

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА АЛГОРИТМ КОМПЕНСАЦІЇ  
СИСТЕМАТИЧНИХ ПОХИБОК  
КООРДИНАТНО-ВИМІРЮВАЛЬНІЙ МАШИНИ**

*Анотація* Сучасні координатно-вимірювальні машини (КВМ) забезпечують високу точність вимірювань, однак на практиці їх метрологічні характеристики погіршуються через вплив систематичних похибок, спричинених геометричними, температурними та кінематичними факторами. Актуальність дослідження обумовлена потребою підвищення точності координатних вимірювань шляхом створення математичних моделей компенсації систематичних похибок. У статті поставлено проблему формування комплексної моделі систематичних похибок КВМ та розробки алгоритму їхньої автоматизованої компенсації. Метою дослідження є розроблення математичної моделі систематичних похибок та побудова алгоритму їхньої корекції на основі багатofакторного аналізу. Для досягнення мети застосовано методи математичного моделювання, теорії похибок та чисельної оптимізації. У результаті створено алгоритм автоматизованої компенсації, що дозволяє значно зменшити похибки при вимірюванні складних поверхонь. Запропоновані підходи можуть бути інтегровані у програмне забезпечення КВМ.

*Ключові слова:* координатно-вимірювальна машина, систематичні похибки, математична модель, компенсація похибок, геометричні похибки, температурні впливи, алгоритм корекції, багатofакторний аналіз, точність вимірювань, метрологічне забезпечення, система керування.

Забезпечення високої точності вимірювань на КВМ є одним із ключових завдань сучасної метрології та виробничого контролю. Систематичні похибки, що виникають у процесі роботи КВМ, можуть суттєво спотворювати результати вимірювань, особливо при контролі складних та високоточних деталей. Їхні джерела — це поєднання геометричних неточностей, температурних деформацій, похибок приводів та сенсорів, а також міжосьових взаємодій. Ефективна компенсація таких похибок потребує комплексного підходу, що базується на математичному моделюванні всього комплексу систематичних відхилень та створенні алгоритмів реального часу для їх корекції.

**Постановка проблеми.** Високоточні КВМ є незамінними при контролі геометричних параметрів складних деталей у машинобудуванні, авіаційній та космічній галузях. Однак на точність вимірювань впливають численні систематичні похибки, пов'язані з

геометричними неточностями конструкції, температурною деформацією елементів, нестабільністю приводів та сенсорів.

У науковій літературі значна увага приділяється питанням підвищення точності КВМ. Зокрема, у роботах [1, 2] досліджено вплив температурних змін на просторову геометрію машини та запропоновано температурну компенсацію. Роботи [3, 4] присвячені математичному моделюванню геометричних похибок, які виникають через неточність виготовлення направляючих та приводів. Методи статистичної обробки даних для ідентифікації систематичних похибок розглянуто у працях [5, 6]. Проте, недостатньо висвітлено питання побудови єдиної математичної моделі, яка б враховувала усі основні джерела систематичних похибок та забезпечувала їхню оперативну компенсацію в режимі реального часу. Існуючі методи компенсації мають обмежену ефективність через складність просторових деформацій та взаємодію різних джерел похибок [7,8]. Це обумовлює необхідність створення комплексної математичної моделі систематичних похибок КВМ та розробки алгоритму їхньої компенсації для забезпечення високої точності вимірювань.

**Мета дослідження.** Метою дослідження є створення математичної моделі систематичних похибок координатно-вимірювальних машин та розроблення алгоритму їх автоматизованої компенсації для підвищення точності координатних вимірювань.

**Формування математичної моделі систематичних похибок.** Систематичні похибки КВМ формуються під впливом різних факторів, які можна поділити на геометричні похибки, спричинені неточностями складання, виробничими дефектами направляючих та базових елементів. Температурні деформації – зміни геометрії під впливом температурного поля. Кінематичні похибки, пов'язані з нерівномірністю переміщення приводів, люфтами та гістерезисом. Комплексна систематична похибка для вимірюваних координат  $x, y, z$  може бути представлена у вигляді:

$$\delta_{total}(x, y, z, T) = \delta_{geom}(x, y, z) + \delta_{temp}(x, y, z, T) + \delta_{kin}(x, y, z), \quad (1)$$

де:  $\delta_{geom}(x, y, z)$  — геометричні похибки,  $\delta_{temp}(x, y, z, T)$  — температурні деформації, функція температури  $T$ ,  $\delta_{kin}(x, y, z)$  — кінематичні похибки.

