DOI 10.34185/1562-9945-5-161-2025-10
УДК 539.374:004.89:004.942

Ю.С. Морозов, Т.А. Зайцева

ЗАСТОСУВАННЯ ГЛИБОКОГО НАВЧАННЯ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КОНТАКТНОЇ МЕХАНІКИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Анотація. У роботі представлено методологічний підхід, що передбачає застосування алгоритмів глибокого навчання з метою підвищення ефективності розв'язання контактних задач механіки деформівного твердого тіла в межах методу скінченних елементів (МСЕ). Проаналізовано обчислювальну складність МСЕ, а також методи оцінки похибки, зокрема метод згладжування напружень (ZZ-метод). В результаті реалізованого гібридного підходу, який поєднує класичний МСЕ з нейронними мережами, отримано результати на спрощеній сітці, що доповнюються інформацією про похибку та уточнюються за допомогою прямої нейронної мережі. Вхідні дані до нейромережі включають інформацію про напружено-деформівний стан та похибку в околі певної точки, що дозволяє легко застосовувати навчену мережу до різних задач. Такий підхід дозволяє досягати точності, близької до результатів на високодеталізованих сітках, при суттєвому зниженні обчислювальної складності. Продемонстровано базову ефективність на прикладі. Отримані результати свідчать, що інтеграція МСЕ з алгоритмами глибокого навчання є перспективним напрямом для моделювання нелінійних задач контактної механіки, відкриваючи нові можливості для оптимізації конструкцій та обчислювального дизайну.
Ключові слова: глибоке навчання, нейромережа, контактна механіка, метод скінченних елементів, метод Zienkiewicz-Zhu, машинне навчання, апостеріорна похибка, розподіл напружень, обчислювальна складність, Python, Ansys.

Постановка проблеми. Інтеграція глибоких нейронних мереж із МСЕ репрезентує перспективний напрям у розв'язанні складних задач математичного моделювання, що характеризуються багатофакторністю та нелінійністю фізичних процесів. Попри усталену ефективність класичного МСЕ в задачах контактної механіки, його застосування обмежується при моделюванні систем із складною геометрією, матеріальними нелінійностями та специфічними граничними умовами, що зумовлює зростання обчислювальної складності. Особливої уваги потребують області в околицях геометричних особливостей або точок зміни граничних умов, де забезпечення необхідної точності вимагає суттєвого згущення обчислювальної сітки, що, у свою чергу, призводить до значного збільшення ресурсомісткості. Також зростаюча складність сучасних технічних систем, зокрема в авіаційній, біомеханічній, нанотехнологічній та машинобудівній галузях, зумовлює потребу в удосконаленні методів системного моделювання та обробки технічної інформації. У цьому контексті інтеграція МСЕ з технологіями глибокого навчання формує сучасний підхід до побудови більш точних і ресурсоефективних обчислювальних моделей. Таке поєднання дозволяє оптимізувати параметри керування складними процесами, підвищити достовірність чисельного аналізу та забезпечити прийняття обґрунтованих технічних рішень у рамках системного проектування складних об'єктів. Тому розроблення гібридних підходів, які дозволяють підвищити точність чисельного розв'язку без значного зростання обчислювальних витрат, забезпечуючи оптимізацію балансу між достовірністю результатів та ефективністю обчислень є вкрай важливим. Тобто, актуальність дослідження визначається його відповідністю сучасним науковим викликам та перспективам впровадження в індустріальні та науково-технологічні проекти.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасні дослідження, присвячені підвищенню ефективності чисельних методів, значну увагу приділяють саме МСЕ [3, 7, 10, 11], який залишається ключовим інструментом для розв'язання широкого кола інженерних задач, включно з моделюванням контактних взаємодій. Він широко використовується як у великих комерційних САПР (Ansys, Autodesk Simulation та інші), так і у відкритих програмних рішеннях (Elmer FEM, FreeFEM, MFEM та інші).

