

**МАТЕМАТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ РОЗМІЩЕННЯ  
ЛОГІСТИЧНИХ ЦЕНТРІВ І ДВОЕТАПНОГО РОЗПОДІЛУ  
МАТЕРІАЛЬНИХ ПОТОКІВ: СЦЕНАРНИЙ ПІДХІД**

*Анотація.* Розглянуто двоетапний процес евакуації населення та розподілу матеріальних ресурсів у системі екстреної логістики, що включає пункти збору населення та центри евакуації. При цьому передбачається, що населення неперервно розподілене у межах регіону, а вибір місць збору та центрів здійснюється з урахуванням різних сценаріїв надзвичайних ситуацій і обмежень доступності територій та ресурсів. Метою роботи є забезпечення ефективної організації евакуаційних і матеріальних потоків шляхом розроблення математичної моделі та методів оптимізації, які дозволяють визначати координати, кількість та місткість пунктів збору і центри евакуації, а також раціонально розподіляти людські та матеріальні потоки між етапами.

*Математичне забезпечення задачі базується на комбінованому використанні континуальних та дискретних підходів: населення та пункти збору розглядаються як неперервно розподілені в регіоні, а пункти безпечного перебування – як дискретні об'єкти. Модель дозволяє оптимально визначати, з яких областей населенню слід збиратися в конкретні пункти збору, та як потоки населення розподіляються до пунктів безпечно-го перебування з урахуванням таких факторів, як відстань та час переміщення, місткість об'єктів і різні сценарії надзвичайних ситуацій. Такий підхід формалізує двоетапний процес евакуації і забезпечує оцінку ключових логістичних показників системи.*

*Ключові слова:* сценарний підхід, багатоетапні логістичні процеси, зонування територій, математична модель, оптимізація, задачі розміщення-розподілу, системний аналіз.

**Постановка проблеми.** Важливим напрямом сучасних наукових досліджень у галузі безпеки життєдіяльності є гуманітарна логістика, що зосереджена на проблемах реагування на надзвичайні ситуації природного та техногенного характеру. У межах цього напрямку особлива увага приділяється раціональній організації евакуаційних процесів, плануванню руху людських і матеріальних потоків та зменшенню масштабів негативних наслідків надзвичайних подій.

Сукупність наукових підходів і практичних заходів, спрямованих на управління логістичними процесами в умовах обмеженого часу та високого рівня невизначеності, доцільно розглядати як екстрену логістику. Актуальність досліджень у сфері екстреної логістики зростає зі збільшенням кількості природних катастроф, техногенних аварій і

воєнних конфліктів, які супроводжуються значними соціально-економічними втратами. Додатковими чинниками ризику є зношеність об'єктів інфраструктури, ускладнення умов доступу до постраждалих територій та обмеженість ресурсів у кризових ситуаціях. У зв'язку з цим виникає потреба у створенні ефективних моделей планування та управління евакуаційними і матеріальними потоками на регіональному рівні.

Організація екстреної логістики передбачає узгоджену взаємодію пунктів збору населення, розподільчих центрів, транспортних засобів і служб реагування, які спільно забезпечують виконання евакуаційних і забезпечувальних заходів у надзвичайних умовах. Ефективність такої організації значною мірою залежить від правильного вибору місць розташування ключових об'єктів та раціонального розподілу потоків між ними.

Як зазначено в [1], розподільча логістика на макрорівні вирішує питання визначення оптимальної кількості та місця розташування розподільчих центрів (складів) на території, що обслуговується; вибору схеми розподілу матеріального потоку; ряд інших завдань, пов'язаних з управлінням процесом проходження матеріального потоку по території району, області. Дана робота присвячена математичному моделюванню і оптимізації схеми двоетапного розподілу матеріальних або евакуаційних потоків та ефективної організації транспортних перевезень на випадок різних надзвичайних ситуацій на основі сценарного підходу.

Об'єкт дослідження – процеси екстреної логістики в умовах надзвичайних ситуацій.

Предмет дослідження – моделі та методи оптимального розміщення структурних елементів систем екстреної логістики з двоетапним розподілом матеріальних ресурсів в умовах невизначеності.

У дослідженні робиться спроба врахувати невизначеність, пов'язану з характером надзвичайних ситуацій, які можуть скластися в регіоні шляхом розгляду декількох можливих варіантів їх появи.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Математичне і комп'ютерне моделювання логістичних процесів вносять важливий внесок у їх розуміння та оптимізацію, допомагають зацікавленим особам приймати раціональні рішення в умовах сучасної конкуренції та нестабільності. Наукові публікації останнього двадцятиріччя демонструють різноманітність підходів та методів, що застосовуються для вирішення проблем розміщення логістичних об'єктів, налагоджування зв'язків між ними. Розглянемо декілька досліджень, що демонструють широту та потужність математичного та алгоритмічного забезпечення багатоетапних процесів розподілу матеріальних потоків, зокрема в контексті евакуаційної логістики.

В роботі [2] розглядається задача евакуації населення в надзвичайних ситуаціях з урахуванням автобусної евакуації та перевантажень транспортної мережі, з акцентом на оптимальний вибір безпечних місць. Задача є дискретною оптимізаційною задачею на транспортній мережі, де місця укриттів обираються зі скінченної множини. Математична модель статті поєднує задачу розміщення об'єктів із моделлю транспортних потоків із урахуванням заторів, тоді як етап збору людей не моделюється. Для розв'язання

використано еволюційний метаевристичний алгоритм із локальним пошуком, що дозволяє знаходити наближені рішення для великорозмірних дискретних задач.

Дослідження [3] присвячена оптимізації розташування екстрених укриттів з урахуванням ризику повеней та ефективності евакуаційної інфраструктури в умовах стихійного лиха. Основна мета – зменшити відстань і нерівність доступу до укриттів, забезпечуючи ефективну послугу для населення в умовах надзвичайної ситуації. Модель є дискретною просторовою оптимізаційною задачею на мережі, де потенційні укриття й місця попиту мають ваги ризику (враховані через оцінку ризику повені), а ціль - мінімізувати врівноважені відстані евакуації й нерівності доступу. У цій роботі фокус на локалізації укриттів для пішої чи загальної евакуації, без явного моделювання етапу транспортування автобусами. Оптимізація здійснюється через еволюційний метаевристичний підхід для багатокритеріальних задач. Порівняно з існуючими конфігураціями укриттів, отриманий план значно зменшує сумарну евакуаційну відстань та нерівність доступу.

Автори статті [4] пропонують двокритеріальну оптимізаційну модель планування евакуації людей в умовах пандемії, яка одночасно мінімізує загальний час евакуації та ризик передачі вірусу в укриттях. Модель є дискретною, де кожному евакуйованому призначається шлях і укриття з урахуванням обмежень щодо місткості і розподілу навантаження для зниження ризику зараження. Робота зосереджена на розподілі населення між доступними укриттями і побудові маршрутів для мінімізації часу та ризику, без окремого етапу збору у фіксованих пунктах. Для розв'язання використовується DECON алгоритм, який дозволяє ефективно генерувати компромісні стратегії для великих сценаріїв евакуації, балансує швидкість і безпеку розміщення людей.

Робота [5] представляє нову оптимізаційну модель Quickest Evacuation Location Problem (QELP), яка одночасно вирішує розміщення сховищ і планування евакуації з урахуванням часу евакуації, бюджету та балансу завантаження укриттів. Модель представлена як задача змішаного цілочислового програмування з кількома цілями, використовується метод посиленних  $\epsilon$ -обмежень та матевристика для великих сценаріїв. Розглядається динамічний потік на мережі.

Модель розміщення сховищ в контексті повеней, що враховує вразливість населення й різноманітні потреби, розглядається в роботі [6]. Застосовується мультиоб'єктне програмування та GIS-аналіз. В роботі робиться акцент на неоднорідності попиту та геопросторових даних.

У роботі [7] проведено аналіз умов розміщення та призначення сховищ після землетрусу з урахуванням таких критеріїв як доступність до доріг, наближеність до медичних установ, вразливість населення, місткість тощо. Використовуються методи CRITIC та TOPSIS для оцінювання потенційних місць, а далі – модель покриття зі зваженою місткістю для розподілу населення. Евакуація не поділяється чітко на етапи (збір, перевезення тощо), але зосереджується на мережевому аналізі доступності та вагових критеріях.

