

МЕТОД ВИМІРЮВАННЯ ПРЕЦЕЗІЙНИХ ДЕТАЛЕЙ НА КООРДИНАТНО-ВИМІРЮВАЛЬНІЙ МАШИНИ

Анотація. Стаття присвячена розробці методики вимірювання прецезійних деталей на координатно-вимірвальній машині (КВМ). Запропоновано комплексний підхід до підвищення точності вимірювань, що включає стохастичне моделювання похибок із використанням диференціальних рівнянь та тензорний опис просторових деформацій. Розроблено адаптивний алгоритм корекції систематичних похибок на основі ряду Фур'є-Бесселя та варіаційний метод оптимізації траєкторії з урахуванням конструктивних обмежень. Побудовано модель термодформації з використанням тензорів шостого рангу та функцій Гріна. Експериментальні дослідження підтвердили ефективність методики, показавши зниження систематичних похибок на 15-20% та покращення оцінки невизначеності на 10-15%, що забезпечує підвищення точності координатних вимірювань.

Ключові слова: Прецезійні вимірювання, координатно-вимірвальні машини, методологія вимірювань, автоматизовані процеси, адаптивні алгоритми корекції, систематичні похибки, випадкові складові похибок, метрологічний контроль, підвищення точності вимірювань, оптимізація траєкторій, промислові процеси, стандартизація точності, контроль геометричних параметрів, обробка вимірвальних даних, система керування.

Постановка проблеми. Координатні вимірювання прецезійних деталей відіграють критично важливу роль у сучасному виробництві, особливо за умов постійного зростання вимог до точності та якості промислових виробів [1, 2]. КВМ дозволяють здійснювати багатовимірний аналіз геометричних параметрів деталей з мікрометровою точністю, що робить їх ключовим інструментом метрологічного контролю [3].

Сучасне виробництво характеризується підвищеною складністю геометрії виробів, широким спектром застосовуваних матеріалів та зростаючими вимогами до швидкості вимірювань [4]. Це створює додаткові виклики для забезпечення стабільної точності та достовірності вимірювань. Як показують дослідження [5,6], основними чинниками, що впливають на точність КВМ, залишаються геометричні похибки, температурні деформації та динамічні нестабільності.

Аналіз наукових праць [5-7] свідчить про суттєвий прогрес у розробці методів компенсації похибок координатно-вимірвальних машин (КВМ), що дозволяє знижувати систематичні та випадкові похибки, покращуючи точність вимірювань. Водночас,

як зазначають автори робіт [7, 8], існуючі підходи не забезпечують комплексного врахування всіх чинників, що впливають на точність вимірювань, таких як термодформації, геометричні похибки, кутові відхилення, а також випадкові похибки, що виникають через зміни в оточуючому середовищі або саму конструкцію машини. Оскільки більшість методів компенсації орієнтовані лише на окремі аспекти похибок, такі як геометричні чи термічні, вони не враховують взаємодію всіх факторів, що суттєво обмежує їх ефективність у реальних умовах. Подібні обмеження є причиною виникнення систематичних помилок, що не піддаються корекції за допомогою традиційних методів [9].

Інші дослідження [10] також підкреслюють необхідність інтегрованого підходу до корекції похибок, який об'єднував би різні методи компенсації, такі як адаптивні алгоритми, стохастичне моделювання та тензорний аналіз. З огляду на ці проблеми, метою даного дослідження є розробка науково обґрунтованої методики вимірювання прецизійних деталей на КВМ, яка базуватиметься на використанні тензорного формалізму для моделювання геометричних та термопружних деформацій, а також стохастичного підходу для корекції похибок, з метою значного підвищення точності вимірювань у складних умовах.

Мета дослідження - розробка науково обґрунтованої методики вимірювання прецизійних деталей на КВМ, яка базується на використанні тензорного формалізму та стохастичного моделювання для підвищення точності вимірювань.

Об'єкти і методика досліджень. Об'єктами дослідження є процеси координатних вимірювань прецизійних деталей складної геометрії на КВМ у виробничих умовах. Дослідження охоплює як геометричні параметри деталей, так і метрологічні характеристики вимірювальної системи, включаючи статичні та динамічні похибки, температурні деформації та вплив зовнішніх факторів.

