

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ ДЛЯ ВИПАДКУ ОБМЕЖЕНЬ НА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ

Анотація. У статті розглядається узагальнення однієї із задач, що пов'язана з оптимальною організацією виробничого процесу. Це узагальнення стосується розподілу ресурсів для виконання фіксованої множини завдань за наявності спеціальних умов їх використання. Введено поняття множини фіксованих робіт, визначено умови їх узгодженості, розв'язності та балансу завантаження. Досліджено вплив таких обмежень на довжину оптимального упорядкування. Проведено аналіз аномальних випадків, коли зменшення часу виконання завдань, збільшення кількості виконавців або послаблення технологічних обмежень призводить до погіршення розв'язку.

Ключові слова: дискретна оптимізація, комбінаторна оптимізація, теорія розкладів, виробничий процес, граф, розподіл ресурсів, оптимальне упорядкування, аномалії.

Постановка проблеми. Розширення виробництва нерідко пов'язане з необхідністю закупівлі нового обладнання та впровадження нових технологічних процесів. У таких умовах виникають ситуації, коли певні роботи можуть виконуватись лише конкретними виконавцями або, навпаки, нові завдання неможливо реалізувати на старому обладнанні. Це піднімає важливу проблему – як правильно розподілити завдання між виконавцями з урахуванням обмежень, щоб забезпечити ефективне використання ресурсів та мінімізувати час виконання.

Одним із підходів до вирішення цієї проблеми є введення множин фіксованих робіт, які можуть виконуватись лише певними виконавцями. У цій статті розглядаються математичні аспекти цієї проблеми, сформульовані необхідні умови її розв'язності та доведені основні твердження щодо впливу таких обмежень на довжину оптимального упорядкування.

При дослідженні класичних постановок задач теорії розкладів, які відносяться до цього класу, Грехем [1] звернув увагу, що при деякому спрощенні в постановках задач, які б дозволили отримати кращі розв'язки у порівнянні з початковими постановками, отримуємо погіршення. Ці випадки він назвав аномальними.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У класичних постановках задач упорядкування вважається, що завдання може бути виконано одним виконавцем за заданий час та без переривань. Однак у реальних виробничих процесах нерідко виникають додаткові обмеження, які можуть бути пов'язані з кваліфікацією виконавців, технічними можливостями обладнання, пріоритетністю виконання робіт тощо.

Так, у роботі [2] розглядається важливість паралельного виконання завдань в прискоренні розрахунків електромагнітних феноменів, які включають моделювання 3D-систем з розподіленими параметрами. Це дослідження демонструє, що розподіл обчислювальних ресурсів між кількома задачами дозволяє суттєво зменшити час виконання, що є важливим аспектом і для оптимізації виробничих процесів.

У [3] розглядаються різні алгоритми кластеризації, спрямовані на зменшення енергоспоживання в БСМ. Хоча це дослідження орієнтоване на телекомунікаційні системи, використані в ньому методи оптимізації можуть бути адаптовані до задач розподілу виробничих завдань, особливо у випадках, коли необхідно мінімізувати використання ресурсів.

У статті [4] представлено огляд методів виявлення аномалій у мережевому трафіку. Хоча основна увага приділена кібербезпеці, автори зазначають, що ефективність аналізу залежить від правильного розподілу обчислювальних потужностей між різними системами, що має паралелі із проблемою розподілу завдань у виробничих процесах.

Аналіз відомих результатів показує, що в багатьох прикладних задачах значна увага приділяється додатковим обмеженням, зокрема обмеженій доступності ресурсів, необхідності дотримання технологічних вимог, мінімізації простоїв обладнання та впливу людського фактору на планування виробничих процесів. Одному із узагальнень, а саме фіксації деяких робіт за деякими виконавцями, присвячена дана робота.

Мета дослідження. Метою даного дослідження є аналіз впливу додаткових умов, пов'язаних з введенням множини фіксованих робіт на оптимальну організацію виробничих процесів. Завданнями дослідження є:

- 1) формулювання умов узгодженості фіксації, розв'язності задачі та балансу завантаження;
- 2) оцінка впливу цих умов на оптимальність розв'язків;
- 3) дослідження можливих аномальних випадків.

