DOI 10.34185/1562-9945-5-161-2025-18
УДК 622.28.044:622.831

Г.І. Ларіонов, В.Л. Волошко

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ДО СТИСНЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

Анотація. Передача значного об'єму інформації потребує значної потужності і ємності джерела живлення, які є обмеженими. З цих причин термін функціонування міжпланетних станцій і інших роботизованих систем обмежений. Для подовження місії станцій «Вояджер-1» та «Вояджер-2», а також для передачі великої кількості інформації роботизованими системами на планети Сонячної системи – Місяць, Марс, Венера необхідно використати стиснення інформації. Експлуатація такого широкого спектру машин і механізмів показала, що основним обмеженням на терміни їх функціонування є обмеженість ємності джерел живлення. Терміни їх функціонування пропорційні об'єму переданої інформації, в тому числі, і зображень. Зрозуміло, що все це змушує скорочувати час роботи передавача, основного режиму витрат енергії. Таким чином, задача збільшення термінів функціонування пов'язана зі скороченням часу передачі даних. А це можливо за рахунок зменшення їх об'єму, тобто стиснення.
Ключові слова: стиснення інформації, роздільна здатність, матриці чисел, блоки розбивки зображень, метод послідовної апроксимації, мультиплікативна форма представлення зображень.

Постановка проблеми. Розробка процедур стиснення інформації набула особливої актуальності у зв'язку зі збільшенням кількості космічних місій на значні відстані, а також зі збільшенням об'єму передачі результатів досліджень. Так, стиснення інформації може відбуватись шляхом заміни передачі пікселів зображення передачею лише коефіцієнтів функцій, які апроксимують зображення. Ефективність такого стиснення пов'язана як з розмірами зображення так і з кількістю ділянок, на які може воно розбиватися, і, безумовно, залежить від ефективності методів і процедур апроксимації [5]. Застосування розробленого авторами методу послідовної апроксимації (МПА) для представлення функцій у околі точки у мультиплікативному вигляді до задач геотехнічної механіки показало свою ефективність. Причому отримані аналітичні вирази для обчислення функції були чинними не тільки у околі точки представлення, але й забезпечили інженерну точність на границях області визначення. Таке застосування МПА дозволило узагальнити результати досліджень і сформулювати гіпотезу про існування такого представлення для більш широкого класу задач та використати метод для розв'язування проблеми стиснення зображень.

© Ларіонов Г.І., Волошко В.Л., 2025

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженню анкера, вибору значущих чинників впливу на його потужність, обгрунтуванню математичних моделей задач теорії пружності для півпростору з зафіксованим у ньому анкером присвячено значну кількість експериментальних і теоретичних робіт [2-3]. Практична оцінка та аналіз отриманих результатів приводять до необхідності розширення застосування математичних методів для зростання економічної ефективності гірничих виробок. Так, у роботі [1] запропоновано оцінювання впливу пара-метрів анкера на його потужність методом відтворення аналітичного виду функції, заданої у табличній формі, в околі точки із області її визначення. Розроблена методика представлення функції добутком функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної. Дано оцінку верхньої межі похибки такого представлення. Обчис-лювальна ефективність методу [4] свідчить про можливість його застосування і отримання практичних результатів для інших інженерних задач.

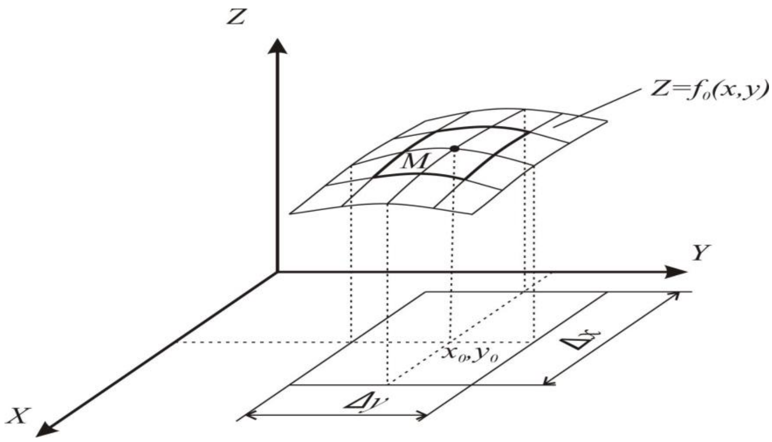
Мета дослідження. Продемонструвати ефективність використання МПА для стиснення зображень. Це відбувається шляхом розбиття зображення сіткою 4*4 пікселів, апроксимацією функції густини зображення кожної з ділянок зображення з використанням МПА методу у вигляді поліномів четвертого степеня. Стиснення зображення відбувається за рахунок передачі коефіцієнтів поліномів замість передачі пікселів зображення за незначної втрати його якості.