Робота [8] розширює класичну задачу розміщення-розподілу тим, що враховує залежний від часу попит на евакуацію, тобто кількість людей, які потребують укриття,

змінюється протягом доби залежно від часу. Це важливо, оскільки щільність населення не є сталою. Модель аналізує, які укриття відкривати за різних часових сценаріїв попиту, що дозволяє краще адаптувати плани для реального часу. У статті використовується динамічний розподіл точок попиту до укриттів.

Двофазну і двоетапну модель для просторового розміщення укриттів розглянуто у статті [9]. Перша фаза вирішує проблему базових укриттів, а друга – детальні розміщення з урахуванням потоків трафіку. Метод розв'язування поєднує генетичні алгоритми та трафік-аналіз, що дозволяє підвищити ефективність розміщення з оптимальним балансом між кількістю укриттів і загальною евакуаційною ефективністю.

Автори [10] розглядають задачу розміщення укриттів при великомасштабній евакуації як комбіновану проблему розміщення і маршрутизації з обмеженням місткості укриттів. Використовується поліпшений квантовий генетичний алгоритм, який дозволяє швидко знаходити ефективні схеми розподілу населення, зважаючи на загальну довжину евакуаційних маршрутів і рівномірність розподілу людей між укриттями для уникнення перевантажень.

У статті [11] розглядається оцінка моделі розміщення-розподілу для евакуації під впливом кількох загроз одночасно (наприклад, повені та зсуву). Автори аналізують, як зміна сценаріїв загроз змінює ефективність укриттів, і пропонують адаптивний підхід до вибору укриттів з урахуванням ризику від різних катастроф. Це дозволяє розробляти універсальні плани для мультиризикових середовищ.

Робота [12] пропонує багатоцільову DRO-модель для розміщення укриттів при невизначеному попиту. Модель мінімізує одночасно загальні витрати, евакуаційну відстань і кількість невлаштованих людей, враховуючи найгірші сценарії розподілу попиту. Підхід DRO відрізняється від звичайних стохастичних моделей тим, що він не потребує повної інформації про розподіл параметрів, а працює з нечіткими наборами розподілів. Це робить рішення стійкішими при високому ступені невизначеності.

У статті [13] розглядається вплив динаміки населення (наприклад, зміна присутніх осіб у різні часи доби) на оптимальне розміщення укриттів та їх розподіл. Автор показує, що використання лише статичних даних населення може призводити до менш ефективних рішень і що включення часових змін щільності населення може покращити розподіл укриттів, зменшивши відстані та перевантаження.

Дослідження [14] присвячене розробці ієрархічної моделі просторового розташування й розподілу евакуаційних укриттів з урахуванням динамічних потреб населення під час надзвичайних ситуацій. Пропонується двоетапний підхід: на першому етапі оптимізується розташування укриттів із мінімальними витратами, а на другому – розподіл населення із мінімізацією евакуаційних відстаней. Застосовано цільові функції та алгоритми для вирішення задачі розташування й розподілу з метою підвищення ефективності евакуаційної інфраструктури. Результати підкреслюють важливість інтегрованого підходу до планування укриттів та оцінки їх розподілу для зменшення часу евакуації та забезпечення кращого доступу населення до безпечних місць.

Робота [15] присвячена розробці багатокритеріальної двоетапної стохастичної моделі програмування для планування системи транспортування постраждалих після масштабних катастроф. Основна мета – мінімізувати кількість нерозміщених пацієнтів, додаткову кількість необхідних швидких та загальний час транспортування до лікарень, враховуючи невизначеність у доступності місць та змінні потреби. Модель застосовано до районів Стамбула, а рішення отримано методом покращеного  $\epsilon$ -обмеження (AUGMECON2), що дозволяє оцінити ефективність рішень з огляду на час та рівність доступу до медичної допомоги.

Дослідження [16] присвячене розробці моделі проектування логістичної мережі типу «hub-and-spoke» для міського регіону з використанням підходу на основі кластеризації. Запропоновано багатоетапний метод, який включає кластеризацію для виявлення центрів (хабів) з метою мінімізації транспортних витрат, балансування попиту між хабами, а також вирішення задачі розташування об'єктів і маршрутизації транспортних засобів. Експериментальна оцінка на реальних даних для Хо-Ші-Міну показує, що запропонований підхід зменшує транспортні витрати і підвищує ефективність обслуговування.

Дана робота присвячена моделюванню двоетапного розподілу евакуаційних процесів. На відміну від моделей, які розроблено і представлено в роботі [17], тут розглядається єдина транспортно-логістична система, але потоки в ній розподіляються залежно від сценаріїв надзвичайних ситуацій, що можуть скластися в регіоні, за аналогією [16].

**Мета дослідження.** Створення ефективної системи екстреної логістики на випадок різних надзвичайних ситуацій в регіоні шляхом розроблення математичної моделі й методу оптимізації розміщення структурних елементів системи і двоетапного розподілу матеріальних потоків, яка дозволить за різних екстрених умов проводити організацію логістичних процесів, раціонально розподіляючи транспортні та матеріальні потоки.

**Викладення основного матеріалу.** Розглянемо територію  $\Omega$  деякого регіону країни, на якій можуть відбутися надзвичайні ситуації (НС) техногенного або природного характеру, внаслідок чого населення з постраждалої території повинно бути евакуйоване до сховищ або інших кінцевих пунктів. Евакуація здійснюється в два етапи: спочатку мешканці самостійно добираються до первинних місць збору, а потім організованими групами транспортуються до тимчасових пунктів розміщення населення (ТПР). Потрібно визначити оптимальні місця розміщення первинних пунктів збору та закріплених за ними зон евакуації, визначити обсяги евакуаційних потоків і розподілити їх між доступними кінцевими пунктами для кожного з можливих сценаріїв розвитку надзвичайної події (сценарії  $s \in \bar{S}$ ). Метою є мінімізація середніх по всім сценаріям загальних витрат на евакуацію, які враховують сумарні зусилля мешканців, аби дібратися свого пункту збору (які пропорційні маршрутному часу або відстані), транспортування їх до ТПР, можливу потребу розширення місткості останніх.

На рис. 1 представлені два сценарії НС, можливі центри першого і другого етапів евакуації, при цьому пункти первинного збору є спільними для обох сценаріїв, а кінцеві

пункти є визначеними заздалегідь, але частина з них у разі окремих НС може бути недоступною.

Для побудови математичної моделі введемо такі позначення.

Нехай  $\bar{S} = \{1, 2, \dots, S\}$  – множина можливих сценаріїв НС, кожен з яких визначається наступними параметрами:  $\Omega \subset R^2$  – територія регіону;  $\Omega^s$  – територія НС;  $\Omega_i^s \subset \Omega^s$  – зона обслуговування місця збору  $\tau_i^I$  для сценарію  $s$ ;  $\rho^s(\cdot)$  – щільність населення, постраждалого у результаті НС за сценарієм  $s$ ;  $\tau_i^I = (\tau_i^{I1}, \tau_i^{I2})$  – координати місця збору  $i = 1, \dots, N$ , які потрібно визначити;  $\tau_j^{II} = (\tau_j^{II1}, \tau_j^{II2})$  – координати сховища  $j = 1, \dots, M$  (заздалегідь відомі);  $b_i^I$  – базова пропускна здатність місця збору  $i$ ;  $b_j^{II}$  – місткість сховища  $j$ ;  $\theta_j^s \in \{0, 1\}$  – доступність сховища  $j$  для сценарію  $s$  (1 – доступне, 0 – недоступне);  $y_i^s$  – коефіцієнт, у скільки разів можна змінити потужність місця збору  $i$  для сценарію  $s$ ;  $\omega_i$  – відсоток від поточної потужності центру, на який можна максимально її збільшити;  $c^s(x, \tau_i^I)$  – маршрутний час від точки  $x \in \Omega_i^s$  до місця збору  $\tau_i^I$ ;  $c(\tau_i^I, \tau_j^{II})$  – вартість транспортування з місця збору  $\tau_i^I$  до сховища  $\tau_j^{II}$ ;  $c_i^{\text{доп}}$  – додаткові витрати при розширенні потужності сховища місця збору, розраховані на одну одиницю ресурсу;  $q_s$  – ймовірність реалізації сценарію  $s$ , де  $\sum_{i=1}^S q_i = 1$ ;  $v_{ij}^s$  – кількість людей, перевезених з місця збору  $\tau_i^I$  до сховища  $\tau_j^{II}$  для сценарію  $s$ ;  $\beta_{1,2,3} \geq 0$  – коефіцієнти, які визначають пріоритетність витрат, і враховують приведення їх до безрозмірного вигляду.

