

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ НАДЗВУКОВОГО ГАЗУ В КАНАЛАХ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ ЗАСОБАМИ OPENFOAM

Анотація. На сьогодні існує низка різних програмних комплексів, як пропрієтарних, так і з відкритим вихідним кодом. Одним з таких пакетів з відкритим вихідним кодом є OpenFOAM, який володіє широким спектром можливостей для розв'язання будь яких завдань, від складних потоків рідини, включно з хімічними реакціями, турбулентністю і теплообміном, до акустики, механіки твердого тіла і електромагнетизму. В роботі розглядається задача комп'ютерного моделювання течії надзвукового газу в каналах змінного перерізу.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, течія надзвукового газу, OpenFOAM

З розвитком високопродуктивних обчислювальних систем створюються різні програмні продукти для математичного моделювання фізичних явищ, зокрема газодинамічних процесів. На сьогодні існує низка різних програмних комплексів, як пропрієтарних, так і з відкритим вихідним кодом. Одним з таких пакетів з відкритим вихідним кодом є OpenFOAM.

OpenFOAM - це відкрита інтегрована платформа для чисельного моделювання задач механіки суцільних середовищ [1]. Цей пакет являє собою безкоштовне програмне забезпечення з відкритим вихідним кодом, що випускається і розробляється переважно компанією OpenCFD Ltd з 2004 року та глибоко інтегрований як у комерційні, так і академічні організації.

OpenFOAM володіє широким спектром можливостей для розв'язання будь-яких завдань - від складних потоків рідини, включно з хімічними реакціями, турбулентністю і теплообміном, до акустики, механіки твердого тіла і електромагнетизму.

Розглянемо задачу математичного моделювання течії надзвукового газу в каналах змінного перерізу.

Під час розгляду задач, пов'язаних із формуванням і поширенням поверхонь розривів у газах, витіканням газу з сопел надзвукових двигунів,

взаємодією сильних стрибків ущільнення з перепонами та ін., виникає необхідність розв'язувати рівняння газової динаміки.

Фізико-математична постановка задачі. Розглядається течія надзвукового газу в каналах змінного перерізу в одновимірній, двовимірній і тривимірній постановках.

Математична постановка для ідеального газу складається із системи рівнянь Нав'є-Стокса, усереднення виконано за Фавром [2], спільно з моделлю турбулентності SST $k - \omega$ [3]. У декартовій системі координат (x_1, x_2, x_3) для нестационарної в'язкої течії стисливого газу система рівнянь на основі законів збереження має вигляд:

Рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_j] = 0, \quad (1)$$

де $\bar{\rho}$ г - густина газу, кг/м³, \tilde{u}_j - складова вектора швидкості по осі x_j , м/с;

Рівняння руху:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{u}_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \bar{p} \delta_{ij} + \tilde{\tau}_{ij}] = 0, \quad (2)$$

де δ_{ij} - символ Кронекера $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$ $\tilde{\tau}_{ij}$ - тензор в'язких напружень, Па;

Рівняння балансу енергії:

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{E} + \tilde{u}_j \bar{p} + \tilde{q}_j - \tilde{u}_i \tilde{\tau}_{ij}] = 0, \quad (3)$$

де \tilde{E} - повна енергія, Дж, \tilde{q}_j - тепловий потік, Дж/(м²*с), \bar{p} - тиск газу, Па;

Рівняння стану ідеального газу:

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T}, \quad (4)$$

де R - газова постійна, Дж/(кг*К);

Тензор в'язких напружень і тепловий потік:

$$\tilde{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \overline{\rho u_i'' u_j''}, \quad (5)$$

де μ - коефіцієнт динамічної в'язкості, Па*с;

$$\tilde{q}_j = -C_p \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} - C_p \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j}, \quad (6)$$

де C_p - питома теплоємність за постійного тиску газу, Дж/К, Pr - число Пранд-ля, μ_t - коефіцієнт турбулентної в'язкості, Па·с;

Рівняння для визначення турбулентної в'язкості:

$$\mu_t = \frac{\bar{\rho} a_1 k}{\max \left[a_1 \omega, \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right)^2} \operatorname{tgh} \left(\left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500 \nu}{d^2 \omega} \right) \right]^2 \right) \right]}, \quad (7)$$

де k - кінетична енергія турбулентності, м²/с², ν - коефіцієнт кінематичної в'язкості, м²/с, ω - питома швидкість дисипації, с⁻¹.

