DOI 10.34185/1562-9945-6-149-2023-09
УДК 519.8
Л.С. Коряшкіна, С.В. Дзюба

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗМІЩЕННЯ ОБ'ЄКТІВ І ЗОНУВАННЯ ТЕРИТОРІЙ В СИСТЕМАХ ЕКСТРЕНОЇ ЛОГІСТИКИ

Анотація. Представлені математичні моделі процесів розподілу матеріальних ресурсів, що пов'язано з організацією запобіжних заходів у разі загрози або виникнення надзвичай них ситуацій техногенного характеру. Розглянуто: задачі оптимального зонування територій із закріпленням зон за об'єктами соціального призначення для надання послуг з можливістю перекриття зон на випадок, коли найближчий центр не має можливості у повному обсязі надавати послуги; оптимальне розміщення певної кількості нових центрів систем екстреної логістики з одночасним перерозподілом навантаження на всі їх структурні елементи; вибір місць розташування структурних підрозділів на базі існуючих об'єктів. Критерії оптимальності передбачають мінімізацію або часу надання послуги найвіддаленішому об'єкту на заданій території, або сумарної відстані до найб лижчих центрів від споживачів, які щільно розподілені на заданій території. Враховані також організаційні витрати, пов'язані із облаштуванням нових центрів. Математичні моделі запропоновано у вигляді неперервних задач оптимального мультиплексного роз биття множин з лінійним або мінімаксним функціоналом якості. Останній забезпечує та ке розміщення центрів, що задає оптимальне багатократне покриття території (з мінімальним радіусом кратного покриття). Методи розв'язання сформульованих задач розроблено з використанням ЛП релаксації лінійних задач з булевими змінними, теорії двоїстості для зведення отриманих задач нескінченновимірного програмування до задач умовної оптимізації негладкої функції декількох змінних, сучасних методів недиференційованої оптимізації. Програмний додаток, розроблений для зонування і розміщення об'єктів в системах екстреної логістики на основі моделей та методів розв'язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття і покриття множин із залученням ГІС технологій, дозволяє планувати завчасні соціально економічні та організаційно технічні заходи, спрямовані на підвищення безпеки у випадках техно генних ситуацій.
Ключові слова: екстрена логістика, мультиплексне розбиття множин, багатократне кульове покриття, моделювання, оптимізація.

Постановка проблеми. Підвищення рівня техногенної безпеки, зокрема на підприємствах гірничо-металургійної галузі, потребує розвитку фундаментальної та прикладної науки, техніки і технологій, розвитку наукових основ забезпечення захищеності критичної інфраструктури; розробки комплексу організаційних та технічних рішень щодо своєчасних превентивних дій, спрямованих на уникнення надзвичайних ситуацій (НС).

Математичні постановки та методи розв'язання задач оптимізації гуманітарної логістики дозволяють відповідальним особам, які приймають рішення щодо визначення необхідного часу для проведення першочергових кроків та оцінювання кількості і розподілу матеріальних ресурсів за різних сценаріїв НС. У матеріально-технічному забезпеченні гуманітарної допомоги важливими питаннями є визначення раціональної кількості територіально розподілених структур, забезпечення їх підготовленими фахівцями, спеціальною технікою та обладнанням, запасами медикаментів, засобами забезпечення життєдіяльності тощо. Розробка і формування теоретичних і методологічних основ створення і використання інформаційних технологій раціонального територіального розподілу елементів систем гуманітарної логістики є актуальною науково-прикладною проблемою, яка має важливе значення для підвищення техногенної безпеки підприємств гірничо-металургійного комплексу та критичної інфраструктури при НС, для забезпечення сталого розвитку промислових регіонів України.

Дана робота присвячена математичному моделюванні процесів розподілу матеріальних потоків в системах екстреної логістики задля раціональної організації заходів щодо запобігання та усунення наслідків надзвичайних ситуацій на основі системного та оптимізаційного підходу.

Об'єкт дослідження – процеси екстреної логістики в умовах надзвичайних ситуацій техногенного характеру.

