

АНАЛІЗ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ В ОКОЛІ ВЕРШИНИ ТРІЩИНИ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ МАТЕРІАЛІ

Анотація. Проводиться системне дослідження задачі плоскої деформації для п'єзоелектричного тіла з тріщиною, яке полягає в застосуванні аналітичного та чисельного методів для урахування різних геометричних характеристик, різних механічних та електричних навантажень і різних фізичних властивостей п'єзоелектричного матеріалу.

Спочатку вважається, що розмір розрахункової області набагато більший за довжину тріщини, тому область приймається нескінченно великою, і для розв'язку задачі застосовується аналітичний метод комплексних потенціалів. Формулюється задача лінійного спряження, для якої виписується точний аналітичний розв'язок. Знаходяться аналітичні формули для визначення напружень та електричного зміщення у будь-якій точці розрахункової області. Для програмної реалізації використовувався спеціально створений додаток в рамках пакету Математика.

Розв'язок цієї ж задачі проводився також методом скінченних елементів, який може бути застосованим при будь-яких співвідношеннях довжини тріщини і характерного розміру розрахункової області. Сітка скінченних елементів згущувалась при наближенні до тріщини, і особливо – до її вершин. Реалізація розробленого алгоритму проводилась у програмному середовищі ABAQUS. Для випадку тріщини, набагато меншої за розмір області, виконувалось порівняння значень напружень та електричного зміщення на продовженні тріщини і на довільно орієнтованому промені, що виходить з її вершини. У всіх випадках мало місце дуже хороша узгодженість результатів, отриманих аналітично та методом скінченних елементів. Це підтверджує коректність розроблених методик і програмних продуктів і дозволяє використовувати їх для розв'язання широкого кола задач механіки руйнування п'єзоелектричних матеріалів.

Ключові слова: напруження, деформація, тріщина, аналітичний розв'язок, метод скінченних елементів, система механічних та електричних навантажень.

Постановка проблеми. Застосування системного підходу до розв'язання задач механіки руйнування п'єзоелектричних матеріалів дозволяє враховувати різні аспекти проблеми, такі як розмір області, довжину тріщини, величину механічного та електричного навантажень, характеристики п'єзоелектрика. З урахуванням цих факторів в роботі досліджується п'єзоелектричний елемент з тріщиною. У випадку короткої тріщини і значних розмірів області використовується аналітичний підхід, а для співвимірних розмірів тріщини і області – ме-

тод скінченних елементів (МСЕ). Основна увага приділяється аналізу привершинних областей тріщини, які визначають можливість її розвитку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В сучасній мікроелектроніці широко застосовуються п'єзоелектричні матеріали. Часто в елементах конструкцій, виготовлених з таких матеріалів, можуть виникати тріщини, зокрема мікротріщини. З огляду на невеликі розміри п'єзоелектричних виробів, мікротріщини можуть суттєво знижувати міцність таких конструкцій, тому їх дослідження є важливими для практики.

Дослідженню тріщин у п'єзоелектричних матеріалах присвячена значна кількість робіт. Зокрема в роботах [1, 2] в матрично-векторній формі представлено визначальні співвідношення для таких матеріалів. В роботі [3] досліджено модель тріщини зі скінченою електричною проникністю у п'єзоелектричному матеріалі. Взаємодія тріщин у п'єзоелектричних квазікристалах вивчалась у роботі [4]. Системи тріщин у п'єзоелектромагнітних матеріалах досліджувались у статтях [5, 6] для плоского та антиплоского випадків, відповідно.

