DOI 10.34185/1562-9945-5-161-2025-04
УДК 519.2

О.А. Ярова

# АСИМПТОТИКА ВИПАДКОВОЇ ЕВОЛЮЦІЇ НА РЕГЕНЕРУЮЧОМУ ПРОЦЕСІ

*Анотація. Стаття присвячена асимптотичному аналізу випадкових еволюцій, які побудовані на основі регенеруючого процесу. У роботі досліджується клас стохастичних процесів з нелінійним нормуванням часу, що виникають у моделях, де наявна структурна регенерація або ефекти пам'яті. Такі процеси є важливими при моделюванні складних систем, поведінка яких відновлюється або змінюється у випадкові моменти часу. Основну увагу приділено побудові рівняння відновлення для математичного сподівання випадкової еволюції, заданої на регенеруючому процесі, з урахуванням нелінійного масштабу часу. Отримане рівняння описує динаміку середніх значень еволюції у термінах функції регенерації, що визначає статистичну структуру основного процесу. У статті доведено граничну теорему, яка встановлює асимптотичну поведінку середніх значень випадкової еволюції при зростанні часу до нескінченності. Встановлено, що нелінійне нормування часу істотно впливає на характер асимптотики, змінюючи як швидкість росту, так і форму граничного представлення.*
*Ключові слова: випадкова еволюція, регенеруючий процес, рівняння відновлення, нелінійне нормування часу.*

**Постановка проблеми.** Випадкові еволюції, задані на регенеруючих процесах, широко застосовуються у різних прикладних галузях, таких як теорія надійності, системи масового обслуговування, біологічне моделювання та інші. Ці стохастичні системи часто характеризуються складною динамікою через наявність ефектів пам'яті та структурних механізмів регенерації, що вимагають застосування нелінійного нормування часу для адекватного опису їх поведінки.

Незважаючи на значні результати, отримані для класичних рівнянних процесів і випадкових еволюцій, існує нестача узагальнених досліджень, які б описували асимптотичну поведінку таких еволюцій із нелінійним нормуванням часу. Зокрема, складністю є побудова відповідних рівнянь відновлення для математичних сподівань випадкових еволюцій, що пов'язані з регенеруючими процесами, та доведення граничних теорем, які характеризують їх довгострокову асимптотику.

Введення нелінійного нормування часу ускладнює аналітичний опис, оскільки змінює часову шкалу нетривіальним способом, впливаючи як на швидкість зростання, так і на форму асимптотичних представлень. Отже, центральною проблемою цього дослідження є розробка теоретичного апарату для аналізу асимптотичних властивостей

© Ярова О.А., 2025

випадкових еволюцій на регенеруючих процесах із нелінійним нормуванням часу. Це передбачає формулювання відповідних рівнянь відновлення та доведення теорем про асимптотичну поведінку середніх значень, що заповнить важливу прогалину у теорії та надасть інструменти для практичних застосувань у стохастичному моделюванні.

**Аналіз досліджень і публікацій.** У сучасній теорії випадкових еволюцій та рівнянь відновлення досить широко вивчені класичні випадки з лінійним нормуванням часу. Проте дослідження, пов'язані з нелінійним нормуванням та регенеруючими процесами, залишаються актуальними і викликають підвищений інтерес.

У статті [1] розглядається асимптотика перехідних ймовірностей напівмарковського процесу. Зосереджується увага на побудові теоретичних основ для аналізу стохастичних процесів із властивістю регенерації, розкриває структуру перехідних ймовірностей у межах напівмарковських моделей. Цей підхід є базовим для подальшого розвитку теорії випадкових еволюцій із урахуванням складних залежностей у часі.

В праці [2] сформульовано граничну теорему для багатовимірного рівняння відновлення. Ця робота має велике значення для узагальнення класичних результатів теорії відновлення на випадки багатовимірних процесів, що дозволяє більш гнучко описувати складні стохастичні системи з декількома взаємопов'язаними параметрами.

У статті [3] досліджується рівняння відновлення у нелінійній апроксимації. Розглядається вплив нелінійного нормування часу на поведінку розв'язків, що є ключовим аспектом для моделювання випадкових процесів із змінною часовою шкалою.