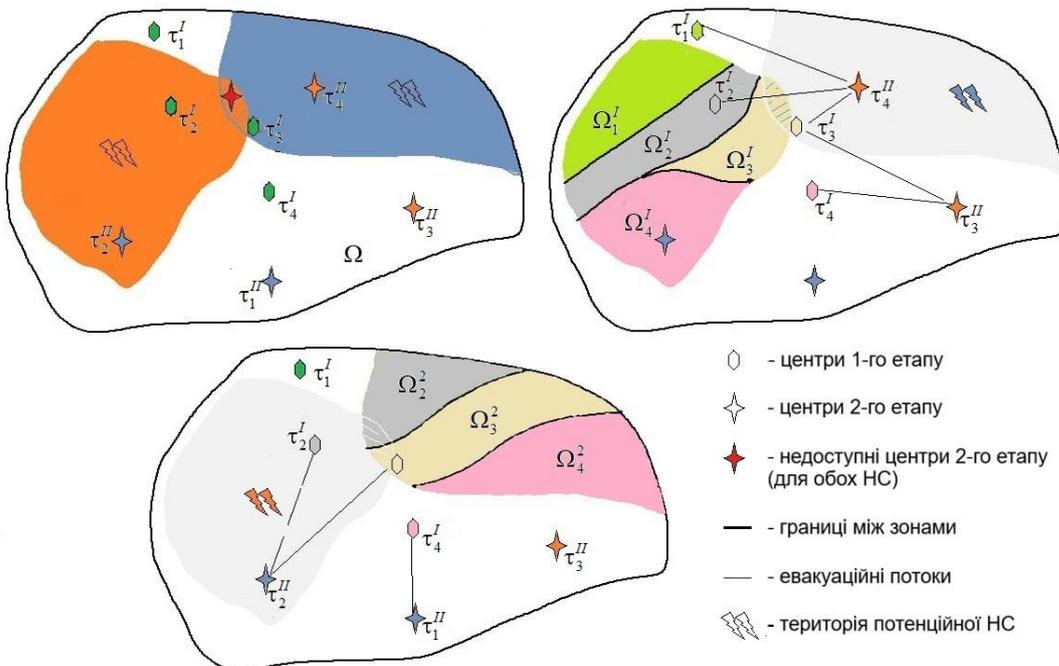


Рисунок 1 - Два сценарії НС, розміщення центрів і зонування території НС

Для кожного  $s = 1, 2, \dots, S$  введемо до розгляду клас  $\Sigma_{\Omega^s}^N$  – клас всіх можливих розбиттів множини  $\Omega^s$  на  $N$  підмножин:

$$\Sigma_{\Omega^s}^N = \left\{ \bar{\zeta}_s = \{\Omega_1^s, \dots, \Omega_N^s\}: \bigcup_{i=1}^N \Omega_i^s = \Omega^s, \text{mes}(\Omega_i^s \cap \Omega_j^s) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, N} \right\}$$

і позначимо  $\Sigma_{\{\Omega^1, \dots, \Omega^S\}}^N = \{\bar{\zeta} = \{\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_S\}: \bar{\zeta}_s \in \Sigma_{\Omega^s}^N, s = \overline{1, S}\}$  клас всіх можливих розбиттів кожної із сукупності територій  $\{\Omega^1, \dots, \Omega^S\}$  на  $N$  підмножин.

Математична постановка задачі розміщення первинних пунктів збору і двоетапного розподілу евакуаційних потоків з мінімізацією середніх за всіма можливими сценаріями НС загальних витрат записується у такий спосіб:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\zeta}, \tau^I, y, v} F(\bar{\zeta}, \tau^I, y, v), \\ F(\bar{\zeta}, \tau^I, y, v) = \sum_{s=1}^S q_s \left( \beta_1 \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i^s} c^s(x, \tau_i^I) \rho^s(x) dx + \beta_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}^s \right. \\ \left. + \beta_3 \sum_{i=1}^N (y_i^s - 1) b_i^I c_i^{\text{доп}} \right), \end{aligned}$$

за умов на

- потужність місць збору:

$$\int_{\Omega_i^s} \rho^s(x) dx \leq y_i^s b_i^I, \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad \forall s = \overline{1, S} \quad (1)$$

- усі евакуйовані мешканці розподіляються за кінцевими пунктами:

$$\int_{\Omega_i^s} \rho^s(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}^s, \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad \forall s = \overline{1, S} \quad (2)$$

- місткість кінцевих пунктів (сховищ):

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^s \leq \theta_j^s b_j^{II}, \quad \forall j = \overline{1, M}, \quad \forall s = \overline{1, S} \quad (3)$$

- розширення (у разі необхідності) місткості первинних пунктів:

$$1 \leq y_i^s \leq \left(1 + \frac{\omega_i}{100}\right), \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad \forall s = \overline{1, S} \quad (4)$$

- зонування території:

$$\Omega^s = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i^s, \quad \Omega_i^s \cap \Omega_k^s = \emptyset, \quad \forall i \neq k, \quad \forall s = \overline{1, S}. \quad (5)$$

$$\tau^I \in \Omega^N, \quad \Omega^N = \Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega; \quad \bar{\zeta} \in \Sigma_{\{\Omega^1, \dots, \Omega^S\}}^N; \quad y \in R^{SN}, \quad (6)$$

$$v \in V, \quad (7)$$

$$V = \{v \in R^{SNM}: v_{ij}^s \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \quad s = \overline{1, S}\}.$$

Легко показати, що умовою розв'язності задачі (1) – (5) є наступна подвійна нерівність:

$$\sum_{j=1}^M \theta_j^s b_j^{II} \geq \sum_{i=1}^N b_i^I \left(1 + \frac{\omega_i}{100}\right) \geq \int_{\Omega} \rho^s(x) dx, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (8)$$

Якщо кінцеві центри збору розташовані у безпечних для будь-якого сценарію місцях (всі  $\theta_j^s = 1$ ), то умова (8) набуває вигляду

$$\sum_{j=1}^M b_j^{II} \geq \sum_{i=1}^N b_i^I \geq \max_{s=\overline{1,S}} \int_{\Omega} \rho^s(x) dx \quad (9)$$

**Зауваження.** Для врахування максимально можливого часу евакуації до задачі (1) – (7) можна додати умову

$$\max_{x \in \Omega_i^s} c^s(x, \tau_i^I) \leq V\_aver \cdot T_i^S, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

$V\_aver$  – середня швидкість людини.

**Обґрунтування методу розв’язання задачі.** Нехай виконуються умови (8). Введемо характеристичні функції підмножин  $\Omega_i^s$  у вигляді:

$$\lambda_i^s(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i^s, \\ 0, & x \in \Omega^s \setminus \Omega_i^s, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \quad s = 1, 2, \dots, S.$$

Тоді функціонал  $F$  можна записати в еквівалентному вигляді:

$$F(\bar{\zeta}, \tau^I, y, v) = I((\lambda(\cdot), \tau^I, y, v)),$$

$$I((\lambda(\cdot), \tau^I, y, v)) =$$

$$= \sum_{s=1}^S q_s \sum_{i=1}^N \left( \beta_1 \int_{\Omega^s} c^s(x, \tau_i^I) \rho^s(x) \lambda_i^s(x) dx + \beta_2 \sum_{j=1}^M c(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}^s + \beta_3 (y_i^s - 1) b_i^I c_i^{\text{доп}} \right),$$

а інтеграли  $\int_{\Omega^s} \rho^s(x) dx$  в обмеженнях (1), (2) замінити на  $\int_{\Omega^s} \rho^s(x) \lambda_i^s(x) dx$ .