Викладення основного матеріалу дослідження. Нехай задано скінчену множину робіт V та кількість виконавців h [5]. Введемо означення множини фіксованих робіт.

Означення. Множина фіксованих робіт $V_r \subseteq V$ визначає ті роботи, які можуть виконуватися лише r -им виконавцем. Це означає, що роботи $i \in V_r$ можуть виконуватися виключно r -им виконавцем, але сам виконавець може виконувати й інші роботи, що не входять до V_r .

Сформулюємо умови можливого уникнення аномалій у задачах із фіксованими роботами.

1. Умова узгодженості фіксації. Для будь-якого виконавця множина його фіксованих робіт повинна бути сумісною з технологічними обмеженнями графа $G(V, U)$. Якщо $i_m \in V$, $i_k \in V_r$, і між ними існує дуга $(i_m, i_k) \in U$, то робота i_m повинна виконуватись або тим самим виконавцем, або іншим виконавцем до початку роботи i_k .

2. Умова розв'язності задачі. Введення множини фіксованих робіт V_r не повинно робити задачу нерозв'язною. Тобто, навіть якщо частина робіт закріплена за конкретними виконавцями, повинне існувати допустиме упорядкування виконання всіх робіт з урахуванням технологічних обмежень і ресурсів.

3. Умова балансу завантаження. Фіксація робіт за виконавцем не повинна призводити до непропорційного завантаження виконавця. Тобто, має виконуватись нерівність:

$$|T_r - \frac{T_{\text{заг}}}{r}| \leq C,$$

де C – задана константа, T_r – загальний час роботи виконавця r , $T_{\text{заг}}$ – загальний час виконання всіх робіт.

Твердження 1. Оптимальне упорядкування робіт при умові заданих додаткових обмежень, що фіксують за виконавцями обов'язкові певні роботи, існує, якщо виконуються умови узгодженості фіксації, розв'язності задачі та балансу завантаження.

Доведення. Припустимо, що для множини фіксованих робіт V_r не існує допустимого упорядкування. Це означає, що хоча б одна з умов узгодженості фіксації, розв'язності або балансу завантаження порушується. Якщо порушується узгодженість, то існує залежність між роботами, яка робить виконання фіксованих робіт неможливим. Якщо не виконується умова розв'язності, то для деякого виконавця всі допустимі упорядкування призводять до неможливості завершення всіх робіт. Якщо ж порушується баланс завантаження, то один із виконавців отримує надмірне навантаження, що робить розподіл нерівномірним. Таким чином, якщо всі три умови виконуються, оптимальне упорядкування існує.

Твердження 2. Зменшення часу виконання робіт або послаблення технологічних обмежень може збільшити довжину оптимального упорядкування.

Доведення. Розглянемо два випадки:

Якщо час виконання певних робіт зменшується, це може призвести до зміни порядку їх виконання, що може викликати затримки інших робіт та вимагати додаткових обмежень.

Якщо послаблюються технологічні обмеження (наприклад, видаляються певні дуги у графі залежностей), це може змінити оптимальний порядок виконання, що у деяких випадках також може збільшити загальну довжину упорядкування [6,7].

Проілюструємо випадки, пов'язані з виникненням аномалій при умові фіксації робіт за виконавцями на наступному прикладі.

Приклад. Нехай задано орієнтований граф G (рис. 1), $h = 3$, список пріоритетів $L = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$, множина ваг вершин (часу виконання завдань) $T = (4,2,2,2,4,1,1,1,1,6)$. Зафіксуємо роботи j_3 та j_{10} за третім виконавцем: $V_r = (3,10)$.

