

ЕФЕКТ ПОВЕРХНЕВОЇ ПРУЖНОСТІ ПРИ АНАЛІЗІ НАНОТРІЩИНИ В АНТИПЛОСКОМУ ПОЛІ НАВАНТАЖЕНЬ

Анотація. Досліджено вплив поверхневої пружності на пружно-деформівний стан тріщини типу III, що має місце при антиплоских зсувних деформаціях лінійно пружного тіла. Механічні ефекти, що виникають біля поверхонь, зокрема берегів тріщин, враховано за допомогою континуальної моделі поверхні-границі Гуртина та Мердока. Сформульовано умови рівноваги на поверхні тріщини, а також співвідношення між поверхневими та основними напруженнями. З використанням цих співвідношень випливають уточнені граничні умови на верхньому та нижньому берегах тріщини, які в подальшому аналізуються методами теорії функцій комплексної змінної. В результаті цього аналізу формулюється сингулярне інтегро-диференціальне рівняння першого порядку з ядром типу Коші. Для його розв'язання використовується представлення невідомих функцій по многочленах Чебишева першого роду та метод колокації по вузлах цих многочленів. Розв'язок отриманої при цьому системи лінійних алгебраїчних рівнянь дозволяє отримати коефіцієнти вказаних розкладень. Знайдена формула для обчислення напруження на продовженні тріщини, яка виражається інтегралом з ядром типу Коші. Проводиться всебічний аналіз особливостей числової реалізації розробленого алгоритму, який включає варіації кількості складових у розкладеннях невідомих функцій по многочленах Чебишева і кількості вузлів у квадратурних формулах Гауса для обчислення вказаного інтегралу. Графічно проілюстрована поведінка різниці напружень між верхнім та нижнім берегами тріщини, а також розподіл іншої компоненти напружень на її продовженні в околі правої вершини. Проілюстрована також залежність цих величин від значень рівномірного зсувного напруження, заданого на берегах тріщини. Показано, що врахування поверхневої пружності стає особливо відчутним, коли довжина тріщини є меншою мікрметра. Подальше зменшення цієї довжини приводить до суттєвої зміни характеру розподілу напружень в околі вершини тріщини. Зокрема зникає коренева особливість напружень у вершинах тріщини, яка характерна при використанні класичної моделі і напруження в цих вершинах стають скінченними.

Ключові слова: напруження, поверхнева пружність, тріщина, антиплоска деформація, інтегро-диференціальне рівняння, аналітичний метод.

Постановка проблеми. Розглянемо антиплоску деформацію лінійно пружного, однорідного ізотропного твердого тіла, що займає циліндричну область в тривимірному просторі з твірними, паралельними осі z прямокутної декартової системи координат.

Припустимо, що циліндр нескінченний у довжину та піддається рівномірному віддаленому зсувному напруженню. Припустимо, що циліндр містить одну внутрішню тріщину, що проходить по всій довжині циліндра. У типовому поперечному перерізі тріщина займає область $[-a, a]$ осі x (рис. 1). Для заданої тріщини типу III враховуються поверхневі ефекти в рамках моделі поверхневої пружності Гуртина-Мердока.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Континуальна модель, що враховує ефекти поверхневої механіки з використанням моделі поверхневої пружності була запропонована в роботах [1, 2] і суттєво розвинута в [3]. У цій моделі поверхня розглядається як тонка пружна мембрана, ідеально з'єднана з основним твердим тілом. Додаткове поверхнєве напруження, зумовлене поверхневим шаром, модифікує граничні умови на поверхні основного твердого тіла, які не охоплюються існуючими класичними теоріями.

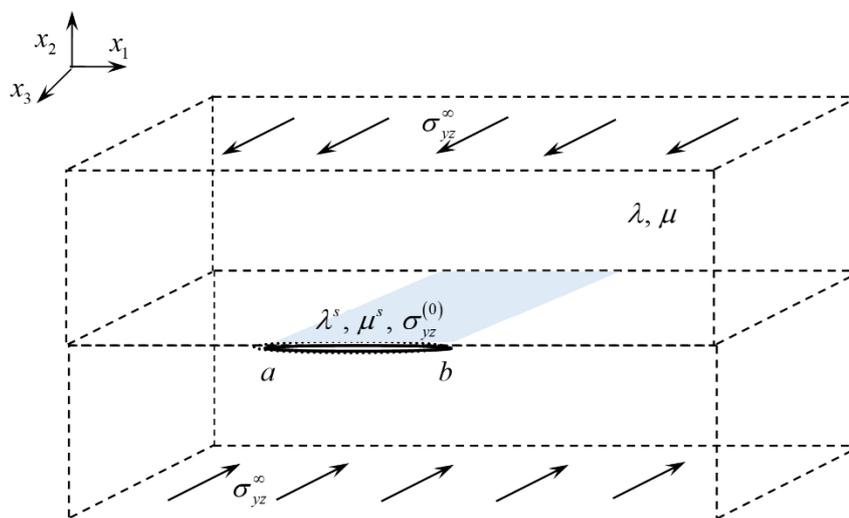


Рисунок 1 - Нанотріщина в пружному тілі під дією антиплоского навантаження

У макроскопічних моделях напруження у вершині тріщини виявляються нескінченними, що відображає той факт, що фронт тріщини зазвичай вважається ідеально гострим. Фактично, нескінченно гостра тріщина в континуумі є математичною абстракцією, оскільки насправді більшість вершин тріщин, по суті, є тупими з радіусом закруглення порядку, сумісного з наномасштабом. Це вказує на те, що більш точний аналіз області поблизу вершини тріщини може бути досягнутий у наномасштабі. Такі підходи успішно використані у низці досліджень, наприклад, у плоскому випадку в роботах [4-6].