Рівняння моделі турбулентності Ментера SST $k - \omega$.

Рівняння для кінетичної енергії турбулентності:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j k}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \prod_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\beta^* \bar{\rho} \omega k. \quad (8)$$

Рівняння для питомої швидкості дисипації кінетичної енергії турбулентності:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \omega}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j \omega}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) = \prod_{ij} \frac{\gamma \bar{\rho}}{\mu_t} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* \bar{\rho} \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\bar{\rho} \sigma_{\omega^2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (9)$$

Для розв'язання системи рівнянь (1)-(9) у початковий момент часу ($t=0$) у всій ділянці задаються параметри навколишнього середовища ($p = p_a$, $T = T_a$).

Для випадку спокійного навколишнього середовища швидкість, кінетична енергія турбулентності та дисипація кінетичної енергії турбулентності дорівнюють нулю $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = 0$, $k=0$, $\omega=0$.

У зв'язку з квазілінійністю систем газодинамічних рівнянь, часом не вдається аналітично розв'язати поставлене завдання, і, як наслідок, доводиться використовувати чисельні методи інтегрування таких систем. За останні 70 років було розроблено велику кількість різних різницевих схем для розв'язання рівнянь газової динаміки.

Кожна різницева схема, так чи інакше, містить у собі розв'язок задачі Рімана. В роботі розглядалися різницеві схеми, засновані на методі скінченних об'ємів [4].

У 1954 році С.К. Годунов розробив ефективну різницеву схему розв'язання, названу згодом його ім'ям. В її основі лежить розв'язання задачі

про розпад довільного розриву в газах. Схема Годунова є схемою першого порядку, потребує значного часу на проведення розрахунку, але при цьому містить у собі точний ітераційний автомоделний розв'язок задачі Рімана. В області взаємодії сильних ударних хвиль метод Годунова проявляє чисельні дисипативні властивості, які аналогічні застосуванню штучної квадратичної в'язкості [5].

Знаходження потоків за методом Годунова. Відомо, що розриви в газі можуть бути стійкими тільки тоді, коли на них виконуються умови спільності. У разі невиконання цих умов відбувається розпад цього розриву на стійкі конфігурації.

Задача про розпад довільного розриву була детально проаналізована Коциним Н.Є. у 1928 році. Алгоритм розв'язання цієї задачі докладно описано в [5]. Система рівнянь для розв'язання задачі розпаду розриву в 3-х мірній постановці для декартової системи координат у формі векторів-стовпців має такий вигляд:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial A(U)}{\partial x} + \frac{\partial B(U)}{\partial y} + \frac{\partial C(U)}{\partial z} = 0; \quad (10)$$

де U - вектор консервативних змінних, A, B, C - вектор потоків.

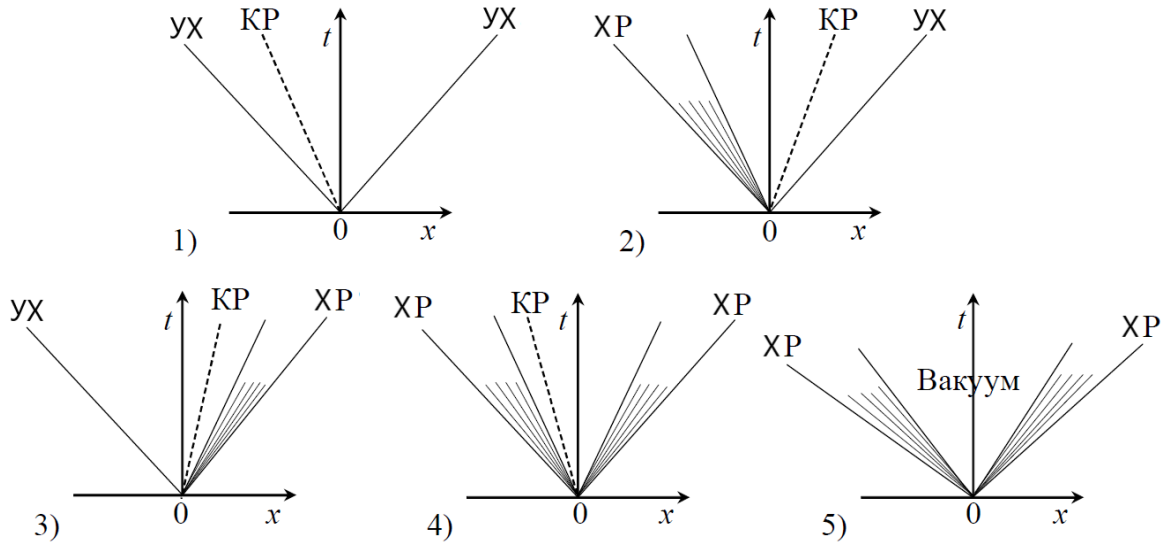
$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ \rho vw \\ v(\rho E + p) \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ p + \rho w^2 \\ w(\rho E + p) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

