

В.Ф. Миргород, І.М. Гвоздева

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ТА ОПТИМІЗАЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ШИРОТНО-ІМПУЛЬСНОЇ МОДУЛЯЦІЇ СИГНАЛІВ

Анотація. Пропонується підхід щодо опису процесів зміни стану та оптимізації дискретних систем автоматичного керування, в яких застосовувано перетворення сигналів керування в послідовність імпульсів із часовою модуляцією. Узагальнено опис вказаного типу систем та запропоновано еквівалентне перетворення рівнянь їх руху.. Пропоноване еквівалентне перетворення спрощує їх математичний опис та потребує менших ресурсів при обчислювальній реалізації. Для систем із широтно-імпульсною модуляцією удосконалено алгоритм синтезу, а саме, закону зміни полярності імпульсів та вигляду модуляційної характеристики на основі методу Ляпунова. Встановлено за допомогою комп'ютерного експерименту, що при використанні оптимальних нелінійних законів керування у порівнянні з лінійними має місце покращення критерію якості.

Ключові слова. математичне моделювання, нелінійні дискретні системи, автоматичне керування, методи оптимізації, широтно-імпульсна модуляція, комп'ютерний експеримент.

Постановка проблеми. Сучасний погляд на вирішення питань автоматизації складних технічних об'єктів та напружених технологічних процесів базується на побудові ієрархічних багаторівневих інтелектуальних систем, що забезпечують вимоги щодо кількісних та якісних показників відповідно мети їх функціонування за призначенням. Виконавчий рівень таких систем забезпечується за рахунок застосування локальних цифрових систем автоматичного керування (САК) змінними стану та вихідними змінними.

Існує широкий клас САК, для яких обрання виконавчих пристроїв (ВП) виходить із критерію досягнення максимальної енергетичної ефективності у завданнях масогабаритних обмеженнях. Такі виконавчі пристрої є досить розповсюдженими в системах автоматизації. Зокрема, такими ВП є електромагнітні клапани, електромагнітні засувки та інше. Система керування двигунами постійного струму (ДПС), які використовуються в якості ВП, також містить подібний ланцюг формування сигналу керування. Відмінною особливістю таких ВП є постійне і максимальне значення амплітуди сигналу керування. Пропорційний характер середнього значення вихідного сигналу щодо вхідного забезпечується часовою модуляцією імпульсів керування ВП: протяжністю послідовності імпульсів керування, частотою послідовності імпульсів керування або

комбінованою модуляцією. Принциповою особливістю таких САК є невідповідність вихідній гіпотезі, яка приймається щодо синтезу алгоритмів керування, а саме: належність до класу лінійних та стаціонарних систем (ЛСС). Системи із застосуванням керуванням протяжністю послідовності імпульсів керування є суттєво нелінійними, а системи із застосуванням керуванням частотою послідовності імпульсів керування є суттєво нестаціонарними. Тому є актуальними питання щодо, по перше, адекватного математичного опису руху визначеного класу САК, по друге, визначення підходів щодо синтезу оптимальних керувань за заздалегідь визначеними критеріями.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Системи автоматичного керування із застосуванням модуляції імпульсів керування протяжністю послідовності імпульсів керування, частотою послідовності імпульсів керування або комбінованою модуляцією набули широкого розповсюдження на початку застосування засобів автоматизації технологічними процесами (ТП) у минулому сторіччі. Наприклад, такими були розповсюджені та серійно виготовлені регулятори типів РПБ, РПК та інші. Пропоновані автоколебальні регулятори базувались на структурній побудові, що включала релейний підсилювач, охоплений інерційним зворотнім зв'язком. Вбудований двигун як інтегруюча ланка забезпечував фільтрацію сигналу з частотою автоколебань та отримання вихідного сигналу переміщення кута валу за визначеним законом керування, що залежить тільки від налаштування параметрів ланки зворотного зв'язку. В подальшому подібні регулятори набули широкого застосування в системах паливної автоматики газотурбінних двигунів в контурі обмеження температури (регулятори температури серії РТ-12). САК електроприводами наведення багатьох існуючих зразків озброєння та військової техніки, зокрема, зенітних ракетних комплексів (ЗРК), самохідних протитанкових ракетних комплексів (ПТРК) та інших застосовують саме такий засіб керування виконавчими електричними машинами. В поточний час удосконалені регулятори аналогічного призначення за участі авторів: БРТ та БРТ-25 застосовуються в дослідних та серійних зразках систем паливної автоматики газотурбінних двигунів.