**Мета дослідження.** Метою даної роботи є розробка теоретичних основ та отримання нових результатів щодо асимптотичної поведінки випадкових еволюцій, заданих на регенеруючих процесах з нелінійним нормуванням часу. Зокрема, завдання полягає у формулюванні та дослідженні рівнянь відновлення, які описують математичне сподівання випадкової еволюції, а також у доведенні граничних теорем, що характеризують довготривалу асимптотику цих процесів.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Нехай $(E, \mathrm{B})$ - фазовий простір, де $E$ - повний метричний сепарабельний простір, а $\mathrm{B} = \mathrm{B}(E) - \sigma -$алгебра борелевих підмножин.

**Означення.** Випадковий процес $x(t)$ у фазовому просторі $(E, \mathrm{B})$ називають регенеруючим, якщо існує зростаюча послідовність випадкових величин $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, ...,$ таких, що обривні випадкові процеси

$$x^n(t) = x(\tau_n + t)$$

при

$$0 \le t < \tau_{n+1} - \tau_n,$$

однаково розподілені і незалежні в сукупності.

Випадкові величини $\tau_1, \tau_2, ...$ називають моментами регенерації випадкового процесу.


ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

Нехай $x_1(t), x_2(t), ...., x_d(t)$ - незалежні регенеруючі процеси, задані на фазовому просторі $(E, \mathrm{B})$. Тоді для кожного процесу $x_i(t)$ моменти регенерації позначатимемо $\tau_i^{(k)}$.

Розглянемо дані процеси в масштабі часу $\frac{t}{g(\varepsilon)}$ з нормуючим множником $g(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тоді

$$x_i^{(k)}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = x_i\left(\tau_i^{(k)} + \frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$$

при

$$0 \le \frac{t}{g(\varepsilon)} < \tau_i^{(k+1)} - \tau_i^{(k)},$$

незалежні копії процесу $x_i\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$ на проміжку $[0; \tau_i^{(k+1)} - \tau_i^{(k)})$.

Нехай $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ - однорідний ланцюг Маркова зі скінченною множиною станів $\{1, 2, ..., d\}$. Крім того, регенеруючі процеси і ланцюг Маркова – незалежні.

Позначимо через

$$p_{ij} = P\{v_{n+1} = j \mid v_n = i\}$$

перехідну ймовірність ланцюга Маркова за один крок.

Нехай

$$\sigma_0 = 0,\ \ \sigma_1 = \tau_{v0}^{(1)},\ \ \sigma_2 = \tau_{v0}^{(1)} + \tau_{v1}^{(2)}, ....$$

причому

$$v\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = v_{n-1}$$

при

$$\sigma_{n-1} \le \frac{t}{g(\varepsilon)} < \sigma_n,\ \ n \ge 1.$$

Розглянемо випадковий процес

$$x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = x_{v_{n-1}}^{(n)}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)} - \sigma_{v_{n-1}}\right)$$

при

$$\sigma_{\ n-1} \le \frac{t}{g(\varepsilon)} < \sigma_n,\ \ n \ge 1.$$

Задамо процес переносу на траєкторіях процесу $x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$ наступним чином

$$\frac{T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)}{dt} = A\left(x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right) \cdot T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$$

$$T(0) = I,$$

де $I$ - одинична матриця, а $A: E \to R^n$, при чому $\sup_{x \in E} \| A(x) \| < M$.

Тоді розв’язок даної задачі можна подати у вигляді

$$T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = \begin{cases} T_{v0}\left(0, \dfrac{t}{g(\varepsilon)}\right), & 0 \le \dfrac{t}{g(\varepsilon)} < \sigma_1 \\ T_{v0}\left(0,\sigma_1\right) \cdot T_{v1}\left(\sigma_1, \dfrac{t}{g(\varepsilon)}\right), & \sigma_1 \le \dfrac{t}{g(\varepsilon)} < \sigma_2 \\ T_{v0}\left(0,\sigma_1\right) \cdot T_{v1}\left(\sigma_1,\sigma_2\right) \cdot T_{v2}\left(\sigma_2, \dfrac{t}{g(\varepsilon)}\right), & \sigma_2 \le \dfrac{t}{g(\varepsilon)} < \sigma_3 \\ \ldots\ldots & \ldots \end{cases}$$