**Задача А.** Знайти

$$\min_{\lambda(\cdot), \tau^I, y, v} I(\lambda(\cdot), \tau^I, y, v), \quad (10)$$

за умов

$$\int_{\Omega^s} \rho^s(x) \lambda_i^s(x) dx \leq y_i^s b_i^I, \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad \forall s = \overline{1, S}; \quad (11)$$

$$\int_{\Omega^s} \rho^s(x) \lambda_i^s(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}^s, \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad \forall s = \overline{1, S}; \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^s \leq \theta_j^s b_j^{II}, \quad \forall j = \overline{1, M}, \quad \forall s = \overline{1, S}; \quad (13)$$

$$1 \leq y_i^s \leq \left(1 + \frac{\omega_i}{100}\right), \quad \forall i = \overline{1, N}, \quad \forall s = \overline{1, S}; \quad (14)$$

$$y \in R^{SN}; \quad \lambda(\cdot) \in \Gamma_0, \quad (15)$$

$$\tau^I \in \Omega^N, \quad (16)$$

$$v \in V \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^s(x) = 1, \text{ м. в. для } x \in \Omega^s, s = \overline{1, S}, \tag{18}$$

$$\Gamma_0 = \{\lambda(\cdot) = (\lambda^1(\cdot), \dots, \lambda^S(\cdot)): \lambda^s(\cdot) \in \Gamma_1^s, \forall s = \overline{1, S}\},$$

$$\Gamma_1^s = \{\lambda^s(\cdot) = (\lambda_1^s(\cdot), \dots, \lambda_N^s(\cdot)): \lambda_i^s(x) = 0 \vee 1, i = \overline{1, N} \text{ м. в. для } x \in \Omega^s, s = \overline{1, S}\}.$$

Від задача **A**, яка є задачею нескінченновимірною математичного програмування з булевими змінними  $\lambda(\cdot)$ , перейдемо до задачі зі значеннями компонент вектор-функції  $\lambda(\cdot)$  на відрізку  $[0, 1]$ .

**Задача Б.** Знайти  $\lambda^*(\cdot) \in \Gamma, \tau^{I*} \in \Omega^N, y^* \in R^{SN}, v^* \in V$ , які мінімізують функціонал  $I(\lambda(\cdot), \tau^I, y, v)$  за умов (11) – (18), а множина  $\Gamma$  визначається так:

$$\Gamma = \{\lambda(\cdot) = (\lambda^1(\cdot), \dots, \lambda^S(\cdot)): \lambda^s(\cdot) \in \Gamma_2^s, \forall s = \overline{1, S}\},$$

$$\Gamma_2^s = \{\lambda^s(\cdot) = (\lambda_1^s(\cdot), \dots, \lambda_N^s(\cdot)): 0 \leq \lambda_i^s(x) \leq 1, \text{ м. в. для } x \in \Omega^s, i = \overline{1, N}\} \\ \forall s = \overline{1, S}.$$

Зрозуміло, що

$$I((\lambda^*(\cdot), \tau^{I*}, y^*, v^*)) = \min_{(\tau^I, y, v) \in \Omega^N \times R^{SN} \times V} \left[ \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} I((\lambda(\cdot), \tau^I, y, v)) \right], \tag{19}$$

де мінімум праворуч обчислюється за допустимими наборами змінних величин. При кожному фіксованому допустимому наборі векторів  $\tau^I \in \Omega^N, y \in R^{SN}, v \in V$ , які мінімізують функціонал  $I(\lambda(\cdot), \tau^I, y, v)$  за умов (11) – (18), внутрішня задача в (19) є розв'язною, адже мова йде про функціонал, який є сепарабельним, лінійним відносно кожної з компонент  $\lambda^s(\cdot)$  вектор-функції  $\lambda(\cdot)$  на опуклій, замкненій, обмеженій множині гільбертова простору  $L_2^N(\Omega^s)$ . Крім того, серед множини оптимальних розв'язків задачі **Б** є оптимальні розв'язки задачі **A**.

Для отримання необхідних і достатніх умов оптимальності для задачі **Б** введемо функціонал Лагранжа в наступному вигляді:

$$L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, y, v\}, \{\Psi_0(\cdot), \psi, \eta, \mu\}) = \\ = \sum_{s=1}^S q_s \sum_{i=1}^N \left( \beta_1 \int_{\Omega^s} c^s(x, \tau_i^I) \rho^s(x) \lambda_i^s(x) dx + \beta_2 \sum_{j=1}^M c(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}^s + \beta_3 (y_i^s - 1) b_i^s c_i^{\text{доп}} \right) + \sum_{i=1}^N \psi_i^s \left( \int_{\Omega^s} \rho^s(x) \lambda_i^s(x) dx - y_i^s b_i^s \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{s=1}^S \left( \sum_{i=1}^N \eta_i^s \left( \int_{\Omega^s} \rho^s(x) \lambda_i^s(x) dx - \sum_{j=1}^M v_{ij}^s \right) + \sum_{j=1}^M \mu_j^s \left( \sum_{i=1}^N v_{ij}^s - \theta_j^s b_j^{II} \right) \right) + \\
 & + \sum_{s=1}^S \int_{\Omega^s} \psi_0^s(x) \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i^s(x) - 1 \right) dx = \\
 & = \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N \int_{\Omega^s} ((\beta_1 q_s c^s(x, \tau_i^I) + \psi_i^s + \eta_i^s) \rho^s(x) + \psi_0^s(x)) \lambda_i^s(x) dx + \\
 & + \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2 q_s c(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \eta_i^s + \mu_j^s) v_{ij}^s + \\
 & + \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N (\beta_3 q_s - \psi_i^s b_i^I) y_i^s - \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^M (\mu_j^s \theta_j^s b_j^{II}) - \sum_{s=1}^S \int_{\Omega^s} \psi_0^s(x) dx - \beta_3 \sum_{i=1}^N b_i^I c_i^{\text{доп}},
 \end{aligned}$$

де  $\lambda(\cdot) \in \Gamma, \tau^I \in \Omega^N, y \in Y,$

$Y = \{y \in R^{SN}, 1 \leq y_i^s \leq (1 + \frac{\omega_i}{100}) \quad i = \overline{1, N}, s = \overline{1, S}\}, v \in V,$  набір двоїстих змінних

них  $\{\Psi_0(\cdot), \psi, \eta, \mu\} \in \Lambda,$

$$\Lambda = \{(\Psi_0(\cdot), \psi, \eta, \mu): \Psi_0(\cdot) = (\psi_0^1(\cdot), \dots, \psi_0^S(\cdot)), \psi_0^s(\cdot) \in L_{\Omega^s}^2 \quad \forall s = \overline{1, S}; \psi \in E_{SN}, \psi_i^s \geq 0 \quad \forall i, s; \eta \in E_{SN}; \mu \in E_{SM}, \mu_j^s \geq 0 \quad \forall j, s\}$$

Пару наборів змінних  $(\{\lambda^*(\cdot), \tau^{I*}, y^*, v^*\}, \{\Psi_0^*(\cdot), \psi^*, \eta^*, \mu^*\})$  будемо називати

**сідловою точкою** функціоналу  $L$  на множині  $\{\Gamma \times \Omega^N \times Y \times V\} \times \Lambda,$  якщо

$$\begin{aligned}
 L(\{\lambda^*(\cdot), \tau^{I*}, y^*, v^*\}, \{\Psi_0(\cdot), \psi, \eta, \mu\}) & \leq L(\{\lambda^*(\cdot), \tau^{I*}, y^*, v^*\}, \{\Psi_0^*(\cdot), \psi^*, \eta^*, \mu^*\}) \leq \\
 & \leq L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, y, v\}, \{\Psi_0^*(\cdot), \psi^*, \eta^*, \mu^*\})
 \end{aligned}$$

для всіх  $\lambda(\cdot) \in \Gamma, \tau^I \in \Omega^N, y^s \in Y, v \in V, \{\Psi_0(\cdot), \psi, \eta, \mu\} \in \Lambda.$

Задача, двоїста до задачі **Б**, формулюється так:

$$H(\Psi_0(\cdot), \psi, \eta, \mu) = \min_{(\lambda(\cdot), \tau^I, y, v) \in \Gamma \times \Omega^N \times Y \times V} L \rightarrow \max_{(\Psi_0(\cdot), \psi, \eta, \mu) \in \Lambda}$$

(20)

Справедливою є теорема двоїстості, згідно якої щоб задачі **Б** та (20) були пов'язані співвідношенням двоїстості  $I_* = H^*,$  та верхня грань в (20) була досяжною, необхідно і достатньо існування сідлової точки функціоналу  $L(\{\lambda(\cdot), \tau^I, y, v\}, \{\Psi_0(\cdot), \psi, \eta, \mu\})$  на множині  $\{\Gamma \times \Omega^N \times Y \times V\} \times \Lambda.$  А, отже, розв'язання пари задач **Б** та (20) еквівалентно пошуку сідлової точки функціоналу  $L$  на вказаній множині.

