; \quad i = \overline{1, N},$$

Загалом, інтегральні обмеження у задачах оптимального розбиття множин, транспорту, логістики відображають глобальні ліміти системи, сумарні запаси ресурсів або загальну пропускну спроможність, і тому відіграють ключову роль у прикладних постановках. Такі обмеження можуть моделювати, зокрема, сумарний запас пального чи сировини, сумарну виробничу потужність підприємства, загальну кількість місць у пунктах прийому (наприклад, для забезпечення допомоги), або сумарну пропускну здатність транспортних ділянок і сервісів. На відміну від локальних (точкових) обмежень, інтегральні умови зв'язують рішення на різних ділянках простору та інтервалах часу, ускладнюють структуру задачі і вимагають спеціалізованих аналітичних і чисельних підходів.

Формула, яка задає часову динаміку щільності у вигляді відповідного диференціального рівняння, природним чином приводить до постановки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. У такій постановці початкове значення щільності інтерпретується як початкова умова, тоді як сама система описує еволюцію щільності в часі. Це дозволяє застосовувати стандартний апарат теорії задачі Коші: досліджувати існування та єдиність розв'язку, встановлювати умови стійкості та неперервної залежності від початкових даних, а також обирати відповідні чисельні методи для інтегрування системи (методи Рунге-Кутта, Ейлера). Подібна формалізація забезпечує математичну коректність моделі та дозволяє узгоджено описувати зміну щільності в часі з урахуванням вибраного механізму динаміки.

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1,...,\Omega_N$ з $\Omega \subset E_n$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на його неперетинні підмножини $\Omega_1,...,\Omega_N$, якщо

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega,\ mes\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right) = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1,...,N,$$

де $mes(\cdot)$ означає міру Лебега.

м.в. для $x \in \Omega$, при фіксованих $\tau_i = (\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}) \in \Omega_i,\ i = 1,...,N$.

Тут $\rho(x,t)$ – шукана дійсна функція, визначена на $\Omega \times [0,T]$, яка неперервно диференційована за аргументом t на відрізку $[0,T]$ м.в. для $x = \left(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\right) \in \Omega$, обмежена та вимірна за аргументом x на Ω для всіх $t \in [0,T]$; $\rho_0(x)$ – задана невід'ємна функція, обмежена та вимірна за аргументом $x \in \Omega$; $f\left(\rho(x,t),x,t\right)$ – задана дійсна функція, неперервна та ліпшицева в межах свого визначення; $c_i\left(x,\tau_i\right)$ – визначені на $\Omega \times \Omega$ задані дійсні обмежені функції, вимірні за аргументом $x = \left(x^{(1)},...,x^{(n)}\right)$ при будь-якому фіксованому $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right) \in \Omega_i \subset \Omega; T > 0$ та $t_0 \in [0,T]$ задані числа; $a_1,...a_N$, $b_1,...,b_N$ – задані невід'ємні числа, причому

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

$$S = \int_0^T \int_\Omega \rho(x,t)dxdt \le \sum_{i=1}^N b_i, \quad 0 \le b_i \le S, \quad i = 1,...,N.$$

Тут і надалі інтеграли розуміються у сенсі Лебега. Вважатимемо, що міра множини межових точок Ω_i, $i = 1,...,N$, дорівнює нулю.

У наведеній математичній постановці динамічної задачі оптимального розбиття незалежна змінна $t \in [0,T]$ може відігравати роль часової змінної, а $T > 0$ та $t_0 \in [0,T]$ – задані кінцевий та початковий моменти часу в досліджуваному динамічному процесі.

Постановка задачі оптимального розбиття множини за умов динамічної, тобто залежної від часу щільності, може розглядатися і у випадку, коли функція щільності $\rho(x,t)$ одразу відома. У такій ситуації дослідження зосереджується на визначенні оптимального розбиття множини для кожного обраного інтервалу часу відповідно до заданої еволюції щільності та з урахуванням усіх заданих обмежень.

Слід підкреслити, що використання наперед відомої часової залежності щільності не усуває динамічний характер задачі. Незважаючи на те, що на кожному фіксованому часовому кроці розв’язання формально набуває статичної проблеми, зміна щільності в часі неминуче зумовлює трансформацію оптимального розбиття. Таким чином, задача зберігає динамічну природу, оскільки структура розбиття змінюється разом із розвитком системи у часі.

