

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ АЕРОДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕКРУГОВИХ КОНУСІВ ПРИ НАДЗВУКОВОМУ ОБТІКАННІ

Анотація. В роботі розглянуто задачу про надзвукове обтікання гострого конуса з довільним гладким поперечним перерізом потоком в'язкого газу. Припускалось, що вплив в'язкості зосереджено в тонкому шарі поблизу твердої поверхні і всю область течії можна розділити на нев'язкий потік і примежовий шар. Для розв'язання задачі в області нев'язкої течії застосовувався стаціонарний аналог метода Годунова, в примежовому шарі – скінченно-різницевий метод Петухова. Проведено чисельний аналіз аеродинамічних характеристик біліптичного конуса. Показано, що число Рейнольдса і форма поперечного перерізу суттєво впливає на величину аеродинамічних коефіцієнтів конуса.

Ключові слова: надзвукове обтікання, коефіцієнт опору, підйомна сила, конус, поперечний переріз, рівняння Ейлера, примежовий шар.

Постановка проблеми. Однією з важливих задач сучасної аеродинаміки є вивчення надзвукових течій навколо неосесиметричних несучих тіл, що рухаються в газовому середовищі під деяким кутом атаки. Такі тіла можуть мати менший хвильовий опір, ніж тіла обертання той же довжини та об'єму. Однак, унаслідок більшої площі поверхні, сили тертя, що діють на них, можуть істотно збільшити повний опір. У зв'язку з цим становить інтерес вивчення в'язкого обтікання тіл вказаної форми.

Математичне моделювання течій суцільного середовища здійснюється за допомогою повних або певним чином спрощених рівнянь Нав'є-Стокса. Серед різних підходів до чисельного дослідження просторових течій в'язкого газу важливе місце продовжує займати теорія примежового шару. Цей підхід є досить економічним (у сенсі витрат ресурсів комп'ютера) і водночас досить точним за великих чисел Рейнольдса.

Для прикладних задач певний інтерес має клас вироджених просторових течій, який пов'язаний з рухом загострених кінцевих тіл. Ці тіла часто використовують як окремі елементи літальних апаратів. При виконанні певних умов навколо гострого конуса реалізується кінцева течія, що дає можливість звести вихідну просторову задачу до двовимірної. Розв'язання задачі про обтікання гострого конуса дає певну інформацію, корисну для чисельного аналізу невироджених течій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженню в'язких течій поблизу тіл, що не мають осевої симетрії, присвячено значну кількість експериментальних і теоретичних робіт. В статтях [1-2] наведені результати експериментів при дозвукових

швидкостях руху для літальних апаратів з поперечними перерізами у вигляді круга, квадрата і трикутника з округленими кромками. В роботі [3] запропоновано наближений метод розрахунку плівкових течій рідини по поверхні конуса з гладким поперечним перерізом.

Дослідження надзвукових течій газу поблизу твердих тіл проводились в роботах [4-10, 2]. В [4-6] на основі повних або параболізованих рівнянь Нав'є-Стокса вивчалось обтікання еліптичного конуса. В роботах [8-10] для знаходження аеродинамічних характеристик літальних апаратів з різними поперечними перерізами застосовувався програмний комплекс Ansys Fluent. Експериментальні дослідження надзвукових течій поблизу твердих поверхонь проводились в роботах [2, 7].

Мета дослідження. Розробити методику розрахунку аеродинамічних характеристик конічних тіл з довільним гладким поперечним перерізом при надзвуковому обтіканні на основі рівнянь Ейлера і примежового шару. Провести чисельний аналіз інтегральних характеристик біеліптичних конусів.

Викладення основного матеріалу дослідження. Розглядається задача про надзвукове обтікання гострого конуса з довільним гладким поперечним перерізом стаціонарним потоком в'язкого газу. Рівняння конічної поверхні в сферичній системі координат (r, θ, φ) задається у вигляді $\theta = \theta(\varphi)$, де θ – кут між твірною конуса та його віссю. Припускається, що вплив в'язкості зосереджено в тонкому шарі поблизу твердої поверхні і всю область збуреної течії між ударною хвилею та поверхнею конуса можна розділити на нев'язкий потік і примежовий шар.

