

**КОМПЛЕКСНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ВЗАЄМОДІЇ
АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОГО ДВОЗВ'ЯЗНОГО ШТАМПУ
ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ**

Анотація. У роботі представлено комплексний підхід що базується на принципах системного аналізу для розв'язання контактних задач. Розглядаються задачі про вдавнення в однорідний та ізотропний пружний півпростір абсолютно жорстких плоских однов'язних і двозв'язних штампів у формі некругового кільця. Для отримання аналітичного рішення застосовується метод, що базується на використанні розвинення потенціалу простого шару для областей близьких до кільцевих. Для візуалізації і аналізу результатів на мові C++ створено програмне забезпечення. Скінченно елементні моделі для відтворення взаємодії жорсткого штампів з пружним півпростором будуються у програмному середовищі ANSYS. Важливим етапом є перевірка адекватності моделей, яка відбувається у томі числі і за рахунок порівняння отриманих чисельних результатів з аналітичними. Досягнуто задовільне узгодження результатів чисельного моделювання з отриманими раніше аналітичними. У разі перебування системи штампів пружний півпростір в складних природних умовах або в агресивному середовищі за певний час модельного застосування, враховуються можливі випадкові пошкодження або такі, що виникають за певним законом, наприклад, корозія. Тобто, за таких умов, з часом, розміри зон контакту можуть змінюватися і стають невідомими. Створюється числова база розрахунків системи штампів пружний півпростір для різних форм поперечних перерізів штампів, поєднуючи їх у спеціальні групи. Для розробки і підтримки експертної системи використано програмний інструмент CLIPS. Розрахункова база передається в нього за допомогою спеціального програмного додатку на мові C++. На основі набору правил та знань, які були створені і використані для розв'язання конкретних завдань відбувається автоматизація процесу прийняття рішень. Для кожної окремої комп'ютерної моделі, розраховуються масиви даних – нормальні і дотичні напруження в певних точках. Проводиться ідентифікація форми поперечного перерізу штампів відповідно до визначених у базі знань критеріїв. Процес генерації форми поперечного перерізу штампів відбувається за допомогою спеціально розробленого програмного забезпечення в OpenGL. У якості математичного інструменту, використано кубічну сплайн інтерполяцію.

Ключові слова: аналітичний розв'язок, контактна задача, штамп, математична модель, метод скінченних елементів, напруження, теорія пружності, область контакту, експертна система, системний підхід.

Постановка проблеми. Застосування системного підходу до вирішення задач контактної механіки дозволяє враховувати різні аспекти системи, такі як геометрія, матеріальні властивості, граничні умови та навантаження; допомагає уникнути спрощень; дозволяє створювати математичні моделі, які відображають взаємодію всіх частин конструкцій та механізмів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Важливою задачею сьогодення є підвищення якості, надійності, економічності та продуктивності машин, обладнання та іншої продукції машинобудування, зниження їх матеріаломісткості. Тому розвиток математичної теорії та підвищення ефективності її використання в прикладних цілях завжди залишається актуальним питанням. Саме шляхом застосування аналітичних методів у роботі [1,2] отримано розв'язки контактних задач для класичних областей. У роботі [3] авторами запропоновано новий підхід до пошуку рішення задачі для кільцевого штампа у вигляді подвійного ряду, в якому коефіцієнти обчислюються точно з простих рекурентних співвідношень.

Мають розвиток дослідження у напрямку взаємодію пружних тіл з початковими залишковими напруженнями з урахування сил тертя та без. В роботах [4, 5] розглядається взаємодія жорсткого циліндричного кільцевого штампа та пружного півпростору вивчався.

У роботах [6,7] авторами вирішуються квазістатичні контактні задачі, які мають непересічне значення у задачах промисловості.

Широко застосовується дослідниками метод скінченних елементів, як інструмент для знаходження розв'язків інтегральних та диференціальних рівнянь у частинних похідних [8, 9]. Треба сказати, що ефективність застосування методу скінченних елементів продемонстрована авторами для вирішення обернених контактних задач в роботах [8, 9]. Також достатньо популярним є і метод граничних елементів.

Авторами у роботі [10], застосовується розкладання потенціалу простого шару для отримання відповіді, щодо оптимізації розподілу тиску в контактній зоні. Задача ділиться на дві послідовно розв'язувані задачі.