Так, функція $\rho(x,t)$, у диференціальних зв’язках, що відображає динаміку щільності на площині, може мати різний вигляд залежно від змісту, який в неї вкладається, наприклад:

- Щільність населення або потоків людей, що змінюється внаслідок міграції, евакуаційних процесів, сезонних коливань або нерівномірного попиту на певні послуги.
- Інтенсивність споживання ресурсів у просторі, коли різні регіони демонструють змінний попит (наприклад, електроенергії, товарів, медичних послуг), а динаміка щільності характеризує коливання цього попиту в часі.
- Концентрацію вантажних потоків, яка може зростати чи спадати залежно від транспортних умов, роботи логістичної інфраструктури або тимчасових обмежень пропускної спроможності.
- Розподіл ризиків або небезпек, наприклад у задачах моделювання поширення пожежі, забруднення чи епідеміологічних процесів, де щільність відображає ступінь загрози та її еволюцію.

Методи розв’язання логістичних задач. Розв’язування логістичних задач із використанням теорії оптимального розбиття множин ґрунтується на поєднанні аналітичних, чисельних та евристичних підходів, які забезпечують ефективне формування оптимальних або близьких до оптимальних розбиттів множин елементів відповідно до заданих критеріїв оптимізації. Нижче наведено основні методи, що застосовуються для розв’язання задач цього класу.

Комбінаторні методи та цілочислове програмування. Значна частина задач оптимального розбиття множин має комбінаторну природу та формалізується у вигляді задач цілочислової або булевої оптимізації. Методи цілочислового програмування дозволяють строго задати умови розбиття: належність елементів підмножинам, взаємну неперетинність підмножин, обмеження на їхні розміри або характеристики центрів. Багато таких задач є NP-складними, що зумовлює високу обчислювальну складність. Для їх розв'язання застосовуються методи повного перебору з відсіканням, алгоритми гілок і меж, методи площин відсікання та інші точні процедури оптимізації.

Релаксація Лагранжа. Релаксація Лагранжа є ефективним інструментом спрощення складних комбінаторних задач. Вона передбачає виділення складних обмежень і заміну їх штрафними доданками у цільовій функції з використанням множників Лагранжа. Такий підхід дозволяє декомпозувати задачу на простіші підзадачі, розв'язки яких обчислюються значно швидше. У задачах оптимального розбиття множин релаксація Лагранжа застосовується для отримання оцінок знизу цільового функціоналу та побудови наближених алгоритмів. Ітеративне коригування множників Лагранжа забезпечує поступове покращення якості розв'язку.

Методи кластеризації. Кластеризація є евристичним підходом, що широко застосовується для розбиття множин на основі подібності елементів. Поширені алгоритми, зокрема метод k-середніх, ієрархічна кластеризація та методи, засновані на щільності, використовують метрики відстані між елементами та центрами кластерів. У логістичних задачах ці методи застосовуються для формування зон обслуговування, розподілу транспортних засобів або розміщення складів. Їхніми основними перевагами є швидкодія та відносна простота реалізації, однак вони не гарантують досягнення глобального оптимуму.

Діаграми Вороного. Діаграми Вороного є геометричними структурами, що розбивають простір на області, кожна з яких асоціюється з певним центром. У задачах оптимального розбиття множин алгоритми побудови діаграм Вороного дозволяють моделювати зони впливу складів, сервісних пунктів або транспортних вузлів. Оптимізаційний аспект полягає у визначенні такого розташування центрів, яке мінімізує сумарні відстані або інші критерії витрат. Для цього застосовуються ітеративні процедури, що поєднують методи кластеризації та геометричні обчислення.

Еволюційні та метаевристичні алгоритми. З огляду на високу складність великомасштабних задач оптимального розбиття множин дедалі ширше використовуються еволюційні алгоритми (генетичні алгоритми, метод рою частинок), пошук із заборонами та інші метаевристики. Такі методи характеризуються високою гнучкістю, здатністю адаптуватися до динамічних змін параметрів та відсутністю потреби у жорстко заданих аналітичних моделях. Вони імітують природні або стохастичні процеси пошуку, що дозволяє зменшити ризик застрягання в локальних мінімумах і отримувати розв'язки високої якості.

Динамічні алгоритми та адаптивні підходи. Логістичні задачі часто потребують урахування мінливості даних і характеристик середовища. Динамічні алгоритми забез-

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

печують оновлення розбиття множини в міру надходження нової інформації або зміни параметрів. Адаптивні методи передбачають послідовне коригування положення центрів і структури підмножин на основі поточних спостережень, а також використання моделей машинного навчання для прогнозування майбутніх змін і випереджального налаштування розв'язків.

Гібридні методи. З метою підвищення ефективності розв'язування широко застосовуються гібридні підходи, що поєднують класичні алгоритми оптимізації з евристичними та метаевристичними процедурами. Наприклад, комбінування лагранжевої релаксації з генетичними алгоритмами або використання побудови діаграм Вороного як початкового етапу подальшої оптимізації. Такі методи дозволяють отримувати розв'язки високої якості за прийнятного часу обчислень, що є критично важливим для практичних задач у режимі реального часу.