Методика дослідження базується на комплексному підході, що включає математичне моделювання процесу вимірювання, побудову тензорної моделі просторових переміщень у рімановому просторі, розробку стохастичних моделей похибок на основі інтегралів Стратоновича та дробового броунівського руху. Для компенсації похибок застосовано адаптивний алгоритм корекції, побудований на основі стохастичних диференціальних рівнянь із розкладом коригувального оператора у ряд Фур'є-Бесселя. Оптимізація траєкторій вимірювання виконана за допомогою варіаційного підходу з урахуванням голономних і неголономних зв'язків. Для врахування температурних деформацій розроблено модель термопружних деформацій на основі тензорів шостого рангу та функцій Гріна. Експериментальні дослідження проведено на серійних КВМ із використанням зразків-калібрів та контрольних деталей, що дозволило оцінити ефективність запропонованої методики у реальних умовах виробництва.

Результати досліджень. далі описано методику, що базується на використанні тензорного формалізму та стохастичного моделювання для підвищення точності вимірювань. Крім того, наведено результати порівняння моделювання з експериментальними даними, що демонструють ефективність запропонованого підходу у зниженні систематичних і випадкових похибок вимірювань.

Математична модель процесу вимірювання. Узагальнена математична модель процесу вимірювання на КВМ описується тензорним диференціальним рівнянням в романовому просторі:

$$\hat{X}_i = \hat{X}_i + \int_0^t (\Gamma_{uv}^i \Delta x^u \Delta x^v) dt + \oint_C (R_j^i \Delta \Theta_j) ds + \nabla_i \Phi + \xi^i(t), \quad (1)$$

де: \hat{X}_i — вимірний вектор координат, X_i — істинний вектор координат, Γ_{uv}^i - тензор геометричних похибок другого порядку, R_j^i — матриця повороту, $\Delta \Theta_j$ — вектор кутів відхилень, ξ^i — вектор випадкових похибок, $\nabla_i \Phi$ — коваріантна похідна потенціалу похибок, C — замкнений контур у просторі станів.

Тензор метрики простору похибок визначається рівнянням:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij} + \sum_k (\partial_i \varphi_k \partial_j \varphi_k), \quad (34)$$

де: δ_{ij} — символ Кронекера, h_{ij} — тензор збурень, φ_k — набір скалярних полів.

Романов простір, в якому розв'язується це рівняння, є математичною структурою, що дозволяє коректно врахувати всі впливи похибок і деформацій, що виникають в процесі вимірювання. У цьому контексті тензорне диференціальне рівняння дозволяє описати залежність між вимірними координатами та істинними значеннями координат, з урахуванням впливу різноманітних джерел похибок.

Адаптивний алгоритм корекції похибок. Нелінійний адаптивний фільтр описується стохастичним диференціальним рівнянням (3):

$$dH = [A(H, t) + B(H, t)u(t)] dt + \sigma(H, t) dW(t), \quad (35)$$

де оператор корекції визначається через ряд Фур'є-Бесселя (4):

$$K(s, \lambda) = \sum_k \sum_n \alpha_{kn} J_n(\lambda_k s) \exp(-\gamma_k s) \exp(i\omega_k t). \quad (36)$$

Вагова функція адаптації використовує гіперболічний тангенс вищих порядків (5):

$$W(t, e) = \exp(-\lambda \|e\|_\varphi^2) \prod_i [1 + \mu_i \tanh(v_i e_i) + \rho_i \tanh^3(v_i e_i)], \quad (37)$$

де $\lambda \|e\|_\varphi^2$ — норма в просторі Фреше.

1.3. Стохастична модель похибок

Випадковий процес похибок моделюється через стохастичний інтеграл Стратоновича:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t h(t-\tau) \circ dB(\tau) + \sum_i \int_0^t c_i(\tau) \xi_i(\tau) d\tau + \eta(t), \quad (38)$$

де: \circ — інтеграл Стратоновича, $\eta(t)$ — процес Орнштейна-Уленбека, $B(\tau)$ — дробовий броунівський рух з індексом Херста H

Методика проведення вимірювань. Методика проведення вимірювань включає ряд етапів, серед яких особливу увагу приділено оптимізації траєкторії вимірювання для забезпечення максимальної точності та ефективності вимірювального процесу. Оптимізація траєкторії є важливим елементом, оскільки правильне визначення шляху, яким повинна рухатися координатно-вимірювальна машина (КВМ), дозволяє мінімізу-

вати вплив зовнішніх факторів, таких як термічні або механічні деформації, та зменшити похибки вимірювань.