У роботах [11-13] досліджено проблеми вдавлювання штампів з плоскою основою, обмеженою двозв'язними площадками контакту. Для розв'язання цих

задач застосовується і має своє розвинення аналітичний підхід запропонований у роботі [3] і також широко використовуються інформаційні технології.

Необхідно відзначити, що комбінування аналітичних і чисельних методів є важливим і сучасним підходом при розв'язанні багатьох задач контактної механіки. Тобто, поєднання різних підходів до рішення задач та надання комплексних оцінок допомагають знайти шляхи до вирішення складних проблемних питань, що давно стоять перед інженерами і науковцями. Такі підходи стають потужним інструментом для аналізу та моделювання різних явищ і процесів.

Метою дослідження. Метою дослідження є розробка комплексного підходу що базується на принципах системного аналізу для розв'язання задач створення та дослідження математичних і комп'ютерних моделей контактної взаємодії абсолютно жорсткого циліндричного штампа із плоскою основою з пружним півпростором під дією стискаючої сили.

Викладення основного матеріалу дослідження.

Розглядається абсолютно жорсткий плоский штамп, що займає в плані область, контур якої обмежений двома подібними кривими. Початок координат розташовано в точці, що співпадає з центром тяжіння перерізу основи штампа. Штамп перебуває в рівновазі під дією прикладених до нього зовнішніх сил і реакції пружного середовища. Площина, що обмежує півпростір, містить область контакту (основа штампу) і область, що вільна від впливу. Поверхня штампу, що контактує з пружним середовищем описується рівнянням $z = f(x, y)$, де $(x, y) \in \Omega_f$. Передбачається відсутність сил тертя в області контактної взаємодії штампу та пружного середовища $z \geq 0$. Будемо вважати, що форма штампу $f(x, y)$ є неперервною і гладкою функцією координат, а тиск буде $p = p(x, y) \geq 0$ [11]

Було розроблено програмне забезпечення для аналізу та візуалізації аналітичного рішення. Вибір мови програмування C++ для реалізації програмного забезпечення визначився низкою обґрунтованих причин, які сприяли отриманню ефективного вирішення поставленої задачі. Треба зазначити, що мова програмування C++ відома своєю високою продуктивністю та можливістю ефективно працювати на низькорівневому рівні, що особливо важливо для вирішенні складних математичних задач. Також, наявність багатофункціональних бібліотек C++ створює можливості для вдалого проведення математичних обчислень. Об'єктно-орієнтований підхід сприяє створенню структурованих та легко збережених програм, що є важливим для обчислювальних наукових досліджень. Переносимість коду дозволяє створює

умови для кросплатформності. Тому програмне забезпечення для аналізу та візуалізації аналітичного рішення, отриманого раніше [11], було розроблено на мові C++.

Було побудовано скінченно-елементні моделі взаємодії жорстких штампів з пружним півпростору у формі однозв'язних і двозв'язних штампів за допомогою програмного комплексу ANSYS [14]. Було створено тривимірні моделі геометрії пружного півпростору та штампів в програмному модулі SpaceClaim. Для доступу до функціоналу, що відсутній в поточній версії інтерфейсі ANSYS було розроблено програмний додаток на мові APDL. Для створення організації за особими правилами масивів даних, відбувалося зчитування напружень і переміщень зі спеціально розташованих умовних датчиків на границях штампів. Проаналізувано напружено-деформований стан системи та оцінено результати шляхом порівняння з отриманими раніше аналітичними. Для випадків коли похибка перевищує допустиму, то проводився уточнювальний процес генерації скінченно-елементної моделі.

Розглядалися випадки коли вважалось, що системв штамп- пружний півпростір перебуває в складних природних умовах або в агресивному середовищі, або відбуваються процеси зношення за певний час модельного застосування. Враховано можливі випадкові пошкодження або такі, що виникають за певним законом, наприклад, корозія. Побудована значна кількість скінченно-елементних моделей для різних випадків пошкоджень штампів, для яких нові розрахункові форми поперечних перерізів було змінено від початкових за визначеним правилом.

Нижче в процесі пошуку контактного тиску $p(x,y)$, $(x,y) \in \Omega_f$, розглядаються рішення двох крайових задач теорії пружності для півпростору $z \geq 0$ [10].

