DOI 10.34185/1562-9945-6-155-2024-19
УДК 519.8:519.176

В.А. Турчина, Є.О. Коваленко

УМОВИ ЗМЕНШЕННЯ ДОВЖИНИ ПАРАЛЕЛЬНИХ УПОРЯДКУВАНЬ ВЕРШИН СПЕЦІАЛЬНИХ ОРГРАФІВ ПРИ НАЯВНОСТІ ПЕРЕРИВАНЬ

Анотація. Прикладні задачі планування виробництва часто можна змоделювати у вигляді оптимізаційних задачах на орграфах, що відносяться до задач теорії розкладів. Однією з таких є задача паралельного упорядкування, в якій необхідно мінімізувати сумарний час виконання усіх робіт, на порядок виконання яких може бути накладено технологічні обмеження, при заданих ресурсах. Для випадків, коли орграф задачі має спеціальну структуру, досліджено способи побудови на основі комбінаторних конфігурацій та визначено, за яких умов дозвіл переривань при виконанні робіт може зменшити значення цільової функції.

Ключові слова: теорія розкладів, задачі комбінаторної оптимізації, паралельні упорядкування, орієнтовані графи, гусениці, граціозна розмітка, переривання, комбінаторна конфігурація.

Постановка проблеми. В теорії розкладів вивчаються як теоретичні, так і прикладні задачі, пов’язані з плануванням виробничих процесів, проектуванням обчислювальних систем тощо. Їх математична постановка часто може бути зведена до оптимізаційних задач на орієнтованих графах, де комплексу необхідних до виконання робіт відповідає задана множина вершин, а дугами задається частковий порядок, що моделює відповідні технологічні обмеження. Однією з них є задача паралельного упорядкування вершин таких графів.

У класичній постановці задачі упорядкування розглядається ациклічний орграф $G(V,U)$, вершини якого мають однакові вагові коефіцієнти, що приймаються за 1. Також заданий один з параметрів паралельного упорядкування: довжина або ширина. Довжина позначається l і відображає загальний час завершення всіх робіт. Ширина визначає максимальну кількість робіт, які в будь-який момент часу можуть виконуватися паралельно, і має позначення h. Як правило, той параметр, який не заданий в початкових умовах, необхідно мінімізувати [1].

Класична постановка задачі упорядкування має важливе теоретичне значення, однак на практиці тривалість виконання робіт часто є різною. У зв’язку з цим, розглядаються випадки, де ваги вершин задаються множиною, що складається з натуральних чисел, які відображають відносні відмінності у тривалості їх виконання. Через це виникає питання доцільності та ефективності застосування переривань при виконанні робіт. Було показано, що переривання можуть значно покращувати значення цільової функції,

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

але здебільшого це залежить від структури конкретного графа. Встановлено, що дозвіл переривань впливає на оптимальність у випадках, коли граф задачі є паралельно-послідовним [2], дводольним [3], або має структуру деяких підкласів дерев, для яких була доведена можливість граціозної розмітки їх вершин [4].

В даній роботі розглядаються задачі, де при заданому орієнтованому графі G та ширині упорядкування h необхідно мінімізувати довжину l. Розглянуто один з підкласів дерев, який допускає граціозну розмітку, що має назву гусениці (або однодистантне дерево). Прикладні задачі, в яких комплекс робіт може бути представлений графами такого виду, включає зокрема планування будівництва. Вершини ланцюга наприклад можуть моделювати побудову конкретних поверхів. Тоді приєднані до цього ланцюга вершини залежно від спрямованості дуг відповідають або проміжним етапам будівництва, або навпаки — роботам, які можуть виконуватися лише після того, як конкретний поверх добудовано.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розв’язання прикладних задач із планування виробничих процесів, складання різноманітних розкладів, оптимізації обслуговуючих систем часто супроводжується математичними моделями, які застосовують елементи теорії графів [5]. Окрім того, актуальним залишається питання впливу дозволу переривань на оптимальність розкладу [6]. Оскільки певні прикладні задачі моделюються графами спеціальної структури, то доцільно розробляти теоретичні основи розв’язання задач для відповідних підкласів графів. Деякі з них є предметом досліджень в питаннях розміток графів, як то граціозної [7], або таких, при дослідженні яких застосовуються комбінаторні конфігурації [8].

Мета дослідження. Вивчити прикладні задачі, що моделюються орграфами малодосліджених структур. Запропонувати методи знаходження оптимальних розв’язків у задачах упорядкування, де графом є орієнтоване дерево спеціальної структури. Визначити необхідні умови, за яких дозвіл переривань може зменшити значення цільової функції в цих задачах.

Виклад основного матеріалу дослідження. Поміж підкласів дерев, які допускають граціозну розмітку, окремої уваги заслуговують ланцюги та похідні від них — гусениці.

Означення 1. Ланцюгом називається дерево, в якому дві вершини мають степені рівні 1, а решта вершин — степені рівні 2.

Орієнтований ланцюг являє собою послідовність k вершин, поєднаних послідовно $(k\text{-}1)$ дугами $(v_1,v_2),(v_2,v_3)\ldots(v_{k-1},v_k)$. Очевидно, що при такій структурі графа розглядати задачі паралельного упорядкування недоцільно, адже незалежно від кількості вершин та їх вагових коефіцієнтів жодні дві вершини ланцюга не можуть стати на одне місце упорядкування.