Викладення основного матеріалу дослідження.

Успішне застосування МПА для дослідження широкого класу задач геотехнічної механіки і гірничого виробництва [1] дозволяє формулювати гіпотезу, зміст якої наведений далі.

Нехай існує скалярна функція $F\left(X\right)=F\left(x_1,x_2,..,x_n\right)$, яка є обмеженою, визначеною і неперервною у замкнутій області $\overline{D}$. Точка $M\left(x_1^0,x_2^0,..,x_n^0\right)\in D$.

Нехай $\exists\ \ \varepsilon(M_0)$: $\forall X \in \varepsilon(M_0) \Rightarrow \left|F\left(X\right)-\varphi\left(X\right)\right|\le\varepsilon$. Функція $\varphi\left(X\right)$ належить певному класу і знаходиться згідно гіпотези та формул, наведених в роботі [1].



З фізичних міркувань розглядаємо прямокутну форму $\varepsilon-$"$около$", який визначається нерівністю. Для простоти , без зменшення загальності наведений рисунок для $M(x_0,y_0)$ та функції $Z=f_0(x,y)$.

Рисунок 1 - Вибір прямокутного «околу» точки

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

На рис.1 наочно представлена множина точок «околу», яка визначається нерівністю $\max\left\{\frac{\Delta_x}{2}, \frac{\Delta_y}{2}\right\} = \max\left\{|x - x_0|, |y - y_0|\right\} < \varepsilon$.

Далі розглянемо представлення функції $\varphi(X)$ у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить лише від однієї функції, тобто суть методу послідовної апроксимації (МПА) [1]. Це обумовлено послідовним характером дій, які полягали в утворенні функцій $f_i(x_i)$ та знаходженні їх апроксимацій $g_i(x_i)$. Алгоритм роботи методу полягає у виконанні наступних етапів.

1. Обираємо точку

$$M = M\left(x_1^0, x_2^0, .., x_n^0\right) \in D.$$

2. Утворюємо функції

$$f_1(x_1) = F\left(x_1, x_2^0, .., x_n^0\right),\ f_2(x_2) = F\left(x_1^0, x_2, .., x_n^0\right), \ldots\ f_n(x_n) = F\left(x_1^0, x_2^0, .., x_n\right).$$

3. Знаходимо $g_1(x_1), g_2(x_2), \ldots\ g_n(x_n)$, які належить певному класу функцій та точно апроксимують утворені функції $f_i(x_i),\ i = 1, 2, \ldots\ n$.

4. Знаходимо коефіцієнт апроксимації, який визначається формулою

$$\alpha = \frac{F(M_0)}{g_1\left(x_1^0\right) \cdot g_2\left(x_2^0\right) \cdot\ .\ .\ . g_n\left(x_n^0\right)}.$$

5. Остаточно, згідно гіпотези, доведеної в[1], отримаємо

$$F(x_1, x_2, .., x_n) = \alpha\ g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \cdot\ .\ .\ . \cdot g_n(x_n)$$

Зауваження. Розташування точки $M = M\left(x_1^0, x_2^0, .., x_n^0\right) \in D$ істотним чином залежить від складності процесу та області його визначення, а тому впливає на вид представлення функції. На вибір точки із області визначення впливають попередні знання особливостей функції та кваліфікація дослідника. У випад-ку складних функцій і відсутності попередніх знань поведінки результативної функції пропонується обирати її у центрі області визначення, тобто координати визначати за формулою $x_j = \frac{b_j - a_j}{2}$, де a_j b_j – початок і кінець інтервалу змін параметра. Очевидно, що алгоритм прозорий та зручний, а його застосування в практичних задачах є актуальним.

Загальновідомо, що чим вища роздільна здатність зображення, тим кращою буде його якість. Виникає протиріччя: для передачі якісного зображення треба збільшувати роздільну здатність зображення, а для скорочення об’єму передачі інформації її потрібно зменшувати. Для вирішення цього протиріччя пропонується застосувати МПА до кожної ділянки, на які попередньо було розбито зображення. Сформулюємо ідею стиснення із застосуванням процедури МПА.