Що стосується поверхневих ефектів для тріщини типу III, то їх урахування проводилось в роботах [7-9]. При цьому автори роботи [7] досліджували внесок поверхневих ефектів у напруження поблизу вершини тріщини III типу обмежуючись лише околom вершини тріщини. Більш повний розв'язок аналогічної задачі був наведений в [8], але в ньому не було враховано можливе навантаження берегів тріщини.

Вплив поверхневого натягу на антиплоску деформацію біматеріалу з тонким міжфазним мікрвключенням було враховано в роботі [10]. Забезпечена також мож-

ливість врахування неідеального, зокрема натяжного контакту між включенням і матрицею.

Мета дослідження. Метою даної роботи є дослідження тріщини типу III у пружному тілі з урахуванням поверхневих ефектів у рамках моделі поверхневої пружності Гуртина-Мердока. Аналіз провести за допомогою методу комплексних потенціалів, та апарату сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь. Врахувати зсувне навантаження на нескінченності та на берегах тріщини. Показати, що врахування поверхневої пружності усуває сингулярність напруження у вершині тріщини та призводить до скінченних напружень у її околі.

Викладення основного матеріалу дослідження.

Визначальні рівняння антиплоскої задачі для тріщини з поверхневим напруженням. За відсутності об'ємних сил рівняння рівноваги та визначальні рівняння, що описують деформацію лінійно пружних, однорідних та ізотропних твердих тіл, мають вигляд:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathbf{I}_3 \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

де λ та μ – константи Ламе матеріалу; $\boldsymbol{\sigma}$ та $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензори напруження та деформації відповідно; а \mathbf{I}_3 – одиничний тензор в тривимірному просторі. Ці рівняння описують основний матеріал тіла.

Поверхневе рівняння. У моделі поверхневої пружності Гуртина-Мердока поверхня тріщини розглядається як тонка пружна мембрана (з пружними константами, відмінними від основного матеріалу), ідеально з'єднана з навколишнім матеріалом. Застосуємо цю модель до поставленої задачі.

Рівняння (1) залишаються справедливими в основному матеріалі, а рівновага на поверхні тріщини описується рівняннями [1, 2]

$$[\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}] + \operatorname{div}_s \boldsymbol{\sigma}^s = 0, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \sigma_0 \mathbf{I}_2 + 2(\mu^s - \sigma_0) \boldsymbol{\varepsilon}^s + (\lambda^s + \sigma_0) \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^s) \mathbf{I}_2, \quad (3)$$

тут індекс s позначає відповідну величину, що є результатом впливу поверхневої пружності, \mathbf{n} представляє собою одиничну нормаль до поверхні тріщини, \mathbf{I}_2 є одиничним тензором в двовимірному просторі, $[*] = (*)^+ - (*)^-$ позначають стрибок відповідної величини через поверхневий шар (тут "+" і "-" відносяться, відповідно, до верхньої та нижньої поверхонь шару, як показано на рис. 1), а через σ_0 позначено поверхневий натяг. Зазначимо, що до рівняння (3) включено лише компоненти поверхневої деформації (тобто деформації, нормальні до поверхні, виключені).

Поверхнева дивергенція $\operatorname{div}_s \mathbf{u}$ визначається (в загальному випадку) як

$$\operatorname{div}_s \mathbf{u} = \operatorname{div}_s \mathbf{u}_s - 2k u_n,$$

де k – середня кривизна, а вектор переміщення \mathbf{u} допускає таке однозначне розкладення:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + u_n \mathbf{n},$$

де u_s є відповідним тангенціальним зміщенням, а u_n – нормальна компонента вектора \mathbf{u} .

Комплексі представлення для антиплоскої деформації. У випадку антиплоского зсуву в ізотропному пружному середовищі (задача про тріщину типу III) вектор переміщення \mathbf{u} з компонентами u, v, w задовольняє умовам

$$u(x, y) = v(x, y) = 0, \quad w = w(x, y), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Із співвідношень Коші витікає, що компоненти деформації задаються так

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0. \quad (4)$$

З рівняння (5) компоненти тензора напружень можна записати як

$$\sigma_{xz} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = 2\mu\varepsilon_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (5)$$

а інші компоненти напруження дорівнюють нулю.

Оскільки $w(x, y)$ є гармонійною функцією, позначаємо через $\psi(x, y)$ спряжену до неї гармонійну функцію. Вводячи комплексну змінну $z = x + iy$, можемо записати.

$$w = \operatorname{Re}[F(z)], \quad F(z) = w(x, y) + i\psi(x, y). \quad (6)$$

де $F(z)$ є аналітичною функцією z на площині $S = S^+ \cup S^-$ поза межами тріщини (рис. 1). Тоді з рівняння (6) маємо

$$\frac{dF}{dz}(z) = F'(z) = \frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{\mu} (\sigma_{xz} - i\sigma_{yz}),$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\mu i}{2} [F'(z) - \overline{F'(z)}], \quad \sigma_{xz} = \frac{\mu}{2} [\overline{F'(z)} + F'(z)]. \quad (7)$$

Рівняння рівноваги на поверхні тріщини. Позначимо через $\{e_i\}_{i=1}^3$ вектори стандартного базису тривимірного простору. Тоді на основі рівняння (2) умови рівноваги на поверхні тріщини запишуться у вигляді [1, 2].

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}^s e_\alpha + [\sigma_{ij} n_j e_i] = 0, \quad k_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^s = [\sigma_{ij} n_i n_j], \quad (8)$$

де $\alpha, \beta = 1, 3$.