Предмет дослідження – моделі та методи оптимального розміщення структурних підрозділів систем екстреної логістики з визначенням зон їх обслуговування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Основними завданнями гуманітарної логістики є аналіз проблем, які пов’язані з можливими катастрофами або надзвичайними ситуаціями, розробка операцій щодо усунення наслідків і управління ситуацією. Характерною особливістю гуманітарної логістики є, перш за все, орієнтація на людину не тільки як на суб’єкта логістичних процесів (кінцевого споживача товарів та послуг або агента, котрий приймає участь у проміжних логістичних процесах), але й як на об’єкта, що

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

накладає додаткові вимоги до рівня безпеки, комфорту і швидкості логістичних операцій.

Питання, які пов'язані із раціональною організацією евакуаційних процесів, дій і заходів щодо запобігання НС, плануванням руху матеріальних і людських потоків під час НС, мають екстрений характер, і тому вони складають в гуманітарній логістиці свою систему досліджень і знань, а саме екстрену логістику [1]. Вона прагне вирішувати логістичні задачі в умовах НС на базі системного підходу, приймати рішення на основі часових і економічних компромісів; відстежувати матеріальні та часові витрати протягом усього логістичного ланцюга.

Сукупність форм, методів і правил організації та управління матеріальними або людськими потоками під час надзвичайних ситуацій складають **систему екстреної логістики** (СЕЛ). Дана система включає підсистеми трьох рівнів: елементного – які забезпечують узгоджене та ефективне функціонування основних ланок логістичного ланцюга (первинні пункти збору, склади, аварійні служби та транспорт); функціонального – що відповідають за організацію матеріальних або людських потоків, управління заготівками, організація правового та інформаційного забезпечення логістичних рішень; інтеграційного – котрі об'єднують усі групи операцій у єдиний процес. Оптимальність і ефективність прийнятих рішень в умовах екстреної ситуації визначається повнотою виявлених обмежень в рамках логістичної системи і економічними компромісами, затвердженими з урахуванням цих обмежень. Аспекти наукового напряму екстреної логістики відображені на рис.1.

Рисунок 1 - Екстрена логістика як напрям наукових досліджень

Планування екстреної допомоги й евакуації є важливим і складним елементом управління надзвичайними ситуаціями. Для обґрунтування управлінських рішень, що враховують багато факторів, а під час, і суперечливі цілі, широкого застосування набуло математичне моделювання. В роботі [2] представлений широкий огляд наукових публікацій, які пов'язані з розробкою математичних моделей і методів розв'язання оптимізаційних задач, що виникають під час розробки комплексу запобіжних заходів щодо евакуації населення та надання екстреної допомоги у разі надзвичайних ситуацій.

В [3] розглянуто задачу одночасної оптимізації розташування аварійних укритій (та/або складів) і координації руху транспортних засобів допомоги між місцем катастрофи та аварійними укриттями. Зосереджуючись на оптимальному розподілі матеріальних ресурсів серед сервісних центрів у процесі подолання наслідків надзвичайних ситуацій, критерієм запропонованої моделі є мінімізація не лише експлуатаційних витрат, але урахування людського чиннику під час надання послуги.

Модель розподілу рятувальних матеріалів для надзвичайних ситуацій у сфері охорони здоров'я в межах мультимодальної транспортної мережі з визначенням найкращого маршруту доставки розроблено в [4]. У цій моделі встановлені пріоритети попиту відповідно до ступенів надзвичайної ситуації для визначення послідовності транспортування. Крім того, автори вводять до розгляду вартість психологічного болю, спричинену дефіцитом рятувальних матеріалів, для компромісу між пріоритетом і задовільнення попиту.