Теоретичні засади математичного опису та встановлення стійкості вказаних САК розглянуті у низці праць Кунцевича В.М. та Чехового Ю.М. (ІК НАНУ). Методи синтезу нелінійних дискретних САК, що були використані в поточному дослідженні, базуються на низці праць Личака М.М. (ІК НАНУ).

Загальні підходи щодо синтезу сучасних систем автоматичного керування викладено в [1...5].

Метод еквівалентного перетворення рівнянь руху складних нелінійних систем до форми Гаммерштейна запропоновано в [3].

Прикладні питання аналізу та синтезу систем автоматичного керування із застосуванням імпульсної часової модуляції розглянуто в [6...8].

Мета роботи полягає у встановленні пристосованого для обчислювальної реалізації адекватного математичного опису нелінійних дискретних САК із застосуванням часової модуляції імпульсів керування та синтезі оптимальних, за квадратичним критерієм, керувань в зазначених САК.

Викладення основного матеріалу дослідження.

Математичний опис руху нелінійних дискретних САК із застосуванням часової модуляції імпульсів керування. Опис руху нелінійних дискретних САК із застосуванням часової модуляції імпульсів керування має значні труднощі, оскільки традиційні методи аналізу дискретних САК, що засновані на дискретному перетворенні Лапласу, є, вочевидь, непридатними. Тому єдиним засобом такого опису є метод простору стану. Зазвичай, опис руху дискретних лінійних стаціонарних САК типу МІМО (Multiple input Multiple output) надається у так званій (A,B,C,D) – формі:

$$\begin{cases} \vec{x}[n+1] = A\vec{x}[n] + B\vec{u}[n], \\ \vec{y}[n+1] = C\vec{x}[n] + D\vec{u}[n], \end{cases} \quad (1)$$

де $\vec{x}$ – вектор координат стану; $\vec{y}$ – вектор виходу; $\vec{u}$ – сигнал керування; A – перехідна матриця; B – матриця зміни стану (керування); C – матриця виходу (спостереження); D – матриця обходу; n – поточний номер дискретного відліку. Перше рівняння вважається рівнянням зміни стану. Друге рівняння в (1) є рівнянням виміру, або формування виходу САК.

Далі будемо вважати, що САК складається із з'єднаних послідовно імпульсного перетворювача, виконавчого пристрою та об'єкту керування. Виконавчий пристрій та об'єкт керування складають безперервну лінійну частину САК з відомою передаточною функцією. За таких умов достатньо далі розглядати тільки рівняння зміни стану, яке в загальному випадку для САК із застосуванням часової модуляції імпульсів керування набуває наступного вигляду:

$$\vec{x}[n+1] = A[n]\vec{x}[n] + \vec{b}[n]u[n]. \quad (2)$$

Сигнал керування в (2) є скалярним і набуває тільки свої максимальні знакозмінні значення для САК з частотно-імпульсною модуляцією (ЧІМ), широтно-імпульсною модуляцією (ШІМ) та комбінованою ЧШІМ. Для САК з амплітудно-імпульсною модуляцією (АІМ) сигнал управління є змінним. Рівняння зміни стану (2) є нестаціонарним та нелінійним навіть при лінійній частині САК. В окремому, найбільш розповсюдженному випадку застосування виключно ШІМ, рівняння зміни стану залишається нелінійним, але може бути приведено до стаціонарного вигляду наступним еквівалентним перетворенням:

$$\vec{x}[n+1] = A[n](\vec{x}[n] + A^{-1}[n]\vec{b}[n]u[n]),$$

де перехідна матриця є матрицею з постійними коефіцієнтами і залежить тільки від періоду імпульсів керування T , який також є постійним:

$$A[n] = A[T] = A.$$

Модифікований вектор зміни стану також є вектором з постійними компонентами і залежить тільки від періоду імпульсів керування для САК з АІМ, а для САК з ШІМ залежить від тривалості імпульсів керування:

$$A^{-1}[T]\vec{b}[T] = \vec{\beta}[T],$$

для САК з АІМ,

$$A^{-1}[T]\vec{b}[\tau] = \vec{\beta}[\tau],$$

для САК з ШІМ.