Враховуючи, що в нашому випадку нормаль до поверхні тріщини спрямована вздовж e_2 або напрямку y , рівняння (8) набувають вигляду

$$\sigma_{xx,x}^s + \sigma_{xz,z}^s + [\sigma_{xy}] = 0, \quad \sigma_{zx,x}^s + \sigma_{zz,z}^s + [\sigma_{yz}] = 0, \quad (9)$$

$$[\sigma_{yy}] = -\sigma_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (10)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = \sigma_0 \delta_{\alpha\beta} + 2(\mu^s - \sigma_0) \varepsilon_{\alpha\beta} + (\lambda^s + \sigma_0) \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}, \quad (11)$$

де $\alpha, \beta, \gamma = 1, 3$.

З останніх рівнянь та (4) і (5) витікають співвідношення між поверхневими (на берегах тріщини) та основними напруженнями у вигляді

$$\sigma_{xz}^s = 2(\mu^s - \sigma_0) \varepsilon_{xz} = \frac{\mu^s - \sigma_0}{\mu} \sigma_{xz}, \quad \sigma_{yz}^s = 2(\mu^s - \sigma_0) \varepsilon_{yz} = \frac{\mu^s - \sigma_0}{\mu} \sigma_{yz} \quad (12)$$

У цих рівняннях враховано, що для взаємозв'язаного інтерфейсу деформації на поверхні дорівнюють деформаціям у прилеглому основному матеріалі, тобто $\varepsilon_{xz}^s = \varepsilon_{xz}$ та $\varepsilon_{yz}^s = \varepsilon_{yz}$.

Враховуючи далі, що розглядається антиплоский зсув, рівняння (9), (10) можуть бути зведені до вигляду

$$\sigma_{xz,x}^s + [\sigma_{yz}^s] = 0. \quad (13)$$

Тріщина типу III з поверхневим натягом. Позначимо границі нижньої $y < 0$ та верхньої $y > 0$ півплощин знаками "-" та "+", відповідно. Тоді, з рівняння (13), граничні умови на поверхні тріщини можна записати як

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} + (\sigma_{yz}^s)^+ - (\sigma_{yz}^s)^- = 0, \text{ на верхньому березі,} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} + (\sigma_{yz}^s)^+ - (\sigma_{yz}^s)^- = 0, \text{ на нижньому березі,} \quad (15)$$

причому в (14) $(\sigma_{yz}^s)^- = \sigma_{yz}^{(0)}$, а в (15) $(\sigma_{yz}^s)^+ = \sigma_{yz}^{(0)}$, де $\sigma_{yz}^{(0)}$ – рівномірне зсувне напруження, що прикладене до берегів тріщини.

З рівнянь (4), (7), (12), (14) і (15), для тріщини $-a < x < a$, $y = 0$, береги якої зазнають рівномірного зсувного напруження $\sigma_{yz}^{(0)}$, умови на берегах тріщини можна записати наступним чином.

На верхньому березі:

$$(\sigma_{yz}^s)^+ = \sigma_{yz}^{(0)} - \frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} = \sigma_{yz}^{(0)} - (\mu^s - \sigma_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sigma_{yz}^{(0)} - \frac{\mu^s - \sigma_0}{2} [F''(z) + \overline{F''(z)}]^+. \quad (16)$$

На нижньому березі

$$(\sigma_{yz}^s)^- = \sigma_{yz}^{(0)} + \frac{\partial \sigma_{xz}^s}{\partial x} = \sigma_{yz}^{(0)} + (\mu^s - \sigma_0) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sigma_{yz}^{(0)} + \frac{\mu^s - \sigma_0}{2} [F''(z) + \overline{F''(z)}]^-. \quad (17)$$

Будемо також вважати, що задане рівномірне зсувне напруження $\sigma_{yz} = \sigma_{yz}^\infty$ на нескінченності.

Враховуючи (16) та (17), з рівнянь (7) можна сформулювати умови на берегах тріщини.

На верхньому березі:

$$\frac{\mu i}{2} [F'(z) - \overline{F'(z)}]^+ = \sigma_{yz}^{(0)} - \frac{\mu^s - \sigma_0}{2} [F''(z) + \overline{F''(z)}]^+. \quad (18)$$

На нижньому:

$$\frac{\mu i}{2} [F'(z) - \overline{F'(z)}]^- = \sigma_{yz}^{(0)} + \frac{\mu^s - \sigma_0}{2} [F''(z) + \overline{F''(z)}]^-. \quad (19)$$

При антиплоскій деформації (тріщина типу III) очевидно, що $w^+ = -w^-$. Тоді на основі (6) рівняння (18) та (19) можна записати у вигляді:

на верхньому березі:

$$\frac{\mu i}{2} \left[F'(z) - \overline{F'(z)} \right]^+ = \sigma_{yz}^{(0)} + \frac{\mu^s - \sigma_0}{2} \left[F''(z) + \overline{F''(z)} \right]^-, \quad (20)$$

на нижньому:

$$\frac{\mu i}{2} \left[F'(z) - \overline{F'(z)} \right]^- = \sigma_{yz}^{(0)} + \frac{\mu^s - \sigma_0}{2} \left[F''(z) + \overline{F''(z)} \right]^-. \quad (21)$$

Оскільки ми припустили рівномірний розподіл напружень на нескінченності і на берегах тріщини, то на основі першого рівняння (7) маємо $F'(z) + \overline{F'(z)} = 0$, звідки отримуємо

$$F'(z) = -\overline{F'(z)}. \quad (22)$$

Нагадаємо [11], що

$$\overline{F(z)} = F(\overline{z}) \text{ і } \overline{F^+(x)} = \overline{F^-(x)}, \quad \overline{F^-(x)} = \overline{F^+(x)}. \quad (23)$$