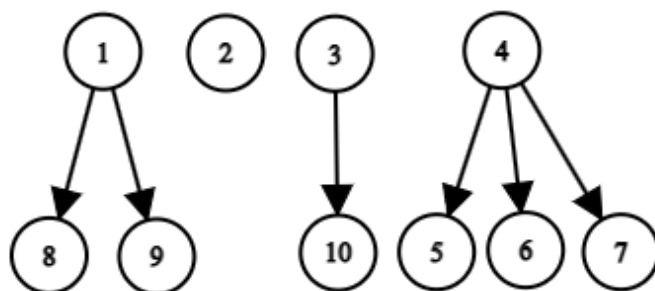


Рисунок 1 – Граф G

Таблиця 1

Оптимальне упорядкування для графа G

1	1	1	1	5	5	5	5
2	2	4	4	6	7	8	9
3	3	10	10	10	10	10	10

Збільшимо кількість виконавців, $h = 4$ та знайдемо оптимальне упорядкування та його довжину для цієї умови.

Таблиця 2

Оптимальне упорядкування для графа G при $h = 4$

1	1	1	1	8				
2	2	5	5	5	5			
3	3	6	10	10	10	10	10	10
4	4	7		9				

Довжина $l = 9$, значення цільової функції збільшується.

Зменшимо час виконання деяких завдань, $T' = (2, 2, 2, 2, 4, 1, 1, 1, 1, 6)$.

Таблиця 3

Оптимальне упорядкування для графа G при T'

1	4	5	5	5	5				
2	2	6	8						
3	3	7	9	10	10	10	10	10	10

Довжина $l = 10$, що на 25% більше за довжину початкового упорядкування.

Послабимо технологічні обмеження та видалимо дуги (j_4, j_5) , (j_3, j_{10}) .

Оптимальне упорядкування для графа G при T'

1	1	1	1	6	8						
2	2	4	4	7	9						
3	3	5	5	5	5	10	10	10	10	10	10

Довжина $l = 12$, тобто значення довжини збільшилось у цьому випадку на **50%**.

Висновки. Розглянуті математичні моделі доводять, що введення множин фіксованих робіт впливає на структуру оптимального упорядкування. Якщо виконуються всі необхідні умови (узгодженість фіксації, розв'язність задачі та баланс завантаження), то можна знайти допустиме упорядкування. Водночас, навіть зменшення часу виконання або послаблення обмежень не гарантує покращення показників.

Результати цього дослідження підкреслюють необхідність урахування обмежень на виконання фіксованих завдань при плануванні виробничих процесів. Оскільки призначення конкретних робіт певним виконавцям часто є неминучим через технологічні та ресурсні обмеження, ретельне планування та алгоритмічна оптимізація є ключовими для зменшення негативного впливу появи аномалій на результат.

Із зростанням складності виробничих систем здатність оптимізувати планування з урахуванням фіксованих обмежень стає важливим фактором конкурентоспроможності. Вирішення цих завдань вимагає мультидисциплінарного підходу при аналізі математичних моделей для реальних виробничих процесів.

Перспективи подальших досліджень включають розробку нових обчислювальних методів для оптимізації упорядкувань за наявності фіксованих обмежень та дослідження їх практичного застосування у промислових виробничих системах. Аналіз аномальних випадків, пов'язаних із фіксованими множинами завдань, є важливим для розвитку загальної теорії дискретної оптимізації.

ЛІТЕРАТУРА

1. Graham R. Bounds on multiprocessing timing anomalies. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1969. Vol. 17. P. 416–429. DOI: 10.1137/0117039.
2. Kolota J., Smykowski J., Stepień S. Graham's anomalies in case of parallel computation electromagnetic phenomena. *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on Computers*. 2007. P. 648-652. DOI: 10.5555/1353956.1354071.
3. Kumar V., Jain S., Tiwari S. Energy Efficient Clustering Algorithms in Wireless Sensor Networks: A Survey. *International Journal of Computer Science Issues*. 2011. Vol. 8(5). P. 259-268. DOI: 10.1109/ICCW.2008.50.
4. Garcia-Teodoro P., Diaz-Verdejo J., Macia-Fernandez G., Vazquez E. Anomaly-based network intrusion detection: Techniques, systems and challenges. *Computers & Security*. 2009. Vol. 28(1-2). P. 18-28. DOI: 10.1016/j.cose.2008.08.003.