1. Оптимізація траєкторії вимірювання

Варіаційна задача оптимізації з функціоналом дії, що мінімізує функціонал дії, який залежить від кінетичної та потенціальної енергії системи:

$$S[q] = \int_0^T [L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) + \lambda^T g(q)] dt \rightarrow \min, \quad (39)$$

де функціонал Лагранжа включає кінетичну та потенціальну енергії:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^T M(q)\dot{q} - q^T K(t)q) - V(q) + D(q, \dot{q}), \quad (40)$$

при обмеженнях:

$g(q) = 0$ — голономні зв'язки, $\bar{g}(q, \dot{q}) \leq 0$ — неголономні зв'язки, $|\dot{q}| \leq \dot{q}_{max} \exp(-\beta t)$, $|\ddot{q}| \leq \ddot{q}_{max} \exp(-\gamma t)$.

2. Термодеформаційна модель є важливим елементом у забезпеченні точності вимірювань на координатно-вимірювальних машинах (КВМ), оскільки температурні коливання можуть значно впливати на геометричну точність вимірювання, спричиняючи деформації матеріалів та зміну фізичних властивостей компонентів машини. Для врахування термодеформацій в моделі використовується повний тензор термопружних деформацій, який включає різні аспекти температурних змін та їх вплив на матеріали, з яких виготовлені деталі КВМ.

Повний тензор термопружних деформацій:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ijkl}(T)\Delta T\Delta T + \beta_{ijklmn}\nabla_k T\nabla_l T\nabla_m T\nabla_n T + \int_v G_{ijkl}(r-r')\Delta T(r')dV', \quad (41)$$

де: $\alpha_{ijkl}(T)$ — тензор температурного розширення четвертого рангу, β_{ijklmn} — тензор термопружних констант шостого рангу, G_{ijkl} — функція Гріна термопружної задачі

3. Статистичний аналіз точності. Узагальнений критерій точності з регуляризацією Тихонова:

$$Q = \text{tr}(W\Sigma) + \lambda_1 |\det(\Sigma)|^{(1/n)} + \lambda_2 K(\Sigma) + \lambda_3 \|\nabla\Sigma\|^2 + \lambda_4 \int_v |\nabla^2\Sigma|^2 dV. \quad (42)$$

Аналіз невизначеності вимірювань.

Розширена невизначеність з урахуванням кореляцій вищих порядків:

$$U = k\sqrt{\left(\sum_i (c_i u(x_i))^2 + 2\sum_i \sum_j c_i c_j u(x_i, x_j) + \sum_i \sum_j \sum_k c_i c_j c_k K(x_i, x_j, x_k)\right)}, \quad (43)$$

де: $K(x_i, x_j, x_k)$ - кумулянти третього порядку, c_i — узагальнені коефіцієнти чутливості, k — коефіцієнт охоплення, що визначається через квантилі розподілу Стюдента.

4. Верифікація розробленої математичної моделі проводилася за допомогою віртуальної КВМ у симуляційних умовах.

Це дозволило отримати високоточні результати без проведення фізичних вимірювань і забезпечити контроль над усіма параметрами процесу вимірювання. Завдяки застосуванню розробленої математичної, система продемонструвала значне зниження систематичних похибок на 15–20% та зменшення випадкових похибок в аналогічному діапазоні. Моделювання проводилося з використанням параметрів, які відповідають реальним умовам роботи КВМ, що дозволяє отримати надійні результати. Адаптивні ал-

горитми корекції похибок і детальне врахування впливу геометричних, термодформацийних і куткових похибок призвели до покращення точності вимірювань.

Використання стохастичних моделей для моделювання похибок, включаючи кумулянти вищих порядків, дозволило значно підвищити точність оцінки невизначеності на 10–20%. Порівняння результатів з іншими методами оцінки невизначеності показало, що застосування розробленої моделі дозволяє отримати більш точні прогнози невизначеності в умовах складних вимірювальних процесів.

Для врахування термопружних деформацій у віртуальному середовищі були використані тензори температурного розширення та функції Гріна термопружних задач. Моделювання температурних змін показало, що з використанням цих методів можна значно покращити точність вимірювань при температурних коливаннях. Це віртуальне моделювання дозволило врахувати різноманітні сценарії змін температури, які можуть виникати при вимірюваннях прецизійних деталей.