Склавши рівняння (20) та (21) маємо

$$\frac{\mu i}{2} \left(\left[F'(z) - \overline{F'(z)} \right]^+ + \left[F'(z) - \overline{F'(z)} \right]^- \right) = 2\sigma_{yz}^{(0)} + (\mu^s - \sigma_0) \left(F''(z)^- + \overline{F''(z)}^- \right). \quad (24)$$

Використовуючи (23), отримуємо

$$\frac{\mu i}{2} \left(F'(z)^+ + F'(z)^- - \overline{F'(z)}^+ - \overline{F'(z)}^- \right) = 2\sigma_{yz}^{(0)} + (\mu^s - \sigma_0) \left(F''(z)^- - F''(z)^+ \right). \quad (25)$$

Але згідно з (22) та (23) маємо

$$-\overline{F'(z)}^+ - \overline{F'(z)}^- = -\overline{F'(z)}^- - \overline{F'(z)}^+ = F'(z)^- + F'(z)^+.$$

Тоді рівняння (25) приймає вигляд:

$$\mu i \left(F'(z)^+ + F'(z)^- \right) = 2\sigma_{yz}^{(0)} + (\mu^s - \sigma_0) \left(F''(z)^- - F''(z)^+ \right). \quad (26)$$

Далі, запишемо невідому функцію $F(z)$ як інтеграл типу Коші [11]:

$$F'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{t-z} + \frac{1}{\mu i} \sigma_{yz}^\infty. \quad (27)$$

Тоді, враховуючи вимогу обмеженості напружень на кінцях тріщини, отримаємо:

$$F''(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{(t-z)^2} = - \left[\frac{f(t)}{t-z} \right]_{-a}^a + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{f'(t) dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{f'(t) dt}{t-z}, \quad (28)$$

де $f(t_0) = F'(z)^+ - F'(z)^-$, $-a \leq t_0 \leq a$, $f(a) = f(-a) = 0$ (скінченне напруження у вершинах тріщини).

З рівнянь (26), (27) та (28) отримуємо таке сингулярне інтегро-диференціальне рівняння першого порядку типу Коші для невідомої функції $f(t)$ при $t \in [-a, a]$:

$$\frac{\mu}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{t-t_0} + (\mu^s - \sigma_0) f'(t_0) = -2 \left(\sigma_{yz}^\infty - \sigma_{yz}^{(0)} \right), \quad -a \leq t_0 \leq a, \quad f(a) = f(-a) = 0. \quad (29)$$

Розв'язання сингулярного інтегро-диференціального рівняння. Якщо покласти $\xi = t/a$, $\xi_0 = t_0/a$ у рівнянні (29), то отримаємо

$$\frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(a\xi) d\xi}{\xi - \xi_0} + (\mu^s - \sigma_0) \frac{df(a\xi_0)}{d(a\xi_0)} = -2(\sigma_{yz}^\infty - \sigma_{yz}^{(0)}), \quad -1 \leq \xi_0 \leq 1. \quad (30)$$

Додатково позначаючи $g(\xi) = f(a\xi)$, з рівняння (30) отримуємо:

$$\frac{\mu}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\xi) dt}{\xi - \xi_0} + \frac{(\mu^s - \sigma_0)}{a} \frac{dg(\xi_0)}{d\xi_0} = -2(\sigma_{yz}^\infty - \sigma_{yz}^{(0)}), \quad -1 \leq \xi_0 \leq 1, \quad g(1) = g(-1) = 0. \quad (31)$$

Розв'язок рівняння (31) на основі [14] має вигляд

$$g(\xi_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \xi_0^2}} \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi + \frac{1}{\mu\pi \sqrt{1 - \xi_0^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{t - \xi_0} \left(2(\sigma_{yz}^\infty - \sigma_{yz}^{(0)}) + \frac{(\mu^s - \sigma_0)}{a} \frac{dg(\xi)}{d\xi} \right) d\xi, \quad \xi_0 \in (-1, 1), \quad g(1) = g(-1) = 0. \quad (32)$$

Помноживши обидві частини на $\sqrt{1 - \xi_0^2}$ маємо

$$g(\xi_0) \sqrt{1 - \xi_0^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi - \left(\frac{\mu^s - \sigma_0}{a\mu\pi} \right) \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi - \xi_0} \frac{dg(\xi)}{d\xi} d\xi = \frac{2(\sigma_{yz}^\infty - \sigma_{yz}^{(0)})}{\mu\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi - \xi_0} d\xi. \quad (33)$$

Будемо розшукувати функцію $g(\xi_0)$ у формі

$$g(\xi_0) = \sum_{m=0}^N a_m T_m(\xi_0), \quad \xi_0 \in [-1, 1], \quad (34)$$

де $T_m(\xi_0)$ представляє m -й поліном Чебишева першого роду.