Багатоцільові моделі транспортування і розподілу ресурсів під час надзвичайних ситуацій запропоновано в дослідженнях [5, 6]. Існує певна кількість наукових досліджень, в яких розробляються багатоетапні моделі розподільчих процесів [7, 8]. В роботі [7] запропоновано нову модель розташування-розподілу-інвентаризації, яка зосереджена на запобіганні спалахів інфекційних захворювань за допомогою технології на основі Інтернету речей на етапі реагування на катастрофи. Представлена модель складається з двох етапів; перший – це виявлення випадків інфікування, оперативне переведення хворих у тимчасові госпіталі та розміщення людей в пунктах евакуації. Далі на другому етапі розташовуються розподільчі центри, а предмети допомоги передаються в тимчасові госпіталі та пункти евакуації порівну з метою мінімізації нестачі. В роботах [8, 9] представлено математичні моделі оптимізаційних задач двоетапної та частково-двоетапної евакуації населення із зонуванням постраждалої території. Дворівневий підхід до проблеми розміщення-

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

розподілу об’єктів з розмірами розглянуто в роботі [10]. Оптимізаційну модель розташування укриттів, центрів розподілу допомоги та телекомунікаційних веж на основі нечітких сценаріїв представлено в роботі [11].

Мета дослідження. Підвищення ефективності запобіжних заходів щодо техногенних надзвичайних ситуаціях шляхом розробки моделей і методів оптимізаційних задач, які дозволять завчасно визначати зони екстреної допомоги, проводити організацію логістичних процесів, раціонально розподіляючи транспортні та матеріальні ресурси.

Викладення основного матеріалу. Представимо декілька моделей і методів розв’язання задач оптимального розміщення сервісних центрів або об'єктів соціально-економічного призначення із закріпленням за ними зон для надання послуг, пов’язаних з організацією аварійно-рятувальних та інших невідкладних робіт у разі реальної загрози виникнення надзвичайних ситуацій техногенного характеру. Такими центрами можуть бути служби соціального захисту, склади аварійного постачання й розподілу предметів першої необхідності та ін. Передбачено: 1) побудова мультиплексного розбиття території, тобто перекриття зон на той випадок, коли найближчий центр не зможе надати послугу; 2) оптимальне розміщення певної кількості нових центрів СЕЛ, коли можливості функціонуючих не задовольняють потреби всього регіону.

Постановка задачі. Нехай  – обмежена територія, $\tau_i \in \Omega,\ i = 1,2,\dots,N$, – деякі точки, які називаються центрами (можуть бути фіксованими або їх потрібно визначити), $\rho(x)$ – невід’ємна функція, яка описує попит на послугу (вважатимемо, що в кожній точці x області Ω за допомогою соціологічних досліджень або сучасних геоінформаційних технологій його можна оцінити); $c(x,\tau_i)/w_i$ – вартість надання послуги клієнту $x \in \Omega$ центром τ_i (вважається пропорційною відстані $c(x,\tau_i)$ між точками); a_i – вартість облаштування нового чи модернізації існуючого центру τ_i або його фіксовані організаційні витрати, розраховані на одну умовну одиницю попиту, $i = \overline{1,N}$; $b_1, b_2, \dots, b_N$ – потужності центрів, що визначають максимальний об’єм послуг, який можуть запропонувати відповідні центри. Потрібно здійснити розбиття заданого регіону на області $\Omega_{\sigma_l}, l = \overline{1,L}$, які охоплюють споживачів, що мають одні й ті самі k найближчі сусідні сервісні центри $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$ з N існуючих (можливих). Тут $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}$ – набір індексів центрів, котрі асоціюються з підмножиною Ω_{σ_l}. Розбиття області Ω потрібно здійснити з урахуванням потужності кожного j-го центру та частки γ_j^l ринку послуг, яку воно займає на території Ω_{σ_l}, серед об'єктів $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l}, \dots, \tau_{j_k^l}\}$, що обслуговують дану територію.

Для математичного опису задачі введемо наступні позначення:

$\mathrm{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ – множина всіх індексів центрів;

$\mathrm{M}(\mathrm{N}, k)$ – множина всіх k-елементних підмножин множини N, $|\mathrm{M}(\mathrm{N}, k)| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l, \dots, j_k^l\}, l = \overline{1, L}$, – елементи множини $\mathrm{M}(\mathrm{N}, k)$.