5. Турчина В.А., Федоренко Н.К. Алгоритми побудов усіх паралельних упорядкувань заданої довжини. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2011. Вип. 11. С. 268-274.
6. Maliienko O.O., Turchyna V.A. The study of the influence of combined changes in the initial data on the occurrence of anomalies for resource allocation. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2022. Вип. 22. С. 106-112. DOI: 10.15421/322211.
7. Челпанова О.О., Турчина В.А. Узагальнення аномальних випадків у задачах упорядкування. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2021. Вип. 21. С. 220-226. DOI: 10.15421/322122.

REFERENCES

1. Graham R. (1969). Bounds on multiprocessing timing anomalies. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. Vol. 17. 416–429. Mode of access: <https://doi.org/10.1137/0117039>.
2. Kolota J., Smykowski J., Stepień S. (2007). Graham's anomalies in case of parallel computation electromagnetic phenomena. *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on Computers*. 648-652. Mode of access: <https://dl.acm.org/doi/10.5555/1353956.1354071>.
3. Kumar V., Jain S., Tiwari S. (2011). Energy Efficient Clustering Algorithms in Wireless Sensor Networks: A Survey. *International Journal of Computer Science Issues*. 8(5). 259-268. Mode of access: <https://doi.org/10.1109/ICCW.2008.50>.
4. Garcia-Teodoro P., Diaz-Verdejo J., Macia-Fernandez G., Vazquez E. (2009). Anomaly-based network intrusion detection: Techniques, systems and challenges. *Computers & Security*. 28(1-2). 18-28. Mode of access: <https://doi.org/10.1016/j.cose.2008.08.003>.
5. Turchyna V.A., Fedorenko N.K. (2011). Algorithms for constructing all parallel orderings of a given length. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*. 11. 268-274. Mode of access: <https://pm-mm.dp.ua/index.php/pmmm/article/view/59>.
6. Maliienko O.O., Turchyna V.A. (2022). The study of the influence of combined changes in the initial data on the occurrence of anomalies for resource allocation. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*. 22. 106-112. Mode of access: <https://doi.org/10.15421/322211>.
7. Chelpanova O.O., Turchyna V.A. (2021). Generalization of anomalous cases in ordering problems. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*. 21. 220-226. Mode of access: <https://doi.org/10.15421/322122>.

Received 11.03.2025.
Accepted 13.03.2025.

Optimal resource allocation task under usage constraints

This paper investigates the problem of optimal resource allocation in production processes, focusing on the impact of fixed-task assignments under limited technological and resource constraints. The study generalizes an optimization problem related to the efficient organization of production workflows by introducing a formal framework for distributing resources across a fixed set of tasks while adhering to specific operational restrictions.

To ensure feasible scheduling within such constraints, three fundamental conditions are introduced. The consistency condition ensures that task dependencies remain intact and comply with predefined technological constraints. The solvability condition guarantees that a viable execution sequence exists, even when specific tasks are fixed within the workflow. The workload balance condition prevents uneven distribution of tasks among performers, optimizing the overall efficiency of the production process. These conditions are mathematically formalized, and their role in enabling an optimal task sequence is analyzed.

The research also explores the effects of these constraints on the length of an optimal task sequence. It is shown that the introduction of fixed-task sets and the enforcement of balance conditions can significantly alter scheduling outcomes, sometimes leading to counterintuitive results. In particular, a detailed investigation of anomalous cases reveals that reducing task execution time or relaxing technological restrictions does not always lead to better scheduling efficiency. On the contrary, such modifications may increase the overall ordering length due to disruptions in dependency structures and inefficiencies in task redistribution.

The findings contribute to a deeper understanding of how task dependencies and operational constraints interact in scheduling problems, offering valuable insights for optimizing production planning under certain restrictions. This study provides both theoretical foundations and practical implications for improving workflow efficiency in industrial settings where resource limitations and rigid task structures play a crucial role.

Keywords: discrete optimization, combinatorial optimization, scheduling theory, production process, graph, resource allocation, optimal ordering, anomalies.

Малієнко Ольга Олександрівна – аспірант Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Турчина Валентина Андріївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Maliienko Olha – Postgraduate Student of Oles Honchar Dnipro National University.

Turchyna Valentyna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Cybernetics of Oles Honchar Dnipro National University.