Застосовуючи крайові умови $g(1) = g(-1) = 0$ і використовуючи рівняння (31), знаходимо, що

$$g(-1) = \sum_{m=0}^N a_m T_m(-1) = \sum_{m=0}^N a_m (-1)^m = 0, \quad g(1) = \sum_{m=0}^N a_m T_m(1) = \sum_{m=0}^N a_m = 0, \quad T_m(-1) = (-1)^m, \quad T_m(1) = 1. \quad (35)$$

Крім того, для поліному Чебишева другого роду $U_m(x)$, маємо

$$\frac{dT_m(x)}{dx} = mU_{m-1}(x). \quad (36)$$

Отже, з рівнянь (34) і (36) знаходимо, що

$$\frac{dg(\xi_0)}{d\xi_0} = \frac{d}{d\xi_0} \left(\sum_{m=0}^N a_m T_m(\xi_0) \right) = \sum_{m=0}^N m a_m U_{m-1}(\xi_0), \quad \xi_0 \in [-1, 1]. \quad (37)$$

Підставляючи рівняння (34) та (37) до рівняння (33), маємо

$$\sum_{m=0}^N a_m \left[T_m(\xi_0) \sqrt{1-\xi_0^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 T_m(\xi) d\xi - m \left(\frac{\mu^s - \sigma_0}{a\mu\pi} \right) \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - \xi_0} U_{m-1}(\xi) d\xi \right] = \frac{2(\sigma_{yz}^\infty - \sigma_{yz}^{(0)})}{\mu\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - \xi_0} d\xi, \quad \xi_0 \in [-1, 1]. \quad (38)$$

Використовуємо властивості ортогональності поліному Чебишева та наступні інтегральні співвідношення:

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(t) \sqrt{1-t^2}}{t-x} dt = -\pi T_{n+1}(x), \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad \int_{-1}^1 T_m(x) dx = \frac{1+(-1)^m}{1-m^2}, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (39)$$

Отже, на основі (39) рівняння (38) зводиться до вигляду

$$\sum_{m=0}^N a_m \left[T_m(\xi_0) \sqrt{1-\xi_0^2} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1+(-1)^m}{1-m^2} \right) + \left(\frac{\mu^s - \sigma_0}{a\mu} \right) m T_m(\xi_0) \right] = -\frac{2(\sigma_{yz}^\infty - \sigma_{yz}^{(0)})}{\mu} T_1(\xi_0).$$

Виберемо множину точок колокації $\xi_0 = \xi_{0i} = -\cos\left(\frac{i\pi}{N}\right)$, $i=1, 2, \dots, N-1$, і в результаті отримаємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів a_m :

$$\sum_{m=0}^N a_m \left[T_m(\xi_{0i}) \sqrt{1-\xi_{0i}^2} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{1+(-1)^m}{1-m^2} \right) + \left(\frac{\mu^s - \sigma_0}{a\mu} \right) m T_m(\xi_{0i}) \right] = -\frac{2(\sigma_{yz}^\infty - \sigma_{yz}^{(0)})}{\mu} T_1(\xi_{0i}), \quad i=1, 2, \dots, N-1. \quad (40)$$

Враховуючи властивість поліномів Чебишева першого роду $T_m(\cos\theta) = \cos m\theta$, система (40) зводиться до наступного вигляду:

$$\sum_{m=0}^N a_m \left[-\cos\left(\frac{mi\pi}{N}\right) \sqrt{1 - \left(\cos\left(\frac{i\pi}{N}\right)\right)^2} - \frac{1+(-1)^m}{\pi(1-m^2)} - m S_e \cos\left(\frac{mi\pi}{N}\right) \right] = \frac{2(\sigma_{yz}^\infty - \sigma_{yz}^{(0)})}{\mu} \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i=1, 2, \dots, N-1, \quad (41)$$

тут $S_e = \frac{\mu^s - \sigma_0}{a\mu}$ – поверхневе напруження. В подальшому будемо позначати

$\tilde{S} = \frac{\sigma_{yz}^\infty - \sigma_{yz}^{(0)}}{\mu}$ та $S = \frac{\sigma_{yz}^\infty}{\mu}$ – напруження на нескінченності.

Крім того, з рівнянь граничних умов (35) маємо:

$$\sum_{m=0}^N a_m = 0 \quad \text{для } i=0, \quad \sum_{m=0}^N a_m (-1)^m = 0 \quad \text{для } i=N. \quad (42)$$

Отже, розв'язання рівняння (29) зведено до розв'язання системи рівнянь (41) і (42) відносно невідомих коефіцієнтів a_m . В подальшому коефіцієнти a_m підставляються до формули (34) для отримання невідомої функції $g(\xi_0)$.

Результати та обговорення. У цьому розділі здійснюється чисельне розв'язання рівнянь (41) і (42) для діапазону параметрів поверхні, отриманих з роботи [12]. Проведемо спочатку порівняння з відомими класичними результатами. Для цього розглянемо антиплоску задачу для тіла з тріщиною, в якій нехтуються поверхневі ефекти. Остання задача має аналітичний розв'язок, наведений, наприклад, в [13].

$$\mu F'(z) = \sigma_{xz} - i\sigma_{yz} = \frac{-i\sigma_{yz}^{\infty} z}{\sqrt{z^2 - a^2}}.$$

$$\text{Тоді при } z \rightarrow x + i \cdot 0 \text{ на } [-a, a]: \mu F'(z)^+ = \sigma_{xz}^+ - i\sigma_{yz}^+ = \frac{-i\sigma_{yz}^{\infty} x}{i\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-\sigma_{yz}^{\infty} x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\text{а при } z \rightarrow x - i \cdot 0 \text{ на } [-a, a]: \mu F'(z)^- = \sigma_{xz}^- - i\sigma_{yz}^- = \frac{-i\sigma_{yz}^{\infty} x}{-i\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sigma_{yz}^{\infty} x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$\text{Тобто на } [-a, a]: \sigma_{xz}^+ = \frac{-\sigma_{yz}^{\infty} x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \sigma_{yz}^+ = 0, \quad \sigma_{xz}^- = \frac{\sigma_{yz}^{\infty} x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \sigma_{yz}^- = 0.$$