де $E = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$ - повна енергія питомої маси газу, γ - питома газова стала для газу, що дорівнює 1.4.

У процесі розв'язання задачі можливе формування таких конфігурацій розривів, які представлено на рисунку 1.

Конфігурації 1) - 4) на рисунку 1 містять у собі контактний розрив КР, позначений штриховою лінією, на якому зазнає розриву густину, а тиск і нормальна до поверхні розриву компонента швидкості залишаються безперервними. Конфігурація 5) - являє собою граничний випадок, коли в результаті розриву утворюється область низького тиску, в якій густина падає до значення $\rho = 0$ у двох хвилях розрідження, що обмежують область вакууму ліворуч і

праворуч. З фізичної точки зору отримання цієї конфігурації в процесі чисельного розв'язання не є можливим.



КР- контактний розрив, УХ - ударна хвиля, ХР - хвиля розрідження

Рисунок 1 - Конфігурації розпаду розриву

Комп'ютерне моделювання течії надзвукового газу в каналах змінного перерізу проводилася у пакеті OpenFOAM.

Для перевірити працездатність побудованої комп'ютерної моделі, було проведено порівняння отриманих значень параметрів газу з його чисельними значеннями. Для цього розв'язали задачу нестационарної одновимірної течії ідеального газу в області, зображеній на рисунку 2. Довжина області задавалася інтервалом $[0,1]$ з дискретизацією в 100 комірок. Вважалося, що в початковий момент часу $t = 0$ ліворуч від точки $x = x_0$ газ має параметри з індексом l , а праворуч параметри з індексом r . Граничні умови являли собою встановлення твердої стінки на межах Γ_1 і Γ_2 .

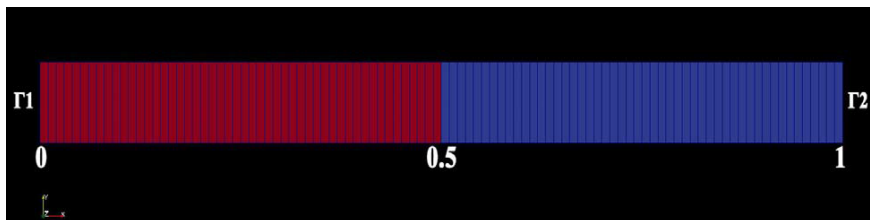


Рисунок 2 - Розрахункова область для одновимірної течії при $x_0 = 0,5$

Далі проводилися серія випробувань та порівняння методу Годунова з методами Русанова, HLLC, Роу. Розглянуто двовимірну течію ідеального газу в каналі з різким звуженням (уступом). Розрахункова область каналу представ-

лена на рисунку 3. Довжина каналу становить 1 метр, висота на вході 0.5 метра, висота уступу 0.1 метр. На межі Г1 задавали параметри потоку газу, що набігає, на границях Г2, Г3, Г4, Г6 - граничні умови на твердій стінці, на межі границі Г5 - знесення. Початковий розподіл усередині області відповідає значенням на межі Г1. Як газ використовувалися параметри повітря, швидкість набігаючого потоку становила 3 Маха.