Вказані вище роботи присвячені аналітичному дослідженню тріщин у п'єзоелектричних матеріалах для випадку нескінченних областей. Але, якщо тріщина знаходиться у п'єзоелектрику скінченних розмірів, то аналітичний підхід викликає значні труднощі, і найбільш ефективним апаратом дослідження у цьому випадку є метод скінченних елементів (МСЕ). Застосування цього методу для дослідження п'єзоелектричних матеріалів з тріщинами одержало суттєвий розвиток в роботах [7, 8], а різні варіанти електричних граничних умов на тріщині в таких матеріалах були досліджені в [9, 10]. Питання визначення швидкості звільнення енергії для тріщин у п'єзоелектричних матеріалах, які грають важливу роль при застосуванні методу скінченних елементів, вивчались в статті [11].

Слід відзначити, що питання дослідження електромеханічних полів у будь якій точці околу вершини тріщини у п'єзоелектричному матеріалі досліджено недостатньо. Це питання якраз і вивчається у даній роботі аналітичним і чисельним методами.

Мета дослідження. Метою даної роботи є побудова аналітичних представлень для полів напружень та електричної індукції в пружному п'єзоелектричному просторі з тріщиною нормального відриву під дією системи механічних та електричних навантажень і порівняння результатів розрахунку відповідних електромеханічних факторів з розв'язком методом скінченних елементів.

Викладення основного матеріалу дослідження.

Аналітичний метод розв'язку. Розглядається задача плоскої деформації для п'єзоелектричного тіла, переріз якого являє собою квадрат $-\frac{h}{2} \leq x_i \leq \frac{h}{2}$ ($i=1, 3$). Вважається, що в центральній частині тіла розташована тріщина Гріфітса $|x_1| \leq a$, $x_3 = 0$, береги якої вільні від навантажень та електроізолювані. Тіло навантажене розтягувальними зусиллями $\sigma_{33} = \sigma$ в напрямку, нормальному до тріщини, дотичними зусиллями $\tau_{13} = \tau$ та електричною індукцією $D_3 = D$.

Співвідношення для лінійного п'єзоелектричного матеріалу за відсутності об'ємних сил і вільних зарядів можна представити у вигляді [2]:

$$\Pi_{iJ} = E_{iJKl} V_{K,l} \quad (1)$$

$$\Pi_{iJ, i} = 0 \quad (2)$$

$$\text{де } V_K = \begin{cases} u_k, & K = 1,2,3 \\ \varphi, & K = 4 \end{cases}, \quad (3)$$

$$\Pi_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & i, J = 1,2,3 \\ D_i, & i = 1,2,3; J = 4 \end{cases}, \quad (4)$$

$$E_{iJKl} = \begin{cases} c_{ijkl}, & J, K = 1,2,3 \\ e_{lij}, & J = 1,2,3; K = 4 \\ e_{ikl}, & K = 1,2,3; J = 4 \\ -\chi_{il}, & J = K = 4 \end{cases}, \quad (5)$$

$u_k, \varphi, \sigma_{ij}$ та D_i – переміщення, електричний потенціал, напруження та електричний потік, відповідно. Крім того c_{ijkl}, e_{lij} та χ_{ij} - модуль пружності, п'єзоелектрична проникність та діелектрична проникність, відповідно. Малі нижні індекси в (1) – (5) і далі, завжди мають діапазон від 1 до 3, великі нижні індекси знаходяться в діапазоні від 1 до 4, а в (3), (4) використовується правило сумування Ейнштейна.

Побудуємо спочатку аналітичний розв'язок в припущенні, що розмір тріщини набагато менший за розмір тіла. Тоді можна вважати, що границі області поперечного перерізу прямують до нескінченності. Для розв'язку одержаної задачі для тріщини в нескінченній площині скористаємося методом комплексних потенціалів. Застосуємо представлення:

$$\mathbf{V} = \mathbf{a} f(z),$$

де $\mathbf{V} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ \varphi\}^T$, $\mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4\}^T$, $f(z)$ – невідома функція змінної $z = x_1 + px_3$.