Нехай у функціоналі  $L(\{\lambda(\cdot), \tau^l, y, v\}, \{\Psi_0(\cdot), \psi, \eta, \mu\})$  вектори  $\tau^l = \bar{\tau}^l, y = \bar{y}, v = \bar{v}, \psi = \bar{\psi}, \eta = \bar{\eta}, \mu = \bar{\mu}$  є довільними допустимими, але фіксованими. Позначимо

$$W(\lambda(\cdot), \Psi_0(\cdot)) = L(\{\lambda(\cdot), \bar{\tau}^l, \bar{y}, \bar{v}\}, \{\Psi_0(\cdot), \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}\}).$$

Розглянемо задачу

$$W(\lambda(\cdot), \Psi_0(\cdot)) \rightarrow \min_{\lambda(\cdot) \in \Gamma} \max_{\Psi_0(\cdot) \in \Phi}, \quad (21)$$

де  $\Phi = \{\Psi_0(\cdot) = (\psi_0^1(\cdot), \dots, \psi_0^S(\cdot)), \psi_0^s(\cdot) \in L_{\Omega^s}^2 \forall s = \overline{1, S}\}$ .

Для кожної довільної фіксованої точки  $x \in \hat{\Omega}$ , де  $\hat{\Omega} = \bigcup_{s=1}^S \Omega^s$ , введемо до розгляду функцію  $(SN+S)$  змінних:

$$Q(\lambda(x), \Psi_0(x)) = \sum_{s=1}^S \left\{ \sum_{i=1}^N ((\beta_1 q_s c^s(x, \tau_i^l) + \psi_i^s + \eta_i^s) \rho^s(x) + \psi_0^s(x)) \lambda_i^s(x) - \psi_0^s(x) \right\}.$$

Ця функція визначена на декартовому добутку  $\Gamma_x \times \Phi_x$  проєкцій множин  $\Gamma$  та  $\Phi$  для  $x \in \hat{\Omega}$ .

**Теорема 1.** Для того щоб допустима пара  $(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot)) \in \Gamma \times \Phi$  була розв'язком задачі (21), необхідно і достатньо, аби майже всюди для  $x \in \hat{\Omega}$ , виконувалась наступна умова:

$$Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) = \max_{\Psi_0(x) \in \Phi_x} \min_{\lambda(x) \in \Gamma_x} Q(\lambda(x), \Psi_0(x)). \quad (22)$$

**Доведення.** Необхідність. Нехай  $(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot)) \in \Gamma \times \Phi$  – оптимальний розв'язок задачі (21), тобто  $\forall \lambda(\cdot) \in \Gamma, \Psi_0(\cdot) \in \Phi$

$$W(\hat{\lambda}(\cdot), \Psi_0(\cdot)) \leq W(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot)), \quad (23)$$

$$W(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot)) \leq W(\lambda(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot)). \quad (24)$$

Покажемо, що майже всюди для  $x \in \hat{\Omega}$  ця пара  $(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot))$  задовольняє умову (23). Припустимо протилежне: існує і підмножина  $\tilde{\Omega}$  множини  $\hat{\Omega}$  така, що  $mes(\tilde{\Omega}) > 0$  та  $\forall x \in \tilde{\Omega}$  умова (23) не виконується, тобто  $\forall x \in \tilde{\Omega}$  існує  $\check{\lambda}(x) \in \Gamma_x$ , для якої справедливою є нерівність:

$$Q(\check{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) < Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)).$$

Складемо нову пару допустимих функцій для задачі (21):

$$(\bar{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) = \begin{cases} (\bar{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) \in \Gamma_x \times \Phi_x, & \forall x \in \tilde{\Omega}, \\ (\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) \in \Gamma_x \times \Phi_x, & \forall x \in \hat{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

Інтегруючи  $Q(\bar{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x))$  по всій області  $\hat{\Omega}$  та додаючи константу  $D$ , яка дорівнює

$$D = \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2 q_s c(\tau_i^I, \tau_j^{II}) - \bar{\eta}_i^s + \bar{\mu}_j^s) \bar{v}_{ij}^s + \\ + \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N (\beta_3 q_s - \bar{\psi}_i^s b_i^I) \bar{y}_i^s - \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^M (\bar{\mu}_j^s \theta_j^s b_j^{II}) - \beta_3 \sum_{i=1}^N b_i^I c_i^{\text{доп}},$$

отримуємо:

$$W(\bar{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot)) = \int_{\hat{\Omega}} Q(\bar{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) dx + D = \\ = \int_{\hat{\Omega}} Q(\bar{\lambda}(x), \Psi(x)) dx + \int_{\hat{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}} Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) dx + D.$$

Розіб'ємо аналогічним чином інтеграл у функціоналі  $W(\lambda(\cdot), \Psi_0(\cdot))$  при  $\lambda(\cdot) = \hat{\lambda}(\cdot), \Psi_0(\cdot) = \hat{\Psi}_0(\cdot)$  та порівнюємо праві частини отриманих співвідношень, приходимо до висновку:

$$W(\bar{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot)) < W(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot)),$$

що протирічить (24).

Аналогічно, можна припустити існування підмножини  $\tilde{\Omega}$  множини  $\hat{\Omega}$  такої, що  $mes(\tilde{\Omega}) > 0$  та  $\forall x \in \tilde{\Omega}$  існує  $\Psi_0(x) \in \Phi_x$  має місце нерівність

$$Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) < Q(\hat{\lambda}(x), \Psi_0(x)).$$

Тоді на парі  $(\hat{\lambda}(x), \bar{\Psi}_0(x))$ , визначеній наступним чином

$$(\hat{\lambda}(x), \bar{\Psi}_0(x)) = \begin{cases} (\hat{\lambda}(x), \bar{\Psi}_0(x)) \in \Gamma_x \times \Phi_x, & \forall x \in \tilde{\Omega} \\ (\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot)) \in \Gamma_x \times \Phi_x, & \forall x \in \hat{\Omega} \setminus \tilde{\Omega} \end{cases}$$

буде порушуватись умова (24). Отримане протиріччя доводить необхідність умови (22) аби пара  $(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot))$  була розв'язком задачі (21).

Достатність. Нехай пара  $(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot))$  задовольняє умову (22) майже всюди для  $x \in \hat{\Omega}$ . Покажемо, що вона є розв'язком задачі (21).

Нехай для  $x \in \hat{\Omega}$   $\lambda(x) \in \Gamma_x, \Psi_0(x) \in \Phi_x$ . Тоді майже для всіх  $x \in \hat{\Omega}$

$$Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) \leq Q(\lambda(x), \hat{\Psi}_0(x)),$$

$$Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) \geq Q(\hat{\lambda}(x), \Psi_0(x)).$$

Інтегруючи ці нерівності за всіма  $x \in \hat{\Omega}$  та враховуючи те, що нерівність може не виконуватись лише на множині тих точок з  $\hat{\Omega}$ , значення підінтегральної функції в яких не впливає на величину інтегралу, отримаємо:

$$\int_{\hat{\Omega}} Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) dx \leq \int_{\hat{\Omega}} Q(\lambda(x), \hat{\Psi}_0(x)) dx,$$

$$\int_{\hat{\Omega}} Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) dx \geq \int_{\hat{\Omega}} Q(\hat{\lambda}(x), \Psi_0(x)) dx.$$

З оглядом на склад множини  $\hat{\Omega} = \bigcup_{s=1}^S \Omega^s$  і означення характеристичних функцій множин  $\Omega^s$ , з цього випливає:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^S \int_{\Omega^s} \left\{ \sum_{i=1}^N ((\beta_1 q_s c^s(x, \tau_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \hat{\psi}_0^s(x)) \hat{\lambda}_i^s(x) - \hat{\psi}_0^s(x) \right\} dx \leq \\ & \leq \sum_{s=1}^S \int_{\Omega^s} \left\{ \sum_{i=1}^N ((\beta_1 q_s c^s(x, \tau_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \hat{\psi}_0^s(x)) \lambda_i^s(x) - \hat{\psi}_0^s(x) \right\} dx; \\ & \sum_{s=1}^S \int_{\Omega^s} \left\{ \sum_{i=1}^N ((\beta_1 q_s c^s(x, \tau_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \hat{\psi}_0^s(x)) \hat{\lambda}_i^s(x) - \hat{\psi}_0^s(x) \right\} dx \geq \\ & \geq \sum_{s=1}^S \int_{\Omega^s} \left\{ \sum_{i=1}^N ((\beta_1 q_s c^s(x, \tau_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \psi_0^s(x)) \hat{\lambda}_i^s(x) - \psi_0^s(x) \right\} dx. \end{aligned}$$

Додаючи праворуч та ліворуч в отриманих нерівностях константу  $D$ , отримаємо нерівності (23), (24).

Теорему доведено.