1.На кожній ділянці зображення, а вона являє собою матрицю чисел, обрати точку у околі якої може буде виконана апроксимація функції якості зображення у вигляді добутку двох функцій апроксимацій у вертикальній і горизонтальній площинах. Ці функції обов'язково проходять через обрану точку.

2.Якщо апроксимацію виконувати поліномами, то передавати пікселі немає потреби, просто треба передавати коефіцієнти поліномів. Іншими словами, обравши середню роздільну здатність зображення та розбивши його на блоки, треба виконати апроксимацію цих числових даних.

3.Зображення відновлювати у центрі керування на Землі у мультиплікативному вигляді. Таким чином, як показують дослідження такого застосування, можна отримувати зображення за передачі зменшеної кількості інформації (коефіцієнт стиснення може складати до 30% від оригіналу). Результати підтверджено на прикладах відновлення ряду стандартних зображень для різних значень роздільної здатності зображень.

За допомогою представленого алгоритму було проведено обчислювальні експерименти, які ілюструють його ефективність. На рис. 2 зображені результати представлення різних функції двох змінних, заданих за допомогою таблиці у чотирьох точках. Кружечками позначені табличні значення функцій, лінія визначає функцію визначену алгоритмом у вигляді многочлена.

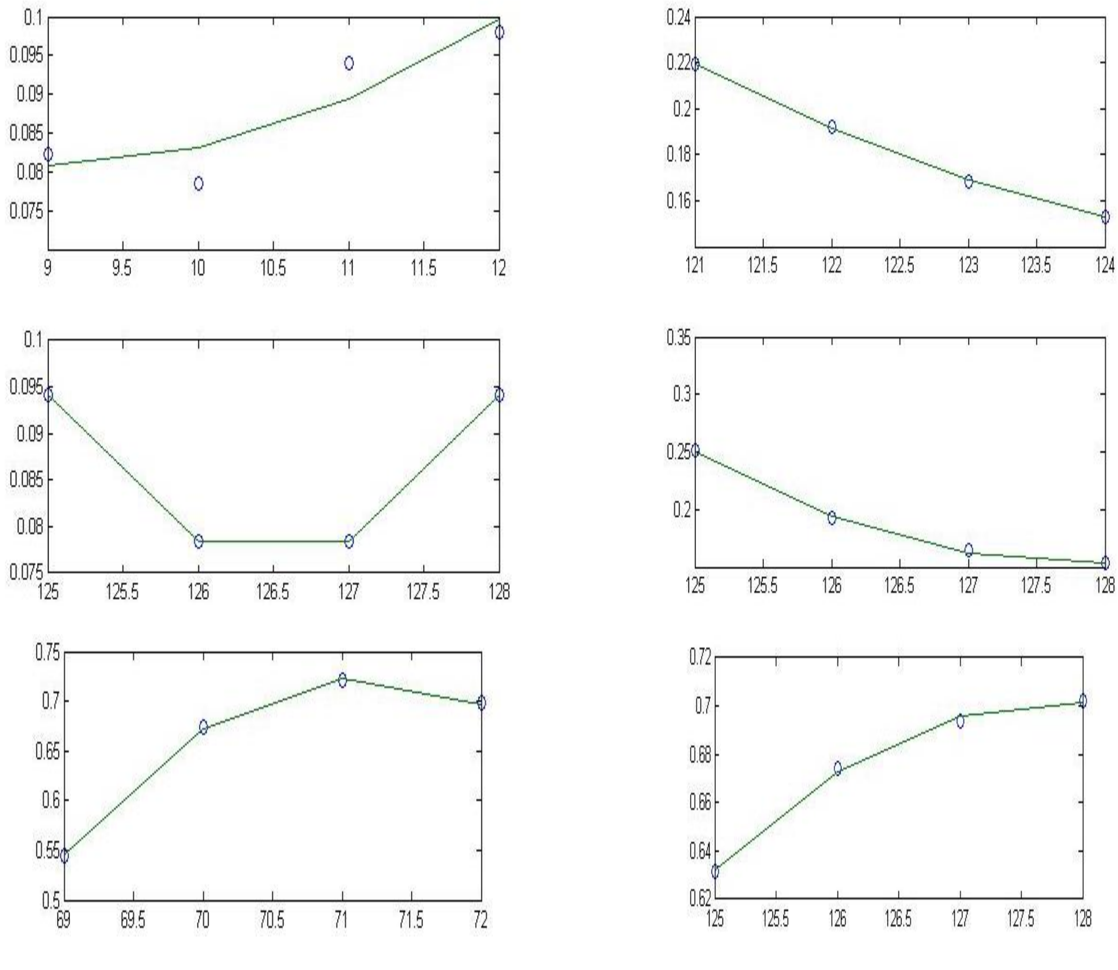


Рисунок 2 – Графіки функцій, побудованих з використанням добутку многочленів першого(ліворуч) та другого(праворуч) степенів.

