

А.Н. Хомченко, О.І Литвиненко, І.О. Астіоненко

НЕСТАНДАРТНА МОДЕЛЬ ТРИКУТНОГО СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА T7

Анотація. У роботі розглянуто трикутник T7, який має сім вузлів (три вузли у вершинах, три вузли на серединах сторін і один вузол у барицентрі). В математиці T7 використовують у якості обчислювального шаблону для наближеного інтегрування у трикутних областях. Зустрічається трикутник T4, який також використовують у якості обчислювального шаблону. Між іншим, трикутник (двовимірний симплекс) – невичерпне джерело нових результатів. Засновник сучасного і дуже ефективного методу скінченних елементів (МСЕ) Р. Курант реалізував свої геніальні ідеї саме на трикутниках (трикутник Куранта, комірка Куранта). Але не всі трикутники здатні виконувати подвійну роль: обчислювального шаблону і скінченного елемента. До скінченних елементів вимоги більш жорсткі, наприклад, залежність між порядком елемента і кількістю вузлів, необхідних для поліноміальної інтерполяції. Ось чому серед трикутних СЕ зустрічаються тільки члени арифметичного ряду «трикутних» чисел Піфагора: T3, T6, T10... Ми переконалися, що T7, як і стандартний T10, може виконувати подвійну роль, а порушення міжелементної неперервності (несумісність) на границі з трикутним T6 або квадратним Q8 не має небажаних наслідків. Модель T7 успішно витримує кускове тестування. При цьому «дута» мода T7 відкриває можливість генерувати шляхом конденсації безліч альтернативних моделей T6.

Ключові слова: трикутник T7, нестандартна модель, обчислювальний шаблон, скінченний елемент, кускове тестування.

Постановка проблеми. Особливість трикутних СЕ полягає в тому, що існує тісний зв'язок між порядком елемента n і кількістю S необхідних для інтерполяції вузлів. Ця формула $S = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ відома з часів Піфагора. Вона зустрічається в роботах Ньютона (біном), Паскаля (трикутник). Цікаво, що графічні зображення «трикутних» чисел без будь-якої зміни потрапили у 20 століття і використовуються у якості носіїв фінітних функцій МСЕ. Цей популярний метод починався у 1943 році саме з трикутників. Рівень популярності трикутних СЕ не спадає. Сьогодні у

комбінації з квадратними СЕ трикутники використовують у приграничній смугі областей з криволінійними границями. Назвемо три перші моделі трикутних СЕ: Т3 (три вузли у вершинах трикутника), Т6 (три вузли у вершинах, три вузли на серединах сторін), Т10 (три вузли у вершинах, шість вузлів у точках трисекції сторін, один вузол у барицентрі). Внутрішні вузли виникають природним шляхом, як «трикутні» числа Піфагора. Ставлення фахівців до внутрішніх вузлів залежить від того, з якою метою створюється модель. Якщо трикутник виконує роль СЕ, внутрішні вузли небажані. Щоб виключити внутрішні параметри, вигадали процедуру конденсації (редукції). Якщо трикутник виконує роль обчислювального шаблону для чисельного інтегрування, наявність внутрішнього вузла (у барицентрі) позитивно впливає на точність обчислень. Мова йде про відомі шаблони Т4, Т7, Т10. До речі, модель Т10 успішно виконує подвійну роль. Цікава проблема стосується дослідження можливості подвійного використання трикутника Т7. Якщо ансамблювання СЕ не передбачається (трикутний суперелемент), достатньо сконструювати базис, який задовольняє інтерполяційній гіпотезі Лагранжа. Якщо передбачається ансамблювання, треба шляхом кускового тестування дослідити поведінку базису Т7 на границі з трикутником Т6 або квадратом Q8. Саме цим проблемам присвячена стаття.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Трикутник, як двовимірний симплекс, вважається найбільш розповсюдженим СЕ. Одна із причин цього в тому, що будь-яку область у двовимірному просторі можна апроксимувати багатокутниками, які завжди можна розбити на трикутники. Крім того, повним поліномом порядку n можна скористатися для інтерполяції функції $f(x, y)$ за відомими значеннями у $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ симетрично розташованих вузлах трикутника. Стандартні моделі трикутників різних порядків можна знайти у книгах [1–3]. Вперше кусково-лінійні функції на трикутнику були запропоновані Курантом (1943). Пізніше їх незалежно досліджував Тернер. Ці моделі іноді називають трикутниками Куранта-Тернера [4]. Проблеми конструювання несумісних моделей висвітлює автор [5]. Інформацію про кускове тестування можна