Отримано в [12], що чотири власні вектори \mathbf{a}_α рівнянь (1), (2) знаходяться з системи:

$$\left[\mathbf{Q} + p_\alpha (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p_\alpha^2 \mathbf{T} \right] \mathbf{a} = 0 \quad (6)$$

де \mathbf{Q} , \mathbf{R} і \mathbf{T} - матриці 4x4, що визначаються таким чином:

$$Q_{jk} = E_{1jk1}, \ R_{jk} = E_{1jk3}, \ T_{jk} = E_{3jk3} \ (j, k = 1-4),$$

а власні значення p_α - з наступного характеристичного рівняння восьмого порядку:

$$\det \left[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + p^2 \mathbf{T} \right] = 0.$$

Обираючи корені з додатною уявною частиною, з урахуванням (1), (2) отримуємо представлення:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} f(z) + \overline{\mathbf{A} f(z)} = 2 \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^4 \mathbf{a}_\alpha f_\alpha(z_\alpha) \quad (7)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{B}\mathbf{f}'(z)} \quad (8)$$

де $\mathbf{t} = \{\sigma_{13} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{33} \quad D_3\}^T$, риска зверху означає комплексне спряження, а \mathbf{B} – матриця 4x4 з компонентами:

$$B_{J\alpha} = (E_{3JK1} + p_\alpha E_{3JK3}) A_{K\alpha}.$$

Вектор-функція $\mathbf{f}(z)$ визначається так:

$$\mathbf{f}(z) = \{f_1(z_1) \quad f_2(z_2) \quad f_3(z_3) \quad f_4(z_4)\},$$

$$\text{де } z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_3, \text{ а } \mathbf{f}'(z) = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{df_1(z_1)}{dz_1} & \frac{df_2(z_2)}{dz_2} & \frac{df_3(z_3)}{dz_3} & \frac{df_4(z_4)}{dz_4} \end{array} \right\}.$$

На основі співвідношень (7), (8) отримано такі співвідношення для стрибка переміщень при переході через вісь x_1 :

$$\langle \mathbf{V}'(x_1) \rangle = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1) \quad (9)$$

та для вектора \mathbf{t} :

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}[\mathbf{W}^+(x_1) + \mathbf{W}^-(x_1)], \quad (10)$$

де:

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D}\mathbf{f}'^{(1)}(z) & \text{для } x_3 > 0 \\ -\overline{\mathbf{D}\mathbf{f}'^{(1)}(z)} & \text{для } x_3 < 0 \end{cases} \quad (11)$$

де $\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}}$, $\mathbf{W}^\pm(x_1) = \mathbf{W}(x_1 \pm i0)$.

Поза тріщиною $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}^-(x_1)$, тобто для $x_1 \notin [-a, a]$:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = 2\mathbf{G}\mathbf{W}(x_1) \quad (12)$$

Це означає, що

$$\mathbf{W}(z)|_{z \rightarrow \infty} = \frac{1}{2}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{t}^\infty, \quad (13)$$

де \mathbf{t}^∞ відповідає вектору \mathbf{t} при $z \rightarrow \infty$.

Оскільки береги тріщини вільні від навантаження та електроізолювані, то $\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = 0$ при $x_1 \in (-a, a)$. Тоді з (10) маємо:

$$\mathbf{W}^+(x_1) + \mathbf{W}^-(x_1) = 0 \text{ для } x_1 \in (-a, a)$$

При умові (13) ця векторна задача Рімана-Гільберта має наступний розв'язок:

$$\mathbf{W}(z) = \frac{1}{2}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{t}^\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Підставляючи (14) в (12), одержуємо:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^\infty \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} \text{ для } x_1 \notin [-a, a] \quad (15)$$

Знайдемо розподіл напружень та електричної індукції в околі вершини тріщини.