Паралельні та розподілені обчислення. Із зростанням розмірності задач і обсягів даних особливої ваги набувають методи паралельних і розподілених обчислень. Вони передбачають розподіл обчислювального навантаження між кількома процесорами або вузлами, що суттєво скорочує час знаходження розв'язку. Паралелізація застосовується як до класичних алгоритмів (методи гілок і меж, лагранжева релаксація), так і до метаевристик, забезпечуючи ефективне масштабування обчислень.

Таким чином, для розв'язання логістичних задач із використанням теорії оптимального розбиття множин існує широкий спектр методів. Вибір конкретного підходу визначається особливостями задачі, розміром даних, часовими обмеженнями та вимогами до точності розв'язку. Поєднання класичних математичних методів із сучасними евристичними та адаптивними алгоритмами забезпечує високу ефективність і гнучкість у розв'язанні практичних логістичних проблем.

Висновки. У статті розглянуто основні методи розв'язання логістичних задач із використанням теорії оптимального розбиття множин. Аналіз показав, що класичні підходи, такі як цілочисельне програмування та лагранжеве релаксаційне розв'язання, забезпечують високу точність і теоретичне обґрунтування, але часто характеризуються значною обчислювальною складністю. Евристичні та метаевристичні алгоритми – генетичні алгоритми, пошук у табу, імітаційне відпалювання – пропонують гнучкість і швидкість, особливо для масштабних та динамічних задач.

Сучасні методи побудови діаграм Вороного та кластеризації ефективно моделюють просторові розподіли, що має велике значення для практичних застосувань у транспортній логістиці та зонуванні. Адаптивні та динамічні підходи враховують змінні параметри задачі, що дозволяє оновлювати рішення у режимі реального часу.

Використання гібридних методів та паралельних обчислень підвищує продуктивність і точність розв'язків, що критично для сучасних логістичних систем із великими обсягами даних та швидкозмінним середовищем.

Таким чином, комбінування різних методів із урахуванням специфіки задачі дозволяє досягти оптимального балансу між точністю, швидкістю та гнучкістю при управлінні логістичними процесами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Fisher M.L. Оптимальне розв'язання задач покриття/розбиття множин із використанням лагранжевої релаксації // Management Science, 1990, т. 36, № 6, с. 674–688. DOI: 10.1287/mnsc.36.6.674

2. Киселева Є. М., Шор Н. З. Неперервні задачі оптимального розбиття множин: теорія, алгоритми, застосування. Київ : Наукова думка, 2005. – 564 с.

3. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Hart L.L. Розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з розміщенням центрів підмножин // Open Computer Science, 2020, т. 10, с. 124–136. DOI: 10.1515/comp-2020-0142

4. Kiseleva E. M., Prytomanova O. M., Hart L. L. Алгоритм побудови діаграм Вороного з оптимальним розміщенням генераторних точок на основі теорії оптимального розбиття множин // Journal of Automation and Information Sciences, 2020, т. 52, № 3, с. 1–12.

5. Lin J., Zhang X., Li Z. Оптимальне розбиття без міток із застосуванням до оцінювання ризиків // Journal of Risk and Financial Management, 2024, т. 17, № 1, с. 25. DOI: 10.3390/jrfm17010025

6. Samer P., Cavalcante E., Urrutia S., Oppen J. Релаксація відповідностей для класу узагальнених задач розбиття множин // Computers & Operations Research, 2017, т. 85, с. 116–131. DOI: 10.1016/j.cor.2017.03.010

7. Pintér J. Розбиття множини за глобально оптимізованими початковими точками кластерів // European Journal of Operational Research, 2000, т. 125, № 1, с. 243–246. DOI: 10.1016/S0377-2217(99)00423-2

8. Fekete S. P., Koehler E., Teich J. Упаковка вищих вимірів із обмеженнями порядку // Discrete Applied Mathematics, 2003, т. 132, № 1–3, с. 67–85. DOI: 10.1016/S0166-218X(02)00323-4

9. Mallozzi L., Puerto J., Rodríguez-Madrena M. Про задачі розміщення-розподілу для розмірних об'єктів // European Journal of Operational Research, 2020, т. 281, № 2, с. 443–459. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.07.038

10. Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. Потоки в мережах: теорія, алгоритми та застосування. Prentice Hall, 2005. – 1020 с.

11. Nemhauser G.L., Wolsey L.A. Цілочисельна та комбінаторна оптимізація. Wiley-Interscience, 2009. – 768 с.

12. Dantzig G. B., Thapa M. N. Лінійне програмування 1: вступ. Springer, 2006. – 448 с.

13. Gurobi Optimization, LLC. Посібник користувача Gurobi Optimizer, 2022. Доступно: https://www.gurobi.com

14. Burke E.K., Kendall G., ред. Методи пошуку: вступні навчальні посібники з оптимізації та прийняття рішень. Springer, 2014. – 324 с.