знайти у роботах [1, 4, 6, 7]. Про процедуру конденсації (редукції) на T10 (рецепт Сьярле-Рав'яра, 1972) нагадують автори [1].

Мета дослідження. Метою дослідження є конструювання поліноміального базису нестандартного елемента T7, визначення спектра еквівалентних вузлових навантажень від одиничної масової сили, виконання кускового тестування на міжелементну неперервність на границі із стандартними SE: T6 або Q8, генерування модельного ряду альтернативних T6.

Викладення основного матеріалу дослідження. Основний матеріал краще починати з арифметичного ряду і трикутних чисел Піфагора (рис. 1).

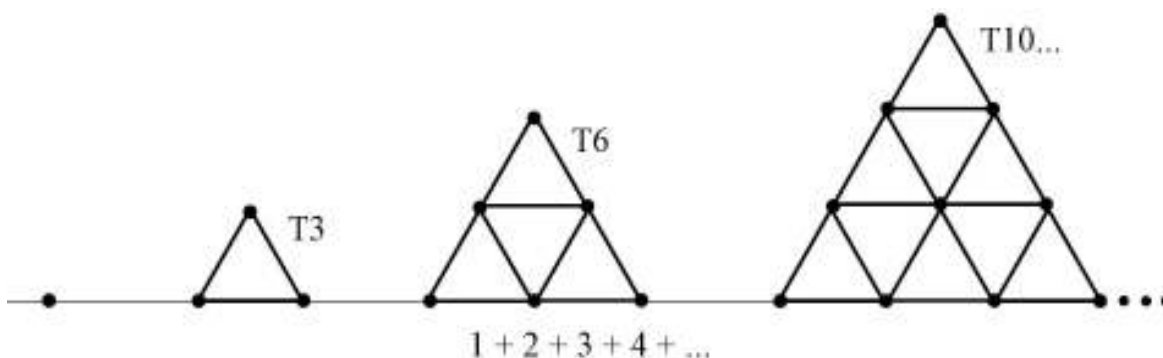


Рисунок 1 - Трикутні числа Піфагора (трикутні SE)

Саме ці трикутники тепер використовують у якості скінченних елементів (SE). Перші носії фінітних функцій сучасного методу скінченних елементів (МСЕ) мали трикутну форму. Трикутні SE і сьогодні вважаються найбільш корисними, особливо в задачах з криволінійними границями розрахункових областей. Від порядку елемента n залежить кількість необхідних вузлів k :

$$k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (1)$$

Правило (1) дає можливість зрозуміти, чому серед трикутників Піфагора, а також серед трикутних SE не зустрічаються, наприклад, T4 або T7. Між іншим, T4 і T7 часто використовують в обчислювальній математиці у якості шаблонів для кубатурних формул. Цікаве спостереження: в МСЕ внутрішні вузли елементів небажані. Для їх виключення навіть

вигадали спеціальну процедуру конденсації (редукції) [1]. А в обчислювальних шаблонах кубатур, навпаки, внутрішні вузли відіграють провідну роль. Як бачимо, модель Т10 має подвійне призначення. Нижче ми спробуємо сконструювати модель Т7 із подвійним призначенням. Головна проблема, як завжди в МСЕ, побудувати базисні функції (функції впливу) моделі Т7. Як відомо [1-3], базисні функції трикутних СЕ вищих порядків зручно виражати через барицентричні координати симплексу Т3, тобто через базис першого порядку. Барицентричні координати можна виразити через декартові координати, наприклад,

$$L_1(x, y) = \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \text{ де } S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \text{ - площа трикутника.} \quad (2)$$

Аналогічно, для $L_2(x, y)$, $L_3(x, y)$ шляхом циклічної перестановки індексів.