З рівняння (10) для $x_3 > 0$ маємо:

$$f^{(1)}(z) = D^{-1}W(z) = RW(z). \quad (16)$$

Рівняння (8) у розгорнутому вигляді при $x_3 > 0$ має вигляд:

$$t_n^{(1)}(x_1, x_3) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1,3,4} B_{nj} f_j'(z_j) \right], \quad (17)$$

причому для випадку плоскої деформації $n=1,3,4$. Підставляючи (16) в останнє рівняння, отримуємо:

$$t_n^{(1)}(x_1, x_3) = 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1,3,4} B_{nj} \sum_{k=1,3,4} R_{jk} W_k(z_j) \right] \text{ для } x_3 > 0. \quad (18)$$

За допомогою цієї формули можна визначити електро-напружений стан в будь якій точці верхньої частини тіла. Використовуючи формулу (10) для $x_3 < 0$ і проводячи подібний аналіз, можна отримати аналогічну формулу для нижньої частини тіла.

Чисельний аналіз. У випадку області скінченних розмірів, застосуємо метод скінчених елементів (МСЕ). Як відомо, цей метод базується на мінімізації функціоналу Лагранжа для поля переміщень у дискретній моделі об'єкту, що вивчається. Враховуючи особливості геометрії задачі, а саме наявність в пластині тріщини, побудові сітки скінчених елементів приділялась особлива увага. Сітка має згущення елементів при наближенні до тріщини та до її вершин. Структура сітки наведена на рис. 1. Ліва частина рисунка (а) відповідає усій області, а права (б) – локальній зоні в околі вершини тріщини.

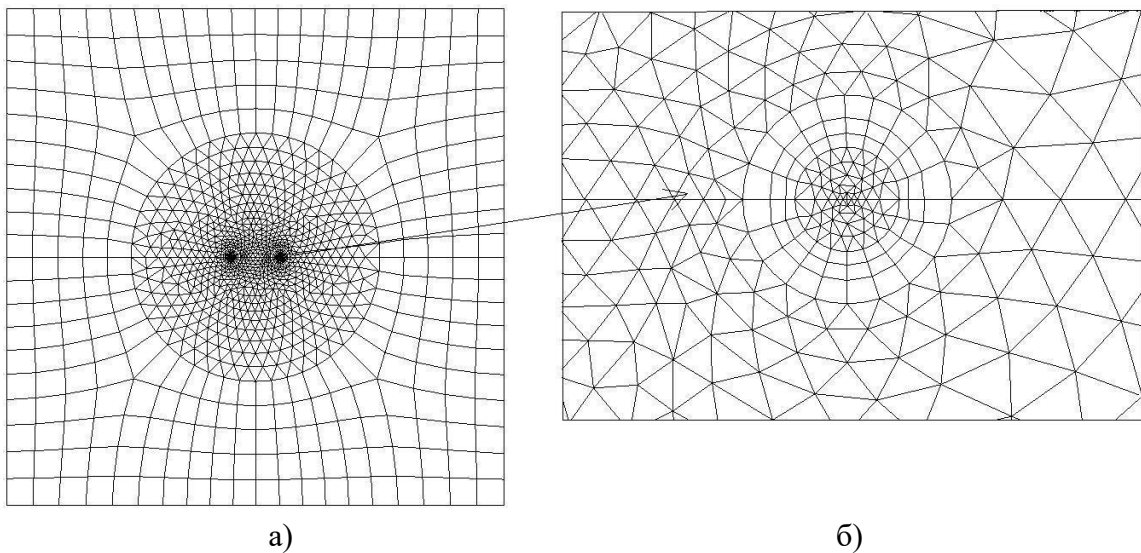


Рисунок 1 - Сітка скінчених елементів в області, що досліджується

Вважалося, що тріщина має довжину $2a=10$ см, а п'єзоелектричний матеріал PZT-4 має такі характеристики: $c_{11} = 139 \times 10^9$ Па, $c_{12} = c_{13} = 74,3 \times 10^9$ Па, $c_{33} = 113 \times 10^9$ Па, $c_{44} = 25,6 \times 10^9$ Па, $e_{15} = 13,4$ Кл/м², $e_{31} = -6,98$ Кл/м², $e_{33} = 13,8$ Кл/м²,

$\chi_{11} = 6 \times 10^{-9} \text{ Ф/м}$, $\chi_{33} = 5,47 \times 10^{-9} \text{ Ф/м}$. При застосуванні МСЕ вважалося, що область квадратна розміром 2x2 м. При такому співвідношенні розмірів області і довжини тріщини правомірне порівняння одержаних числових результатів з відповідними аналітичними результатами для нескінченної області.