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

Наведені графіки свідчать, що невелике число точок, а також досить прості многочлени забезпечують достатню для практики точність результатів.

Далі розглянемо випадок апроксимації табличних функцій, визначений у восьми точках та представлених добутком многочленів четвертого степеня. Результати обчислень наведені на рис.3. В цьому випадку точність результатів погіршується. Очевидно, що це пов’язано зі збільшенням складнощі зображення на такій площі (збільшення кількості точок), а тому вимагає використання многочленів високих степенів. Ця обставина призводить до втрати степеню стиснення і у подальшому на рисунках не наводиться.

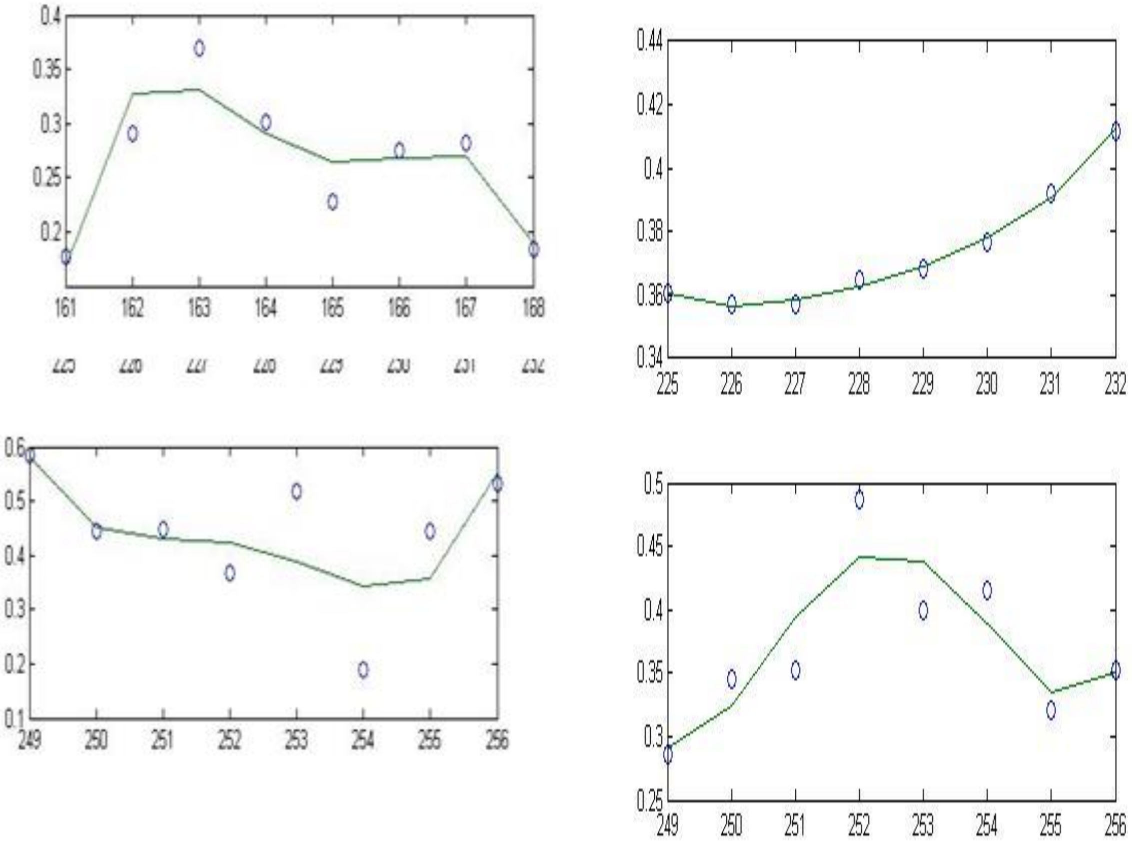


Рисунок 3 – Графіки функцій, побудованих з використанням добутку многочленів четвертого степеня

Далі, на рис. 4–7 наведемо зразки ефективного використання алгоритму при передачі стисненні візуальної інформації. Зразки виготовлені для різних розмірів оригінальних зображень, до яких додаються необхідні коментарі практичного змісту. Це робить можливим використання результатів досліджень.