На рис. 2 а зображено типовий трикутний елемент Т3 (симплекс), на рис. 2, б – нестандартний Т7.

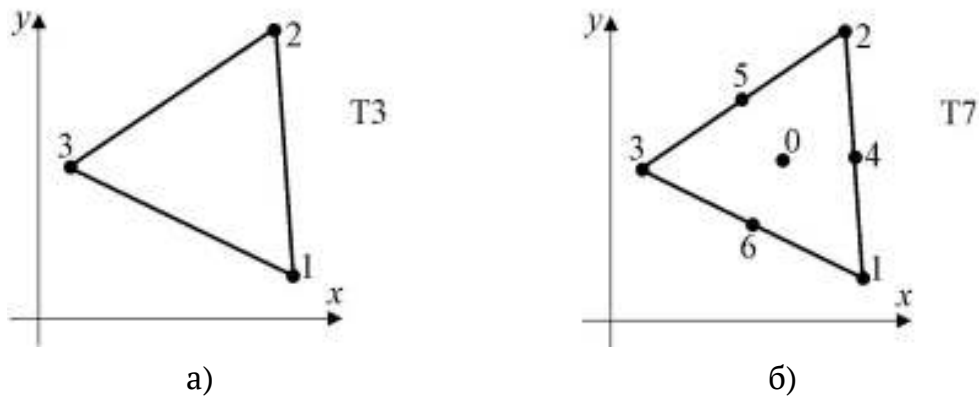


Рисунок 2 - Трикутні елементи у площині (x, y)

Неважко переконатися, що функції $L_i(x, y)$ є інтерполяційними для Т3. Вони задовольняють вимогам інтерполяційної гіпотези Лагранжа:

$$L_i(x, y) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad 0 \leq L_i(x_i, y_i) \leq 1, \quad \sum_{i=1}^3 L_i(x, y) = 1. \quad (3)$$

де i – номер функції, j – номер вузла.

За допомогою суперпозиції лінійних функцій $L_i(x, y)$ можна сконструювати базисні функції $N_i(x, y)$ елементів вищих порядків. Наприклад, для Т6 базис має вигляд [1]:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= L_1(2L_1 - 1), \text{ аналогічно для } i = 2, 3; \\ N_4(x, y) &= 4L_1 2L_2, \text{ аналогічно для } i = 5, 6. \end{aligned} \quad (4)$$

Зауважимо, що базис (4) реалізує неприродний спектр еквівалентних вузлових навантажень від одиничної масової сили. Зазвичай, вузлові навантаження γ_i обчислюють за формулою Ньютона-Котеса:

$$\gamma = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dS.$$

Інтегрування у барицентричних координатах виконується за правилом [1–3]:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_D L_1^a L_2^b L_3^c dS = \frac{2 a! b! c!}{(a + b + c + 2)!}. \quad (5)$$

Таким чином, для моделі Т6 маємо:

$$\gamma_i = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \gamma_i = \frac{1}{3}, \quad i = 4, 5, 6. \quad (6)$$

Для створення кубатури такий розподіл вагових коефіцієнтів не ефективний, тому що із шести вузлів половина не працює. Це одна із причин нашої уваги до моделі Т7. Навіть, якщо модель Т7 буде непридатною у якості скінченного елемента, можна сподіватися, що «дута» мода забезпечить побудову модельного ряду обчислювальних шаблонів Т6 з фізично адекватними ваговими коефіцієнтами (на замовлення).

Покажемо інтерполяційний базис для Т7 (рис. 2, б):

$$N_0(x, y) = 27L_1 L_2 L_3,$$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2}(6L_1^3 - 5L_1^2 + L_1), \text{ аналогічно для } i = 2, 3; \quad (7)$$

$$N_4(x, y) = 4(L_1 L_2 - 3L_1 L_2 L_3), \text{ аналогічно для } i = 5, 6.$$

За формулою (5) отримаємо спектр вузлових навантажень

$$\gamma_0 = \frac{27}{60}, \quad \gamma_i = \frac{3}{60}, \quad i = 1, 2, 3; \quad \gamma_i = \frac{8}{60}, \quad i = 4, 5, 6.$$

Цей трикутник несумісний з Т6 і квадратом Q8, тому що на границі спостерігається порушення неперервності. Далі ми покажемо, що Т7 успішно витримує кускове тестування [6, 7], тому небажаних наслідків немає. Інтерполянт, що відновлює функцію $f(x, y)$ на трикутнику Т7, має вигляд:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^6 N_i(x, y) f_i,$$

де f_i – відомі аплікати поверхні $z = f(x, y)$.