Вище задачу **A** редуковано до задачі **B**. Теорема двоїстості зводить розв'язання останньої до пошуку сідлової точки її функціоналу Лагранжа. Зафіксуємо у ньому вектори  $\tau^l = \bar{\tau}^l$ ,  $y = \bar{y}$ ,  $v = \bar{v}$ ,  $\psi = \bar{\psi}$ ,  $\eta = \bar{\eta}$ ,  $\mu = \bar{\mu}$ , які є довільними, але допустимими. Тоді, згідно теореми 2, для визначення решти компонент сідлової точки функціоналу Лагранжа потрібно для кожної точки  $x$  з  $\hat{\Omega} = \bigcup_{s=1}^S \Omega^s$  розв'язати задачу (22).

Нехай  $x$  – довільна фіксована точка з  $\hat{\Omega}$ . У силу сепарабельності функції  $Q(\lambda(x), \Psi_0(x))$  відносно сукупності своїх змінних, має місце наступна рівність:

$$\max_{\psi_0(x) \in \Phi_x} \min_{\lambda(x) \in \Gamma_x} Q(\lambda(x), \Psi_0(x)) =$$

$$= \sum_{s=1}^S \max_{\psi_0^s(x)} \left\{ \min_{0 \leq \lambda_k^s(x) \leq 1, \forall k, s} \left( \sum_{i=1}^N ((\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \psi_0^s(x)) \lambda_i^s(x) \right) - \psi_0^s(x) \right\}.$$

Точка  $(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x))$  буде розв'язком задачі (22) тоді і лише тоді, коли виконуватимуться умови:

1.  $Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) = \min_{\lambda(x) \in \Gamma_x} Q(\lambda(x), \hat{\Psi}_0(x))$ ;
2.  $\frac{\partial Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x))}{\psi_0^s(x)} = 0 \quad \forall s = \overline{1, S} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \lambda_i^s(x) - 1 = 0$ .

Для довільної  $\Psi_0(x)$  функція  $Q(\lambda(x), \Psi_0(x))$  досягає свого мінімального значення за всіма  $\lambda(x) \in \Gamma_x$ , де

$$\Gamma_x = \{\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^S) : \lambda^s \in \Gamma_{2x}^s, \quad \forall s = \overline{1, S}\},$$

$$\Gamma_{2x}^s = \{\lambda^s = (\lambda_1^s, \dots, \lambda_N^s) : 0 \leq \lambda_i^s \leq 1, \quad i = \overline{1, N}\} \quad \forall s = \overline{1, S},$$

в точці  $\hat{\lambda}(x)$ , чії компоненти задовольняють умови: для всіх  $s = \overline{1, S}$  і  $x \in \Omega^s$

$$\hat{\lambda}_i^s(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \psi_0^s(x) < 0, \\ 0, & \text{якщо } (\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \psi_0^s(x) > 0, \\ \alpha \in [0, 1], & \text{якщо } (\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \psi_0^s(x) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Серед усіх розв'язків задачі **Б** розглянемо ті, які є крайніми точками допустимої множини її розв'язків (у силу довільності вибору значення  $\alpha \in [0, 1]$ ), а саме: для : для всіх  $s = \overline{1, S}$  і  $x \in \Omega^s$

$$\hat{\lambda}_i^s(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \psi_0^s(x) < 0, \\ 0, & \text{якщо } (\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \psi_0^s(x) > 0, \\ \alpha \in 0 \vee 1, & \text{якщо } (\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \psi_0^s(x) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Для  $\psi_0^s(x) = \hat{\psi}_0^s(x)$  в нерівності (28), зокрема (29), має місце рівність:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i^s(x) - 1 = 0.$$

З цього випливає, що серед компонент вектора  $\hat{\lambda}^s(x)$  в (29) існує лише одна одинична компонента, нехай її номер  $l$ , тоді цю формулу можна записати так:

$$\hat{\lambda}_i^s(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \hat{\psi}_0^s(x) = \\ & = \min_{i=1, N} ((\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \hat{\psi}_0^s(x)), \\ 0 & \text{у протилежному випадку} \end{cases} \quad \forall l = \overline{1, N}. \quad (30)$$

Підставляючи (30) і  $\Psi_0(x) = \hat{\Psi}_0(x)$  в функцію  $Q(\lambda(x), \Psi_0(x))$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} Q(\hat{\lambda}(x), \hat{\Psi}_0(x)) &= \sum_{s=1}^S \left\{ \min_{i=1, N} ((\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) + \hat{\psi}_0^s(x)) - \hat{\psi}_0^s(x) \right\} = \\ &= \sum_{s=1}^S \min_{i=1, N} (\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x). \end{aligned}$$

В силу довільності вибору точки  $x$ , оптимальне значення функціоналу задачі (21) при фіксованих векторах  $\tau^l = \bar{\tau}^l$ ,  $y = \bar{y}$ ,  $v = \bar{v}$ ,  $\psi = \bar{\psi}$ ,  $\eta = \bar{\eta}$ ,  $\mu = \bar{\mu}$  запишеться у такий спосіб:

$$\begin{aligned} G(\bar{\tau}^l, \bar{y}, \bar{v}; \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}) &= W(\hat{\lambda}(\cdot), \hat{\Psi}_0(\cdot)) = \\ &= \sum_{s=1}^S \int_{\Omega^s} \min_{i=1, N} (\beta_1 q_s c^s(x, \bar{\tau}_i^l) + \bar{\psi}_i^s + \bar{\eta}_i^s) \rho^s(x) dx + \\ &+ \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2 q_s c(\bar{\tau}_i^l, \tau_j^{II}) - \bar{\eta}_i^s + \bar{\mu}_j^s) v_{ij}^s + \\ &+ \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N (\beta_3 q_s - \bar{\psi}_i^s b_i^I) \bar{y}_i^s - \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^M (\bar{\mu}_j^s \theta_j^s b_j^{II}) - \beta_3 \sum_{i=1}^N b_i^I c_i^{\text{доп}}. \end{aligned}$$

У силу довільності вибору векторів  $\bar{\tau}^l, \bar{y}, \bar{v}; \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{\mu}$ , з урахуванням отриманого виразу уточним задачу (20):

$$\begin{aligned} \bar{H}(\psi, \eta, \mu) &\rightarrow \max_{\psi \geq 0, \eta, \mu} \\ \bar{H}(\psi, \eta, \mu) &= \min_{(\tau^l, y, v) \in \Omega^N \times Y \times V} G(\tau^l, y, v; \psi, \eta, \mu). \end{aligned} \quad (31)$$

Другий доданок у виразі  $G$  можна конкретизувати, позаяк мінімальне його значення досягається за таких значень  $y_i^s$  (при решті – фіксованих): для усіх  $s = \overline{1, S}$  і  $i = \overline{1, N}$

$$\hat{y}_i^{s*} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \beta_3 q_s - \psi_i^s b_i^I \geq 0, \\ 1 + \frac{\omega_i}{100}, & \text{якщо } \beta_3 q_s - \psi_i^s b_i^I < 0. \end{cases}$$

При цьому

$$\sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N (\beta_3 q_s - \psi_i^s b_i^I) y_i^{s*} = \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N \left( \beta_3 q_s - \psi_i^s b_i^I + \frac{\omega_i}{100} \min(0, \beta_3 q_s - \psi_i^s b_i^I) \right).$$

Нехай тепер в задачі (31) усі параметри, крім  $v$ , є фіксованими. Тоді:

$$\begin{aligned} \min_{v \geq 0} \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\beta_2 q_s c(\bar{\tau}_i^I, \tau_j^{II}) - \bar{\eta}_i^s + \bar{\mu}_j^s) v_{ij}^s = \\ = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \beta_2 q_s c(\bar{\tau}_i^I, \tau_j^{II}) - \bar{\eta}_i^s + \bar{\mu}_j^s \geq 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \beta_2 q_s c(\bar{\tau}_i^I, \tau_j^{II}) - \bar{\eta}_i^s + \bar{\mu}_j^s < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Величини  $v_{ij}^{s*}$ , за яких досягається мінімальне за  $v_{ij}^s$  значення в функції

$G(\bar{\tau}^I, \bar{y}, v; \bar{\psi}, \bar{\eta}, \bar{\mu})$ , задовольняють умову:

$$v_{ij}^{s*} = \begin{cases} > 0, & \text{якщо } \beta_2 q_s c(\bar{\tau}_i^I, \tau_j^{II}) = \bar{\eta}_i^s - \bar{\mu}_j^s, \\ 0, & \text{якщо } \beta_2 q_s c(\bar{\tau}_i^I, \tau_j^{II}) > \bar{\eta}_i^s - \bar{\mu}_j^s. \end{cases}$$