Сукупність підмножин $\{\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}$ з $\Omega \subset E^2$ називається розбиттям ***k***-го порядку множини Ω на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \Omega_{\sigma_2}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$, якщо

$$\bigcup_{l=1}^{L} \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \ \mathrm{mes}\left(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}\right) = 0; \ \sigma_i, \sigma_j \in \mathrm{M}(\mathrm{N}, k), \ i \neq j, \ i, \ j = \overline{1, L},$$

де $\mathrm{mes}(\cdot)$ – міра множини. Ω_{σ_j} є підмножинами ***k***-го порядку множини Ω.

Нехай $\Sigma_\Omega^{N,k}$ – клас всіх можливих розбиттів k-го порядку множини Ω на її підмножини $\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}$:

$$\Sigma_\Omega^{N,k} = \left\{\bar{\omega} = \{\Omega_{\sigma_1}, \dots, \Omega_{\sigma_L}\}: \ \bigcup_{l=1}^{L} \Omega_{\sigma_l} = \Omega, \ mes\left(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}\right) = 0, \ \sigma_l, \sigma_j \in \mathrm{M}(\mathrm{N}, k), i \neq j, \ \ i, j = \overline{1, L}\right\}$$

Задача 1. Неперервна задача оптимального розбиття k-го порядку множини Ω при обмеженнях із розміщенням центрів. Потрібно

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) \to \min_{\bar{\omega} \in \Sigma_\Omega^{N,k}; \ \tau^N \in \Omega^N},$$

$$F(\bar{\omega}, \tau^N) = \sum_{l=1}^{L} \int_{\Omega_{\sigma_l}} \sum_{i \in \sigma_l} (c(x, \tau_i)/w_i + a_i) \rho(x) \, dx,$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: \, i \in \sigma_l}}^{L} \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l: \, i \in \sigma_l}}^{L} \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x) dx \leq b_i, \quad i = \overline{p+1, N}. \tag{2}$$

Тут $x = \left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) \in \Omega$; $c(x, \tau_i)$, $i = \overline{1, N}$ – обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$ функції. Функція $\rho(x)$ – обмежена, невід'ємна на Ω; $w_i > 0, \ a_i \geq 0, \ b_i \geq 0, \ i = \overline{1, N}$, – задані числа; коефіцієнти γ_j^l такі, що для всіх $j = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}$

$$0 \leq \gamma_i^l \leq 1, \ \ \gamma_{j_1^l}^l + \gamma_{j_2^l}^l + \dots + \gamma_{j_k^l}^l = 1. \tag{3}$$

Для коректності задачі 1 мають виконуватися наступні умови:

$0 \leq b_i \leq S, i = \overline{1, N}$; $\sum_{i=1}^{p} b_i \leq S \leq \sum_{i=1}^{N} b_i$; де $\int_\Omega \rho(x) dx = S$;

Характеристичною вектор-функцією підмножини Ω_{σ_l}, що включена до розбиття k-го порядку множини Ω, називається вектор-функція

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

$\lambda^l(x) = (\lambda_1^l(x), \ldots, \lambda_N^l(x))$, визначена на множині Ω, з наступними координатами:

$$\lambda_i^l(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \Omega_{\sigma_l}, \quad i \in \sigma_l, \\ 0 \text{ у протилежному випадку,} \end{cases} i = \overline{1, N},$$

Взагалі до задач оптимального мультиплексного розбиття використовується єдиний підхід: здійснюється ЛП-релаксації задачі, коли невідомим $\hat{\lambda}_i^l$ дозволяється приймати значення на відрізку від 0 до 1, отримана задача зводиться через функціонал Лагранжа до допоміжної скінченновимірної негладкої оптимізаційної задачі, для чисельного розв'язання якої застосовуються сучасні методи недиференційованої оптимізації.

Оптимальний розв'язок задачі 1, сформульованої в еквівалентній формі у термінах характеристичних функцій підмножин k-го порядку, що складають мультиплексне розбиття Ω, отримано у такому вигляді: для $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$ і майже всіх $x \in \Omega$:

$$\hat{\lambda}_i^l(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c(x, \hat{\tau}_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \hat{\psi}_i \le c(x, \hat{\tau}_j)/w_j + a_j + \gamma_j^l \hat{\psi}_j, \\ \quad \forall i \in \sigma_l, \ j \in N \setminus \sigma_l, \\ 0 \ \text{ в протилежному випадку,} \end{cases} \tag{4}$$