Функції $T_i(s,t)$ є розв’язками задач

$$\frac{dT_i\left(s,t\right)}{dt} = A\left(x_i(t)\right) \cdot T_i\left(s,t\right),$$

$$T_i(s,s) = I, \ \ i = 1,\ldots,d.$$

Нехай

$$G_i^{(k)}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = T_i\left(\tau_i^{(k)}, \tau_i^{(k+1)} + \frac{t}{g(\varepsilon)}\right),$$

$$0 \le \frac{t}{g(\varepsilon)} < \tau_i^{(k+1)} - \tau_i^{(k)}, \ \ k = 0,1,\ldots$$

Крім цього,

$$G_i(t) = T_i(0,t).$$

Тоді процес $T\left(\dfrac{t}{g(\varepsilon)}\right)$ можна подати наступним чином

$$T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = \begin{cases} G_{v0}\left(\dfrac{t}{g(\varepsilon)}\right), & 0 \le \dfrac{t}{g(\varepsilon)} < \sigma_1 \\ G_{v0}\left(\sigma_1\right) \cdot G_{v1}\left(\dfrac{t}{g(\varepsilon)} - \sigma_1\right), & \sigma_1 \le \dfrac{t}{g(\varepsilon)} < \sigma_2 \\ G_{v0}\left(\sigma_1\right) \cdot G_{v1}\left(\sigma_2 - \sigma_1\right) \cdot G_{v2}\left(\dfrac{t}{g(\varepsilon)} - \sigma_2\right), & \sigma_2 \le \dfrac{t}{g(\varepsilon)} < \sigma_3 \\ \ldots\ldots & \ldots \end{cases}$$

Нехай виконуються наступні умови:

1. Моменти регенерації $\tau_i$, $i = 1,2,\ldots,d$, мають неґратчастий розподіл та $E\tau_i < \infty$;

2. Регенеруючі процеси $x_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,d$, стохастично неперервні на проміжках $[0;\tau_i)$;



ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

3. Ланцюг Маркова $\nu_1, \nu_2, \ldots$ - гранично розкладний, а граничний ланцюг Маркова є ергодичним на кожній із неперетинних множин $I_1, \ldots, I_r$ зі стаціонарним розподілом $\vec{p}^{(s)} = \left(p_i^{(s)}\right)_{i \in I_s}$, при чому $p_{ij}^{\varepsilon} \to a_{sk} \cdot p_{ij}$, $i \in I_s$, $j \in I_k$;

4. $\lim\limits_{x \to \infty} A(x) = A$ за нормою оператора;

5. $\int\limits_0^{\infty} \left(G_{ij}(t) - I\right) \cdot P(\tau_i \in dt) \cdot \vec{1} = 0$ і $\sum\limits_{i \in I_s} p_i^{(s)} \left( \vec{1} \cdot \int\limits_0^{\infty} (G_i(t) - I) P(\tau_i \in dt) \right) \cdot p_{ij} = 0.$

**Теорема.** Нехай виконуються умови 1-5. Тоді існує нормуючий множник $g(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ і ненульова матриця $C$ розмірності $r \times r$ такі, що

$$E\left( T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), \nu\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j \mid \nu(0) = i \right) \to q_{sk}(t) \cdot \frac{p_j^{(k)}}{\pi^{(k)}} \cdot E_j \left( \int\limits_0^{\tau_j} G_j(u) du \right),$$

де $q_{sk}(t) = [e^{tC}]_{sk}$, $\pi^{(k)} = \sum\limits_{i \in I_k} p_i^{(k)} \cdot \left( \vec{1} \cdot \int\limits_0^{\infty} G_i(t) \cdot P(\tau_i \in dt) \right) \cdot E\tau_i.$

**Доведення.** Позначимо

$$E_i\left( T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), \nu\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j \right) = E\left( T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), \nu\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j \mid \nu(0) = i \right).$$

Розпишемо за формулою повного математичного сподівання для моменту регенерації $\sigma_1$ процесу $x(t)$

$$E_i\left( T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), \nu\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j \right) = E_i\left( T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), \nu\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j, \frac{t}{g(\varepsilon)} < \sigma_1 \right) +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{t}{g(\varepsilon)}} E_i\left( T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), \nu\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j, \sigma_1 \in du \right).$$

В початковий момент часу $\nu(0) = i$ збігаються моменти регенерації $\sigma_1$ та $\tau_1$, а до моменту $\sigma_1$ збігаються процеси $x\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$ та $x(t)$, і, відповідно $T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)$ збігається з $G_i(t)$.