У таблицях 1 і 2 наведено результати знаходження нормального напруження та електричного зміщення на продовженні тріщини для випадку, коли пластина навантажена зусиллями $\sigma^\infty = 50 \text{ МПа}$ (Табл. 1) або електричною індукцією $D_3^\infty = 0.02 \text{ Кл/м}^2$ (Табл. 2).

Таблиця 1

Значення нормального напруження $\sigma_{33} / 10^7 \text{ Па}$ на продовженні тріщини

$x_1, \text{ см}$	5,55	6,25	7,14	8,33	10,0
МСЕ	11,509	8,3612	7,0248	6,2709	5,7928
Аналітичний	11,470	8,3333	7,0014	6,2500	5,7735

Таблиця 2

Значення електричного зміщення $100 \times D_3 \text{ Кл/м}^2$ на продовженні тріщини

$x_1, \text{ см}$	5,26	5,88	6,66	7,69	9,091
МСЕ	6,408	3,798	3,025	2,633	2,396
Аналітичний	6,404	3,796	3,023	2,631	2,394

За допомогою формул (18) точні значення напружень можна отримати у будь-якій точці околу вершини тріщини. Для ілюстрації цієї можливості в Табл. 3 наведено значення нормального напруження σ_{33} і електричного зміщення D_3 у точках, які розташовані вздовж променя, що виходить з вершини тріщини під кутом 30° на різних відстанях l від вершини. Зовнішні навантаження вибирались рівними $\sigma^\infty = 50 \text{ МПа}$, $D_3^\infty = 0.05 \text{ Кл/м}^2$. Для порівняння наведено також відповідні значення цих же величин, які отримані МСЕ.

Таблиця 3

Значення електромеханічних факторів в околі вершини тріщини

$l, \text{ см}$	Аналітичний		МСЕ	
	$\sigma_{33} / 10^7 \text{ Па}$	$100 \times D_3 \text{ Кл/м}^2$	$\sigma_{33} / 10^7 \text{ Па}$	$100 \times D_3 \text{ Кл/м}^2$
0,5	14,32	11,73	14,09	11,92
1,0	10,16	9,54	10,02	9,69
1.5	9,82	8,93	9,78	9,01
2,0	9,68	8,13	9,66	8,21

З одержаних результатів видно, що хороша узгодженість аналітичних результатів з відповідними результатами розрахунків по МСЕ має місце практично для всіх точок області. Деяка відмінність в результатах для σ_{33} і D_3 спостерігається для точок, які знаходяться безпосередньо біля вершини. Для інших навантажень та інших точок околу вершини тріщини має місце аналогічна узгодженість аналітичних та чисельних результатів. Це підтверджує як

правильність отриманих формул (18), так і коректність розрахунків методом скінченних елементів.