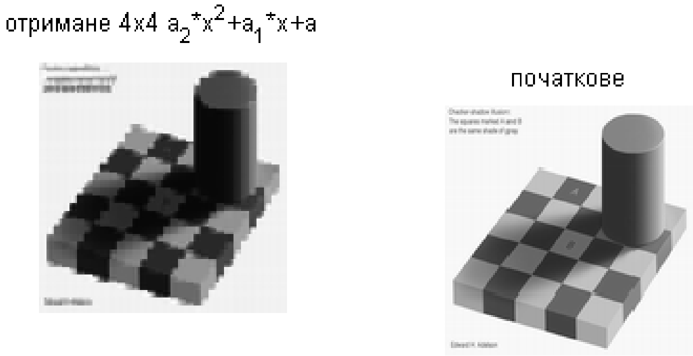


Рисунок 4 - Оригінальне зображення має розмір 16,1 кб

Загальна кількість коефіцієнтів 128x128=16384.

Кількість коефіцієнтів потрібних для передачі зображення після розбивки на матрицю

4x4 6·32·32=6144.

Перше отримане зображення 14,3 кб.

Рисунок 5 - Оригінальне зображення має розмір 40,1 кб

Загальна кількість коефіцієнтів 128x128=16384.

Кількість коефіцієнтів потрібних для передачі зображення після роз-бивки на матрицю

4x4 6·32·32=6144.

Перше отримане зображення 15,9 кб.

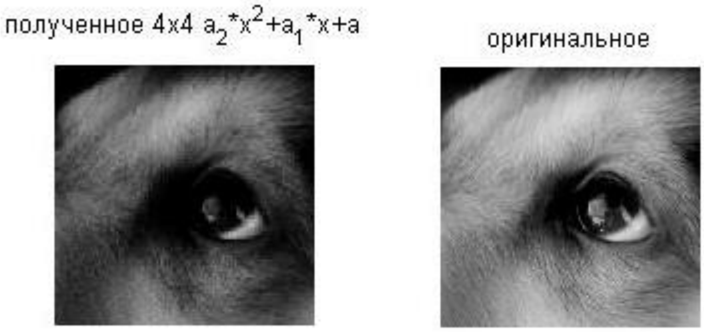


Рисунок 6 - Оригінальне зображення має розмір 26,4 кб

Загальна кількість коефіцієнтів 256x256=65536.

Кількість коефіцієнтів потрі-бних для передачі зображення після розбивки на матрицю

4x4 6·64·64 =24576.

Перше отримане зображення 8,03 кб.

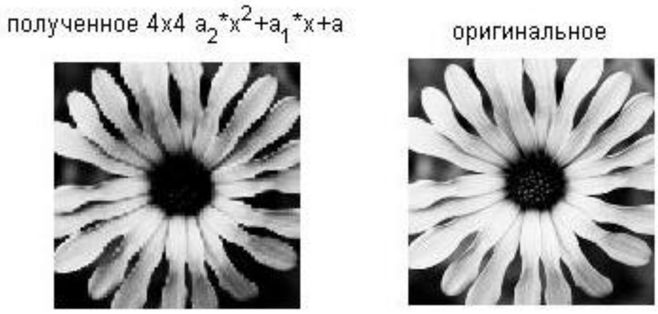


Рисунок 7 - Оригінальне зображення має розмір 27,2 кб

Загальна кількість коефіцієнтів 256x256=65536.

Кількість коефіці-єнтів потрібних для передачі зображення після розбивки на матрицю

4x4 6·64·64=24576.

Перше отримане зображення 11,2 кб.