В останній час зростає інтерес до використання методів глибокого навчання як інструменту покращення результатів розрахунків, отриманих, наприклад, за допомогою МСЕ. Physics-Informed Neural Networks (PINNs) дають змогу вбудовувати фізичні закони безпосередньо у структуру нейронних мереж, прогнозуючи розподіли напружень і деформацій [8]. Нейронні оператори дозволяють встановлювати зв'язок між властивостями матеріалів, граничними умовами та відгуками системи без традиційної дискретизації, що суттєво прискорює обчислення [1]. Згорткові нейронні мережі (CNN), навчені на даних, згенерованих МСЕ, можуть швидко передбачати просторові поля напружень і переміщень для нових умов [2].

Найперспективнішими є гібридні підходи, що інтегрують МСЕ з глибоким навчанням, поєднуючи фізично обґрунтовану точність традиційних розрахунків із високою швидкодією та адаптивністю штучного інтелекту. Серед них – адаптивне уточнення сітки (Adaptive Mesh Refinement), що використовує CNN або алгоритми навчання з підкріпленням для динамічного покращення деталізації в критичних зонах [3], а також моделі, які на основі результатів з грубих сіток за допомогою нейронних мереж уточнюють розподіл напружень [7]. Такі підходи здатні знизити обчислювальну вартість, зберігаючи або навіть підвищуючи точність, що робить їх перспективними для широкого впровадження у сучасних інженерних розрахунках.

Мета дослідження. Метою дослідження є розробка та теоретичне обґрунтування гібридного обчислювального підходу, що поєднує метод скінченних елементів із алгоритмами глибокого навчання, з метою підвищення точності та обчислювальної ефективності розв'язання нелінійних контактних задач механіки деформівного твердого тіла.

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

Викладення основного матеріалу дослідження. У МСЕ статичний структурний аналіз зводиться до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$[K]\{U^G\} = \{F\} \tag{1}$$

де $\{U^G\}$ – вектор переміщень усіх вузлів у досліджуваній області, $[K]$ – глобальна матриця жорсткості, а $\{F\}$ – вектор навантаження. Розмірність вектора $\{U^G\}$ дорівнює добутку загальної кількості вузлів і числа ступенів вільності на один вузол. Глобальна матриця жорсткості $[K]$ формується шляхом складання всіх елементних матриць жорсткості в межах області аналізу, як показано нижче:

$$[K] = \sum_{e=1}^{n_e}[k^e] \tag{2}$$

де $[k^e]$ – матриця жорсткості е-го елемента, а n^e – загальна кількість елементів у досліджуваній області.

Переміщення кожного вузла знаходяться шляхом розв'язання рівняння (1), після чого обчислюються переміщення, деформації та напруження в довільній точці досліджуваної області. Якщо форма функції елемента задана, точність обчислених фізичних величин (таких як переміщення, деформації та напруження) залежить від розміру елементів, тобто для досягнення високої точності слід використовувати велику кількість малих елементів.

Існують теоретичні дослідження, присвячені точності методу скінченних елементів. Наприклад, на інтервалі [a, b] точність розв'язку методом скінченних елементів за умови постановки задачі у межах теорії пружності оцінюється наступним чином [9]:

$$\| u - u_h \|_m = \sqrt{\int_a^b \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{d^i u}{dx^i} - \frac{d^i u_h}{dx^i}\right)^2 dx} \le ch^{k+1-m} \tag{3}$$

де u – точний розв'язок, h – характерний розмір елемента (наприклад, крок сітки), u_h – розв'язок, отриманий методом скінченних елементів, c – деяка константа, k – ступінь базисної функції (полінома), а $2m$ – порядок диференціального рівняння, яке розв'язується. Зазначимо, що у випадку $m = 1$:

$$\| u - u_h \|_1 = \sqrt{\int_a^b \left[(u - u_h)^2 + \left(\frac{du}{dx} - \frac{du_h}{dx}\right)^2 \right] dx} \le ch^k \tag{4}$$

З наведеного рівняння видно, що чим менший розмір елемента та вищий порядок базисних функцій, тим ближчим буде розв'язок МСЕ до точного. Зі зменшенням розміру елементів зростає як загальна кількість елементів, так і час обчислень. З точки зору обчислювального навантаження основні процеси МСЕ включають:

- побудову глобальної матриці жорсткості [K],
- розв'язання системи лінійних рівнянь, у якій [K] виступає як матриця коефіцієнтів (1).