На відміну від ланцюгів, паралельне упорядкування вершин допускають графи, що є похідними від них, а саме гусеницями.

Означення 2. Гусеницею називається дерево, яке після вилучення з нього всіх вершин степені 1 перетворюється на ланцюг [7].

При цьому довжина ланцюга не обов’язково зберігається.

Розглянемо різні варіанти структури гусениць в залежності від спрямованості дуг. Нехай гусениця утворена з орієнтованого ланцюга довжини k шляхом додавання до нього висячих вершин степенів 1, які з’єднуються вхідними дугами з вершинами ланцюга, утворюючи з ними кореневі дерева (рис. 1).

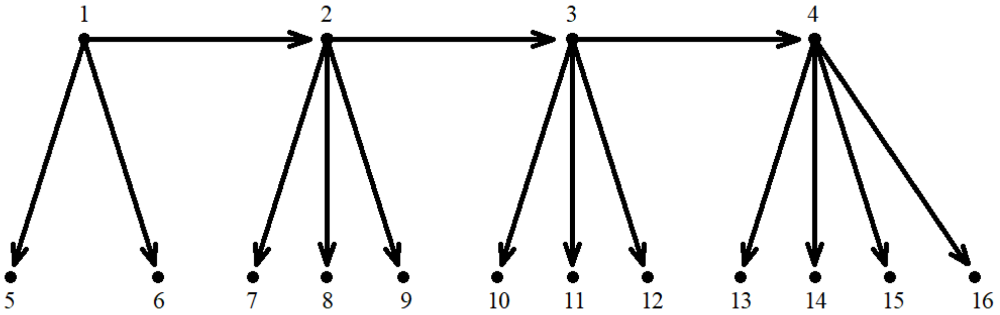


Рисунок 1 — Орієнтована гусениця із вихідними дугами

Вважатимемо, що вагові коефіцієнти усіх вершин є однаковими і рівні одиниці. В таких випадках на перші k місць упорядкування ставляться вершини заданого ланцюга. Решта вершин заносяться до упорядкування із урахуванням часткового порядку починаючи з вершин, які були приєднані до початку ланцюга. Для значень $h \geq 2$ якщо в побудованому оптимальному упорядкуванні без переривань на останньому місці стоїть менше ніж h вершин, то при дозволі переривань значення цільової функції може бути покращено за умови, що на двох останніх місцях стоять лише висячі вершини.

Для вершин графа з рис. 1 переривання зменшують довжину упорядкування у випадку $h = 2$.

$$h = 2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ & 5 & 3 & 4 & 9 & 11 & 13 & 15 & \end{pmatrix}, l^* = 9;$$

$$h = 2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 & 8 & 10 & 12 & \{(14;0,5),(16;0,5)\} & (14;0,5) \\ & 5 & 3 & 4 & 9 & 11 & 13 & 15 & (16;0,5) \end{pmatrix}, l^* = 8,5.$$

При $h = 3$ переривання не сприяють зменшенню довжини.

$$h = 3: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 11 & 14 \\ & 5 & 7 & 9 & 12 & 15 \\ & 6 & 8 & 10 & 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Інший варіант структури орієнтованої гусениці передбачає, що до орієнтованого ланцюга довжини k приєднані висячі вершини степенів 1, з яких прямують дуги до вершин цього ланцюга.

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

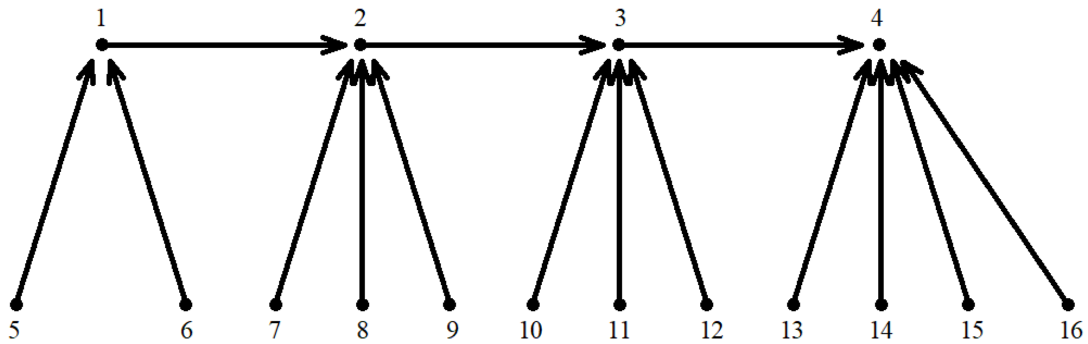


Рисунок 2 — Орієнтована гусениця із вхідними дугами

В такому випадку принцип побудови упорядкування буде наступним. Вершини ланцюга довжини k займають останні k місць в побудованому упорядкуванні. Далі починаючи з кінця упорядкування і рухаючись до його початку з урахуванням часткового порядку заносяться допустимі вершини, в тому числі на ті місця, які вже частково заповнені. Тоді якщо при деякому $h \geq 2$ на перших двох місцях упорядкування без переривань знаходяться лише вершини без вхідних дуг, а до того ж на першому місці їх кількість менша за h, то за рахунок дозволу переривань довжина упорядкування може бути зменшена. Побудоване таким чином упорядкування вершин графа з рис. 2 при h = 2 має наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} (5;0,5) & \{(5;0,5),(6;0,5)\} & 8 & 10 & 12 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ (6;0,5) & 7 & 9 & 11 & 13 & 14 & 15 & 16 & \end{pmatrix}.$$