Висновки. З використанням методу комплексних потенціалів побудовано аналітичні вирази (18) для визначення розподілу дотичних і нормальних напружень, а також електричної індукції в будь-якій точці п'єзоелектричного тіла з тріщиною. Розрахунки полів вказаних величин за цими формулами порівняно з чисельними результатами, отриманими за допомогою методу скінченних елементів для тіла скінченних розмірів при умові, що тріщина набагато коротша за розмір тіла. Для різних систем напружень та електричного зміщення наведено розподіли шуканих величин на продовженні тріщини та на довільно орієнтованому відрітку, що виходять з її вершини. Показано, що вказані два методи дають результати, добре узгоджені між собою, що підтверджує коректність аналітичної і чисельної методик, розвинутих в роботі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость / Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.; Отв. ред. А. Н. Гузь; АН УССР. Ин-т механики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
2. Pak Y.E. Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials. *Int. J. of Fracture*. 1992. 54, 79–100.
3. Govorukha V., Sheveleva A., Kamlah M. A crack along a part of an interface electrode in a piezoelectric bimaterial under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings. *Acta Mech*. 2019. 230(6), P. 1999–2012. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-2364-y>.
4. Hu K. Q., Gao C.-F., Zhong Z., Chen Z. T. Interaction of collinear interface cracks between dissimilar one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals. *ZAMM*. 2021. e202000360. <https://doi.org/10.1002/zamm.202000360>.
5. Shevelova N., Khodanen T., Chapelle F., Lapusta Y., Loboda V. A set of collinear electrically charged interfacial cracks in magneto-electroelastic bimaterial. *Acta Mech*. 2023. 234. P. 4899–4915. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03642-y>.
6. Verma P. R. Magnetic-yielding zone model for assessment of two mode-III semi-permeable collinear cracks in piezo-electro-magnetic strip. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. 29. P. 1529-1542.
7. Kuna M. Finite element analyses of cracks in piezoelectric structures. *Key Engineering Materials*. 2007. 348-349. P. 629–632. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.348-349.629>.
8. Kuna M., Rao B. N. Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded piezoelectric materials. *Int. J. of Solids and Struct*. 2008. 45. P. 5237–5257. <https://doi.org/10.1115/PVP2008-61875>.
9. Adlucky V. J., Levchenko M. S., Loboda V. V. Finite-element analysis of the parameters of fracture in a piezoelectric bimaterial with interface crack for various types of boundary conditions on its faces. *J.Math. Sci*. 2024. 279, No. 2. P.181–196. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07004-4>.
10. Levchenko M. S., Lapusta Y. M., Loboda V. V. On the method of simulating a crack filler between two piezoelectric materials. *Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій*

(Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures). 2023. 37. С. 94–104. (vol. 37. P. 94–104).

11. McMeeking R. M. The energy release rate for a Griffith crack in a piezoelectric material. *Eng. Fract. Mech.* 2004. 71. P. 1149–1163. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00135-8](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00135-8).

12. Soh A.K., Liu J., Fang D. Explicit expressions of the generalized Barnett-Lothe tensors of anisotropic piezoelectric materials. *Int. J. of Engineering Science.* 2001. 39. P. 1803-1814.

REFERENCES

1. Mechanics of coupled fields in structural elements. V.5. Electro-elasticity / Grinchenko V. T., Ulitko A. F., Shulga N. A.; Rep. ed. A. N. Guz; Academy of Sciences of Ukrainian SSR. Institute of Mechanics. – Kyiv: Nauk. Dumka, 1989. – 280 p.

2. Pak Y. E. Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials. *Int. J. of Fracture.* 1992. 54, 79–100.

3. Govorukha V., Sheveleva A., Kamlah M. A crack along a part of an interface electrode in a piezoelectric bimaterial under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings. *Acta Mech.* 2019. 230(6), P. 1999–2012. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-2364-y>.

4. Hu K. Q., Gao C.-F., Zhong Z., Chen Z. T. Interaction of collinear interface cracks between dissimilar one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals. *ZAMM.* 2021. e202000360. <https://doi.org/10.1002/zamm.202000360>.

5. Shevelova N., Khodanen T., Chapelle F., Lapusta Y., Loboda V. A set of collinear electrically charged interfacial cracks in magneto-electroelastic bimaterial. *Acta Mech.* 2023. 234. P. 4899–4915. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03642-y>.