За умов такого опису САК за вказаним методом еквівалентного перетворення рівнянь руху складних нелінійних систем до форми Гаммерштейна маємо наступні співвідношення руху:

$$\vec{x}[n+1] = A(\vec{x}[n] + \vec{\beta}u[n]).$$

Синтез закону керування САК з ШІМ. Методом аналітичного конструювання оптимальних регуляторів досягається вирішення завдання синтезу для квадратичного критерію якості на основі методу динамічного програмування Беллмана, але тільки для лінійних та стаціонарних дискретних САК. Для нелінійних САК, до яких відносяться системи з ШІМ, таке рішення ще не встановлене. Тому доцільно використати підхід, що розглянутий в низці праць Личака М.М. та інших авторів, який заснований на побудові нелінійних САК із гарантованими властивостями стійкості на основі методу Ляпунова.

Алгоритмічна основа пропонованого підходу складається у виконанні наступних етапів.

1. Визначення критерію оптимізації процесів в САК

Якість процесів в САК завдається у класичному вигляді середньоквадратичного функціоналу із врахуванням енергетичних витрат на керування:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta L[n] + \lambda u^2[n]) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x[n], u[n]), \quad (3)$$

де $L[n]$ – функція Ляпунова, визначена, наприклад, у вигляді квадратичної форми

$$L[n] = \vec{x}^T[n] Q \vec{x}[n], Q \geq 0.$$

$\Delta L[n]$ – її перша різниця на траєкторіях руху САК; λ – ваговий коефіцієнт.

Уведення функції Ляпунова забезпечує гарантовану стійкість синтезованих САК.

2. Визначення умов оптимізації

Вважається, що зміна функціоналу якості на траєкторіях САК є монотонною, оскільки виконуються умови стійкості. Тому найкращим законом керування, за визначеними умовами (оптимальне демпфування) для функціоналу (3) може бути забезпечено виконанням наступного співвідношенням:

$$u^*[n] = \arg(\text{extr} \varphi(\vec{x}[n], u[n])) \quad (4)$$

Зауваження. Для лінійних амплітудно-імпульсних систем рішення (4) є також лінійним

$$u^*[n] = -x^T[n] A^T Q A (\vec{\beta}^T A^T Q A \vec{\beta} + \lambda)^{-1} = -x^T[n] K^T. \quad (5)$$

3. Визначення мети синтезу

Метою синтезу є визначення параметрів модуляційної характеристики ШІМ $\tau[n] = f(x[n])$ і функції перемикання, що забезпечують (4).

Зауваження. Для САК з ШІМ рівняння стану є нелінійними і мають вигляд

$$\vec{x}[n+1] = A(\vec{x}[n] + \vec{\beta}(\tau[n])u[n]). \quad (6)$$

де $\vec{\beta}(\tau[n]) = \vec{h}(t)/_{t=\tau[n]}$;

$\vec{h}(t)$ – векторна перехідна функція лінійної безперервної частини САК;

$u[n] = U \text{sign}(S[n])$;

$S[n]$ – функція перемикавання полярності імпульсів управління.

4. Модифікація критерію якості

За умови застосування ШІМ критерій якості (3) не враховує енергетичні витрати на керування в САК. Для врахування таких незбійних витрат, за аналогією з лінійними САК, пропонується увести в (3) складову, що відповідає таким витратам:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} [\Delta L[n] + \lambda U^2 F(\tau[n])] = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\vec{x}[n], \tau[n], u[n]), \quad (7)$$

де $F(\tau[n])$ – парна позитивна неубутна функція тривалості імпульсів:

$$F(0) = 0, F(\tau) > 0, dF/d\tau \geq 0.$$

5. Визначення завдання оптимізації

За вказаних умов поставлене завдання має вигляд двопараметричної оптимізації відносно функції перемикавання полярності та протяжності імпульсів керування. Неважко бачити, що на траєкторіях (6) справедливе співвідношення

$$\min_{\tau, u} \varphi(\vec{x}[n], \tau, u) = \min_{\tau, u} \left\{ \left[\vec{\beta}^T(\tau) A^T Q A \vec{\beta}(\tau) + \lambda F(\tau) \right] u^2 + 2\vec{x}[n] A^T Q A \vec{\beta}(\tau) u \right\}. \quad (8)$$