Пошук розподілу тиску $p(x,y)$ в області Ω_f при завданні нормальних переміщень $w(x,y) = f(x,y)$ на Ω_f . Розв'язок даної крайової задачі теорії пружності для півпростору $z \geq 0$ з граничними умовами $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, $w = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega_f$, та $\sigma_{zz} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, $(x,y) \in \Omega_0$, існує і єдино [10], а розподіл тиску, що визначається, $p(x,y) = \sigma_{zz}(x,y)$, $(x,y) \in \Omega_f$ може бути представлено у вигляді

$$p = p(f) = L_a f, \quad (1)$$

де σ_{ij} , $i, j = x, y, z$, - компоненти тензора напружень, w - компонента вектора переміщень, що нормальна до площини xy , а L_a - лінійний оператор.

Пошук розподілу нормальних зміщень $w(x, y) = f(x, y)$ в області Ω_f при прикладенні до цієї області заданих невід'ємних центральних тисків $p(x, y) \geq 0$. Розв'язок відповідної крайової задачі для півпростору $z \geq 0$ з граничними умовами $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0$, $\sigma_{zz} = p(x, y)$ при $(x, y) \in \Omega_0$ існує, єдиний і знаходиться в вигляді потенціалу простого шару. Розподіл нормальних прогинів $w(x, y) = f(x, y)$ в області Ω_f надається виразом

$$f = f(p) = L_b p, \quad (2)$$

з лінійним оператором L_b .

При відомому розподілі тиску $p(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_f$, результуюча сила P і моменти M_x , M_y відносно осей x і y , що прикладені до штампу визначаються виразами [10,11]

$$P = \int_{\Omega_f} p d\Omega_f, M_x = \int_{\Omega_f} y p d\Omega_f, M_y = \int_{\Omega_f} x p d\Omega_f. \quad (3)$$

Введемо в розгляд функцію $p_g = p_g(x, y) \geq 0$, що описує деякий заданий розподіл тиску в області контакту Ω_f . Як оптимізуючий функціонал розглянемо інтеграл вигляду

$$J_f = J(p(f)) = \int_{\Omega_f} (p - p(f))^2 d\Omega_f. \quad (4)$$

Функціонал (4) характеризує неузгодженість між розподілом тиску $p(x, y)$, що відповідає певній формі штаму $f(x, y)$, і заданим (цільовим) розподілом тиску $p_g(x, y)$ [10].

Експертну систему було реалізовано на базі існуючого відкритого для загального використання програмного продукту CLIPS [15]. Експорт даних щодо напружень і переміщень з умовних датчиків в базу знань експертної системи було реалізовано в автоматизованому форматі через розроблене спеціальне програмне забезпечення на мові програмування C++, та за допомогою ручної передачі даних через імпорт інформації до Excel файлу, та подальшу його обробку авторським додатком на мові програмування JavaScript. База знань системи зберігає інформацію щодо геометричних характеристик штампів та властивостей матеріалів півпростору і штампу, а також набір правил і фактів, що використовуються для визначення відповідності напружено-деформівного стану системи абсолютно жорсткий штамп – пружний півпростір координатам точок за заданими критеріями.

Після обробки вхідних даних експертна система видає інформацію щодо координат точок контуру штампу, яка передається на вхід до розробленого спеціального програмного забезпечення для візуалізації контуру штампів. Для відтворення контурів штампів було використано кубічну сплайн-інтерполяцію. На завершальному етапі відбувається порівнянні побудованих контурів штампів з модельними. На рис. 1. наведено загальну схему будови комплексного підходу до розв'язання задач створення та дослідження математичних і комп'ютерних моделей контактної взаємодії абсолютно жорсткого циліндричного штамп із плоскою основою з пружним півпростором під дією стискаючої сили.