Система рівнянь Ейлера, що описує стаціонарну течію нев'язкого газу, в дивергентній формі має наступний вигляд:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \frac{\partial \vec{C}}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

де $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ - чотирикомпонентні вектори

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} \rho u_x \\ p + \rho u_x^2 \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_x u_z \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} \rho u_y \\ \rho u_x u_y \\ p + \rho u_y^2 \\ \rho u_y u_z \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_x u_z \\ \rho u_y u_z \\ p + \rho u_z^2 \end{pmatrix},$$

(x, y, z) - декартова система координат; u_x, u_y, u_z - компоненти вектора швидкості вздовж осей x, y, z відповідно; p – тиск; ρ – густина газу.

Система рівнянь (1) доповнюється умовою сталості повної ентальпії течії

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2} = const, \quad (2)$$

де k – показник адіабати, а також граничними умовами на поверхні конуса та на ударній хвилі.

Розглядалися такі режими обтікання, коли ударна хвиля, що утворюється перед конусом, приєднана до його вершини і нев'язка течія навколо нього є конічною. Інтегрування системи диференціальних рівнянь (1) проводилось за допомогою стаціонарного аналога метода Годунова С.К. [11] з використанням принципу устанавлення розв'язку за позовжньою координатою χ .

Система рівнянь просторового ламинарного примежового шару на конічній поверхні має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(r\rho u) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho\omega) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(r\rho v) = 0, \quad (3)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\rho\omega}{r} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \rho v \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\rho}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi} \omega^2 = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right), \quad (4)$$

$$\rho u \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\rho\omega}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \rho v \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} + \frac{\rho}{r} \frac{\partial r}{\partial \xi} u\omega = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right), \quad (5)$$

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\rho\omega}{r} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \rho v \frac{\partial h}{\partial \zeta} = u \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\omega}{r} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \zeta} \right) + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right)^2 \right], \quad (6)$$

Крайові умови

$$u = \omega = v = 0, \quad h = h_w \quad \text{при } \zeta = 0, \quad (7)$$

$$u \rightarrow u_e, \quad \omega \rightarrow \omega_e, \quad h \rightarrow h_e \quad \text{при } \zeta \rightarrow \infty, \quad (8)$$

Тут (ξ, η, ζ) – ортогональна система координат, яка зв'язана з поверхнею конуса (ξ – координата, що відраховується від вершини конуса вздовж твірної, η – полярний кут в площині, яка перпендикулярна до осі конуса, ζ – відстань по нормалі до поверхні); $r = \xi\psi(\eta)$; u, ω, v , – компоненти вектора швидкості, направлені вздовж осей ξ, η, ζ ; p – тиск; ρ, h – густина і ентальпія газу; c_p – теплоємність при постійному тиску; μ, λ – коефіцієнти молекулярної в'язкості та теплопровідності. Індеси «w» і «e» відносяться до параметрів на стінці та на зовнішній межі примежового шару. Функція $\psi(\eta)$, яка задає форму поперечного перерізу конуса, має вигляд

$$\psi(\eta) = \frac{1}{1+R^2} \left[R^2 + \left(\frac{dR}{d\eta} \right)^2 + R^4 \right]^{0.5}, \quad R = \operatorname{tg} \theta(\eta).$$

Система рівнянь примежового шару доповнюється рівнянням стану для ідеального газу та степеневими залежностями молекулярної в'язкості та теплопровідності.

При конічній зовнішній течії задача про примежовий шар (3)-(8) за допомогою заміни змінних може бути зведена до двовимірної задачі. Для розв'язання цієї задачі застосовувався скінченно-різницеий метод Петухова І.В. [12].