Альтернативним способом побудови упорядкування для вершин даного графа є занесення на перші місця упорядкування вершин без вхідних дуг починаючи з тих, які приєднані до першої вершини ланцюга. Самі вершини ланцюга вносяться до упорядкування на перші для них допустимі місця після того, як усі відповідні приєднані до них уже розподілені.

$$h = 2: \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 & 2 & 11 & 3 & 14 & 16 & 4 \\ 6 & 7 & 9 & 10 & 12 & 13 & 15 & & \end{pmatrix}; h = 3: \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 12 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 10 & 13 & 15 & \\ 7 & 9 & 11 & 14 & 16 & \end{pmatrix}.$$

Тепер з'ясуємо, якими будуть упорядкування мінімальної довжини розглянутих структур графів у випадку, коли не всі значення вагових коефіцієнтів вершин є однаковими та чи вплине дозвіл переривань на оптимальність. Нехай вершини орієнтованого ланцюга довжини k мають довільні вагові коефіцієнти p_1, p_2 … p_k такі, що $p_i >> 1$ ($i = \overline{1,k}$), а решта вершин, приєднаних до цього ланцюга мають вагові коефіцієнти рівні 1. В разі, коли до вершини v_i орієнтованого ланцюга приєднується нова вершина v_r ($r > k$) введенням дуги (v_i,v_r), маємо структуру графа з однією вершиною, що не має вхідних дуг. Приклад такого графа зображений на рис. 3.

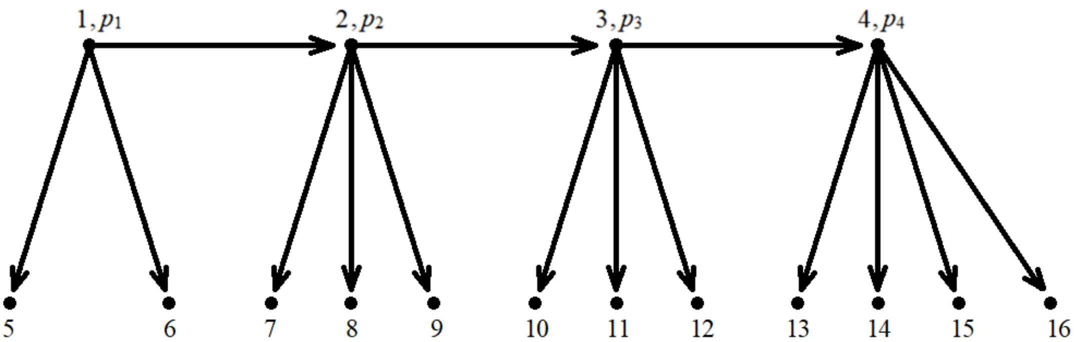
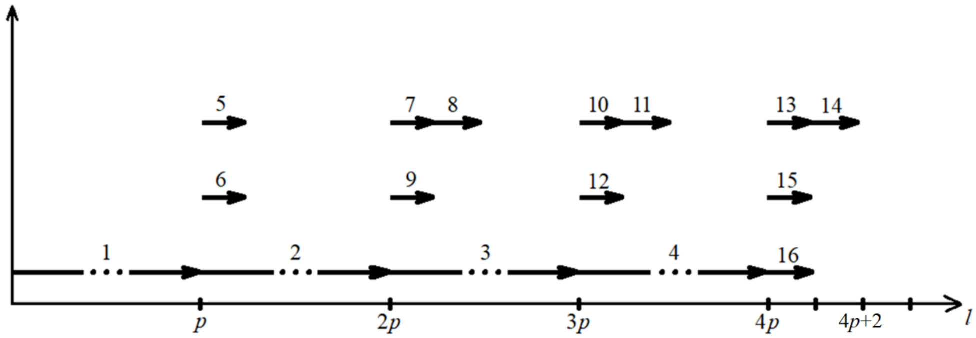


Рисунок 3 — Зважена гусениця із вихідними дугами

Оптимальне упорядкування вершин цього графа без переривань при заданій ширині $h = 3$ має довжину $l^* = \sum_{i=1}^{4} p_i + 2$ і схематично виглядає наступним чином.



За рахунок дозволу переривань довжина може бути скорочена до величини рівної $l_П^* = \sum_{i=1}^{4} p_i + 1\frac{1}{3}$, тобто менш ніж на одиницю, що вочевидь не є суттєвим покращенням, враховуючи початкову умову $p_i >> 1$. Очевидно, що у випадку, коли вершина v_r ($r > k$) приєднується до ланцюга введенням дуги (v_r,v_i), іншими словами ми маємо граф з однією вершиною, що не має вихідних дуг, оптимальне упорядкування з перериваннями так само несуттєво змінить значення цільової функції.