Це означає, що

$$\sigma_{xz}^+ - \sigma_{xz}^- = \mu(F'(z)^+ - F'(z)^-) = \mu f(x) = \frac{-2\sigma_{yz}^{\infty} x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (43)$$

На рис. 2 наведено стрибок напруження (40) в околі правої вершини тріщини при поверхневому напруженні S_e , що змінюється в діапазоні $0,001 < S_e < 0,1$, внутрішньому тиску у тріщині $\mu^s = 161.73 \text{ (J/m}^2\text{)}$, поверхневому натягу $\sigma_0 = 1.3 \text{ (J/m}^2\text{)}$, модулі зсуву для основного матеріалу $\mu = 168 \cdot 10^9 \text{ (Па)}$ і $S = \sigma_{yz}^{\infty} / \mu = 0.1$. Крива I відповідає поверхневому напруженню $S_e = 0.1$, II – $S_e = 0.05$, III – $S_e = 0.01$, IV – $S_e = 0.005$, V – $S_e = 0.001$, а крива VI відповідає випадку відсутності поверхневих ефектів.

Слід зазначити, що параметр S_e регулюється шляхом зміни розміру тріщини. Тут і надалі розмір тріщини змінюється від 10 нм ($S_e = 0,1$) до 1 мкм ($S_e = 0,001$). З рис. 2 очевидно, що коли вплив поверхневого ефекту стає порівняно незначним, розв'язок стає близьким до класичного випадку, навіть біля вершини тріщини, де різниця напружень в класичному випадку є нескінченною.

Розглянемо тепер розподіл напружень біля вершин тріщини на її продовженні. Підставляючи формулу (27) в (7) отримуємо:

$$\sigma_{yz} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-a}^a \left(\frac{1}{t - \bar{z}} + \frac{1}{t - z} \right) f(t) dt + \sigma_{yz}^{\infty}.$$

Подальші спрощення приводять до наступної формули:

$$\sigma_{yz}(x, y) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-a}^a \left(\frac{t-x}{(t-x)^2 + y^2} \right) f(t) dt + \sigma_{yz}^{\infty}, \quad (44)$$

яка при $y=0$ і замінах $t = a\tau$ і $x = as$ приводить до виразу

$$\sigma_{yz}(as, 0) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(\tau)}{\tau-s} d\tau + \sigma_{yz}^{\infty}. \quad (45)$$

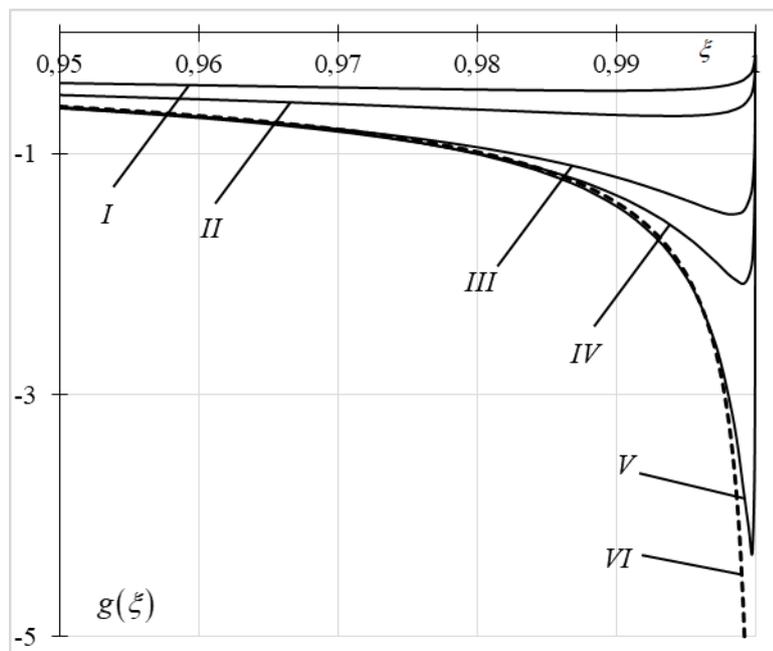


Рисунок 2 - Різниця напружень між верхнім та нижнім берегами тріщини в околі її правої вершини при $S = \sigma_{yz}^{\infty} / \mu = 0.1$ та $\sigma_{yz}^{(0)} = 0$

Результати розрахунку по формулі (45) представлені на рис. 3 і в табл. 1 для тих же механічних і геометричних параметрів, що і на рис. 2. Криві I–VI також побудовані для тих же параметрів, що і на рис. 2. В табл. 1 наведені значення напруження $\sigma_{yz}(a, 0)$ при тих же значеннях S_e , що і на рис. 2, і при різних рівнях точності розрахунку. Розрахунки проводились при врахуванні різної кількості членів (N) у розкладеннях (34) і різної кількості вузлів (n_{Gauss}) квадратурної формули Гауса, яка використовувалась для обчислення інтегралу (45). Найбільш характерні результати показані в таблиці. Зокрема, у стовпчику 2 наведені результати для порівняно невеликої точності формули Гауса, у стовпчику 3 – для невеликої кількості членів у розкладеннях (34), а у стовпчику 4 – результати, які вже практично не змінюються при збільшенні ні N , ні n_{Gauss} .