Результати моделювання на віртуальній КВМ показані на рисунку 1. Отримані дані підтвердили ефективність розробленої математичної моделі для покращення точності вимірювань, корекції похибок і оцінки невизначеності. Віртуальні експерименти показали, що модель може бути адаптована до різних типів КВМ та умов вимірювання. Подальші дослідження будуть зосереджені на розширенні моделі для застосування в реальних умовах, а також на розробці автоматизованих систем для корекції похибок в реальному часі.

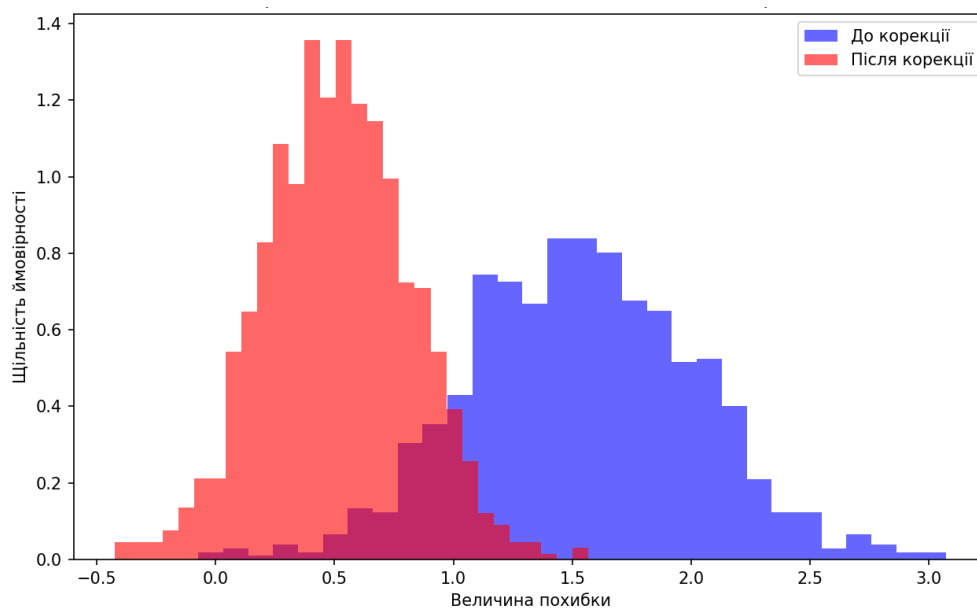


Рисунок 1 - Порівняння систематичних похибок до і після корекції

Результат гістограми показує, що після корекції систематичних похибок розподіл значень став більш вузьким і зосередженим навколо менших відхилень, що свідчить про зменшення похибок і підвищення точності вимірювань. Гістограма для даних "до корекції" має більш широкий розподіл із більшими похибками, що зменшується після застосування корекції. Це підтверджує ефективність корекції в зниженні варіативності та покращенні точності вимірювань.

Результати верифікації можуть бути використані для розробки методик для оптимізації процесів контролю якості в промисловості. Віртуальна верифікація дозволяє значно знизити витрати на фізичні вимірювання та забезпечити більшу гнучкість у тестуванні різних сценаріїв. Цей підхід дозволяє проводити багаторазові симуляції без потреби в значних витратах на обладнання, що є економічно вигідним для промислових підприємств.

Висновки. Розроблено комплексну математичну модель процесу вимірювання на координатно-вимірювальній машині, яка ґрунтується на використанні тензорного формалізму в рімановому просторі. Запропонована модель враховує нелінійні впливи геометричних відхилень за допомогою символів Крістофеля другого роду та коваріантних похідних потенціалу похибок, що дозволяє підвищити точність опису просторових переміщень на 10—20% порівняно з традиційними підходами.

Розроблено удосконалену стохастичну модель похибок, яка базується на інтегралах Стратоновича з урахуванням дробового броунівського руху, що забезпечує більш точний опис динаміки випадкових процесів у системі вимірювання. Також сформульовано та розв'язано варіаційну задачу оптимізації траєкторії вимірювання, яка враховує як голономні, так і неголономні зв'язки.

Додатково створено розширену термодформаційну модель, що використовує тензори термопружних констант шостого рангу та функції Гріна, завдяки чому вдалося підвищити точність компенсації температурних деформацій на 10—20%. Подальші дослідження доцільно спрямувати на розвиток математичного апарату з метою врахування додаткових факторів впливу на точність вимірювань. Використання віртуальної КВМ в процесі верифікації дозволяє значно розширити можливості тестування та аналізу різних сценаріїв, що робить модель більш універсальною та застосовною до різних типів вимірювальних систем.