Згідно (8) оптимальний закон перемикавання полярності імпульсів, що забезпечує умови стійкості по Ляпунову, має наступний вигляд,

$$u[n] = -U \text{Sign}(\vec{x}[n] A^T Q A \vec{\beta}(\tau[n])). \quad (9)$$

З обліком (9) знаходимо з (8) рівняння для визначення оптимальної модуляційної характеристики

$$U \vec{\beta}^T(\tau[n]) A^T Q A \frac{d\vec{\beta}(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau[n]} + \frac{\lambda U}{2} \frac{dF(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau[n]} - \left| \vec{x}_n^T A^T Q A \frac{d\vec{\beta}(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau[n]} \right| = 0. \quad (10)$$

6. Перевірка та верифікація властивостей отриманого рішення задачі оптимізації

За умови $\tau[n] \ll T$, розглянемо відхилення від стаціонарного режиму в лінійному наближенні розкладання нелінійної функції в ряд Тейлора $\vec{\beta}(\tau[n]) = \vec{\beta}_0 \tau[n]$.

Тоді з (10) слідує співвідношення

$$-\left| \vec{x}[n] A^T Q A \vec{\beta}_0 \right| + \tau[n] U \vec{\beta}_0^T A^T Q A \vec{\beta}_0 + \frac{\lambda U}{2} \frac{dF(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau[n]} = 0.$$

Наприклад, для нелінійної функції $F(\tau) = \tau^2$ оптимальним є наступний закон керування тривалістю імпульсів

$$\tau^*[n] = \left| \bar{x}[n] A^T Q A \bar{\beta}_0 \right| \left[U \left(\bar{\beta}_0^T A Q A \bar{\beta}_0 + \lambda \right) \right]^{-1}. \quad (11)$$

Як це витікає з (9), оптимальне керування є лінійним (пропорційний ШІМ) і співпадає по виду з амплітудно-імпульсною модуляцією (АІМ) - (5). Еквівалентність систем з ШІМ при малих глибинах модуляції системам з АІМ є відомим фактом.

Таким чином, співвідношення (8 – 10) дозволяють визначити параметри цифрового регулятора з ШІМ, що відтворює оптимальну модуляційну характеристику та забезпечує оптимальне демпфування квадратичного показника якості (5) і, тим самим, підвищення точності регулювання в САК з ШІМ.

Для САК структура отриманих рішень близька до цифрової корекції ШІМ по сигналу першої різниці кута повороту виконавчого елементу, оскільки координатами стану САК електроприводу в наближенні (3, 5) є вказаний кут повороту і кутова швидкість. Отримана згідно (10) модуляційна характеристика є істотно нелінійною і визначається параметрами ВП, проте при цифровій реалізації її відтворення не представляє складнощів.

Вирішення тестового завдання. Широкий клас електромеханічних ВП, а саме: електромагнітні клапани, електромагнітні засувки, електромагнітні дозуючі механізми, якірний ланцюг ДПС та інші, мають у якості вихідної математичної моделі інерційну ланку першого порядку, що допускає наближений математичний опис у вигляді ланки з передаточною функцією $\kappa/(p + \alpha)$, якою може бути представлена динаміка ВП.

Рівняння руху в дискретному часі такої ланки має вигляд

$$x[n+1] = e^{-\alpha T} x[n] + \left(1 - e^{-\alpha T[n]}\right) u[n] k.$$

Функціонал (7) може бути представлений у наступному виді:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2[n] + \lambda U^2 \tau^2[n] \right).$$

Оптимальна модуляційна характеристика визначається згідно (10) співвідношенням

$$|x[n]| = \kappa_v U e^{\alpha T} \left[\left(e^{-\alpha T[n]} - 1 \right) + \lambda \tau[n] e^{-\alpha T[n]} / \alpha \right]$$

і є істотно нелінійною функцією.

Проведений авторами комп'ютерний експеримент полягав у вирішенні завдання визначення оптимальних керувань в обраній моделі САК у порівнянні з САК із лінійною модуляційною характеристикою. Результати такого експерименту наведені на рис. 1 – рис. 3. Рисунок 1 ілюструє модуляційні характеристики імпульсного перетворювача, а саме: оптимальну та звичайно використовувану лінійну. Рисунок 2 та рисунок 3 ілюструють рух САК при використанні різних законів керування та зміну значень критерію оптимізації за дискретним часом.