де $\hat{\tau}_1, \ldots, \hat{\tau}_N, \hat{\psi}_1, \ldots, \hat{\psi}_N$ є оптимальним розв'язком задачі

$$G(\psi) = \min_{\tau^N \in \Omega^N} G_1(\tau, \psi) \to max, \tag{5}$$

за умов

$$\psi_i \ge 0, \quad i = \overline{p+1, N}, \tag{6}$$

$$G_1(\boldsymbol{\tau}^N, \psi) = \int_\Omega \min_{\substack{\sigma_l \in \mathrm{M}(N,k) \\ l = \overline{1,L}}} \sum_{i \in \sigma_l} \left[c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i \right] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^N \psi_i b_i.$$

Для чисельної реалізації методу від (5), (6) здійснюється перехід до задачі: $\max_{\psi \in E^N} \min_{\tau^N \in \Omega^N} U(\tau^N, \psi)$, де $U(\tau^N, \psi) = G_1(\tau^N, \psi) - Q \sum_{i=p+1}^N max(0, -\psi_i)$, Q – додатне число (більше за множники Лагранжа).

Узагальнимо задачу 1 [12]. Розглянемо математичну модель задачі розміщення нових підрозділів діючої СЕЛ, тобто будемо вважати, що $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ $(m < N)$ є заданими, а координати решти центрів $\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \ldots, \tau_N$ потрібно визначити, $\boldsymbol{\tau}^{N-m} = (\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \ldots, \tau_N) \in \underbrace{\hat{\Omega} \times \ldots \times \hat{\Omega}}_{N-m} = \hat{\Omega}^{N-m}$. Тоді задача має наступний вигляд:

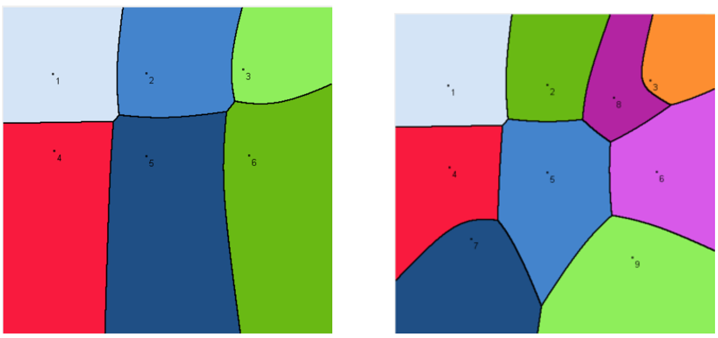
Задача 2. $F(\bar{\omega},\boldsymbol{\tau}^{N-m}) \to \min\limits_{\bar{\omega}\,\in\,\Sigma_{\Omega}^{N,k};\;\tau^{N-m}\,\in\,\widehat{\Omega}^{N-m}}$ за умов (1), (2).

Вочевидь, задача 1 є окремим випадком задачі 2, коли $m = 0$, а, отже, метод розв’язання останньої такий самий, як і для 1, з тією різницею, що мінімізація цільового функціоналу відбувається поряд з розбиттям і за вектором $\boldsymbol{\tau}^{N-m} = (\tau_{m+1}, \tau_{m+2}, \dots, \tau_N) \in \widehat{\Omega}^{N-m}$, а також компоненти вектору узагальненого градієнту функції $U(\tau^{N-m},\psi)$ за першою змінною обчислюються за допомогою скінченних різниць, позаяк зміна цих координат викликає перерозподіл зон відповідальності усіх центрів, і розміщуваних, і діючих. На рис. 2 подано результати розв'язання модельної задачі оптимального розміщення 3-х нових об’єктів (7-го, 8-го та 9-го) мережі з $m = 6$ центрів аварійного постачання з перерозподілом зон їх відповідальності в регіоні $\Omega = \left\{x \in R^2\colon\ 0 \le x^{(i)} \le 10,\ i = 1,2\right\}$ за таких даних: $k = 1,\ N = 9,\ w_i = 1\ \forall i = \overline{1,9};\ \ a = (1; 1.5; 2.7; 1; 1.1; 1.5; 2.2; 1.9; 2), \rho(x) = 1,\ \forall x \in \Omega;$ метрика – евклідова. Табл. 1 демонструє перерозподіл (майже рівномірний) зон відповідальності і зменшення навантаження на об’єкти мережі. Значення функціоналу зменшилось майже на 10% з 349.54 до 314.345 одиниць.