Тепер запишемо кубатуру для наближеного обчислення подвійних інтегралів на трикутних областях

$$\iint_D f(x, y) dS \approx S \left(\frac{9}{20} f_0 + \frac{1}{20} \sum_{i=1}^3 f_i + \frac{2}{15} \sum_{i=4}^6 f_i \right).$$

Цю формулу можна підтвердити методом невизначених коефіцієнтів [8]. Поступово з'являється довіра до нового базису (7). Далі ми покажемо, як звільнитися від внутрішнього вузла та перетворити Т7 у Т6. У 1972 р. Сьярле і Рав'яр [1] перетворили Т10 у Т9, але не помітили, що «рецепт» конденсації має бути не тільки математично обґрунтованим, але і фізично адекватним. Ми пропонуємо просту процедуру нематричної конденсації, яка дозволяє замовляти спектр вузлових навантажень моделі Т6. Позначимо через \overline{N}_i базисну функцію нової моделі Т6. Нову функцію зручно конструювати як лінійну комбінацію функцій Т7:

$$\overline{N}_i = N_i + \alpha \cdot N_0. \quad (8)$$

Щоб визначити коефіцієнт α , запишемо відповідну залежність між вузловими навантаженнями: $\overline{\gamma}_i = \gamma_i + \alpha \cdot \gamma_0$.

Після цього повертаємось до залежності (8). Наприклад, цікаво дізнатися, яким буде новий базис Т6, якщо замовити відомий спектр (6). В цьому випадку для кутової функції

$$0 = \frac{3}{60} + \alpha \cdot \frac{27}{60}, \text{ звідки } \alpha = -\frac{1}{9}, \text{ тому}$$

$$\overline{N}_1 = \frac{1}{2} (6L_1^3 - 5L_1^2 + L_1) - \frac{1}{9} \cdot 27 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = L_1 \left(3L_1^2 - \frac{5}{2}L_1 + \frac{1}{2} \right) - 3L_1 \cdot L_2 \cdot L_3.$$

Для проміжної функції $\alpha = \frac{4}{9}$, тому

$$\overline{N}_4 = 4 \cdot L_1 \cdot L_2 - 12 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 + \frac{4}{9} \cdot 27 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 = 4 \cdot L_1 \cdot L_2 .$$

Таким чином, рельєф кутової поверхні став більш складним, проміжна поверхня не змінилася. Це означає, що міжелементну неперервність порушують лише кутові функції. Саме вони мають пройти перевірку шляхом кускового тестування. Нижче ми покажемо, що ці функції успішно витримують тестування як за версією Айронса-Раззака, так і за версією Паттерсона. Щоб збагатити інформацію про нематричну конденсацію, побудуємо математично обґрунтований і (головне) фізично адекватний спектр еквівалентних вузлових навантажень модифікованої моделі Т6.

Рецепт розподілу: $\gamma_0 = \frac{27}{60}$; по $\frac{2}{60}$ у кутові вузли $\left(\alpha = \frac{2}{27}\right)$, по $\frac{7}{60}$ у проміжні вузли $\left(\alpha = \frac{7}{27}\right)$. Спектр має вигляд: $\gamma_i = \frac{1}{12}$, $i = 1, 2, 3$; $\gamma_i = \frac{1}{4}$, $i = 4, 5, 6$. Такий спектр майже не відрізняється від емпіричного, який можна отримати в експериментах з блукаючими частинками і поглинаючими вузлами на границі Т6. Кускове тестування кутових поверхонь полягає у порівнянні поведінки N_i і \overline{N}_1 на границі, що проходить через вершину 1, наприклад 1–2. Феномен порушення міжелементної неперервності ілюструє рис. 3.