Таким чином

$$E_i\left( T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), \nu\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j, \frac{t}{g(\varepsilon)} < \sigma_1 \right) = a_{ij} E_i\left(G_i(t), t < \tau_1\right).$$

Обчислимо інтеграл

$$\int\limits_0^{\frac{t}{g(\varepsilon)}} E_i\left( T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), \nu\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j, \sigma_1 \in du \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{d} \int\limits_0^{\frac{t}{g(\varepsilon)}} E_i\left( T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), \nu\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = j, \nu(\sigma_1) = k, \sigma_1 \in du \right) =$$

$$=\sum_{k=1}^{d}\int_{0}^{\frac{t}{g(\varepsilon)}} E_i\left(\Gamma(\tau_i), v(\tau_i)=k, \tau_i \in du\right)\cdot E_k\left(T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-u\right), v\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-u\right)\right).$$

В результаті отримаємо

$$E_i\left(T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), v\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)=j\right)=a_{ij}E_i\left(G_i(t), t<\tau_1\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{d}\int_{0}^{\frac{t}{g(\varepsilon)}} E_i\left(\Gamma(\tau_i), v(\tau_i)=k, \tau_i \in du\right)\cdot E_k\left(T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-u\right), v\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-u\right)\right).$$

Ввівши наступні позначення

$$X_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)=E_i\left(T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), v\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)=j\right),$$

$$A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)=a_{ij}E_i\left(G_i(t), t<\tau_1\right),$$

$$F_{ij}(dt)=E_i\left(\Gamma(\tau_i), v(\tau_i)=k, \tau_i \in dt\right),$$

отримаємо рівняння відновлення

$$X_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)=A_{ij}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)+\sum_{k=1}^{d}\int_{0}^{\frac{t}{g(\varepsilon)}} F_{ik}(dt)\cdot X_{kj}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}-u\right).$$

За умов 1-5 та теоремою статті [1], отримаємо твердження теореми

$$E\left(T\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right), v\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)=j \mid v(0)=i\right)\to q_{sk}(t)\cdot\frac{p_j^{(k)}}{\pi^{(k)}}\cdot E_j\left(\int_0^{\tau_j} G_j(u)du\right).$$

Теорему доведено.

**Висновки.** У роботі проведено дослідження асимптотичної поведінки випадкових еволюцій, побудованих на основі регенеруючих процесів із нелінійним нормуванням часу. Запропоновано рівняння відновлення для математичного сподівання випадкової еволюції, що відображає складну структуру залежностей у процесі та вплив нелінійного масштабування часу.

Доведено граничну теорему, яка встановлює асимптотичний характер середніх значень випадкової еволюції при необмеженому зростанні часу. Встановлено, що нелінійне нормування суттєво впливає на форму та швидкість асимптотичного збігу, що має важливе значення для моделювання прикладних задач із подібною структурою.

Отримані результати розширюють теоретичний апарат теорії випадкових еволюцій і можуть бути застосовані в аналізі складних стохастичних систем у таких галузях, як теорія надійності, біологія, економіка та інші, де регенеративні механізми і нелінійність часу відіграють ключову роль.



ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на узагальнення отриманих результатів для багатовимірних випадкових еволюцій та більш складних видів нормування часу.

**ЛІТЕРАТУРА**

1. Ярова О.А. Асимптотика перехідних ймовірностей напівмарковського процесу / О.А. Ярова // Кібернетика та системний аналіз. – 2025. – Т. 61, № 1. – С. 158–160. DOI: 10.1007/s10559-025-00752-4

2. Yarova O.A., Yeleyko Y.I. Limit theorem for multidimensional renewal equation / O.A. Yarova, Ya.I. Yeleyko // Cybernetics and Systems Analysis. – 2022. – Vol. 58, No. 1. – P. 144–147. DOI: 10.1007/s10559-022-00443-4

3. Yarova O.A., Yeleyko Y.I. The renewal equation in nonlinear approximation / O.A. Yarova, Ya.I. Yeleyko // Matematychni Studii. – 2021. – Vol. 56, No. 1. – P. 103–106. DOI: 10.30970/ms.56.1.103-106

4. Ярова О.А. Асимптотичне зображення нормуючого множника рівняння відновлення / О.А. Ярова // Вісник Львівського університету. Серія мех.–мат. – 2020. – Вип. 89. – С. 80–88.