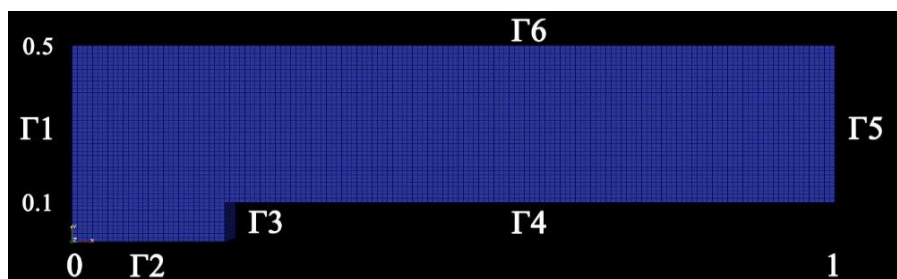
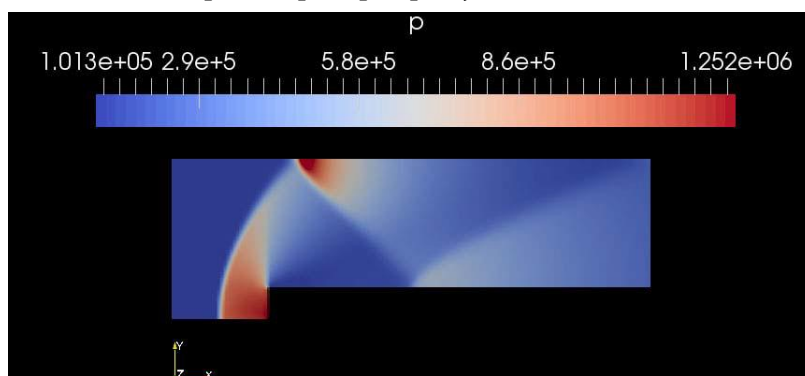
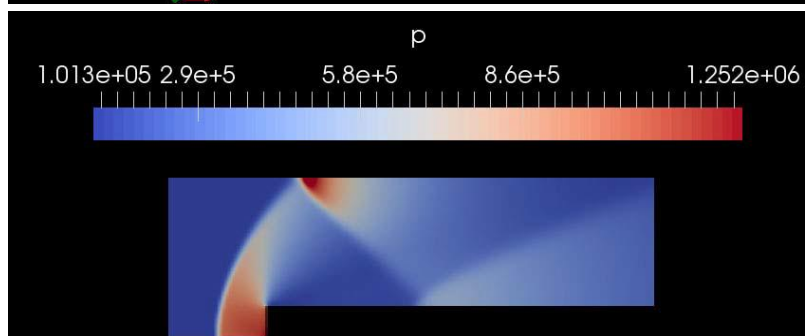


Рисунок 3 - Розрахункова область для каналу з уступом

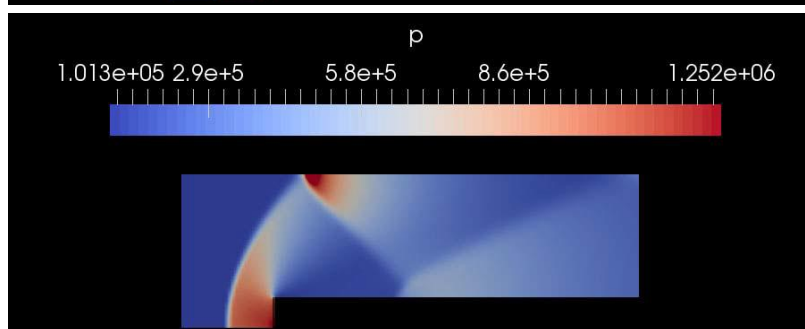
На рисунку 4 показано результати розрахунків для уступу у вигляді полів тисків. Розмір комірок розрахункової сітки для всіх варіантів однаковий.