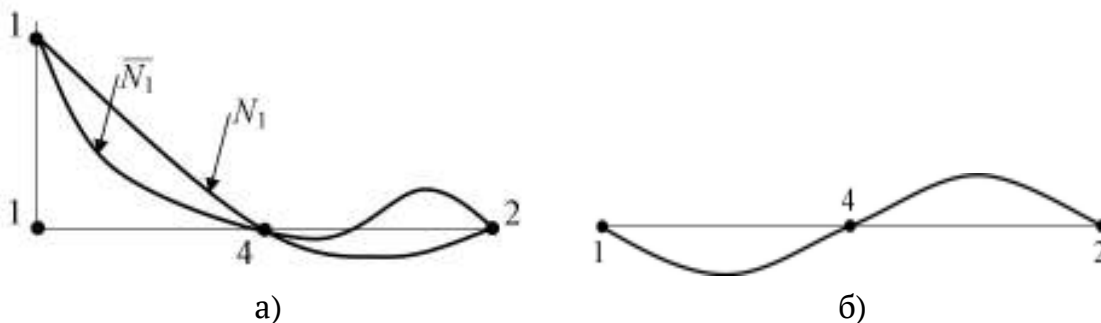


Рисунок 3 - а) параболи: квадратична N_i , кубічна \overline{N}_1 ;

б) стрибок $\varphi = \overline{N}_1 - N_i$

Як бачимо, (рис. 3, а) \overline{N}_1 змінюється за законом кубічної параболи, а N_i – за законом квадратичної параболи. Різниця $\varphi = \overline{N}_1 - N_i$ називається стрибком (рис. 3, б). За Айронсом-Раззаком [7] вважається, що мо-

дифікована модель успішно витримує тестування, якщо інтеграл від стрибка дорівнює 0. Стрибок змінюється за законом кубічної параболи із центром симетрії у вузлі 4. За Паттерсоном [6] вважається, що несумісна модель успішно витримує тестування, якщо стрибок на границі, як мінімум двічі, набуває значення 0. На рис. 3, б таких точок три.

Висновки. Вперше побудовано поліноміальний базис нестандартного трикутника T7. Доведено, що T7 можна використовувати не тільки як обчислювальний шаблон для наближеного інтегрування, а і як скінченний елемент (самостійно або в ансамблі з T6 і Q8). За допомогою T7 тепер можна генерувати множину нових моделей T6 із різними інтегральними характеристиками. Варто відзначити, що серед лагранжевих і серендипових трикутників ще не зустрічалися несумісні елементи. Отримані результати свідчать, що свідоме конструювання несумісних елементів – цікава і корисна справа. І, як це часто трапляється в математиці, ми отримали більше, ніж очікували.

ЛІТЕРАТУРА / LITERATURE

1. Mitchell A.R., Wait R. The finite Element Method in partial differential equations. – London: Wiley (1977).
2. Norrie D. H., de Vries G. An introduction to finite element analysis, Academic Press, N.Y. (1978).
3. Zienkiewicz O. C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Fifth edition. Vol. 1. Bristol Printed and bound by MPG Books Ltd. Butterworth – Heinemann, (2000).
4. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the finite element method, Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, N.Y. (1973).
5. Broun J. H. Non-conforming finite elements and their applications. M.Cs. Thesis, Univ. of Dundee (1975).
6. Patterson C. Sufficient conditions for convergence in the finite element method for solution of finite energy, in: The Mathematics of Finite Elements and Applications. Academic Press (1973). – P. 213–224.
7. Irons B.M. The patch test for engineers / B.M. Irons // Proc. Finite Element Symp., Atleas Computer Lab., Chilton, Didcot, England, 26–28 march, 1974. – P. 171–192.

8. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М. : Наука, 1981. 416 с.