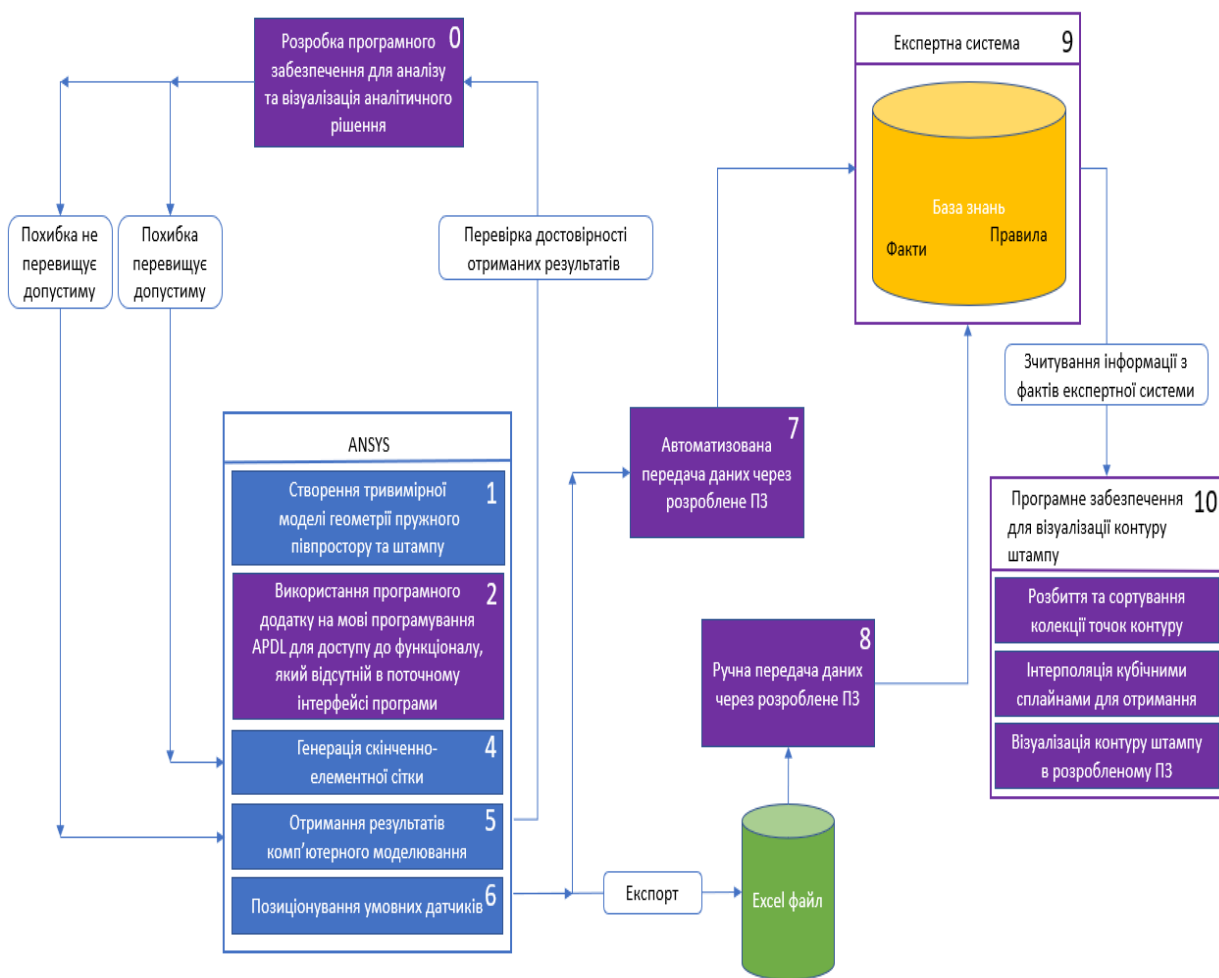


Рисунок 1 - Загальна схема будови комплексного підходу

Висновки

В роботі застосовано комплексний підхід що базується на принципах системного аналізу для розв'язання задач створення та аналізу математичних і комп'ютерних моделей контактної взаємодії абсолютно жорсткого циліндричного штампа із плоскою основою з пружним півпростором під дією стискаючої сили. В процесі виконання роботи було розроблено програмне забезпечення для розрахункових формул аналітичного рішення задач щодо плоских штампів різної форми в плані близьких до кільцевих для проведення ефективних розрахунків і аналізу отриманих результатів; створення скінченно-елементні моделі взаємодії плоского абсолютно жорсткого двозв'язного в плані штампу з пружним півпростором за допомогою програмного комплексу ANSYS; створено програмне забезпечення для передачі масивів даних з програмного комплексу ANSYS до програмної системи CLIPS; побудовано експертну систему програмному середовищі CLIPS для автоматизації прийняття рішення щодо вибору найбільш вдалого варіанту побудованої границі плоского штампу, у випадку зміни його форми під впливом дії агресивного середовища або випадкових пошкоджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Galin L. A., Gladwell G. M. L. Contact Problems – the legacy of L.A. Galin. *Solid Mechanics and Its Applications*. 2008. Vol. 155. Springer, 318 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9043-1>.
2. Моссаковский В. И. Контактные задачи математической теории упругости / В. И. Моссаковский, Н. Е. Качаловская, С. С. Голикова.– К.: Наукова думка, 1985. – 176 с.
3. Roitman A. B., Shishkanova S. F. The solution of the annular punch problem with the aid of recursion relations. *Soviet Applied Mechanics*. 1973. 9 (7), 725–729. <https://doi.org/10.1007/BF00882996>.
4. Babych, S.Y., Yarets'ka, N.O Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses*. *International Applied Mechanics*. 2021. 57, 297–305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>.
5. Бабич, С. Ю., Ярецька, Н. О., Лазар, В. Ф., Щекань, Н. П. Аналітичні розв'язки статичної задачі про тиск попередньо напружених півпросторів та пружного циліндра з початковими напруженнями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. 2022. 41 (2), 91–102. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).91-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).91-102).