Значення напруження σ_{yz} у вершині тріщини при різних рівнях точності розрахунку

S_e	$N = 300$ $n_{Gauss} = 8$	$N = 30$ $n_{Gauss} = 30$	$N = 300$ $n_{Gauss} = 30$
0.1	0.320365	0.385986	0.508226
0.05	0.369837	0.487465	0.655736
0.01	0.428721	0.759109	1.073008
0.005	0.431797	0.868198	1.257036
0.001	0.427876	1.0327	1.542938

З наведених результатів видно, що врахування поверхневої пружності усуває сингулярність у вершинах тріщини і дозволяє отримати скінченні значення напружень у цих вершинах.

Крім того, аналіз поведінки $\sigma_{yz}(as, 0)$ для s значно більших одиниці показує, що нормована величина цього напруження на віддаленні від вершини тріщини збігаються до значення 0.1, що узгоджується з величиною прикладеного віддаленого напруження.

Залежність стрибків напружень $\sigma_{xz}^+ - \sigma_{xz}^-$ між верхнім та нижнім берегами тріщини від величин рівномірного зсувного напруження $\sigma_{yz}^{(0)}$, що визначається параметром \tilde{S} , показано на рис. 4. Графіки напружень $\sigma_{yz}(as, 0)$ побудовані для тих же механічних і геометричних параметрів, що і на рис. 4, показані на рис. 5.

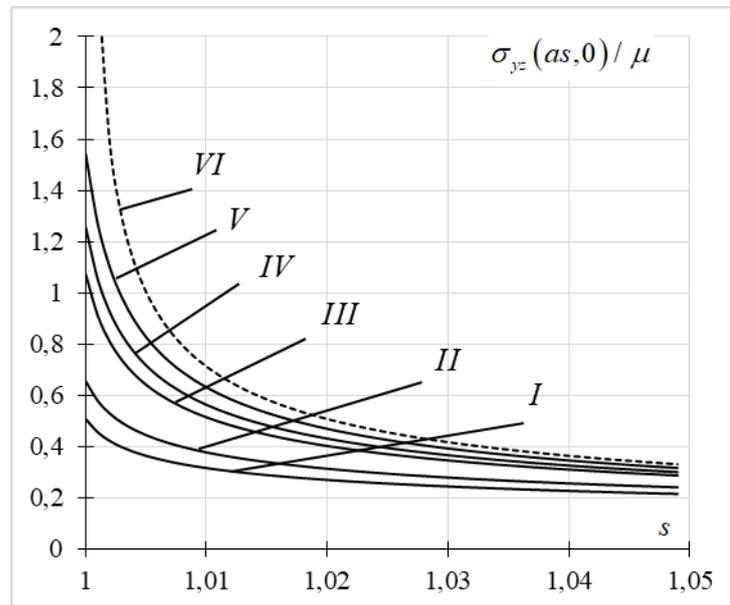


Рисунок 3 - Розподіл напружень відносно параметра поверхні S_e ,

для $S = \sigma_{yz}^\infty / \mu = 0.1$ і $\sigma_{yz}^{(0)} = 0$

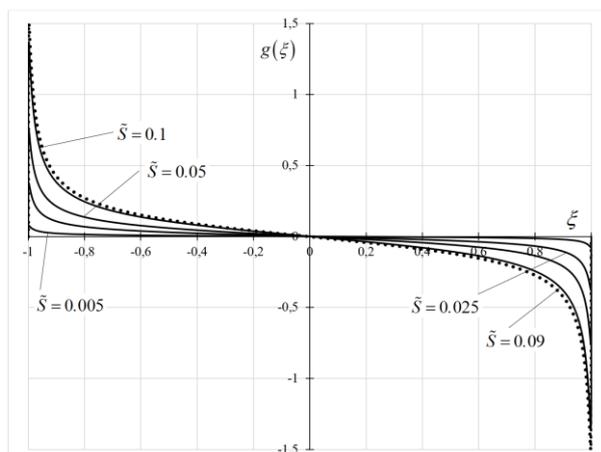


Рисунок 4 - Залежність різниці напружень $\sigma_{xz}^+ - \sigma_{xz}^-$ від величин зсувного напруження на берегах тріщини

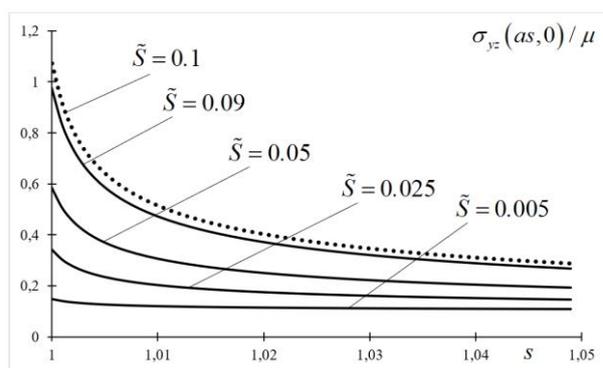


Рисунок 5 - Зміна дотичного напруження на продовженні тріщини в залежності від величин зсувного напруження на її берегах

Висновки. Досліджено вплив поверхневої пружності на антиплоску задачу для тріщини типу III у лінійно пружному твердому тілі, що знаходиться під дією віддалених зсувних напружень та навантажень на поверхні тріщини. Поверхневі ефекти враховані за допомогою континуальної моделі Гуртина і Мердока. За допомогою методів комплексної змінної проблема зведена до сингулярного інтегро-диференціального рівняння Коші першого порядку. Розв'язок цього рівняння побудований шляхом його представлення у вигляді розкладення по многочленам Чебишева і використання методу колокації. На основі цього розв'язку знайдені напруження в околі тріщини при різних її довжинах. Встановлено, що на відміну від класичного розв'язку лінійної механіки руйнування напруження у вершині тріщини залишаються скінченними. Вплив поверхневої пружності стає особливо очевидним, коли довжина тріщини є меншою мікрметра і посилюється з подальшим зменшенням цієї довжини.