Що стосується першого процесу, обчислювальне навантаження є пропорційним до загальної кількості елементів у області. Розглянемо випадок, коли двовимірну прямокутну область рівномірно поділено на чотирикутні елементи. Якщо довжину сторони елемента зменшити удвічі, то загальна кількість елементів, а також навантаження, необхідне для побудови глобальної матриці жорсткості, збільшується в 4 рази. У тривимірному випадку, якщо гексаедр рівномірно поділити на менші гексаедричні елементи, зменшення довжини сторони вдвічі призводить до восьмиразового збільшення кількості елементів і відповідно обчислювального навантаження.

З іншого боку, час, необхідний для розв'язання системи лінійних рівнянь із матрицею коефіцієнтів [K] (1), також збільшується зі зростанням кількості елементів. Існують два основні підходи до розв'язання таких систем: прямий метод і ітераційний метод. У прямому методі кількість невідомих послідовно зменшується до отримання остаточного розв'язку (метод виключення Гауса), тоді як в ітераційному методі початкове наближене значення розв'язку поступово уточнюється до досягнення точного вектора розв'язку (метод Гауса-Зейделя). Відомо, що загальний час, необхідний для всього процесу розв'язання, будь-яким з зазначених методів зростає пропорційно до куба кількості невідомих. Досліджуваний обчислювальний процес складається з двох підпроцесів, один з яких має складність $O(n)$, а інший – $O(n^3)$, то при великих значеннях n домінує підпроцес зі складністю $O(n^3)$. Отже загальна обчислювальна складність МСЕ – $O(n^3)$.

Наприклад, розглянемо двовимірну прямокутну область, поділену на чотирикутні елементи. Якщо довжину сторони елемента зменшити вдвічі, загальна кількість елементів та вузлів збільшується в 4 рази, а обчислювальна складність зростає в $4^3 = 64$ рази. В разі тривимірної області, загальна кількість елементів та вузлів збільшується в 8 разів а обчислювальна складність в $8^3 = 512$ разів. Слід також зазначити, що наведена вище оцінка базується на припущенні, що матриця коефіцієнтів є щільною, тобто більшість її елементів ненульові. На практиці ж глобальна матриця жорсткості, яка є матрицею коефіцієнтів у методі скінченних елементів, зазвичай є розрідженою (більшість її елементів дорівнюють нулю), що свідчить про можливість суттєвого зменшення обчислювальних витрат на розв'язання.

Також відзначимо, що існують різні методи оцінки похибки розв'язку МСЕ порівняно з точним розв'язком – так звані апостеріорні методи оцінювання похибки [5, 11]. У МСЕ для задач механіки твердого тіла зазвичай використовується метод переміщень, де шуканими змінними є переміщення. У цьому підході переміщення є неперервними на межах елементів, але деформації й напруження – як похідні першого порядку – залишаються розривними. З фізичної точки зору це є неприйнятним, і така невідповідність пояснюється недостатньою неперервністю базисних функцій, які зазвичай неперервні на своїй області визначення, але не мають неперервних похідних. У результаті поле напружень, отримане методом скінченних елементів, виявляється розривним на межах елементів, що знижує точність та достовірність результатів.

Щоб подолати цю проблему, застосуємо метод згладжування напружень, відомий як ZZ-метод (Zienkiewicz–Zhu). Для вузлів, які належать кільком елементам, обчислимо напруження окремо від кожного з цих елементів, після чого візьмемо їх середнє значення. Таким чином відновлюється згладжене, неперервне поле напружень, яке є фізи-

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

чно коректнішим. Надалі для будь-якої точки елемента напруження інтерполюємо з використанням базисних функцій і отриманих у вузлах згладжених значень.