Інший випадок, за якого не всі вершини мають однакові вагові коефіцієнти, передбачає, що навпаки, вершини ланцюга мають ваги рівні 1, а приєднані до них вершини відповідно — рівні p. На рис. 4 зображено структуру такого графа (де вагові коефіцієнти вершин 5-16 дорівнюють p).

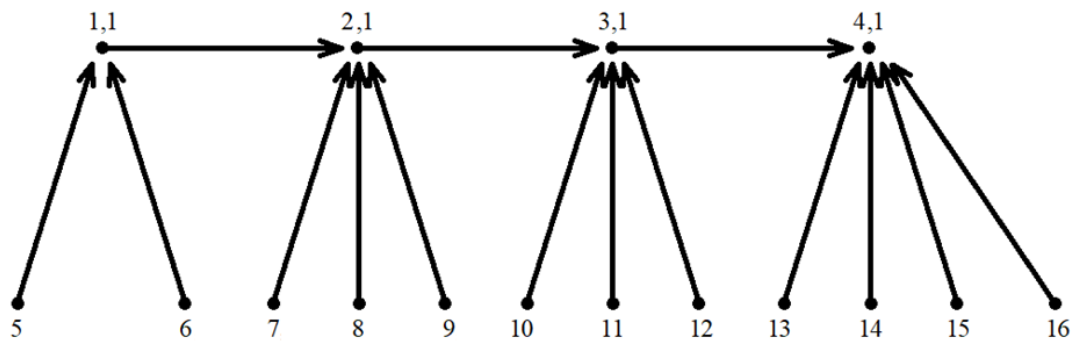
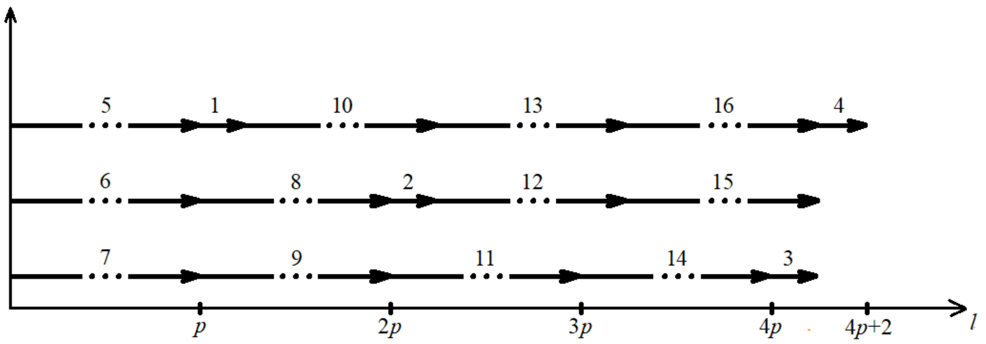


Рисунок 4 — Зважена гусениця із вхідними дугами

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

При $h = 3$ довжина оптимального упорядкування без переривань рівна $l^* = 4p + 2$, причому очевидно, що за рахунок переривань домогтися скорочення довжини неможливо, адже частково заповненим є лише останнє місце упорядкування, на якому розміщується остання вершина ланцюга.



Розглянемо як зміняться довжини упорядкувань з перериваннями та без них, якщо в графі з рис. 4 до однієї з вершин ланцюга приєднати ще одну (і для зручності перенумерувати вершини). Для визначеності, вважатимемо, що вона приєднана до вершини 2. Цей граф наведено на рис. 5.