6. Li, B., Li P., Zhou R., Feng X., Zhou, K. Contact mechanics in tribological and contact damage-related problems: A review, *Tribology International*. 2022. Volume 171, 107534, <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2022.107534>.
7. Guz A. N., Zozulya, V. V. Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with crack. *International Applied Mechanics*. 2002. 38 (8), 895–932 p. <https://doi.org/10.1023/A:1021266113662>.
8. Obodan, N. I., Zaitseva, T. A., Fridman, O. D. Contact Problem for a Rigid Punch and an Elastic Half Space as an Inverse Problem. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. 240, 184–193 p. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04346-2>.
9. Guk, N. A., Kozakova, N. L. Delamination of a Three-Layer Base Under the Action of Normal Loading. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. 254(1), 89–102 p. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05290-w>.
10. Banichuk N V, Ivanova S Yu Optimal Structural Design: Contact Problems and High-Speed Penetration. Berlin, Boston: De Gruyter. 2017. 206 p. <https://doi.org/10.1515/9783110531183>.
11. Зайцева Т. А., Шишканова Г. А. Розв’язання просторових контактних задач для некласичних багатозв’язних областей. Дніпро: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту., 2011. 192 с.
12. Shyshkanova G. A., Zaytseva T. A., Frydman A. D. The analysis of manufacturing errors effect on contact stresses distribution under the ring parts deformed asymmetrically. *Metallurgical and Mining Industry*. 2015. 7. 352–357. www.metaljournal.com.ua/assets/Journal/englishedition/MMI_2015_7/055Shyshkanova-352-357.pdf
13. Shyshkanova G. A., Zaytseva T. A., Zhushman V. V., Levchenko N. M., Korotunova O. V. Solving three-dimensional contact problems for foundation design in green building. *Journal of Physics: Conference Series*. 2023. 2609 (1), 012001. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2609/1/012001>
14. Ansys Free Student Software Downloads.
URL: <https://www.ansys.com/academic/free-student-products> (дата звернення: 02.04.2024).
15. CLIPS A Tool For Building Expert Systems. URL: <https://www.clipsrules.net> (дата звернення: 02.04.2024).

REFERENCES

1. Galin L. A., Gladwell G. M. L. Contact Problems – the legacy of L.A. Galin. *Solid Mechanics and Its Applications*. 2008. Vol. 155. Springer, 318 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9043-1>.