В результаті розв'язання наведених вище крайових задач можуть бути знайдені поля швидкостей і тиску в примежовому шарі і в нев'язкій області течії, а також локальні коефіцієнти тиску C_P і тертя C_{f_1} , C_{f_2}

$$C_P = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}, \quad C_{f_1} = \frac{1}{q_\infty} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)_W, \quad C_{f_2} = \frac{1}{q_\infty} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)_W, \quad q_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2}.$$

В роботі припускалось, що течія має площу симетрії. В цьому випадку вектор аеродинамічної сили $\vec{F}$, який розташований в площі симетрії, може бути розкладений на дві складові: осьову силу $\vec{R}$, направлену вздовж осі конуса x_1 , і нормальну силу $\vec{N}$, яка є перпендикулярною до цієї осі.

Коефіцієнт осьової сили може бути поданий наступним чином:

$$C_R = \frac{R}{q_\infty S_{mid}} = \frac{1}{S_{mid}} \iint_{S_{бок}} \left[C_P \cos(\vec{n} \wedge \vec{i}) + C_{f_1} \cos(\vec{t}_1 \wedge \vec{i}) + C_{f_2} \cos(\vec{t}_2 \wedge \vec{i}) \right] dS,$$

де $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, $\vec{n}$ – одиничні вектори ортогональної системи координат (ξ, η, ζ) , $\vec{i}$ – одиничний вектор вздовж осі конуса; S_{mid} , $S_{бок}$ – площі міделєвого перерізу та бічної поверхні конуса. Аналогічним чином визначаються коефіцієнти нормальної сили C_N і поздовжнього моменту m_z

$$C_N = \frac{N}{q_\infty S_{mid}}, \quad m_z = \frac{M_z}{q_\infty S_{mid} L}.$$

За відомими значеннями величин C_R і C_N можна обчислити коефіцієнти лобового опору C_X і підйомної сили C_Y , а також аеродинамічну якість $K = C_Y / C_X$

$$C_Y = C_N \cos \alpha - C_R \sin \alpha, \quad C_X = C_N \sin \alpha + C_R \cos \alpha.$$

На основі чисельного інтегрування рівнянь Ейлера (1) і примежового шару (3)-(6) проведено розрахунки аеродинамічних коефіцієнтів для біеліптичних конусів. Форма поверхні цих тіл задається трьома геометричними параметрами δ_1 , δ_2 , θ_k (θ_k – напівкут конуса в площині великої півосі, δ_1 та δ_2 коефіцієнти еліптичності нижнього і верхнього напівеліпсів). Результати розрахунків при числі Маха $M_\infty=6$ і куті $\theta_k=15^\circ$ наведені на рисунках 1-2.

На рисунку 1 наведені залежності коефіцієнта опору C_X та аеродинамічної якості K від кута атаки α для біеліптичного конуса з геометричними параметрами $\delta_1=1$ і $\delta_2=2$ при різних значеннях числа Рейнольдса Re ($Re=\rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty$, l – висота конуса). При $\alpha=0^\circ$ це тіло володіє несучими властивостями; при $\alpha \approx -3.7^\circ$ – має нульову підйомну силу і мінімальний лобовий опір. Вплив примежового шару призводить до значного збільшення лобового опору. Так, наприклад, при $\alpha=0^\circ$ добавки внаслідок сил в'язкості складають 9%, 28%, 89% від хвильового опору $X_{хв}$ при числах $Re=10^6$, 10^5 та 10^4 відповідно. Внесок в'язких складових у підйомну силу і в поздовжній момент є незначним (0.3÷3% при $Re=10^6 \div 10^4$). Врахування сил в'язкості призводить до значного зниження максима-

льного значення аеродинамічної якості $K_{\max}$, причому зі зменшенням числа Re максимум стає менш вираженим і зміщується в область більших значень кута α .