Зважаючи на нерівномірний характер розподілу напружено-деформованого стану в межах скінченно-елементної моделі, для оцінювання локальної точності чисельного розв'язку було застосовано метод згладжування напружень Zienkiewicz-Zhu (ZZ-метод). У межах цього підходу апостеріорна похибка визначається як різниця між напруженнями, отриманими безпосередньо з МСЕ-розрахунку, та згладженими значеннями, що дозволяє побудувати просторовий розподіл похибки та ідентифікувати області з недостатньою точністю. Така інформація є критично важливою для реалізації адаптивних стратегій: у випадках, коли локальна похибка перевищує заданий поріг, здійснюється локальне згущення сітки (h-адаптивність) або підвищення порядку апроксимації базисних функцій (p-адаптивність). ZZ-метод дозволив здійснити ефективне оцінювання якості чисельного розв'язку без необхідності знання аналітичного або точного розв'язку задачі.

У межах традиційних адаптивних стратегій апостеріорна похибка використовується опосередковано – переважно для модифікації скінченно-елементної сітки з метою підвищення точності розрахунків. Натомість у даному дослідженні запропоновано альтернативний підхід, який передбачає пряме використання інформації про похибку для покращення результатів без необхідності ремешингу. Зокрема, реалізовано архітектуру прямої нейронної мережі (feedforward neural network), яка навчається прогнозувати уточнені значення напружень, еквівалентні тим, що були б отримані на високодеталізованій сітці, на основі даних про напруження та апостеріорну похибку, обчислених на спрощеній сітці. Запропонований підхід (див. рис. 1) реалізується у три послідовні етапи [4]:

1. Етап підготовки даних: Проведено МСЕ-аналізи на спрощеній сітці при різних умовах (геометрія, навантаження, закріплення тощо), після чого обчислюється інформація про похибку методом апостеріорної оцінки. Для кожного випадку також проводиться МСЕ-аналіз на дуже уточненій сітці для наближення до істинного рішення. У результаті формується багато пар даних, що включають: рішення на спрощеній сітці, відповідну інформацію про похибку та рішення на уточненій сітці.

2. Етап навчання: Проведено навчання прямої нейронної мережі на основі зібраних пар даних.

- Вхідні дані: розв'язок на спрощеній сітці + похибка.
- Вихідні (навчальні) дані: розв'язок на уточненій сітці.

3. Етап застосування: Рішення МСЕ і його похибка на спрощеній сітці для нової задачі подані на вхід навченій нейромережі. Вона генерує відповідне уточнене рішення, яке могло би бути отримане на уточненій сітці.

Варто зазначити, що у цьому підході вхідні дані до нейромережі включають лише стан напружень і інформацію про похибку в околі певної точки – без геометрії чи граничних умов, що дозволяє легко застосовувати навчену мережу до різних задач. Крім того, оскільки вхідні дані – це лише результати зі спрощеної сітки, а сам процес передбачення у нейромережі швидкий, метод дозволяє значно швидше оцінити точні значення напружень у конкретній точці, ніж традиційний МСЕ на уточненій сітці.

Можливим недоліком цього підходу є те, що можна отримати уточнені значення напружень лише в окремих точках, а не по всій області. Однак на практиці часто достатньо знати значення напружень у певній критичній точці або області. Тому підхід можна використовувати для розв'язання задач оптимального проектування, де потрібні багаторазові аналізи.