Геометричні похибки для кожної осі можна подати у вигляді:

$$\delta_{geom}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \delta_x(x, y, z) \\ \delta_y(x, y, z) \\ \delta_z(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Для кожної осі модель включає складові: відхилення прямолінійності, кутові похибки, перехресні впливи між осями (абатмент). Наприклад, для осі  $X$  з урахуванням обертів навколо  $Y$  та  $Z$ :

$$\begin{aligned} \delta_x(x, y, z) &= e_x(x) + y \cdot \theta_z(x) - z \cdot \theta_y(x) \\ \delta_y(x, y, z) &= e_y(x) + y \cdot \theta_y(x) \quad , \\ \delta_z(x, y, z) &= e_z(x) + z \cdot \theta_x(x) \end{aligned} \quad (3)$$

де  $e_x(x), e_y(x), e_z(x)$  — лінійні похибки положення,  $\theta_x(x), \theta_y(x), \theta_z(x)$ , — кутові похибки.

### Температурні деформації

Температурна похибка залежить від розподілу температури та температурних градієнтів у конструкції машини. Для кожної осі:

$$\delta_{temp}(x, y, z, T) = \alpha \cdot \int_L \nabla T(x', y', z') dL, \quad (4)$$

де  $\alpha$  — коефіцієнт температурного розширення матеріалу,  $\nabla T$  — температурний градієнт уздовж направляючих.

У дискретному вигляді:

$$\delta_{temp}(x, y, z, T) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot \Delta T_i \cdot l_i, \quad (5)$$

де:  $N$  — кількість відрізків направляючої,  $\Delta T_i$  — локальне температурне відхилення на  $i$ -й ділянці,  $l_i$  — довжина ділянки.

Також можна враховувати нелінійні температурні впливи через розширений поліном:

$$\delta_{temp}(x, y, z, T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_n T^n. \quad (6)$$

**Кінематичні похибки.** Виникають через люфти, гістрезис та неідеальні профілі направляючих. Ці фактори є основними джерелами систематичних похибок, які проявляються під час переміщення рухомих вузлів КВМ. Люфти в напрямних викликають нерівномірність переміщення, особливо при зміні напрямку руху, що призводить до зсувів вимірних координат відносно їхнього реального положення. Гістрезис обумовлений як внутрішніми пружними деформаціями у вузлах машини, так і наявністю залишкових напружень у матеріалі конструкційних елементів, що спричиняє залежність поточного положення від попередньої траєкторії руху. Для кожної координати вони можуть бути описані через функції положення та швидкості:

$$\delta_{kin}(x, y, z) = k_x \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) + k_y \cdot \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) + k_z \cdot \sin\left(\frac{2\pi z}{L_z}\right), \quad (7)$$

де:  $k_x, k_y, k_z$  — амплітуди кінематичних похибок,  $L_x, L_y, L_z$  — довжини ходу по кожній осі. Також можливе врахування гістрезису при зміні напрямку руху:

$$\delta_{hyst}(x, v_x) = H_x \cdot \text{sign}(v_x), \quad (8)$$

де:  $H_x$  — величина гістрезису для осі,  $v_x$  — швидкість руху по осі  $X$ .

Врахування цих факторів у математичній моделі дозволяє суттєво підвищити точність координатних вимірювань шляхом компенсації накопичених систематичних відхилень у реальному часі, зокрема при проведенні високошвидкісних скануючих вимірювань або при контролі деталей складної просторової форми.