6. Verma P. R. Magnetic-yielding zone model for assessment of two mode-III semi-permeable collinear cracks in piezo-electro-magnetic strip. *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* 2022. 29. P. 1529-1542.

7. Kuna M. Finite element analyses of cracks in piezoelectric structures. *Key Engineering Materials.* 2007. 348-349. P. 629–632. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.348-349.629>.

8. Kuna M., Rao B. N. Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded piezoelectric materials. *Int. J. of Solids and Struct.* 2008. 45. P. 5237–5257. <https://doi.org/10.1115/PVP2008-61875>.

9. Adlucky V. J., Levchenko M. S., Loboda V. V. Finite-element analysis of the parameters of fracture in a piezoelectric bimaterial with interface crack for various types of boundary conditions on its faces. *J. Math. Sci.* 2024. 279, No. 2. P.181–196. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07004-4>.

10. Levchenko M. S., Lapusta Y. M., Loboda V. V. On the method of simulating a crack filler between two piezoelectric materials. *Проблеми обчислювальної механіки та міцності конструкцій (Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures).* 2023. 37. С. 94–104. (vol. 37. P. 94–104).

11. McMeeking R. M. The energy release rate for a Griffith crack in a piezoelectric material. *Eng. Fract. Mech.* 2004. 71. P. 1149–1163. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00135-8](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00135-8).

12. Soh A. K., Liu J., Fang D. Explicit expressions of the generalized Barnett-Lothe tensors of anisotropic piezoelectric materials. *Int. J. of Engineering Science.* 2001. 39. P. 1803-1814.

Received 24.05.2024.
Accepted 27.05.2024.

«Системні технології» 5 (154) 2024 «System technologies»
***Analysis of electromechanical fields around the tip of a crack
in a piezoelectric material***

A systematic study of the problem of plane deformation for a piezoelectric body with a crack is carried out. It consists in the application of analytical and numerical methods for taking into account various geometric characteristics, various mechanical and electrical loads, and various physical properties of the piezoelectric material.

Initially, it is assumed that the size of the considered body is much larger than the length of the crack, so the area is assumed to be infinitely large, and the analytical method of complex potentials is used to solve the problem. The electromechanical characteristics are presented through a piecewise analytical vector function. Using these representations, the problem of linear relationship is formulated and an exact analytical solution of this problem is given. Based on this solution, the analytical formulas for determining the stresses and electrical displacement at any point of the body are obtained. For their implementation, a special software application in the framework of the Mathematics package was created.

The solution of the same problem was also carried out using the finite elements method, which can be applied for any ratio of the length of the crack and the characteristic size of the body. Taking into account the specifics of the geometry of the problem, namely the presence of a crack, the finite elements mesh was refined approaching the crack and especially its tips. The implementation of the developed algorithm was carried out in the ABAQUS software environment. Different ratios of the body and the crack length sizes were analyzed. In order to be able to compare the analytical and numerical results, a special analysis was performed for the case of a crack much smaller than the body size. A system analysis was carried out, which included a purely mechanical load, a purely electrical one, as well as their combination. A comparison of the stresses and electrical displacement values were performed on the crack continuation and on an arbitrarily oriented direction emanating from its tip. In all cases a very good agreement between the results obtained analytically and by the finite element method were found out. This confirms the correctness of the developed methods and software products and allows to use them for the solution of various problems of fracture mechanics of piezoelectric materials.

Keywords: stress, deformation, crack, analytical solution, finite element method, system of mechanical and electrical loads.

Ходанен Тетяна Володимирівна – к.ф.м.н., доцент, доцент кафедри теоретичної та комп'ютерної механіки, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9194-3634>

Лобода Кирило Володимирович - старший інженер ТОВ «Аква-Хім», Дніпро.

Tetyana Khodanen – Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Theoretical and Computational Mechanics, Oles Honchar Dnipro National University, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9194-3634>

Kyrylo Loboda - senior engineer of Aqua-Chem LLC, Dnipro.