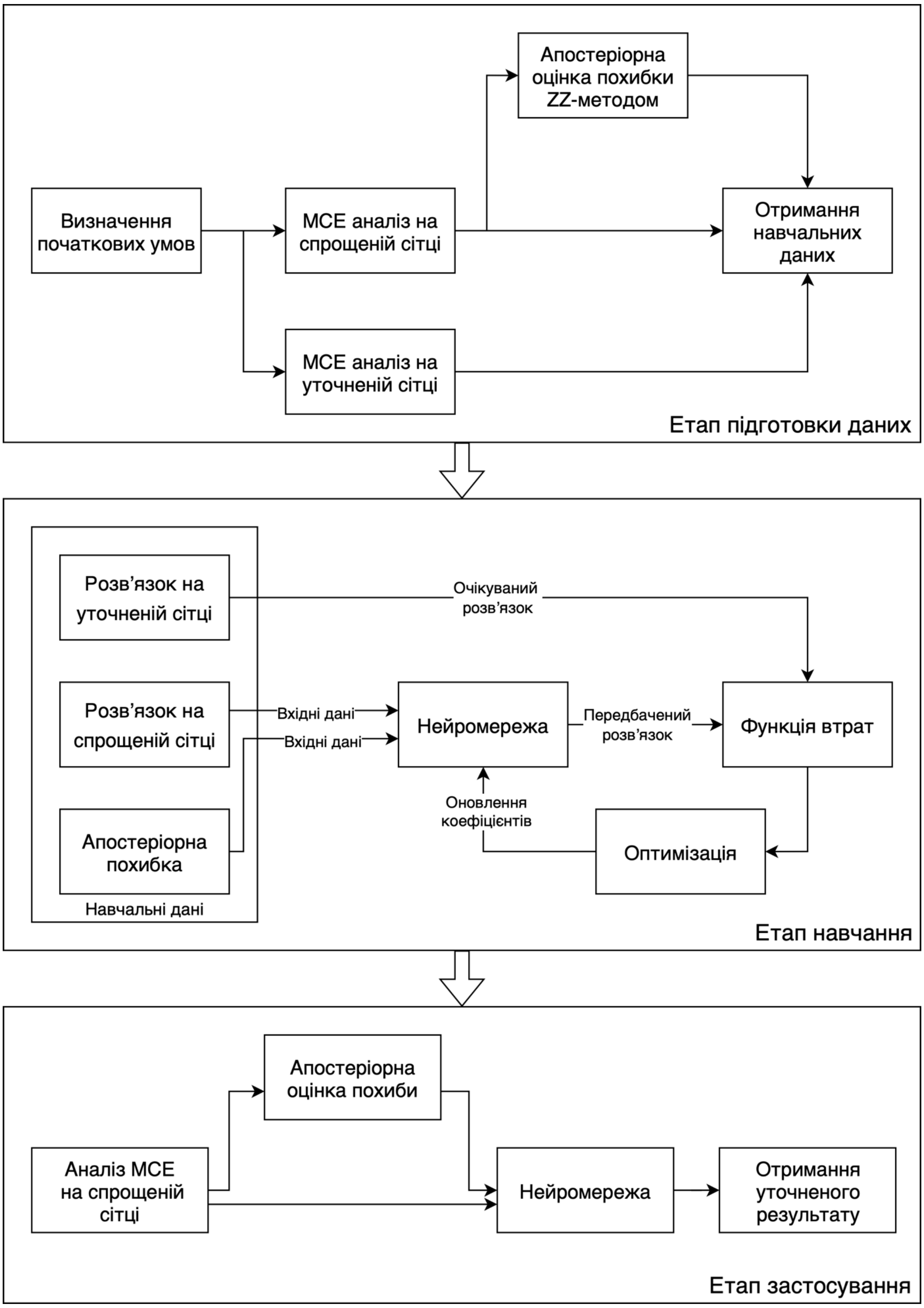

Рисунок 1 – Схема гібридного підходу: МСЕ-глибоке навчання

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

Розглянемо запропонований підхід та його базову ефективність в задачі двовимірного аналізу напружень із використанням чотиривузлових чотирикутних елементів [7]. Нейронну мережу прямого поширення навчаємо на напруженнях у цільовій точці, отриманих МСЕ-аналізом на уточненій сітці (використовуються як навчальні дані), а вхідними даними слугують напруження та певна інформація про похибки в цій точці та в точках навколо неї, отримані зі спрощеної сітки. В результаті навчання нейромережі стає можливим передбачати уточнені напруження в цільовій точці, коли на вхід подаються значення напружень і похибок, отриманих зі спрощеної сітки.