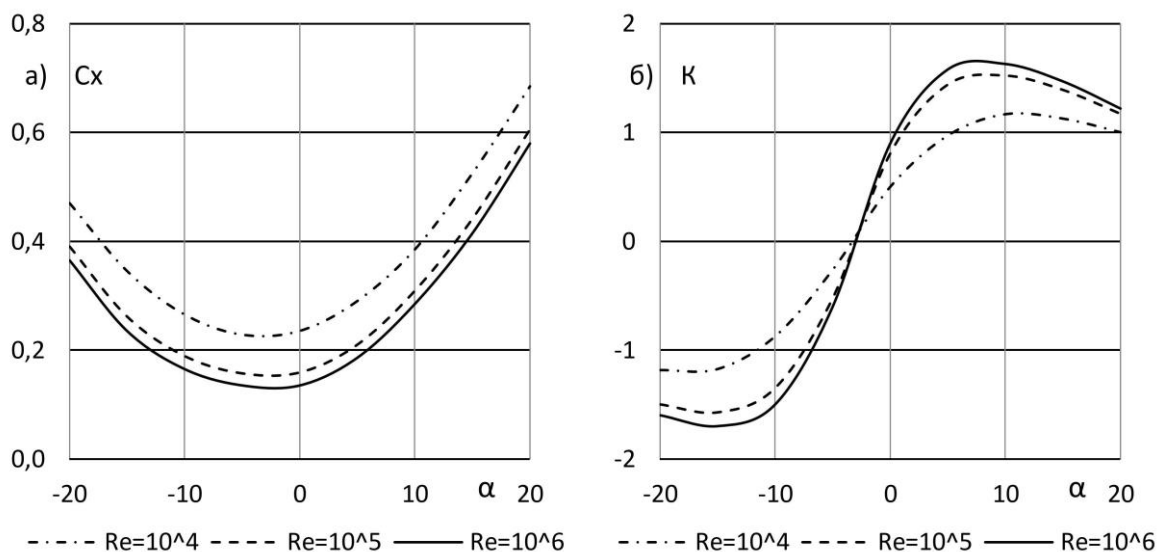


Рисунок 1 – Залежність коефіцієнта опору C_x та аеродинамічної якості K від кута атаки α при різних значеннях числа Рейнольдса Re

На рисунку 2 показано вплив форми навітряної (коефіцієнт δ_1) та підвітряної (коефіцієнт δ_2) поверхні біеліптичного конуса на його аеродинамічні коефіцієнти при значенні кута $\alpha = 5^\circ$. Збільшення величини δ_1 призводить до зменшення коефіцієнтів C_x , C_y , m_z . Аеродинамічна якість K при цьому може зростати або спадати залежно від величини δ_2 . Збільшення величини δ_2 при постійному значенні δ_1 відносно слабо впливає на величину C_x і призводить до сильного зростання коефіцієнтів C_y , $|m_z|$, K . Найбільшу підйомну силу при $\alpha = 5^\circ$ має конус із найбільш опуклою нижньою ($\delta_1 = 1$) і найменш опуклою верхньою ($\delta_1 = 3$) поверхнями.

Висновки. Запропоновано методику розрахунку аеродинамічних характеристик конічних тіл з довільним гладким поперечним перерізом при надзвуковому обтіканні, що ґрунтується на чисельному інтегруванні рівнянь Ейлера і ламінарного примежового шару. Проаналізовано вплив геометричних і фізичних параметрів на інтегральні характеристики течії. Показано, що число Рейнольдса і форма поперечного перерізу суттєво впливають на величину аеродинамічних коефіцієнтів біеліптичного конуса.