ЛІТЕРАТУРА/ REFERENCES

1. Gurtin M.E., Murdoch A.I. A Continuum Theory of Elastic Material Surfaces. The Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1975. 57(4). P. 291–323.
2. Gurtin M.E., Weissmuller J., Larche F. A General Theory of Curved Deformable Interface in Solids at Equilibrium. Philosophical Magazine A. 1998. 78(5). P. 1093–1109.
3. Sharma P., Ganti S. Size-Dependent Eshelby's Tensor for Embedded Nano-Inclusions Incorporating Surface/Interface Energies. ASME Journal of Applied Mechanics. 2004. 71(5). P. 663–671.
4. Tian L., Rajapakse R.K.N.D. Analytical Solution of Size-Dependent Elastic Field of a Nano-Scale Circular Inhomogeneity. ASME Journal of Applied Mechanics. 2007. 74(3). P. 568–574.
5. Kim C.I., Schiavone P., Ru C.-Q. Analysis of plane-strain crack problems (mode I and mode II) in the presence of surface elasticity. Journal of Elasticity. 2011. 104. P. 397–420.

6. Kim C.I., Schiavone P., Ru C.-Q. Effect of surface elasticity on an interface crack in plane deformations. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 2011. 467. P. 3530–3549.
7. Wang G.-F., Feng X.-Q., Wang T.-J., Gao W. Surface Effects on the Near-Tip Stresses for Mode-I and Mode-III Cracks. ASME Journal of Applied Mechanics. 2008. 75. P. 1–5.
8. Kim C.I., Schiavone P., Ru C.-Q. The effects of surface elasticity on an elastic solid with mode III crack: Complete solution. Journal of Applied Mechanics. 2010. 77. P. 021011-1–021011-7.
9. Kim C.I., Schiavone P., Ru C.-Q. The effect of surface elasticity on a mode-III interface crack. Archives of Mechanics. 2011. 63. P. 267–286.
10. Piskozub Y.Z. Effect of surface tension on the antiplane deformation of bimaterial with a thin interface microinclusion. Mathematical Modeling and Computing. 2021. 8(1). P. 69–77.
11. Muskhelishvili N.I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff: Groningen. 1953. 732 p.
12. Sharma P., Ganti S. Size-Dependent Eshelby's Tensor for Embedded Nano-Inclusions Incorporating Surface/Interface Energies. ASME Journal of Applied Mechanics. 2004. 71(5). P. 663–671.
13. England A.H. Complex Variable Methods in Elasticity. Wiley: London. 1971. 197 p.
14. Chakrabarti A., Hamsapriye. Numerical Solution of a Singular Integro-Differential Equation. ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. 79(4). pp. 233–241.

Received 19.01.2026.
Accepted 23.01.2026.

***Effect of surface elasticity in the analysis of nanocracks
under anti-plane load field***

The influence of surface elasticity on the stress-strain state of a crack type III, which occurs under antiplane shear deformations of a linearly elastic body, is investigated. Mechanical effects that arise near surfaces, particularly at the crack faces, are taken into account using the Gurtin and Murdoch continuum surface-boundary model. Equilibrium conditions on the crack surface are formulated, as well as the relationship between surface and body stresses. Using these relationships, refined boundary conditions are written on the upper and lower faces of the crack, which are further analyzed using the methods of the theory of complex variable functions. As a result of this analysis, a first-order singular integro-differential equation with a Cauchy-type kernel is formulated. For its solution, the representation of unknown functions in terms of Chebyshev polynomials of the first kind and the method of collocation on the nodes of these polynomials are used. The solution of the resulting system of linear algebraic equations allows to obtain the coefficients of the specified expansions. A formula for calculating the stress on the crack extension is found, which is expressed by an integral with a Cauchy type kernel. A comprehensive analysis of the peculiarities of the numerical implementation of the developed algorithm is carried out. It includes variations in the number of components in the expansions of unknown functions in Chebyshev polynomials and the number of nodes in Gauss quadrature formulas for calculating the specified integral. The behavior of the stress difference between the upper and lower crack faces as well as the distribution of another stress component on the crack extension is graphically illustrated in the vicinity of

the right tip. The dependence of these quantities on the values of the uniform shear stress specified on the crack edges is also illustrated. It is shown that the consideration of surface elasticity becomes especially noticeable when the crack length is less than a micrometer. Further decrease of this length leads to significant change of the character of the stress distribution in the vicinity of the crack tip. In particular, the square root singularity of the stresses at the crack tips, which is characteristic for the classical crack model, disappears and the stresses at these tips become finite.

Keywords: stresses, surface elasticity, crack, antiplane deformation, integro-differential equation, analytical method.

Клецьков Олександр Миколайович – аспірант кафедри теоретичної та комп’ютерної механіки, Дніпровський національний університет ім.Олеся Гончара.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2587-4647>

Шевельова Алла Євгенівна – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики, Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6688-0942>

Лобода Володимир Васильович – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри теоретичної та комп’ютерної механіки, Дніпровський національний університет ім.Олеся Гончара.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0432-629X>

Kletskov Oleksandr – postgraduate student of the Department of Theoretical and Computational Mechanics, Oles Honchar Dnipro National University.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2587-4647>

Sheveleva Alla – D.Sc., Professor, Professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Cybernetics, Oles Honchar Dnipro National University.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0432-629X>

Loboda Volodymyr - D.Sc., Professor, Professor of the Department of Theoretical and Computational Mechanics, Oles Honchar Dnipro National University.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0432-629X>