**Інтегрована модель.** Загальна модель систематичних похибок з урахуванням всіх чинників набуває вигляду:

$$\delta_{total}(x, y, z, T, v_x, v_y, v_z) = \begin{bmatrix} \delta_x(x, y, z, T, v_x) \\ \delta_y(x, y, z, T, v_y) \\ \delta_z(x, y, z, T, v_z) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де кожна складова містить:

$$\delta_x(x, y, z, T, v_x) = \delta_{geom,x}(x, y, z) + \delta_{temp,x}(x, y, z, T) + \delta_{kin,x}(x, y, z) + \delta_{hyst}(x, v_x). \quad (10)$$

Аналогічно для  $y$  та  $z$ :

$$\begin{aligned} \delta_y(x, y, z, T, v_y) &= \delta_{geom,y}(x, y, z) + \delta_{temp,y}(x, y, z, T) + \delta_{kin,y}(x, y, z) + \delta_{hyst}(y, v_y) \\ \delta_z(x, y, z, T, v_z) &= \delta_{geom,z}(x, y, z) + \delta_{temp,z}(x, y, z, T) + \delta_{kin,z}(x, y, z) + \delta_{hyst}(z, v_z) \end{aligned} \quad (11)$$

**Врахування міжосьових зв'язків.** Оскільки у багатьох КВМ направляючі не є строго ортогональними, модель доповнюється міжосьовими зсувами:

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}, \quad (12)$$

де:  $\mathbf{R}$  — матриця міжосьових впливів (неортогональність осей):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & 1 & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

**Узагальнення.** Повна формула для кожної координати враховує:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \delta_x(x, y, z, T, v_x) \\ \tilde{y} &= y + \delta_y(x, y, z, T, v_y) \\ \tilde{z} &= z + \delta_z(x, y, z, T, v_z) \end{aligned} \quad (14)$$

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  — скориговані координати після компенсації.

Узагальнюючи всі вищенаведені фактори та їхній вплив на точність вимірювань, можна сформулювати повну математичну модель для кожної координати, яка враховує геометричні похибки направляючих, температурні деформації, люфти, гістрезис, міжосьові паразитні переміщення та динамічні похибки, що виникають при русі. Таким чином, скориговані координати після компенсації є результатом багатофакторного коригування, яке дозволяє суттєво знизити рівень систематичних похибок і забезпечити високу точність координатних вимірювань навіть у складних умовах експлуатації КВМ. Це створює передумови для підвищення метрологічної надійності вимірювальної системи та забезпечення стабільної якості контролю складних деталей на всіх етапах виробництва.

**Алгоритм компенсації систематичних похибок.** Алгоритм компенсації систематичних похибок КВМ у вигляді блок-схеми показано на рисунку 1.

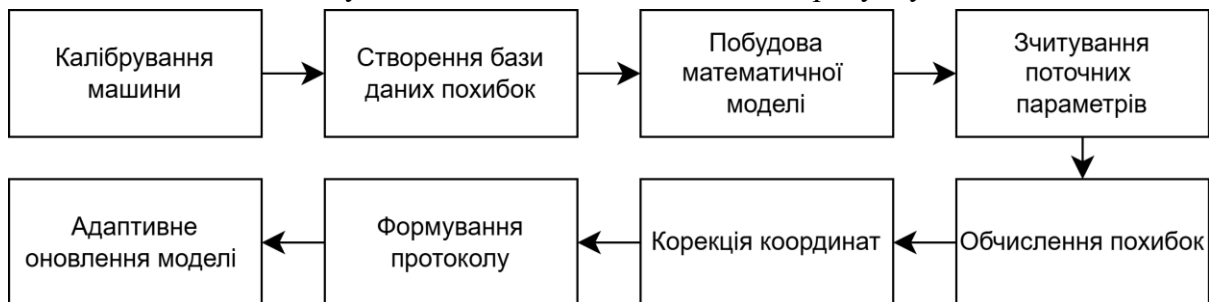


Рисунок 1 - Алгоритм компенсації систематичних похибок

Алгоритм включає такі етапи:

1. Первинне калібрування системи. Виконати повне калібрування КВМ для визначення геометричних похибок напрямних та лінійних переміщень, кутових похибок для кожної осі, визначити міжосьові впливи. Виміряти температурний профіль у робочій зоні машини. Розрахувати температурні градієнти.

2. Формування бази даних систематичних похибок. Провести серію тестових вимірювань для побудови матриці похибок у дискретних точках простору. Створити тривимірну інтерполяційну сітку (таблицю) систематичних похибок:

$$\delta_{ijk} = \delta_{total}(x_i, y_j, z_k), \quad (15)$$

де  $i, j, k$  — індекси координатної сітки.

3. Побудова математичної моделі. Об'єднати окремі моделі похибок у єдину інтегровану модель (1). Реалізувати модель у вигляді функції:

$$\delta = f(x, y, z, T, v) \quad (16)$$

де  $T$  — температура,  $v$  — вектор швидкостей переміщення по осях.