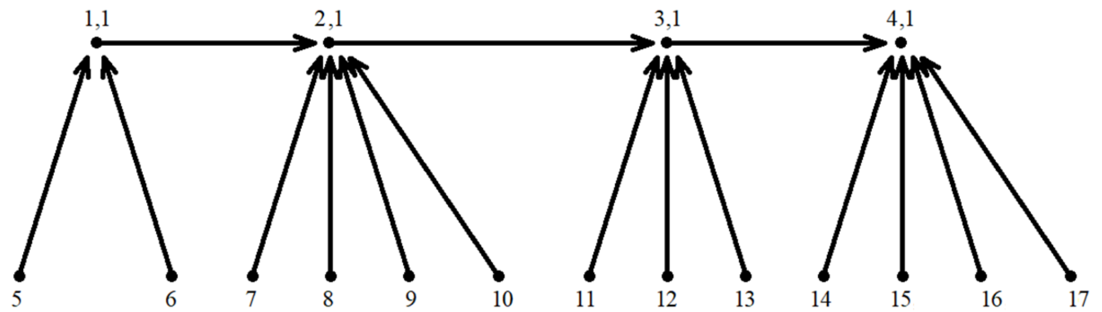
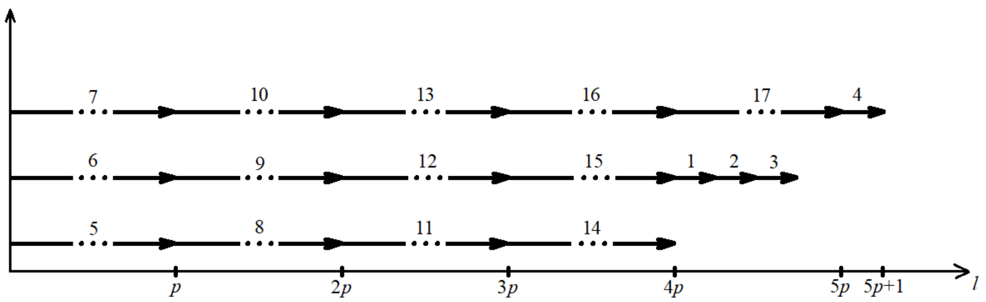
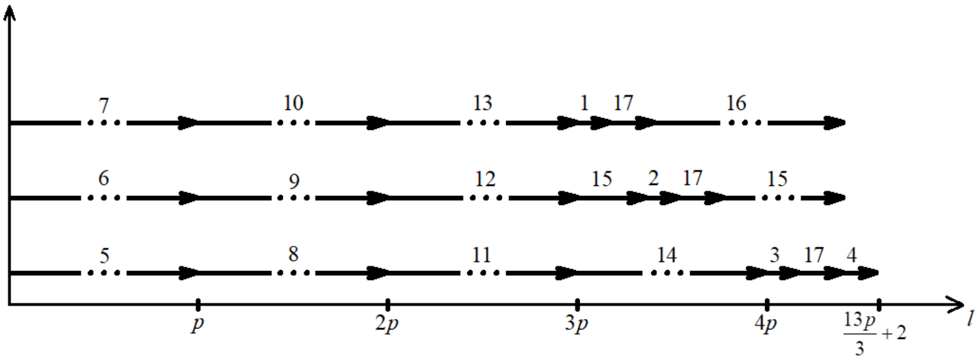


Рисунок 5 — Гусениця з додатково приєднаною вершиною

Упорядкування вершин цього графу без переривань при ширині $h = 3$ має наступну структуру.



При дозволених перериваннях отримуємо наступну структуру упорядкування.



При дозволених перериваннях довжина упорядкування скорочується з $l^* = 5p+1$ до $l^*_{П} = 4\frac{1}{3}p+2$. Різниця між цими величинами складає $\left(\frac{2}{3}p-1\right)$, що може вважатися суттєвим покращенням значення цільової функції.

При розподілі тих вершин, які приєднані до орієнтованого ланцюга, пріоритетність при виборі кожної наступної вершини для розміщення визначається довжиною найдовшого шляху, який починається в цій вершині.

На наступному прикладі розглянемо, чи будуть доцільними переривання, якщо наприклад до вершини 1 приєднана лише одна, а до вершини 3 — більше половини вершин ваги *p*, тобто вони приєднані до ланцюга нерівномірно (рис. 6).

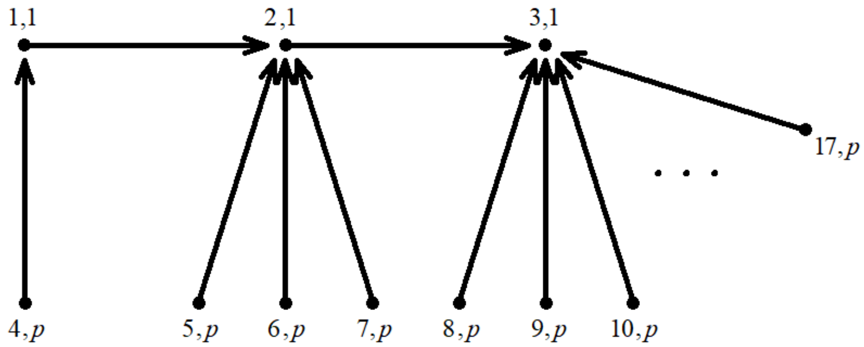
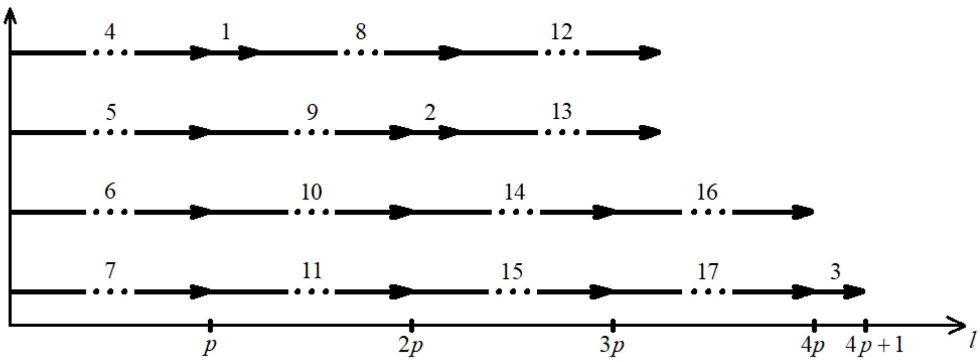