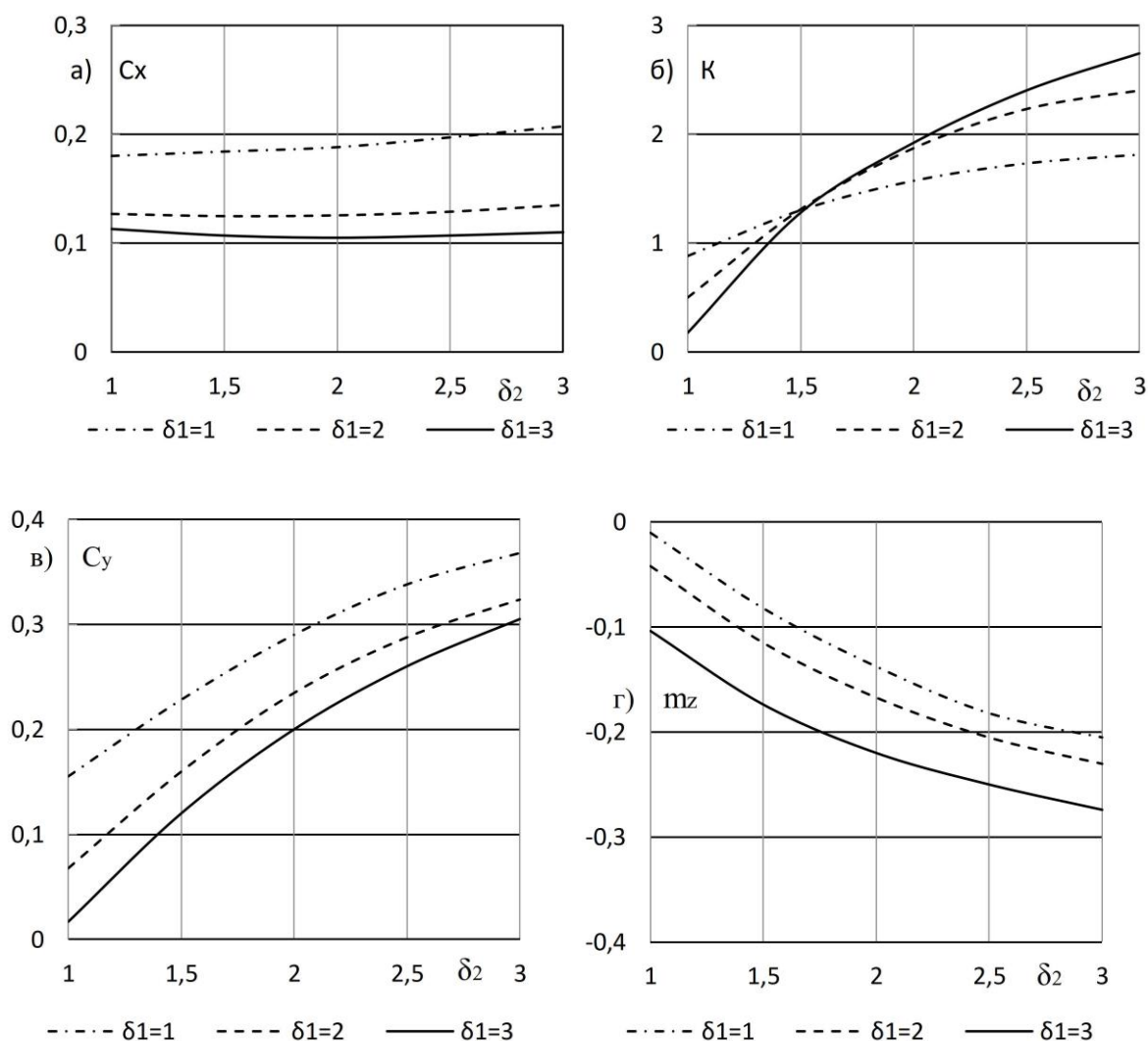


Рисунок 2 – Залежність аеродинамічних коефіцієнтів від геометричних параметрів δ_1 і δ_2 ($Re=10^6$)

ЛІТЕРАТУРА / REFERENCES

1. Mitchell R.R., Webb M.B., Roetzel J.N. A study of the base pressure distribution of a slender body of square cross-section. In: *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.*, 2008-0428, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc. <https://doi.org/10.2514/6.2008-428>.
2. Tadakuma K., Tani Y., Aso S. Effect of Fuselage Cross Section on Aerodynamic Characteristics of Reusable Launch Vehicles. *Open Journal of Fluid Dynamics*, 2016, **6**, 222-233. <http://dx.doi.org/10.4236/ojfd.2016.63017>.
3. Tonkoshkur I.S. Mathematical modeling of flows of rheologically complex fluid over the surface of a cone. *Problems of applied mathematics and mathematic modeling*. 2024. Vol. 24. P. 214-221. <https://doi.org/10.15421/322422>.
4. Bashkin V.A., Egorov I.V. Numerical modelling of dynamics of viscous perfect gas. M.: Fizmatlit, 2012. 372 p. (in Russian).