4. Зчитування поточних координат та умов. Під час кожного вимірювання зчитуються: Поточні координати:  $x, y, z$ , поточна температура:  $T$ , швидкості переміщення по кожній осі:  $v_x, v_y, v_z$ .

5. Обчислення систематичної похибки в поточній точці. На основі поточних координат, температури та швидкості обчислюється систематична похибка за формулою:

$$\delta_x = \delta_{geom,x} + \delta_{temp,x} + \delta_{kin,x} + \delta_{hyst}(x, v_x) \quad (17)$$

(Аналогічно для осей  $y$  та  $z$ ).

6. Корекція координат є завершальним етапом процесу компенсації систематичних похибок КВМ, що забезпечує підвищення точності кінцевих результатів вимірювань. На основі побудованої математичної моделі та отриманих даних про поточне положення вузлів машини, температурні умови, швидкість руху, а також врахування попередніх траєкторій переміщення, для кожної координати обчислюється сумарна систематична похибка. Розрахована сукупна похибка додається до координат, отриманих під час вимірювання, в режимі реального часу. У результаті формуються скориговані координати, які максимально наближені до дійсних значень вимірюваних точок.

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \delta x \\ \tilde{y} &= y + \delta y. \\ \tilde{z} &= z + \delta z \end{aligned} \quad (18)$$

Крок 7. Збереження результатів та формування звіту. Запис скоригованих координат у вихідний протокол вимірювань. Додатково може формуватись звіт із інформацією про величину внесених поправок для кожної точки.

Крок 8. Адаптивне уточнення моделі. Після накопичення статистики (серії вимірювань) можлива корекція параметрів моделі на основі порівняння номінальних та скоригованих значень. Використання методів зворотного зв'язку для уточнення залежностей:

$$\delta_{corr}(x, y, z) = \delta_{model}(x, y, z) + \Delta\delta_{adaptive}(x, y, z) \quad (19)$$

Адаптивне уточнення моделі дозволяє підвищити її точність та адекватність шляхом постійного аналізу результатів вимірювань у реальних умовах експлуатації. Порівняння номінальних координат еталонних об'єктів з отриманими скоригованими значеннями дає змогу виявити залишкові систематичні похибки та внести коригування до параметрів математичної моделі.

Висновки. Запропонована математична модель систематичних похибок КВМ дозволяє врахувати основні джерела похибок, зокрема геометричні, температурні та кінематичні. Розроблений алгоритм автоматизованої компенсації забезпечує значне підвищення точності вимірювань, особливо при вимірюванні великогабаритних та складнопрофільних деталей. Отримані результати можуть бути використані при модернізації існуючих КВМ та створенні нових систем вимірювань із підвищеною точністю.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Романенко С. Ю., Костриця С. М., Карлаш Ю. М. Автоматизована система визначення та компенсації похибок координатно-вимірювальних машин. Прилади та методи вимірювань. 2017. Т. 8, № 2. С. 59–66.
2. Ляшенко А. А., Бородин Є. А., Дрогобецький С. А. Метрологічне забезпечення високоточного вимірювання на координатно-вимірювальних машинах. Вимірювальна техніка та метрологія. 2019. № 80. С. 44–52.
3. Белоконь М. В. Компенсація систематичних похибок координатно-вимірювальних машин на основі багатофакторної моделі. Вісник ХНУРЕ. 2020. № 2 (105). С. 24–29.
4. Weckenmann A., Estler T., Peggs G., McMurtry D. Probing systems in dimensional metrology. CIRP Annals. 2004. Vol. 53, No. 2. P. 657–684.
5. Trapet E., Savio E., De Chiffre L. Uncertainty in Coordinate Measuring Machines. CIRP Annals. 1999. Vol. 48, No. 2. P. 517–534.
6. Вороніна Н. О., Шевченко О. П., Куликов І. В. Математичне моделювання похибок координатно-вимірювальних машин. Сучасні технології в машинобудуванні. 2018. № 10. С. 55–62.
7. Кривошей І. О., Головань С. В. Температурні деформації як джерело систематичних похибок координатно-вимірювальних машин. Вимірювальна техніка. 2016. № 3. С. 32–36.
8. Schwenke H., Knapp W., Haitjema H., Weckenmann A., Welzel M., Just A. Geometric error measurement and compensation of machines—An update. CIRP Annals. 2008. Vol. 57, No. 2. P. 660–675.