15. Hwang F.K., Richards D.S., Winter P. Задача дерева Штейнера. Elsevier, 2013. – 392 с.

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

REFERENCES

1. Fisher M. L. Optimal Solution of Set Covering/Partitioning Problems Using Lagrangian Relaxation. Management Science, 1990, vol. 36, no. 6, pp. 674–688.
DOI: 10.1287/mnsc.36.6.674
2. Kiseleva E. M., Shor N. Z. Continuous Problems of Optimal Partitioning of Sets: Theory, Algorithms, Applications. Kyiv: Naukova Dumka, 2005. – 564 p.
3. Kiseleva E. M., Prytomanova O. M., Hart L. L. Solving a Two-Stage Continuous-Discrete Problem of Optimal Partitioning-Allocation with Subsets Centers Placement. Open Computer Science, 2020, vol. 10, pp. 124–136. DOI: 10.1515/comp-2020-0142. ISSN 2312-119X.
4. Kiseleva E. M., Prytomanova O. M., Hart L. L. Algorithm for Constructing Voronoi Diagrams with Optimal Placement of Generator Points Based on Theory of Optimal Set Partitioning. Journal of Automation and Information Sciences, 2020, vol. 52, no. 3, pp. 1–12.
5. Lin J., Zhang X., Li Z. Optimal Unlabeled Set Partitioning with Application to Risk Assessment. Journal of Risk and Financial Management, 2024, vol. 17, no. 1, p. 25.
DOI: 10.3390/jrfm17010025
6. Samer P., Cavalcante E., Urrutia S., Oppen J. The Matching Relaxation for a Class of Generalized Set Partitioning Problems. Computers & Operations Research, 2017, vol. 85, pp. 116–131. DOI: 10.1016/j.cor.2017.03.010
7. Pintér J. Set Partition by Globally Optimized Cluster Seed Points. European Journal of Operational Research, 2000, vol. 125, no. 1, pp. 243–246.
DOI: 10.1016/S0377-2217(99)00423-2
8. Fekete S. P., Koehler E., Teich J. Higher-Dimensional Packing with Order Constraints. Discrete Applied Mathematics, 2003, vol. 132, no. 1–3, pp. 67–85.
DOI: 10.1016/S0166-218X(02)00323-4
9. Mallozzi L., Puerto J., Rodríguez-Madrena M. On Location-Allocation Problems for Dimensional Facilities. European Journal of Operational Research, 2020, vol. 281, no. 2, pp. 443–459. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.07.038
10. Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. Prentice Hall, 2005. – 1020 p.
11. Nemhauser G.L., Wolsey L.A. Integer and Combinatorial Optimization. Wiley-Interscience, 2009. – 768 p.
12. Dantzig G.B., Thapa M. N. Linear Programming 1: Introduction. Springer, 2006. – 448 p.
13. Gurobi Optimization, LLC. Gurobi Optimizer Reference Manual, 2022. Available at: https://www.gurobi.com
14. Burke E.K., Kendall G., editors. Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques. Springer, 2014. – 324 p.
15. Hwang F.K., Richards D.S., Winter P. The Steiner Tree Problem. Elsevier, 2013. – 392 p.

Received 03.03.2026
Accepted 09.03.2026
Published 31.03.2026

On solving logistics problems using the methods of the theory of optimal set partitioning

The paper presents an approach to solving a broad class of logistics problems based on the methods of the theory of optimal set partitioning. In particular, a mathematical formalization is proposed for problems related to spatial allocation of objects, route optimization, territory zoning, and resource distribution, formulated as optimal set partitioning problems according to predefined efficiency criteria. The main focus is on the dynamic aspects of the problem formulation, which involve time-varying input data as well as stochastic components and uncertainty. Algorithmic approaches to solving such problems are outlined, including the use of modified heuristic and metaheuristic methods, as well as elements of machine learning for forecasting changes in system parameters. The obtained results can be used to improve the efficiency of decision-making in logistics, urban planning, and other applied fields where it is essential to consider both spatial structure and dynamic changes.

Keywords: optimal partitioning, logistics problems, dynamic models, spatial zoning, resource allocation, numerical modeling.

Лупинський Станіслав Володимирович – аспірант кафедри прикладної математики, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Україна, Дніпро.
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-7484-4392
Лозовський Артур Валентинович – аспірант кафедри прикладної математики, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Україна, Дніпро.
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-7013-7430

Lupynskyi Stanislav – PhD student, Department of Applied Mathematics, Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine, Dnipro.
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-7484-4392
Lozovskyi Artur – PhD student, Department of Applied Mathematics, Oles Honchar Dnipro National University, Ukraine, Dnipro.
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-7013-7430

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)