5. Paredes P., Theofilis V. Accurate Parabolic Navier-Stokes solutions of the supersonic flow around an elliptic cone. *51st AIAA Aerospace Sciences Meeting*. 2013, Grapevine, Texas. <https://doi.org/10.2514/6.2013-670>.
6. Kotebavi V., Rakesh S. G. Supersonic Flow over Elliptic Cone with Different Ellipticity Ratio. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 2023, Vol. 16, No. 12, pp. 2494-2503. <https://doi.org/10.47176/jafm.16.12.1865>.
7. Wilcox F., Birch T., Allen J. Force, surface pressure, and flowfield measurements on a slender missile configuration with square cross-section at supersonic speeds. *22nd Applied Aerodynamics Conference and Exhibit*. 2004, Providence, Rhode Island. <https://doi.org/10.2514/6.2004-5451>.
8. Mahjoob S., Mani M., Rahni M.T. Aerodynamic performance analysis of bodies with different cross-sections. *20th AIAA Applied Aerodynamics Conference* 2002. St. Louis, Missouri. <https://doi.org/10.2514/6.2002-2941>.
9. Nallappan R., Prasath M. Analysis of Missile Bodies with Various Cross sections and Enhancement of Aerodynamic Performance. *International Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology*. 2015. 115-119. Print.
10. Chen J., Fan X. Shape Optimization of the Cross-Section for Noncircular Hypersonic Missile Forebody. *International Journal of Aerospace Engineering*. 2020, 9 p. <https://doi.org/10.1155/2020/8885494>
11. Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics / S.K. Godunov et al. M.: Nauka. 1976. 400 p. (in Russian).
12. Kotlyar Y.M., Sovrechny V.D., Strizhenov D.S. Methods and Problems of Heat and Mass Transfer. M.: Mashinostroenie, 1987. 320 p. (in Russian).

Received 02.06.2025.
Accepted 09.06.2025.

Numerical analysis of aerodynamic characteristics of non-circular cones in supersonic flow

Numerical modeling of viscous gas flows around non-axisymmetric lifting bodies streamlined at an angle of attack is one of the urgent problems of modern aerodynamics. Such bodies have high aerodynamic quality and are promising in the creation of maneuverable aircraft.

The paper considers the problem of supersonic flow of a viscous gas around a sharp cone with an arbitrary smooth cross-section. It was assumed that the effect of viscosity is concentrated in a thin layer near the solid surface, and the entire flow region between the body surface and the shock wave can be divided into an inviscid flow and a boundary layer.

The flow regimes considered were when the shock wave formed in front of the cone is attached to its top and the inviscid flow around it is conical. The integration of the system of differential equations of Euler was carried out using a stationary analogue of the Godunov method, using the principle of establishing a solution along the longitudinal coordinate. To solve the boundary layer problem, the Petukhov finite-difference method was used. As a result of solving the specified boundary value problems, the velocity and pressure fields in the

boundary layer and in the inviscid flow region, as well as the integral aerodynamic coefficients, were found.

Based on the proposed methodology, calculations of aerodynamic coefficients for bi-elliptical cones were performed. The surface shape of these bodies is specified by three geometric parameters δ_1 , δ_2 , θ_k (θ_k is the half-angle of the cone in the plane of the major semi-axis, δ_1 and δ_2 are the ellipticity coefficients of the lower and upper semi-ellipses).

Numerical analysis of aerodynamic characteristics showed that taking into account the influence of the boundary layer leads to a significant increase in drag and a decrease in aerodynamic quality. The contribution of viscous components to the lift and longitudinal moment is insignificant. The shape of the cone cross-section has a significant effect on the value of its aerodynamic coefficients.

Keywords: supersonic flow, drag coefficient, lift force, cone, cross-section, Euler equations, boundary layer.

Тонкошкур Ілля Сергійович – к. ф.-м. н., доцент кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Tonkoshkur Illia Serhiiovych – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Cybernetics of Oles Honchar Dnipro National University.