Вхідні дані включаються не лише напруження у самій цільовій точці, де потрібно отримати високоточні результати, але й напруження та похибки в її околі як допоміжна інформація. Для цього, як показано на рис. 2, точки оцінювання напружень розміщуються сіткою навколо цільової точки, де й формується відповідна допоміжна інформація. У цих точках обчислюються напруження та згладжені напруження, отримані з МСЕ на спрощеній сітці, а також напруження з уточненої сітки.

На основі напружень, обчислених у цільовій точці і чотирьох сусідніх точках, формуються два типи вхідних даних для нейромережі:

- На основі різниці між звичайними та згладженими напруженнями, отриманими на спрощеній сітці в цільовій точці та чотирьох сусідніх точках, формуються 15 значень (3 компоненти напружень × 5 точок). Ці дані вважаються такими, що відображають розподіл похибок у межах околу цільової точки.
- На основі різниці між напруженнями у цільовій точці та напруженнями у кожній з чотирьох сусідніх точок формуються 12 значень (3 компоненти × 4 точки), які відображають локальні зміни напружень поблизу цільової точки.

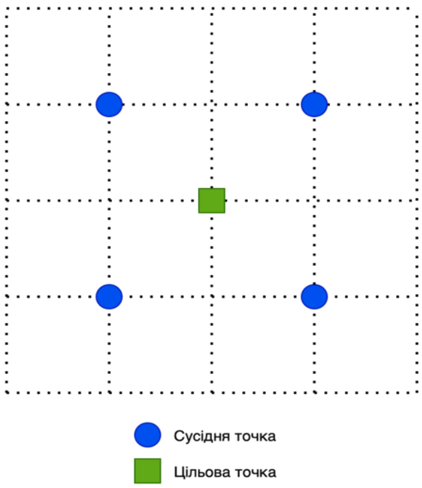

Рисунок 2 – Цільова та сусідні точки

Навчальні дані для нейромережі – це різниця між напруженнями у цільовій точці, отриманими зі спрощеної та уточненої сітки, тобто 3 значення (3 компоненти × 1 точка). Це означає, що нейромережа навчається не на екстраполяцію, а на інтерполяцію, – тобто відтворення точного значення на основі відповідності між спрощеною та уточненою сіткою.

Після того, як визначена структура вхідних і навчальних даних, генерується велика кількість навчальних прикладів, кожен з яких представляє інший стан напружень навколо цільової точки.

Для навчання прямої нейронної мережі навчальні та верифікаційні приклади випадково обрано з великого набору прикладів. Тестується набір навчальних прикладів, який складається з 5000 прикладів. Для верифікації обрано 1000 прикладів. Усі вхідні дані обчислені з результатів МСЕ-аналізу на спрощеній сітці. Кожен приклад складається з 27 елементів, а саме:

1. Різниці між напруженнями на грубій сітці та згладженими напруженнями для цільової та чотирьох сусідніх точок. Розглядаються напруження по осі x, напруження по осі y так зсувні напруження в площині xy. Отримаємо 15 значень.

2. Різниці між напруженнями у цільовій точці та кожної з 4 сусідніх точок для кожного з 3 напружень. Отже отримаємо ще 12 значень.

Таблиця 1

Розподіл похибок для напружень по осі x

Похибка	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
Кількість прикладів (спрощена сітка)	37	10	28	116	637	101	32	8	32
Кількість прикладів (нейромережа)	3	1	4	35	932	19	4	1	2

У даному дослідженні використовується пряма нейронна мережа з 27 нейронами на вхідному шарі, 3 нейронами на вихідному шарі та 5 прихованими шарами з 80 нейронами у кожному. Похибка на верифікаційних даних складає 0.043.