5. Yeleyko Ya.I. On an asymptotic representation of the Perron root of a matrix-valued evolution / Ya.I. Yeleyko, I.I. Nishchenko // Ukrain. Mat. Zh. –1996. – Vol. 48,No. 1. – P. 35–43.

6. Feller W. A simple proof for renewal theorems / W. Feller // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1961. – Vol. 14. – P. 285–293.

**REFERENCES**

1. Yarova, O.A. Asymptotics of transition probabilities of a semi-Markov process / O.A. Yarova // Cybernetics and Systems Analysis. – 2025. – Vol. 61, No. 1. – P. 158–160. DOI: 10.1007/s10559-025-00752-4

2. Yarova, O.A., Yeleyko, Ya.I. Limit theorem for multidimensional renewal equation / O.A. Yarova, Ya.I. Yeleyko // Cybernetics and Systems Analysis. – 2022. – Vol. 58, No. 1. – P. 144–147. DOI: 10.1007/s10559-022-00443-4

3. Yarova, O.A., Yeleyko, Ya.I. The renewal equation in nonlinear approximation / O.A. Yarova, Ya.I. Yeleyko // Matematychni Studii. – 2021. – Vol. 56, No. 1. – P. 103–106. DOI: 10.30970/ms.56.1.103-106

4. Yarova, O.A. Asymptotic representation of the normalization factor of the renewal equation / O.A. Yarova // Visnyk of the Lviv University. Series Mechanics and Mathematics. – 2020. – Issue 89. – P. 80–88.

5. Yeleyko, Ya.I., Nishchenko, I.I. On an asymptotic representation of the Perron root of a matrix-valued evolution / Ya.I. Yeleyko, I.I. Nishchenko // Ukrainia

6. Mathematical Journal. – 1996. – Vol. 48, No. 1. – P. 35–43.

Feller, W. A simple proof for renewal theorems / W. Feller // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1961. – Vol. 14. – P. 285–293.

Received 11.08.2025.
Accepted 15.08.2025.

***Asymptotics of random evolution on a renewal process***

*This article is devoted to the asymptotic analysis of random evolutions constructed on the basis of a regenerating process. The study focuses on a class of stochastic processes with nonlinear time normalization, which arise in models that involve structural regeneration or memory effects. These processes are important for describing complex systems whose behavior restarts or changes at random time points.*

*Particular attention is paid to the derivation of a renewal-type equation for the expectation of the random evolution defined on the regenerating process under a nonlinear transformation of time. The obtained equation characterizes the dynamics of the mean values of the evolution in terms of the regeneration function that reflects the probabilistic structure of the underlying process.*

*A limit theorem is proved, which establishes the asymptotic behavior of the expected values of the random evolution as time tends to infinity. It is shown that the nonlinear normalization significantly affects the nature of the asymptotic regime, influencing both the growth rate and the form of the asymptotic representation. Special attention is given to the case where the time normalization is defined by a monotonic increasing function, allowing for modeling acceleration or deceleration effects in the evolution.*

*The theoretical results obtained in this work can be applied to the analysis of models in reliability theory, queueing systems, population dynamics, and various applied areas where randomness, regeneration, and nonlinearity in time evolution play a crucial role. The developed approach provides a general framework for studying the long-term behavior of systems driven by random inputs and regenerating mechanisms.*

*Additionally, the results lay the groundwork for further generalizations to multidimensional random evolutions and more complex forms of time scaling in stochastic systems.*

*Keywords: random evolution, regenerating process, renewal equation, nonlinear time normalization.*

**Ярова Оксана Анатоліївна** - доцент кафедри математичної статистики і диференціальних рівнянь, кандидат фізико-математичних наук, Львівський національний університет імені Івана Франка, ORCID: 0000-0002-6284-1193

**Yarova Oksana Anatoliivna** - Associate Professor, Department of Mathematical Statistics and Differential Equations, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Ivan Franko National University of Lviv, ORCID: 0000-0002-6284-1193



ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)