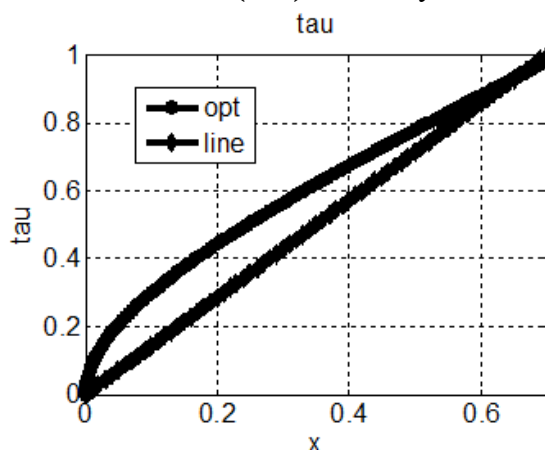


Рисунок 1 - Модуляційна характеристика

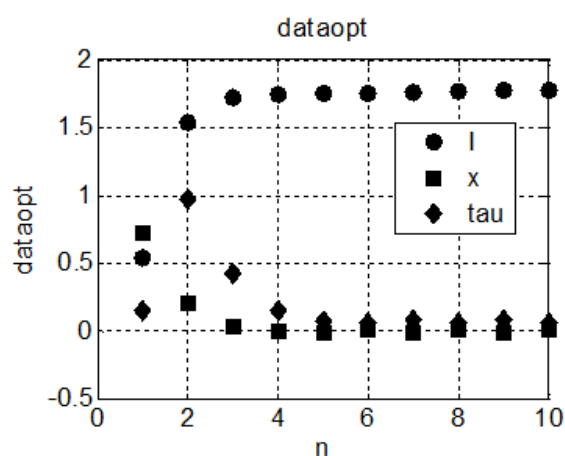


Рисунок 2 - Рух САК при оптимальному законі керування

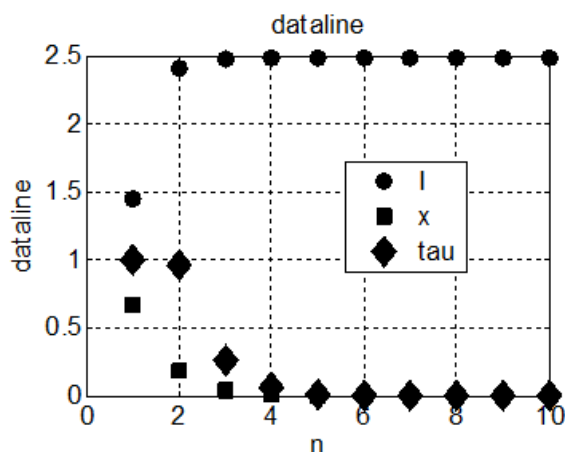


Рисунок 3 - Рух САК при лінійному законі керування

Висновки. Обґрунтовано підхід до оптимізації складних цифрових систем автоматичного керування, в яких застосовувано перетворення сигналів керування в послідовність імпульсів із часовою модуляцією. Запропонований узагальнений опис систем вказаного типу та запропоновано еквівалентне перетворення дискретних рівнянь їх ру-

ху, що дозволяє враховувати зміну протяжності імпульсів керування при лінійній безперервній незмінній частині системи автоматичного керування. Для систем автоматичного керування із застосуванням широтно-імпульсної модуляції сигналу керування удосконалено алгоритм синтезу, а саме: закон зміни полярності імпульсів та вигляду модуляційної характеристики на основі методу Ляпунова. Отримані функціональні залежності, що встановлюють вигляд закону зміни полярності імпульсів та аналітичного опису оптимальної модуляційної характеристики широтно-імпульсного перетворювача сигналу керування за завданням квадратичним критерієм якості та параметрами незмінної безперервної частини системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Richard C. Dorf and Robert H. Bishop. Modern control systems. Pearson Education Limited, 2022. 1024 p.
2. Graham C. Goodwin, Stefan F. Graebe and Mario E. Salgado. Control system design. Prentice Hall, 2000. 908 p.
3. System technologies for modelling of complex processes / Monograph, edited by prof. A.I. Mikhalyov. Dnipro: NMetAU –CPI “System Technologies”, 2016. 608 p.
4. Сучасна теорія керування: навч. посіб. / І.В. Новицький, С.А. Ус, м-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. Дніпро: НГУ, 2017. 263 с.
5. Теорія цифрових систем управління / І. Р. Пархомей та ін. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 135 с.
6. Fedoryshyn R., Klos S., Savytskyi V., Kril S. Improvement of pulse-width modulation algorithm for thermal plant control. *Energy Engineering and Control Systems*. 2017, Vol. 3, №. 2, P. 63–72.
7. Tengfei Liu, Zhong-Ping Jiang. Distributed control of multi-agent systems with pulse-width-modulated controllers. *Automatica*. 2020, Vol. 119.
URL: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109020>Get rights and content
8. Synthesis of an Automatic Control System with Pulse-width Modulation According to the Speed Criterion.
URL:
https://www.researchgate.net/publication/349468076_Synthesis_of_an_Automatic_Control_System_with_Pulse-width_Modulation_According_to_the_Speed_Criterion