REFERENCES

1. Mitchell A.R., Wait R. The finite Element Method in partial differential equations. – London: Wiley (1977).
2. Norrie D. H., de Vries G. An introduction to finite element analysis, Academic Press, N.Y. (1978).
3. Zienkiewicz O. C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Fifth edition. Vol. 1. Bristol Printed and bound by MPG Books Ltd. Butterworth – Heinemann, (2000).
4. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the finite element method, Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, N.Y. (1973).
5. Broun J. H. Non-conforming finite elements and their applications. M.Cs. Thesis, Univ. of Dundee (1975).
6. Patterson C. Sufficient conditions for convergence in the finite element method for solution of finite energy, in: The Mathematics of Finite Elements and Applications. Academic Press (1973). – P. 213–224.
7. Irons B.M. The patch test for engineers / B.M. Irons // Proc. Finite Element Symp., Atleas Computer Lab., Chilton, Didcot, England, 26–28 march, 1974. – P. 171–192.
8. Marchuk G. I., Agoshkov V. I. Vvedenie v proektsionno-setochnyie metodyi. M.: Nauka, 1981. 416 s.

Received 10.03.2020.

Accepted 13.05.2020.

Нестандартная модель треугольного конечного элемента T7

Рассмотрен треугольник T7, который имеет семь узлов (три узла в вершинах, три узла на серединах сторон и один узел в барицентре). Показано, что T7, как и стандартный T10, может выполнять двойную роль: вычислительного шаблона и конечного элемента, а нарушение межэлементной непрерывности (несовместимость) на границе с треугольным T6 или квадратным Q8 не несет нежелательных последствий. Модель T7 успешно выдерживает кусочное тестирование. При этом «дугая» мода T7 открывает возможность генерировать путем конденсации множество альтернативных моделей T6.

Non-standard model of triangular finite element T7

Triangular as a two-dimensional simplex is considered to be the most common FE. One of the reasons of this is that any area in two-dimensional space can be approximated by polygons, which can always be divided into triangles. The paper considers the triangle T7, which has seven nodes (three nodes in the points, three nodes in the middle of the sides and one node in the barycenter). In mathematics T7 is used as a computational template for approximate integration in triangular domains. There is a T4 triangle, which is also used as a computational template. The triangle (two-dimensional simplex) is an inexhaustible source of new results. The founder of the modern and very efficient finite element method (FEM) R. Courant implemented his brilliant ideas precisely on triangles (the Courant triangle, the Courant cell). But not all triangles can ful-

fil a dual role: both of a computational pattern and a finite element. The requirements for finite elements are stricter, for example, the relationship between the order of the element and the number of nodes required for polynomial interpolation. That is why among triangular FE there are only the members of the arithmetic series of "triangular" Pythagorean numbers: T3, T6, T10... For the first time the polynomial basis of the non-standard triangle T7 is constructed in the work. It is proved that T7, as well as standard T10, can be used not only as a computational template for approximate integration, but also as a finite element. If no SE ensemble is provided (a triangular super element), it is sufficient to construct a basis that satisfies the Lagrange interpolation hypothesis. If ensemble is envisaged the behavior of the T7 basis at the boundary with triangle T6 or square Q8 should be investigated by lump testing. Violation of inter-element continuity (incompatibility) at the boundary with triangular T6 or square Q8 has no undesirable effects. T7 model successfully withstands testing both according to Irons-Razzak and Patterson versions. In this case, the "blown" mode of T7 opens the possibility to generate by condensation many alternative models of T6 with different integral characteristics.

Хомченко Анатолий Никифорович - д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Черноморского национального университета имени Петра Могылы (г. Николаев).

Литвиненко Елена Ивановна - К.т.н., доцент, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.

Астионенко Игорь Александрович - к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Херсонского национального технического университета.

Хомченко Анатолій Никифорович - д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського національного університету імені Петра Могили (м. Миколаїв).

Литвиненко Олена Іванівна - к.т.н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Астіоненко Ігор Олександрович - к.ф.-м. н., доцент, доцент кафедри вищої математики і математичного моделювання Херсонського національного технічного університету.

Khomchenko Anatoliy - doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Professor of the Department of Intellectual Information Systems of the Petro Mogyla Black Sea National University.

Litvinenko Olena - Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Modelling of the Kherson National Technical University.

Astionenko Igor - Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Mathematical Modelling of the Kherson National Technical University.