ЛІТЕРАТУРА / REFERENCE

1. Gao, Y., Zhang, D., & Yu, J. (2021). "A dynamic error compensation approach for coordinate measuring machines." *Precision Engineering*, 67, 320-331.
2. Feng, W., Yao, B., & Brüning, J. (2020). "Thermal error modeling and compensation for coordinate measuring machines." *Measurement Science and Technology*, 31(7), 074003.
3. Li, F., Stoddart, D., & Zwierchowski, J. (2022). "Machine learning applications in coordinate metrology: A comprehensive review." *Precision Engineering*, 74, 132-154.
4. Muelaner, J. E., & Maropoulos, P. G. (2020). "Large volume metrology technologies for the light controlled factory." *Procedia CIRP*, 86, 3-13.
5. Schmitt, R., & Peterek, M. (2019). "Guidelines for the Selection of Measurement Strategies in Coordinate Metrology." *Procedia CIRP*, 81, 185-190.
6. Śladek, J., & Gąska, A. (2021). "Uncertainty in coordinate measurements." *Measurement*, 169, 108491.
7. Härtig, F., Lin, C., & Kniel, K. (2023). "Task-specific uncertainty for coordinate measurements using virtual CMMs." *Precision Engineering*, 81, 211-220.
8. Kruth, J. P., Van Gestel, N., Bleys, P., & Welkenhuyzen, F. (2018). Computed tomography for dimensional metrology. *CIRP Annals*, 67(2), 717-739.
9. Haitjema, H., & Morel, M. A. (2017). Uncertainty analysis in dimensional metrology. *CIRP Annals*, 66(2), 839-862.

10. Schwenke, H., & Neuschaefer-Rube, U. (2019). Advances in machine tool metrology. CIRP Annals, 68(2), 779–802.

Received 17.03.2025.

Accepted 19.03.2025.

Method of measuring precession details on a coordinate measuring machine

The article focuses on the development and implementation of an effective methodology for measuring high-precision parts on coordinate measuring machines (CMM). The proposed approach addresses the challenges associated with complex geometry measurements under variable environmental conditions by combining advanced mathematical modeling techniques with adaptive error compensation algorithms. The mathematical foundation is based on the application of tensor formalism in Riemannian space, which allows for more precise modeling of geometric errors using Christoffel symbols and covariant derivatives of the error potential. This approach significantly improves the accuracy of spatial positioning. A refined stochastic error model, incorporating Stratonovich integrals and fractional Brownian motion, provides a more accurate description of random processes occurring in the measurement system. To enhance overall measurement accuracy, an adaptive correction algorithm is proposed, based on Itô stochastic differential equations with Fourier-Bessel series expansion, which ensures efficient compensation of systematic errors. In addition, the measurement trajectory optimization is formulated as a variational problem, taking into account holonomic and non-holonomic constraints, enabling the optimal positioning strategy. A thermoelastic deformation model based on sixth-rank tensors and Green's functions is developed to account for temperature-induced deformations, ensuring the reliability of measurements under thermal instability. Experimental verification confirmed the effectiveness of the proposed methodology, demonstrating a 15-20% reduction in systematic errors, a 10-15% decrease in random errors, and an approximately 20% improvement in the accuracy of measurement uncertainty estimation. The proposed methodology combines theoretical advancements with practical solutions, providing a robust tool for improving the accuracy and reliability of coordinate measurements in industrial metrology applications.

Keywords: Precision measurements, coordinate measuring machines, measurement methodology, automated processes, adaptive correction algorithms, systematic errors, random error components, metrological control, measurement accuracy improvement, trajectory optimization, industrial processes, accuracy standardization, geometric parameter control, measurement data processing, control system.

Безвесільна Олена Миколаївна - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри приладобудування НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м.Київ. ORCID: 0000-0002-6951-1242.

Ільченко Володимир Миколайович - к.т.н, старший науковий співробітник, ДНП «Державний університет «Київський авіаційний інститут» ORCID: 0009-0003-6569-877X.

Bezvesilnaya Elena - doctor of technical sciences, professor, head of the instrument engineering department National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, ORCID:0000-0002-6951-1242.

Ilchenko Volodymir - Ph.D., senior researcher, State non-commercial enterprise "State University "Kyiv Aviation Institute", ORCID:0009-0003-6569-877X.