Результати, отримані за допомогою нейронної мережі, демонструють значно вищу відповідність уточненим напруженням, порівняно з даними, отриманими на спрощеній скінченно-елементній сітці (див. табл. 1). У всіх досліджених випадках модель глибокого навчання забезпечує більш точні оцінки, наближені до результатів, що були б отримані на високодеталізованій сітці. Навчену нейронну мережу можна застосовувати до різних задач двовимірного аналізу напружень.

Висновки. Запропонований гібридний підхід дозволяє досягати точності, співставної з результатами традиційного моделювання на дрібних сітках, при суттєвому зниженні обчислювальної складності. Такий підхід є особливо актуальним у випадках, коли класичний МСЕ стає надмірно ресурсомістким, зокрема, при проведенні багаторазових ітераційних розрахунків, що характерно для задач оптимізації конструкцій та обчислювального дизайну. Серед ключових переваг інтеграції МСЕ з нейронними мережами слід виокремити:

- можливість оперативного отримання уточнених результатів на основі даних зі спрощеної сітки;

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

- збереження фізичної інтерпретованості та достовірності чисельного розв'язку;
- потенційну здатність моделі адаптуватися до нових задач без необхідності повного перенавчання;
- істотне скорочення часу моделювання, що є критично важливим для інженерної практики.

Водночас такий підхід має певні обмеження. Зокрема, він дозволяє уточнювати напруження лише у вибраних точках, без урахування геометрії чи граничних умов усієї області, а також потребує великої навчальної вибірки для досягнення високої точності. Проте така вимога водночас забезпечує широку узагальнювальну здатність моделі, що сприяє її застосовності до різних типів задач.

Для подальшого вдосконалення запропонованого підходу доцільним є формування розширеної навчальної вибірки, що дозволить підвищити точність та стабільність прогнозування. Крім того, перспективним напрямом є дослідження різних архітектур нейронних мереж з метою визначення оптимальної конфігурації для конкретних класів задач.

Отже, інтеграція МСЕ з глибоким навчанням, відкриває нові можливості для підвищення точності та швидкодії розрахунків, роблячи даний підхід перспективним для широкого впровадження в інженерних та наукових застосуваннях.

ЛІТЕРАТУРА / REFERENCES

1. Azizzadenesheli K., Kovachki N., Li Z., Liu-Schiaffini M., Kossaifi J, Anandkumar A. Neural operators for accelerating scientific simulations and design. 2024, Nature Reviews Physics, № 5, p. 320-328. https://www.nature.com/articles/s42254-024-00712-5

2. Deshpande, S., Sosa, R.I., Bordas, S.P., & Lengiewicz, J. Convolution, aggregation and attention based deep neural networks for accelerating simulations in mechanics. Frontiers in Materials, 2022. https://doi.org/10.3389/fmats.2023.1128954

3. Foucart, C., Charous, A., and Lermusiaux, P. F. J., Deep Reinforcement Learning for Adaptive Mesh Refinement, Journal of Computational Physics, Volume 491, 2023, https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112381.

4. Hammad MM. Artificial Neural Network and Deep Learning: Fundamentals and Theory. arXiv preprint arXiv:2408.16002, 2024.

5. Johnson K.L. Contact Mechanics, Cambridge University Press, 1985, https://doi.org/10.1017/CBO9781139171731

6. Morozov Y., Zaytseva T., Novikova O. Use of deep learning in contact mechanics. Modern scientific and technical research in the context of linguistic space (in English): Conference materials of the IV All-Ukrainian scientific and practical conference of young scholars and higher education applicants, Dnipro, May 15, 2025. P. 292-293. https://www.dnu.dp.ua/docs/ndc/2025/materiali_konferentciy /13.pdf

7. Oishi A., Yagawa G. Finite elements using neural networks and a posteriori error. Arch. Comput. Methods Eng. 28, 3433-3456, 2021. https://doi.org/10. 1007/s11831-020-09507-0

8. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. J. Comput. Phys. 378, 686–707, 2019.

https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045
9. Reddy, J.N. An Introduction to the Finite Element Method (Second Edition). McGraw-Hill, 1993
10. Yagawa G., Oishi A. Computational Mechanics with Deep Learning. An Introduction. Springer Cham, 2023. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11847-0
11. Zienkiewicz, O.C., Morgan, K. Finite Elements & Approximation. Dover Publications, 2013
12. Nath D., Ankit Neog D.R. Application of Machine Learning and Deep Learning in Finite Element Analysis: A Comprehensive Review. *Arch Computat Methods Eng* 31, 2945–2984, 2024. https://doi.org/10.1007/s11831-024-10063-0

Received 02.09.2025.
Accepted 08.09.2025.

Application of deep learning for improving the efficiency of solving contact mechanics problems by the finite element method

The finite element method (FEM) is one of the most widely used numerical techniques for modeling problems in contact mechanics. Despite its universality, FEM has well-known limitations, particularly when solving nonlinear, multiscale, or singular problems that require highly refined meshes and therefore lead to a sharp increase in computational cost. Recent advances in machine learning, especially deep learning, have demonstrated significant potential to improve numerical simulations. Physics-Informed Neural Networks (PINNs), convolutional neural networks (CNNs), and neural operators have been successfully applied in computational mechanics to accelerate calculations, predict stress and displacement fields, and adaptively refine meshes. These developments indicate that hybrid approaches combining FEM with neural networks can overcome the shortcomings of classical methods.

The purpose of this research is to integrate FEM with deep learning tools in order to increase accuracy and efficiency in solving contact mechanics problems. A hybrid approach is proposed in which coarse-mesh FEM results are supplemented with error information and refined using a feedforward neural network. The input data include stress states and error values in the vicinity of a target point, while the reference data are obtained from fine-mesh FEM simulations. This makes it possible to apply the trained model flexibly to new problems without the need for remeshing or direct use of geometric and boundary conditions.

The method was tested on two-dimensional stress analysis problems using quadrilateral elements. Datasets of training and verification examples were generated, where each example included the difference between stresses from coarse and fine meshes as well as local error information and feedforward neural network with five hidden layers of eighty neurons each was investigated. The results show that the neural network significantly reduces error compared to coarse-mesh FEM, producing stresses much closer to those obtained with fine meshes while requiring considerably fewer computational resources.

The study demonstrates that integrating FEM with deep learning provides an effective balance between accuracy and efficiency. The hybrid approach allows for reliable stress prediction with reduced computational cost, which is especially valuable for multiscale problems and cases requiring repeated analyses such as optimization and computational design. Alt-

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

hough the method currently provides refined solutions primarily at selected points and requires large training datasets, its adaptability and ability to accelerate calculations make it a promising tool for future applications in engineering and scientific simulations.
Keywords: deep learning, neural network, contact mechanics, finite element method, Zienkiewicz–Zhu method, machine learning, a posteriori error, stress distribution, computational complexity, Python, Ansys.

Морозов Юрій Сергійович – аспірант кафедри комп’ютерних технологій за спеціальністю F1 Прикладна математика, факультет прикладної математики та інформаційних технологій, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, ORCID: https://orcid.org/ 0009-0006-3869-7124

Зайцева Тетяна Анатоліївна – кандидат технічних наук, доцент, зав. каф. комп’ютерних технологій, факультет прикладної математики та інформаційних технологій, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-6346-3390

Yurii Serhiiovych Morozov – PhD student at the Department of Computer Technologies, specializing in F1 Applied Mathematics, Faculty of Applied Mathematics and Information Technologies, Oles Honchar Dnipro National University, ORCID: https://orcid.org/ 0009-0006-3869-7124

Tetyana Anatoliivna Zaytseva – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Computer Technologies, Faculty of Applied Mathematics and Information Technologies, Oles Honchar Dnipro National University, ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-6346-3390