2. Mossakovskiy V I. Kontaktnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti / V.I. Mossakovskiy, N.E. Kachalovskaya, S.S. Golikova. – K.: Naukova dumka, 1985. – 176 s.
3. Roitman A. B., Shishkanova S. F. The solution of the annular punch problem with the aid of recursion relations. *Soviet Applied Mechanics*. 1973. 9 (7), 725–729. <https://doi.org/10.1007/BF00882996>.
4. Babych, S.Y., Yarets'ka, N.O Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses*. *International Applied Mechanics*. 2021. 57, 297–305. <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>.
5. Babych, S. Yu., Yaretska, N. O., Lazar, V. F., Shchekan, N. P. Analitichni rozvyazky statychnoyi zadachi pro tysk poperedno napruzhenykh pivprostoriv ta pruzhnogo tsylindra z pochatkovyvy napruzheniyamy. *Naukovyy visnyk Uzhhorodskoho universytetu. Seriya "Matematyka i informatyka"*. 2022. 41 (2), 91–102 s. [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41\(2\).91-102](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2022.41(2).91-102).
6. Li, B., Li P., Zhou R., Feng X., Zhou, K. Contact mechanics in tribological and contact damage-related problems: A review, *Tribology International*. 2022. Volume 171, 107534, <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2022.107534>.
7. Guz A. N., Zozulya, V. V. Elastodynamic unilateral contact problems with friction for bodies with crack. *International Applied Mechanics*. 2002. 38 (8), 895–932 p. <https://doi.org/10.1023/A:1021266113662>.
8. Obodan, N. I., Zaitseva, T. A., Fridman, O. D. Contact Problem for a Rigid Punch and an Elastic Half Space as an Inverse Problem. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. 240, 184–193 p. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04346-2>.
9. Guk, N. A., Kozakova, N. L. Delamination of a Three-Layer Base Under the Action of Normal Loading. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. 254(1), 89–102 p. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05290-w>.
10. Banichuk N V, Ivanova S Yu Optimal Structural Design: Contact Problems and High-Speed Penetration. Berlin, Boston: De Gruyter. 2017. 206 p. <https://doi.org/10.1515/9783110531183>.
11. Zaytseva T. A., Shyshkanova H. A. Rozvyazannia prostorovykh kontaktnykh zadach dlia neklasichnykh bahatozv'iaznykh oblastey. Dnipro: Vyd-vo Dnipropetr. nats. un-tu., 2011. 192 s.
12. Shyshkanova G. A., Zaytseva T. A., Frydman A. D. The analysis of manufacturing errors effect on contact stresses distribution under the ring parts deformed asymmetrically. *Metallurgical and Mining Industry*. 2015. 7. 352–357. www.metaljournal.com.ua/assets/Journal/englishedition/MMI_2015_7/055Shyshkanova-352-357.pdf

13. Shyshkanova G. A., Zaytseva T. A., Zhushman V. V., Levchenko N. M., Korotunova O. V. Solving three-dimensional contact problems for foundation design in green building. *Journal of Physics: Conference Series*. 2023. 2609 (1), 012001. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2609/1/012001>
14. Ansys Free Student Software Downloads.
URL: <https://www.ansys.com/academic/free-student-products> (date of application: 02.04.2024).
15. CLIPS A Tool For Building Expert Systems. URL: <https://www.clipsrules.net> (date of application: 02.04.2024).

Received 12.03.2024.

Accepted 19.03.2024.

***A complex approach to solving the problem of interaction between
a rigid double-connected punch and an elastic half-space***

The paper presents an integrated approach based on the principles of system analysis for solving contact problems. We consider the problems of pressing rigid plane single- and double-connected punches in the form of a non-circular ring into a homogeneous and isotropic elastic half-space. To obtain an analytical solution, we apply a method based on the use of the development of the simple layer potential for regions close to the ring. Software was developed using C++ to visualize and analyze the results. Finite-element models to reproduce the interaction of a rigid punch with an elastic half-space are built in the ANSYS software environment. An important step is to verify the adequacy of the models, which is carried out, among other things, by comparing the numerical results with the analytical ones. A satisfactory agreement of the numerical modeling results with the analytical ones obtained earlier was achieved. If the punch-elastic half-space system is exposed to difficult natural conditions or an aggressive environment during a certain time of modeling, possible accidental damage or damage that occurs according to a certain law, such as corrosion, is taken into account. That is, under such conditions, the dimensions of the contact zones may change over time and become unknown. A numerical base for calculating the punch-elastic half-space system is created for various shapes of punch cross-sections, combining them into special groups. The CLIPS software tool was used to develop and maintain the expert system. The calculation base is transferred to it using a specially created C++ software application. Based on a set of rules and knowledge that have been created and used to solve specific problems, the decision-making process is automated. For each individual computer model, data sets are calculated - normal and tangential stresses at certain points. The cross-sectional shape of the punch is identified in accordance with the criteria defined in the knowledge base. The

process of generating the cross-sectional shape of the punch is performed using specially developed software in OpenGL. The cubic spline interpolation is used as a mathematical tool.

Keywords: analytical solution, contact problem, punch, mathematical model, finite-element method, stresses, elasticity theory, contact zone, expert system, systematic approach.

Зайцева Тетяна Анатоліївна - к.т.н., доцент, зав. каф. комп'ютерних технологій, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6346-3390>

Жушман Владислав Вікторович – аспірант, кафедра комп'ютерних технологій, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7292-5879>

Tetyana Zaytseva – PhD, Associate Professor, Head of Department, Department of Computer Technologies, Oles Honchar Dnipro National University, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6346-3390>

Vladyslav Zhushman – PhD student, Department of Computer Technologies, Oles Honchar Dnipro National University, ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-7292-5879>