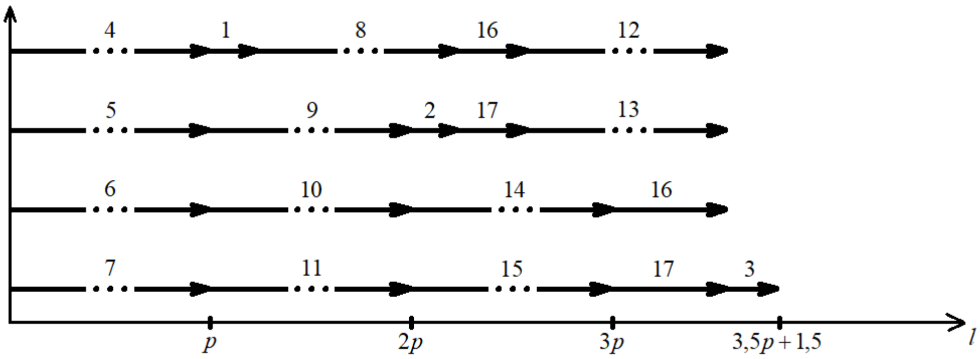
Рисунок 6 — Гусениця з перерозподіленими вхідними дугами

В даному графі вершини під номерами з 8 по 17 приєднані до вершини з номером 3. Схематично оптимальне упорядкування вершин даного графа без переривань при ширині рівній 4 має довжину $l^* = 4p+1$ і виглядає наступним чином.



ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

Дозволивши переривання, ця довжина може бути скорочена до величини рівної $l_{П}^{*} = 3\frac{1}{2}p + 1\frac{1}{2}$, тобто на значення $\left(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\right)$.



Таким чином на прикладах проілюстровано, що в загальному випадку множину вершин, що мають вагові коефіцієнти p можна розглядати в незалежності від того, до яких саме вершин ланцюга вони приєднані.

Якщо при приєднанні вершин ваги p суттєвим є врахування нумерації конкретних вершин, то кількість можливих варіантів розподілення приєднаних до ланцюга вершин може бути обчислена із застосуванням такої комбінаторної конфігурації, як сполучення. Представимо побудову графа у вигляді ітеративного процесу, при якому на кожному кроці до однієї з вершин ланцюга довжини k послідовно приєднується деяка кількість вершин ваги p. Нехай їх кількість для кожної i-ої вершини ланцюга складає m_i ($\forall i = \overline{1,k}\ m_i \geq 1$), відповідно загальна їх кількість $\sum_{i=1}^{k} m_i = m$. Для простоти запису почнемо приєднання починаючи з k-ої вершини у зворотному порядку. На першій ітерації серед m вершин обирається m_k, кількість варіантів цього вибору складає $\frac{\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)!}{m_k!\left(\sum_{i=1}^{k-1} m_i\right)!}$.

На наступній ітерації серед вершин, які залишилися обирається m_{k-1}, тобто кількість варіантів дорівнює $\frac{\left(\sum_{i=1}^{k-1} m_i\right)!}{m_{k-1}!\left(\sum_{i=1}^{k-2} m_i\right)!}$. Аналогічно для усіх наступних ітерацій, аж до приєднання m_2. На тому етапі, коли необхідно приєднати m_1 вершин, просто приєднується решта. Таким чином кількість способів приєднання вершин до орієнтованого ланцюга дорівнює

$$\sum_{j=0}^{k-2}\left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{k-j} m_i\right)!}{m_{k-j}!\left(\sum_{i=1}^{k-j-1} m_i\right)!}\right).$$

Якщо при приєднанні вершин до ланцюга їх нумерація є несуттєвою, то потрібно враховувати лише можливу кількість вершин, які з'єднуються з відповідними вершинами ланцюга.

Сформулюємо умови, при яких переривання дозволяють зменшити значення цільової функції у вигляді наступної теореми.

Теорема. Дозвіл переривань при побудові оптимального упорядкування може зменшити значення цільової функції якщо:

1) множина вершин V ($|V| = n$) розбивається на дві неперетинні підмножини V_1 та V_2 ($|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$, де $n_1 + n_2 = n$), $w_i \in \{c, p\}$ — вагові коефіцієнти вершин (де $i = \overline{1,n}$ та $p >> c$), причому

$$\begin{cases} w_i = c, \text{ якщо } v_i \in V_1 \\ w_i = p, \text{ якщо } v_i \in V_2 \end{cases};$$

2) вершини підмножини V_1 утворюють орієнтований ланцюг;

3) $\forall v_j \in V_2 \ \exists! (v_j, v_k) \in U$, де $v_k \in V_1$;

4) $|V_2| > h$ та $\dfrac{|V_2|}{h} \notin N$.

При цьому $l^* - l^*_{\Pi} > \dfrac{(h-q)}{h} p$, де q — остача від ділення $|V_2|$ на h.