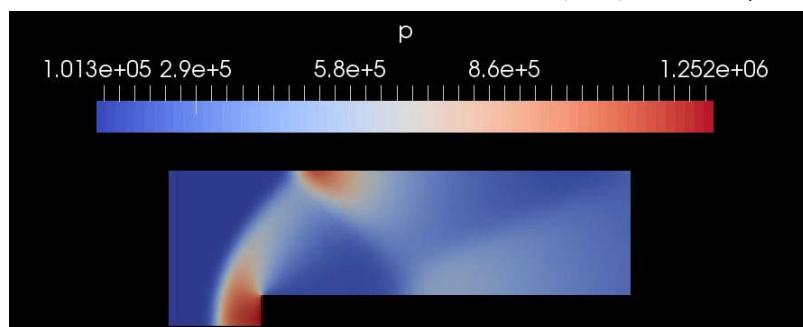
А - Метод Годунова



Б - Метод HLLC



В - Метод Роу



Г - Метод Русанова

Рисунок 4 – Результати розрахунків для уступу у вигляді полів тисків

Результати розрахунків показують, що реалізоване чисельне розв'язання в OpenFOAM за методом Годунова, HLLC, Роу збігається з розв'язаннями між собою. Метод Русанова має невеличку відміну в порівнянні з іншими методами. Це видно за системою стрибків і чисельними значеннями параметрів газу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Greenshields C.J. OpenFOAM User Guide – v.6 – OpenFOAM Foundation Ltd., 2018. – 237 с.
2. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD / D.C. Wilcox. – California: DCW Industries, Inc. – 1993. – 460 p.
3. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications / F.R. Menter // AIAA Journal. – 1994. – V. 32, № 8. – P. 1598-1605.
4. F. Moukalled The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics / F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish – Springer International Publishing Switzerland, 2016. – 791 p.
5. Годунов С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов – М.: Наука 1976. – 400 с.

REFERENCE

1. Greenshields C.J. OpenFOAM User Guide – v.6 – OpenFOAM Foundation Ltd., 2018. – 237 с.
2. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD / D.C. Wilcox. – California: DCW Industries, Inc. – 1993. – 460 p.
3. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications / F.R. Menter // AIAA Journal. – 1994. – V. 32, № 8. – P. 1598-1605.
4. F. Moukalled The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics / F. Moukalled, L. Mangani, M. Darwish – Springer International Publishing Switzerland, 2016. – 791 p.

5. Hodunov S. K. Chyslennoe reshenye mnohomernykh zadach hazovoi dynamyky / S. K. Hodunov, A. V. Zabrodyn, M. Ya. Yvanov – M.: Nauka 1976. – 400 s.

Received 22.04.2024.

Accepted 24.04.2024.

***Computer modeling of supersonic gas flow
in variable cross-section channels using OpenFOAM***

With the development of high-performance computing systems, various software products are being created for mathematical modeling of physical phenomena, including gas-dynamic processes. Today, there are a number of different software packages, both proprietary and open source. One of these open source packages is OpenFOAM.

OpenFOAM has a wide range of capabilities to solve any problem - from complex fluid flows, including chemical reactions, turbulence, and heat transfer, to acoustics, solid mechanics, and electromagnetism.

Let's consider the problem of mathematical modeling of supersonic gas flow in channels of variable cross-section.

When considering problems related to the formation and propagation of discontinuity surfaces in gases, gas leakage from supersonic engine nozzles, interaction of strong compression surges with obstacles, etc., it becomes necessary to solve the equations of gas dynamics.

We consider the flow of supersonic gas in channels of variable cross-section in one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional formulations.

The problem of decay of an arbitrary discontinuity was analyzed in detail by N.E. Kochin in 1928. The algorithm for solving this problem is described in detail. The system of equations for solving the problem of rupture decay in a 3-dimensional formulation for the Cartesian coordinate system in the form of column vectors.

The results of the calculations show that the implemented numerical solution in OpenFOAM using the Godunov, HLLC, and Rowe methods coincide with the solutions of each other. Rusanov's method has a slight difference compared to the other methods. This can be seen in the system of jumps and numerical values of gas parameters.

Keywords: computer modeling, supersonic gas flow, OpenFOAM

Дмитрієва Ірина Сергіївна - к.т.н., доцент, доцент кафедри ІТС Інститут промислових і бізнес технологій, Український державний університет науки і технологій, Україна.

Dmytriieva Iryna Serhiivna - Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of the ITS Department of the Institute of Industrial and Business Technologies, Ukrainian State University of Science and Technology, Ukraine.