Кожна нерівність із наступної системи

$$\beta_2 q_s c(\bar{\tau}_i^I, \tau_j^{II}) - \bar{\eta}_i^s + \bar{\mu}_j^s \geq 0 \text{ або, що те саме,}$$

$$\bar{\mu}_j^s \geq \bar{\eta}_i^s - \beta_2 q_s c(\bar{\tau}_i^I, \tau_j^{II}), \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}, \quad s = \overline{1, S}$$

виконується, якщо

$$\bar{\mu}_j^s = \max_{i=1, N} (\bar{\eta}_i^s - \beta_2 q_s c(\bar{\tau}_i^I, \tau_j^{II})), \quad \forall j = \overline{1, M}, \quad s = \overline{1, S}.$$

А отже, підставляючи отримані вирази у  $G$ , задача (31) при довільних значеннях решти змінних набуває вигляду:

$$Q(\psi, \eta) \rightarrow \max_{\psi \in R^N}, \tag{32}$$

$$Q(\psi, \eta) = \min_{\tau^I \in \Omega^N} G_1(\tau^I, \psi, \eta),$$

де

$$\begin{aligned} G_1(\tau^I, \psi, \eta) = \sum_{s=1}^S \int_{\Omega^s} \min_{i=1, N} (\beta_1 q_s c^s(x, \tau_i^I) + \psi_i^s + \eta_i^s) \rho^s(x) dx + \\ + \sum_{s=1}^S \sum_{i=1}^N \left( \beta_3 q_s - \psi_i^s b_i^I + \frac{\omega_i}{100} \min(0, \beta_3 q_s - \psi_i^s b_i^I) \right) - \\ - \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^M \theta_j^s b_j^{II} \max_{i=1, N} (\eta_i^s - \beta_2 q_s c(\tau_i^I, \tau_j^{II})) - \beta_3 \sum_{i=1}^N b_i^I c_i^{\text{доп}}. \end{aligned}$$

Отже, наведені міркування є доведенням наступної теореми.

**Теорема 2.** Нехай в задачі **A** функції  $\rho^s(x) \geq 0$  для усіх  $x \in \Omega, s = \overline{1, S}$ . Оптимальний розв'язок задачі **A** визначається наступними умовами:

1) характеристичні функції підмножин, що складають оптимальне розбиття на  $N$  підмножин кожна з множин  $\Omega^s, s = \overline{1, S}$ :

$$\hat{\lambda}_i^s(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \beta_1 q_s c^s(x, \hat{\tau}_i^I) + \hat{\psi}_i^s + \hat{\eta}_i^s = \min_{i=\overline{1, N}} ((\beta_1 q_s c^s(x, \hat{\tau}_i^I) + \hat{\psi}_i^s + \hat{\eta}_i^s), \\ 0 & \text{у протилежному випадку} \end{cases} \quad \forall i = \overline{1, N};$$

2) змінні розширення потужностей (місткості) центрів першого етапу: для усіх  $s = \overline{1, S}$  і  $i = \overline{1, N}$

$$\hat{y}_i^{s*} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \beta_3 q_s - \hat{\psi}_i^s b_i^I \geq 0, \\ 1 + \frac{\omega_i}{100}, & \text{якщо } \beta_3 q_s - \hat{\psi}_i^s b_i^I < 0; \end{cases}$$

3)  $\hat{\tau}_i^I, \hat{\psi}_i^s, \hat{\eta}_i^s$ , для усіх  $s = \overline{1, S}$  і  $i = \overline{1, N}$  є розв'язком задачі (32);

4) для виявлення зв'язків між центрами першого і другого етапів, тобто пошуку оптимальних величин  $\hat{v}_{ij}^s$  потоків ресурсу між ними для кожного сценарію  $s = \overline{1, S}$  слід розв'язати наступну задачу лінійного програмування транспортного типу:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij}^{II}(\tau_i^I, \tau_j^{II}) v_{ij}^s \rightarrow \min_{v^s \in R_{NM}^+},$$

за умов

$$\int_{\Omega^s} \rho^s(x) \hat{\lambda}_i^s(x) dx = \sum_{j=1}^M v_{ij}^s, \quad \forall i = \overline{1, N},$$

$$\sum_{i=1}^N v_{ij}^s \leq \theta_j^s b_j^{II}, \quad \forall j = \overline{1, M};$$

$$v_{ij}^s \geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, M}.$$

Отже, математичне забезпечення задачі розміщення проміжних логістичних центрів і двоетапного розподілу ресурсів в умовах невизначеності, пов'язаної з ймовірністю появи різних надзвичайних ситуацій, розроблено з використанням основних положень теорії неперервних лінійних задач оптимального розбиття множин і теорії двоїстості. Застосування запропонованого підходу дає можливість знайти оптимальний розв'язок двоетапної задачі розміщення-розподілу з урахуванням різних сценаріїв НС в аналітичному вигляді. При цьому певна частина його параметрів є розв'язком допоміжної оптимізаційної задачі з негладкою цільовою функцією багатьох змінних. Ітераційний алгоритм розв'язання задачі може бути розроблений на основі інтеграції сучасних методів негладкої оптимізації та лінійного програмування.

**Висновки та перспективи подальших досліджень.** У роботі запропоновано математичну модель оптимізації системи екстреної логістики з двоетапним розподілом людських і матеріальних потоків, яка поєднує неперервний просторовий розподіл населення з вибором пунктів збору та безпечних центрів і враховує різні сценарії виникнення надзвичайних ситуацій.

Розроблений підхід дозволяє визначати оптимальні місця збору населення, відповідні зони їх евакуації та раціонально розподіляти людські потоки між логістичними центрами з урахуванням відстані, часу переміщення та транспортних обмежень. Запропоновані математичні постановки та методи можуть бути використані для оцінювання часу евакуації та аналізу наслідків реалізації різних сценаріїв надзвичайних ситуацій органами управління та службами реагування.

Робота виконана в рамках державної бюджетної наукової тематики 0125U000080 «Математичне і комп'ютерне моделювання раціонального розподілу матеріальних ресурсів у багаторівневих транспортно-логістичних системах».

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Коряшкіна Л. С., Лубенець Д. Є. (2024). Системний аналіз та математичне моделювання частково-двоетапних процесів розподілу матеріальних потоків. *System technologies*, 1(150), 86–99. <https://doi.org/10.34185/1562-9945-1-150-2024-08>
2. Woo S.-J., Kang S. (2025). Optimising shelter locations for bus evacuation and relief supply under traffic congestion. *IET Intelligent Transport Systems*, 19. <https://doi.org/10.1049/itr2.70020>
3. Zhang D., Wang J. (2025). Research on the optimization of urban emergency shelters considering flood disaster risks. *Geomatics, Natural Hazards and Risk*, 16(1). <https://doi.org/10.1080/19475705.2025.2585171>
4. Dulebenets M. A., Ozguven E. E., Khayamim R. (2025). A bi-objective optimization approach for emergency evacuation planning under pandemic settings. *Technical report submitted to the Rural Equitable and Accessible Transportation (REAT) Center and United States Department of Transportation*, Tallahassee, FL, USA, 69 p.
5. Feng X., Ruiz-Hernandez D., Sgalambro A. (2025). On the quickest evacuation location problem in humanitarian operations: multi-objective modelling and matheuristic solution. *European Journal of Operational Research*, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2025.10.046>
6. Gong Z., Guo X., Wei G., Luo X., Xu X. (2025). Flood evacuation shelter location-allocation considering vulnerability identification in the context of prerequisite. *Climate Services*, 40, 100617. <https://doi.org/10.1016/j.cliser.2025.100617>
7. Dehnavi Eelagh M., Abbaspour R. A. (2024). A location-allocation optimization model for post-earthquake emergency shelters using network-based multi-criteria decision-making. *Decision Analytics Journal*, 10, 100430. <https://doi.org/10.1016/j.dajour.2024.100430>
8. Tun E., Nishikiori T., Varghese V., Chikaraishi M., Seike M., Fujiwara A. (2024). Emergency shelter location-allocation analysis with time-varying demand. *Asian Transport Studies*, 10, 100152. <https://doi.org/10.1016/j.eastsj.2024.100152>
9. Zhang Y., Chen W., Zhong G., Zhai G., Zhai W. (2024). A two-phase and bi-level spatial configuration methodology of shelters based on a circular assignment model and evacuation

traffic flow allocation. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 13(12), 455. <https://doi.org/10.3390/ijgi13120455>