Доведення. Оцінимо значення цільової функції в разі, якщо переривання заборонені. Неважко переконатися в тому, що $\left\lceil \dfrac{|V_2|}{h} \right\rceil p + c \le l^* \le \left\lceil \dfrac{|V_2|}{h} \right\rceil p + |V_1| c$. Дійсно, незалежно від того, до яких вершин орієнтованого ланцюга прямують дуги з вершин, що належать підмножині V_2, завжди знайдеться спосіб їх розміщення в упорядкуванні, при якому повністю будуть заповнені $\left\lfloor \dfrac{|V_2|}{h} \right\rfloor p$ місць, а частково заповненими — відповідно ще p місць (за рахунок умови 4). З іншого боку, якщо наприклад всі вершини підмножини V_2 приєднані до першої вершини ланцюга, то вся підмножина вершин V_1 може бути розміщена в упорядкуванні лише послідовно після них, займаючи $|V_1|c$ місць. У разі, якщо до останньої вершини ланцюга приєднано не менше q вершин і $(|V_1| - 1)c \le p$, то на p частково заповнених місць можна розмістити перші ($|V_1|$-1) вершини ланцюга, а відповідно останню — на місця безпосередньо після внесення решти вершин графа.

У випадку дозволених переривань оцінка довжини має наступний вигляд $\dfrac{|V_2|}{h} p + c \le l^* \le \dfrac{|V_2|}{h} p + |V_1| c$ з міркувань, аналогічних до випадку заборонених переривань. Єдиною відмінністю є те, що нижня оцінка досяжна за умови, коли до останньої

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

вершини ланцюга приєднано не менше (h+q) вершин. Знайдемо різницю між відповідними значеннями довжини упорядкувань. Для оцінки знизу:

$$l^* - l_П^* = \left\lceil \frac{|V_2|}{h} \right\rceil p + c - \left(\frac{|V_2|}{h} p + c \right) = \left\lceil \frac{|V_2|}{h} \right\rceil p - \frac{|V_2|}{h} p = \left(\left\lceil \frac{|V_2|}{h} \right\rceil - \frac{|V_2|}{h} \right) p .$$

Для оцінки зверху:

$$l^* - l_П^* = \left\lceil \frac{|V_2|}{h} \right\rceil p + |V_1| c - \left(\frac{|V_2|}{h} p + |V_1| c \right) = \left\lceil \frac{|V_2|}{h} \right\rceil p - \frac{|V_2|}{h} p = \left(\left\lceil \frac{|V_2|}{h} \right\rceil - \frac{|V_2|}{h} \right) p .$$

Тобто різниця буде однаковою в обох випадках. Враховуючи умову 4 представимо $|V_2|$ у вигляді $(mh+q)$, де $m \in N$. Тоді

$$\left(\left\lceil \frac{|V_2|}{h} \right\rceil - \frac{|V_2|}{h} \right) p = \left(\left\lceil \frac{mh+q}{h} \right\rceil - \frac{mh+q}{h} \right) p = \left(m + \left\lceil \frac{q}{h} \right\rceil - m - \frac{q}{h} \right) p = \left(\left\lceil \frac{q}{h} \right\rceil - \frac{q}{h} \right) p .$$

Оскільки q — остача від ділення на h, то очевидно, що $\frac{q}{h} < 1$ і відповідно $\left\lceil \frac{q}{h} \right\rceil = 1$. З цього випливає, що

$$l^* - l_П^* = \left(1 - \frac{q}{h} \right) p = \left(\frac{h-q}{h} \right) p .$$

Висновки. Для одного з відомих підкласів неорієнтованих графів (гусениці) вперше розглянуто їх орієнтований аналог та запропоновано метод знаходження оптимального розв’язку однієї задачі упорядкування у випадку, коли граф, що задає частковий порядок, має відповідну структуру. Проаналізовано ефективність впливу переривань на значення цільової функції в залежності від орієнтації дуг, значень вагових коефіцієнтів вершин та структури конкретних графів.

Отримано теоретичні результати для оцінки впливу дозволу переривань при розв’язку задач упорядкування, коли граф є орієнтованою гусеницею, які сформульовано у вигляді теореми. Отримані результати мають не лише теоретичне значення в сфері розробки методів розв’язання задач комбінаторної оптимізації, але й з точки зору практичного застосування результатів до ряду прикладних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бурдюк В. Я. Алгоритмы параллельного упорядочения: учебное пособие. / В. Я. Бурдюк, В. А. Турчина. – Днепропетровск: ДГУ, 1985. 83 с.

2. Коваленко Є. О. Аналіз впливу структури графів на оптимальність розв’язку задач паралельного упорядкування з перериваннями [Електронний ресурс] / Є. О. Коваленко, В. А. Турчина // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – 2021. – Вип. 21. – С. 130–137. – Режим доступу: https://doi.org/10.15421/322113.

3. Турчина В. А. Вплив початкових даних задачі паралельного упорядкування з перериваннями на оптимальність розв’язку [Електронний ресурс] / В. А. Турчина, Є. О. Ко-