#### REFERENCE

1. Romanenko, S. Yu., Kostrytsia, S. M., & Karlash, Yu. M. (2017). Automated system for determining and compensating coordinate measuring machine errors. *Instruments and Measurement Methods*, 8(2), 59–66.
2. Lyashenko, A. A., Borodin, Ye. A., & Drogobetskyi, S. A. (2019). Metrological support of high-precision measurements on coordinate measuring machines. *Measuring Equipment and Metrology*, (80), 44–52.

3. Belokon, M. V. (2020). Compensation of systematic errors of coordinate measuring machines based on a multifactor model. *Bulletin of Kharkiv National University of Radio Electronics*, 2(105), 24–29.
4. Weckenmann, A., Estler, T., Peggs, G., & McMurtry, D. (2004). Probing systems in dimensional metrology. *CIRP Annals*, 53(2), 657–684.
5. Trapet, E., Savio, E., & De Chiffre, L. (1999). Uncertainty in coordinate measuring machines. *CIRP Annals*, 48(2), 517–534.
6. Voronina, N. O., Shevchenko, O. P., & Kulikov, I. V. (2018). Mathematical modeling of coordinate measuring machine errors. *Modern Technologies in Mechanical Engineering*, (10), 55–62.
7. Kryvoshei, I. O., & Holovan, S. V. (2016). Thermal deformations as a source of systematic errors of coordinate measuring machines. *Measuring Equipment*, (3), 32–36.
8. Schwenke, H., Knapp, W., Haitjema, H., Weckenmann, A., Welzel, M., & Just, A. (2008). Geometric error measurement and compensation of machines—An update. *CIRP Annals*, 57(2), 660–675. <https://doi.org/10.1016/j.cirp.2008.09.008>

Received 14.03.2025.  
Accepted 19.03.2025.

### ***Mathematical model and algorithm for compensation of systematic errors of coordinate measuring machines***

*Modern coordinate measuring machines (CMMs) are widely used for high-precision measurement of geometric parameters of parts across various industries. However, achieving maximum measurement accuracy is complicated by the presence of systematic errors caused by geometric guideway imperfections, thermal deformations, kinematic inaccuracies, and inter-axis influences. Ignoring these factors leads to significant distortion of the obtained coordinate data and, consequently, reduces the reliability of inspection results. The relevance of this research is driven by the need to improve measurement accuracy through the development of effective methods for compensating systematic errors at the stage of processing measurement data. The article presents a generalized mathematical model of systematic CMM errors, which takes into account spatial geometric errors, thermal deformations, kinematic deviations, hysteresis effects, and inter-axis interactions. Mathematical dependencies are proposed for each type of error, describing their spatial variation within the working volume and their dependence on temperature and portal or probe movement speeds. The developed integrated model allows real-time correction of measured point coordinates, considering the current thermal state of the CMM and its dynamic operating conditions. An algorithm for systematic error compensation is proposed, including stages of initial calibration, creation of a systematic error database in the form of a spatial grid, real-time calculation of corrections during measurements, and adaptive refinement of the mathematical model based on accumulated measurement statistics. Implementing this algorithm in CMM software can significantly reduce the influence of systematic errors on measurement results, improve the reliability of geometric parameter inspection, and ensure compliance with modern requirements for the metrological support of production processes. The obtained results can be applied in the development of control*

*systems for modern CMMs, as well as in the creation of automated monitoring and accuracy analysis systems for measuring machines during operation.*

*Keywords: coordinate measuring machine, systematic errors, mathematical model, error compensation, geometric errors, thermal influences, correction algorithm, multifactor analysis, measurement accuracy, metrological support, control system*

**Коломієць Леонід Володимирович** - професор, доктор технічних наук, професор кафедри метрології, якості та сертифікації, Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, м. Одеса, ORCID:0000-0003-2341-3345.

**Kolomiets Leonid Professor** - Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Metrology, Quality and Certification Odessa State Academy of Technical Regulation and Quality [This link is disabled.](#) ORCID:0000-0003-2341-3345.