10. Yin Y., Zhao X., Lv W. (2023). Emergency shelter allocation planning technology for large-scale evacuation based on quantum genetic algorithm. *Frontiers in Public Health*, 10, 1098675. <https://doi.org/10.3389/fpubh.2022.1098675>

11. Bera S., Gnyawali K. R., Dahal K., Melo R., Miao L., Guru B., Ramana G. V. (2023). Assessment of shelter location-allocation for multi-hazard emergency evacuation. *International Journal of Disaster Risk Reduction*, 84, 103435. <https://doi.org/10.1016/j.ijdr.2022.103435>

12. Tang K., Osaragi T. (2024). Multi-Objective Distributionally Robust Optimization for Earthquake Shelter Planning Under Demand Uncertainties. *GeoHazards*, 5(4), 1308–1325. <https://doi.org/10.3390/geohazards5040062>

13. Batsaris M. (2025). Incorporating population dynamics in the context of earthquake shelter location-allocation analysis. *European Journal of Geography*, 16(2), 52–65. <https://doi.org/10.48088/ejg.m.bat.16.2.052.065>

14. Zhong G., Zhai G., Shang K., Chen W. (2022). A two-stage hierarchical model for spatial location and evacuation allocation problem of urban earthquake shelters: a case study in Central urban area of Yangbi county, Yunnan province, China. *Geomatics, Natural Hazards and Risk*, 13(1), 2098067. <https://doi.org/10.1080/19475705.2022.2098067>

15. Caglayan N., Satoglu S. I. (2021). Multi-Objective Two-Stage Stochastic Programming Model for a Proposed Casualty Transportation System in Large-Scale Disasters: A Case Study. *Mathematics*, 9(4), 316. <https://doi.org/10.3390/math9040316>

16. Duong Q., Nguyen D., Nguyen Q. (2021). Hub and Spoke Logistics Network Design for Urban Region with Clustering-Based Approach. *Proceedings of the 34th International Conference on Industrial, Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems (IEA/AIE 2021)*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.03080>

17. Koriashkina L., Us S., Odnovol M., Stanina O., Dziuba S. (2024). Two-stage problems of optimal location and distribution of the humanitarian logistics system's structural subdivisions. *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 1, 130–139. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2024-1/130>

## REFERENCES

1. Koriashkina L. S., Lubenets D. Ye. (2024). Systems analysis and mathematical modeling of partially two-stage processes of material flow distribution. *System technologies*, 1(150), 86–99. <https://doi.org/10.34185/1562-9945-1-150-2024-08>

2. Woo S.-J., Kang S. (2025). Optimising shelter locations for bus evacuation and relief supply under traffic congestion. *IET Intelligent Transport Systems*, 19. <https://doi.org/10.1049/itr2.70020>

3. Zhang D., Wang J. (2025). Research on the optimization of urban emergency shelters considering flood disaster risks. *Geomatics, Natural Hazards and Risk*, 16(1). <https://doi.org/10.1080/19475705.2025.2585171>

4. Dulebenets M. A., Ozguven E. E., Khayamim R. (2025). A bi-objective optimization approach for emergency evacuation planning under pandemic settings. *Technical report submitted to the Rural Equitable and Accessible Transportation (REAT) Center and United States Department of Transportation*, Tallahassee, FL, USA, 69 p.

5. Feng X., Ruiz-Hernandez D., Sgalambro A. (2025). On the quickest evacuation location problem in humanitarian operations: multi-objective modelling and matheuristic solution. *European Journal of Operational Research*, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2025.10.046>
6. Gong Z., Guo X., Wei G., Luo X., Xu X. (2025). Flood evacuation shelter location-allocation considering vulnerability identification in the context of prerequisite. *Climate Services*, 40, 100617. <https://doi.org/10.1016/j.cliser.2025.100617>
7. Dehnavi Eelagh M., Abbaspour R. A. (2024). A location-allocation optimization model for post-earthquake emergency shelters using network-based multi-criteria decision-making. *Decision Analytics Journal*, 10, 100430. <https://doi.org/10.1016/j.dajour.2024.100430>
8. Tun E., Nishikiori T., Varghese V., Chikaraishi M., Seike M., Fujiwara A. (2024). Emergency shelter location–allocation analysis with time–varying demand. *Asian Transport Studies*, 10, 100152. <https://doi.org/10.1016/j.eastsj.2024.100152>
9. Zhang Y., Chen W., Zhong G., Zhai G., Zhai W. (2024). A two-phase and bi-level spatial configuration methodology of shelters based on a circular assignment model and evacuation traffic flow allocation. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 13(12), 455. <https://doi.org/10.3390/ijgi13120455>
10. Yin Y., Zhao X., Lv W. (2023). Emergency shelter allocation planning technology for large-scale evacuation based on quantum genetic algorithm. *Frontiers in Public Health*, 10, 1098675. <https://doi.org/10.3389/fpubh.2022.1098675>
11. Bera S., Gnyawali K. R., Dahal K., Melo R., Miao L., Guru B., Ramana G. V. (2023). Assessment of shelter location-allocation for multi-hazard emergency evacuation. *International Journal of Disaster Risk Reduction*, 84, 103435. <https://doi.org/10.1016/j.ijdrr.2022.103435>
12. Tang K., Osaragi T. (2024). Multi-Objective Distributionally Robust Optimization for Earthquake Shelter Planning Under Demand Uncertainties. *GeoHazards*, 5(4), 1308–1325. <https://doi.org/10.3390/geohazards5040062>
13. Batsaris M. (2025). Incorporating population dynamics in the context of earthquake shelter location-allocation analysis. *European Journal of Geography*, 16(2), 52–65. <https://doi.org/10.48088/ejg.m.bat.16.2.052.065>
14. Zhong G., Zhai G., Shang K., Chen W. (2022). A two-stage hierarchical model for spatial location and evacuation allocation problem of urban earthquake shelters: a case study in Central urban area of Yangbi county, Yunnan province, China. *Geomatics, Natural Hazards and Risk*, 13(1), 2098067. <https://doi.org/10.1080/19475705.2022.2098067>
15. Caglayan N., Satoglu S. I. (2021). Multi-Objective Two-Stage Stochastic Programming Model for a Proposed Casualty Transportation System in Large-Scale Disasters: A Case Study. *Mathematics*, 9(4), 316. <https://doi.org/10.3390/math9040316>
16. Duong Q., Nguyen D., Nguyen Q. (2021). Hub and Spoke Logistics Network Design for Urban Region with Clustering-Based Approach. *Proceedings of the 34th International Conference on Industrial, Engineering and Other Applications of Applied Intelligent Systems (IEA/AIE 2021)*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.03080>
17. Koriashkina L., Us S., Odnovol M., Stanina O., Dziuba S. (2024). Two-stage problems of optimal location and distribution of the humanitarian logistics system’s structural

***Mathematical modeling of the location of logistics centers  
and two-stage distribution of material flows: a scenario approach***

*The two-stage process of population evacuation and distribution of material resources in an emergency logistics system, which includes population collection points and evacuation centers, is examined. It is assumed that the population is continuously distributed across the region, while the selection of collection points and evacuation centers is carried out considering various emergency scenarios and constraints on territory accessibility and available resources. The aim of the study is to ensure the efficient organization of evacuation and material flows by developing a mathematical model and optimization methods that allow determining the coordinates, number, and capacity of collection points and evacuation centers, as well as rationally allocating human and material flows between stages.*

*The mathematical formulation of the problem is based on a combined use of continuous and discrete approaches: the population and collection points are considered continuously distributed within the region, whereas safe stay points are treated as discrete objects. The model enables the optimal determination of areas from which the population should gather at specific collection points and how population flows are distributed to safe stay points, taking into account factors such as distance, travel time, facility capacity, and different emergency scenarios. This approach formalizes the two-stage evacuation process and provides an assessment of key logistical indicators of the system.*

*Key words: scenario approach, multi-stage logistics processes, area zoning, mathematical model, optimization, location-allocation problems, system analysis.*

**Коряшкіна Лариса Сергіївна** – д.т.н., доцент, професор кафедри системного аналізу і управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Україна.  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6423-092X>

**Станіна Ольга Дмитрівна** – к.т.н., доцент, доцент кафедри системного аналізу і управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Україна.  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6754-0317>

**Koriashkina Larysa Sergiyivna** – Doctor of Technical Science, Associate Professor, Professor of the Department of System Analysis and Control, Dnipro University of Technology, Ukraine.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6423-092X>

**Stanina Olha Dmytrivna** – Candidate of Technical Science, Associate Professor of the Department of System Analysis and Control, Dnipro University of Technology, Ukraine.  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6754-0317>