валенко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – 2022. – Вип. 22. – С. 158-167. – Режим доступу: https://doi.org/10.15421/322217.
4. Турчина В. А. Дослідження задачі упорядкування з переривannями для одного підкласу дерев [Електронний ресурс] / В. А. Турчина, Є. О. Коваленко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – 2023. – Вип. 23. – С. 118-125. – Режим доступу: https://doi.org/10.15421/322313.
5. Baker K. R. Principles of Sequencing and Scheduling [Electronic resource] / Kenneth R. Baker, Dan Trietsch. – Hoboken, NJ, USA : John Wiley & Sons, Inc., 2018. – Mode of access: https://doi.org/10.1002/9781119262602.
6. Lenstra J. K. On the complexity of scheduling unrelated parallel machines with limited preemptions [Electronic resource] / Jan Karel Lenstra, Nodari Vakhania // Operations Research Letters. – 2023. – Mode of access: https://doi.org/10.1016/j.orl.2023.02.004.
7. Петренюк Д. А. Граціозні дерева. Аналіз проблеми та перспективи [Електронний ресурс] / Д. А. Петренюк // Управляющие системы и машины. — 2016. — № 1. — С. 16–25. – Режим доступу: https://doi.org/10.15407/usim.2016.01.016.
8. Semeniuta M. F. Combinatorial Configurations in the Definition of Antimagic Labelings of Graphs [Electronic resource] / M. F. Semeniuta // Cybernetics and Systems Analysis. – 2021. – Vol. 57, no. 2. – P. 196–204. – Mode of access: https://doi.org/10.1007/s10559-021-00344-y.

REFERENCES

1. Burdyuk V. Ya. Parallel sequencing algorithms: textbook. / V. Ya. Burdyuk, V. A. Turchyna. – Dnipropetrovsk: DSU, 1985. 83 p.
2. Kovalenko Y. O. Analysis of the graph structure influence on the parallel sequencing problems with interruptions solution optimality [Electronic resource] / Y. O. Kovalenko, V. A. Turchyna // Problems of applied mathematics and mathematical modeling. – 2021. – Vol. 21. – pp. 130–137. - Mode of access: https://doi.org/10.15421/322113.
3. Turchyna V. A. The influence of the parallel sequencing problem with interruptions initial data on the solution optimality [Electronic resource] / V. A. Turchyna, Y. O. Kovalenko // Problems of applied mathematics and mathematical modeling. – 2022. – Vol. 22. – pp. 158-167. – Mode of access: https://doi.org/10.15421/322217.
4. Turchyna V. A. Investigation of the parallel sequencing problem with interruptions for one subclass of trees [Electronic resource] / V. A. Turchyna, Y. O. Kovalenko // Problems of applied mathematics and mathematical modeling. – 2023. – Vol. 23. – pp. 118-125. – Mode of access: https://doi.org/10.15421/322313.
5. Baker K. R. Principles of Sequencing and Scheduling [Electronic resource] / Kenneth R. Baker, Dan Trietsch. – Hoboken, NJ, USA : John Wiley & Sons, Inc., 2018. – Mode of access: https://doi.org/10.1002/9781119262602.
6. Lenstra J. K. On the complexity of scheduling unrelated parallel machines with limited preemptions [Electronic resource] / Jan Karel Lenstra, Nodari Vakhania // Operations Research Letters. – 2023. – Vol. 51, № 2. – P. 187-189. – Mode of access: https://doi.org/10.1016/j.orl.2023.02.004.

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

7. Petreniuk D. A. Graceful Trees: the State of Arts and the Prospects [Electronic resource] / D. A. Petreniuk // Control systems and computers. — 2016. — Vol. 1, № 2. — P. 16–25. – Mode of access: https://doi.org/10.15407/usim.2016.01.016.
8. Semeniuta M. F. Combinatorial Configurations in the Definition of Antimagic Labelings of Graphs [Electronic resource] / M. F. Semeniuta // Cybernetics and Systems Analysis. – 2021. – Vol. 57, № 2. – P. 196–204. – Mode of access: https://doi.org/10.1007/s10559-021-00344-y.

Received 12.11.2024.
Accepted 19.11.2024.

Conditions for length reduction of the parallel sequence of special digraphs' vertices in the presence of interruptions

In the scheduling theory, both theoretical and applied problems related to the planning of production processes, the design of computer systems, etc. are considered. In particular, there is a subclass of problems called parallel sequencing problems. Their mathematical formulation can often be reduced to optimization problems on directed graphs, where a given set of vertices corresponds to a set of jobs required for execution, and arcs specify a partial order corresponding to various technological constraints. The classical variant implies that input data are the finite set of jobs with equal execution times (defined as 1) represented as digraph G and one of the sequence parameters (length or width). The undefined parameter needs to be minimized.

On the contrary to the classical ones, in applied problems, the duration of the jobs often differs. That is why the question of whether to allow or forbid interruptions during job execution is widely considered. The efficiency of using interruptions was proven for the cases when the corresponding digraph has a series-parallel, bipartite structure or belongs to the subclass of trees which allows graceful labeling. As graph structure plays a key role in the evaluation of profit from interruptions the graph labeling topics are of a big interest as well, such as those that use combinatorial configurations.

This paper is devoted to the research of possible profit from interruptions in cases when G is a directed caterpillar. The effectiveness of the impact of interruption allowance on the objective function value was analyzed depending on the arcs' orientation, the weight coefficient values of the vertices, and the structure of specific graphs. Theoretical results for evaluating the profit were obtained and formulated in the form of a theorem.

Турчина Валентина Андріївна – к.ф.-м.н., доцент, завідувачка кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.
Коваленко Євген Олександрович – аспірант кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Turchyna Valentyna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Cybernetics of Oles Honchar Dnipro National University.
Kovalenko Yevhen – Postgraduate student of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Cybernetics of Oles Honchar Dnipro National University.