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

Висновки. Застосування розробленого авторами методу послідовної апроксимації (МПА) для представлення функцій у околі точки із області визначення у мультиплікативному вигляді до задач геотехнічної механіки показало свою ефективність. Причому отримані аналітичні вирази для обчислення функції були вірними не тільки у околі точки представлення, але й забезпечили інженерну точність на границях області визначення. Це надихнуло авторів використати МПА для стиснення зображень. Відомо, чим вища роздільна здатність, тим кращою буде його якість. Виникає протиріччя: для передачі якісного зображення треба збільшувати роздільну здатність зображення, а для скорочення об’єму передачі інформації її потрібно зменшувати. Для вирішення цього протиріччя пропонується застосувати МПА до кожної ділянки, на які попередньо було розбито зображення. Ідея стиснення із застосуванням процедури МПА полягає у наступному: на кожній ділянці зображення, а вона являє собою матрицю чисел, обрати точку у околі якої буде виконана апроксимація функції якості зображення, або просто зображення у вигляді добутку двох функцій апроксимацій у вертикальній і горизонтальній площинах, які обов’язково проходять через обрану точку. Якщо апроксимацію виконувати поліномами, то передавати пікселі немає потреби, просто треба передавати коефіцієнти поліномів. Тобто, обравши середню роздільну здатність зображення, та, розбивши його на блоки, виконати апроксимацію цих числових даних. Зображення відновлювати у центрі керування на Землі у мультиплікативному вигляді. Таким чином, як показують дослідження такого застосування, можна отримувати зображення за передачі зменшеної кількості інформації (коефіцієнт стиснення може складати 30% від оригіналу). Результати підтверджено на прикладах відновлення ряду стандартних зображень для різних значень роздільної здатності зображень.

Таким чином, застосування апроксимації до передачі зображень підтвердило свою ефективність у напрямку стиснення зображень.

ЛІТЕРАТУРА / REFERENCES

1. Ларіонов Г.І. Оцінювання конструктивних параметрів анкерного кріплення. Дніпропетровськ: Національна металургійна академія України, 2011.–286с.

2. Ларіонов Г.І. Про вплив глибини розробки та попереднього навантаження на щільність розташування анкерів. Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Дніпропетровськ: Вид-во «Наука і освіта», 2008.–Вип.9 – С. 115 – 128.

3. Круковский А.П. Методи расчета анкерной цепи. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Дніпропетровськ: Вид-во «Наука і освіта», 2005.–Вип.9 – С. 92 – 99.

4. Yeromin O., Larionov G., Kulikov A., Fedak M., Krenicky T., Gupalo O., Myanovskaya Y. Method of Sequential Approximation in Modelling the Processes of Heat Transfer and Gas Dynamics in Combustion Equipment. MDPI: Applied sciences, 2022.–18с.

5. Ларіонов Г.І., Волошко В.Л. Про один підхід до стиснення зображень із застосуванням процедури апроксимації. Тези XVIII Міжнародної науково-практичної конференції (Дніпро, 12-13 грудня 2024 р.) – Д.: УДУНТ. – С.62

Received 14.10.2025.
Accepted 21.10.2025.

Application of the method of successive approximation for image compression

The transmission of large volumes of information requires significant power and storage capacity of power sources, which are limited. For these reasons, the operational lifetime of interplanetary stations and other robotic systems is restricted. To extend the missions of the Voyager-1 and Voyager-2 spacecraft, as well as to enable the transmission of large amounts of data from robotic systems to the planets of the Solar System — the Moon, Mars, and Venus - it is necessary to use data compression.

The operation of such a wide range of machines and mechanisms has shown that the main limitation on their operating time is the limited capacity of power sources. The duration of their functioning is proportional to the volume of transmitted information, including images. Clearly, this requires reducing the operating time of the transmitter, which is the main mode of energy consumption.

Thus, the problem of extending the operational lifetime of such systems is directly related to reducing the data transmission time. This, in turn, can be achieved by reducing the data volume - that is, through compression.

Keywords: information compression, resolution, numerical matrices, image partition blocks, method of successive approximation, multiplicative form of image representation.

Ларіонов Григорій Іванович – д. т. н., старший науковий співробітник відділу механіки гірничих порід Інституту геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4774-0992

Волошко Віктор Леонідович – к. ф.-м. н., доцент кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1285-9448

Larionov Hryhoryi - Doctor of Technical Sciences (D. Sc.), Senior Researcher, Senior Researcher in Rock Mechanics Department, Institute of Geotechnical Mechanics named by N. Poljakov of National Academy of Sciences of Ukraine, Dnipro, Ukraine, igtmlarionov@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4774-0992

Voloshko Viktor - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Cybernetics of Oles Honchar Dnipro National University, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1285-9448

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)