REFERENCES

1. Richard C. Dorf and Robert H. Bishop. Modern control systems. Pearson Education Limited, 2022. 1024 p.
2. Graham C. Goodwin, Stefan F. Graebe and Mario E. Salgado. Control system design. Prentice Hall, 2000. 908 p.
3. System technologies for modelling of complex processes / Monograph, edited by prof. A.I. Mikhalyov. Dnipro: NMetAU –CPI “System Technologies”, 2016. 608 p.
4. Suchasna teoriia keruvannia: navch. posib. / I.V. Novytskyi, S.A. Us, m-vo osvity i nauky Ukrainy, Nats. hirn. un-t. Dnipro: NHU, 2017. 263 s.

5. Teoriia tsyfrovykh system upravlinnia / I. R. Parkhomei ta in. Kyiv: KPI im. Ihoria Sikorskoho, 2020. 135 s.
6. Fedoryshyn R., Klos S., Savytskyi V., Kril S. Improvement of pulse-width modulation algorithm for thermal plant control. *Energy Engineering and Control Systems*. 2017, Vol. 3, №. 2, P. 63–72.
7. Tengfei Liu, Zhong-Ping Jiang. Distributed control of multi-agent systems with pulse-width-modulated controllers. *Automatica*. 2020, Vol. 119.
URL: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109020>Get rights and content
8. Synthesis of an Automatic Control System with Pulse-width Modulation According to the Speed Criterion.
URL:
https://www.researchgate.net/publication/349468076_Synthesis_of_an_Automatic_Control_System_with_Pulse-width_Modulation_According_to_the_Speed_Criterion

Received 09.05.2025.
Accepted 12.05.2025.

Mathematical description and optimization of automatic control systems using pulse width modulation of signals

An approach is proposed for the adequate description of the processes of state change and optimization of complex discrete automatic control systems (ACS), in which the conversion of control signals into a sequence of pulses with time modulation is used. Requirements for actuators in many cases of practical use produce the need to use such a conversion to achieve proportional regulation of the output action in accordance with the input control signal. The description of discrete automatic control systems of the specified type is generalized and an equivalent transformation of the discrete equations of their motion is proposed. The specified transformation allowed to take into account the change in the length of the control pulses for the linear continuous invariant part of the automatic control system.

The proposed equivalent transformation of the equations of motion for discrete (impulse) systems with a constant sampling interval significantly simplifies their mathematical description and requires fewer resources for computational implementation. For automatic control systems with pulse-width modulation of the control signal, the algorithm for synthesis and obtaining the control signal has been improved, namely, the law of changing the polarity of the pulses and the form of the modulation characteristic based on the Lyapunov method.

A distinctive feature of the proposed approach is the inclusion in the criteria of optimality of energy costs for control in the form of a dependence on the duration of control pulses. Functional dependencies were obtained in a closed analytical form, which establish the form of the law of pulse polarity change and analytical description of the modulation characteristic of the pulse-width converter of the control signal according to the given criterion and parameters of the invariable continuous part of the ACS. A computer experiment and simulation were performed when solving the test problem.

The obtained results of solving the test problem confirm the effectiveness of the proposed approach. It was established that when using optimal nonlinear control laws, the quality criterion is improved compared to the applied linear ones.

Keywords: mathematical modeling, nonlinear discrete systems, automatic control, optimization methods, pulse-width modulation, computer experiment.

Миргород Володимир Федорович – доктор технічних наук, професор кафедри автоматизації суднових енергетичних установок Національного університету “Одеська морська академія”.

Гвоздева Ірина Маратівна – доктор технічних наук, завідувач кафедри електрообладнання і автоматики суден Національного університету “Одеська морська академія”.

Myrhorod Volodymyr – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Automation of Ship Power Plants of the National University “Odesa Maritime Academy”.

Hvozdeva Iryna – Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Electrical Equipment and Ship Automation of the National University “Odesa Maritime Academy”.