Таблиця 1

Навантаження

№ центру	Навантаження на центр	
	до	після
	перерозподілу	
1	17.499	13.215
2	13.727	10.775
3	19.432	9.215
4	17.033	11.707
5	14.038	10.117
6	18.267	11.034
7	0	9.125
8	0	11.105
9	0	13.705



а б

Рисунок 2 - Монопольні зони обслуговування для центрів: а – шести фіксованих, б – шести фіксованих і трьох оптимально розміщених

Як поширюється зона обслуговування певного центру із збільшенням кратності розбиття, можна простежити в першому рядку табл. 2, де представлено зона відповідальності 3-го центру у випадку розбиття на монополії, дуп-

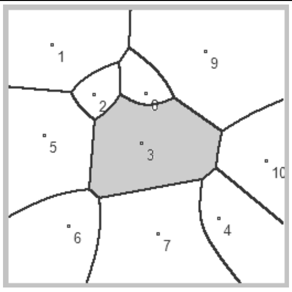
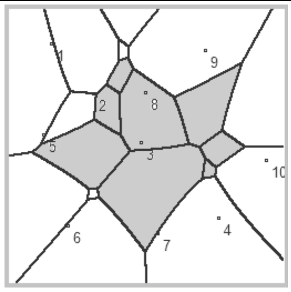
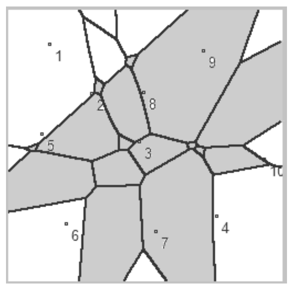
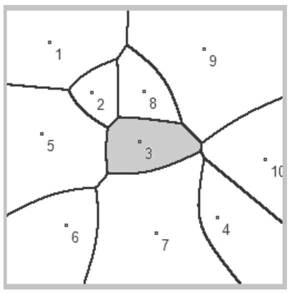
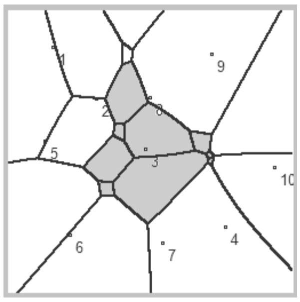
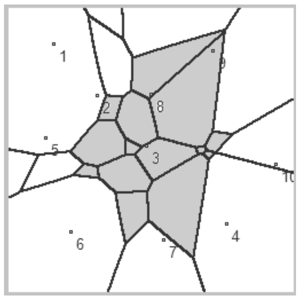
ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

лексного та триплексного розбиття. У другому рядку таблиці наведено оптимальні розбиття і сфера обслуговування для того самого 3-го центру, але у випадку обмежених потужностей 1-го, 3, і 4-го центрів за тих самих інших вихідних даних, що і для задач з першого рядка таблиці. Із зменшенням потужностей центрів зменшуються і зони їх відповідальності.

Далі розглянемо задачу оптимального розміщення підрозділів систем екстреної логістики з метою мінімізації часу надання послуги навіть найвіддаленішому об’єкту на заданій території, причому для центрів потрібно визначити сервісні зони з урахуванням можливості їх перекриття.

Таблиця 2

Обмежені потужності центрів та границі між підмножинами

№	Вихідні дані: N, b, a, w	Оптимальне розбиття k-го порядку. Зона обслуговування для першого центру		
		$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
1	$N = 10$, $a = (1,2,1,2,1,2,1,2,1,2)$, $b_i = 100, \forall i = \overline{1,N}$, $w_i = 1, \quad \forall i = \overline{1,N}$			
2	$N = 10$, $a = (1,2,1,2,1,2,1,2,1,2)$, $b_{1,4} = 10$; $b_3 = 3$; $b_{2,5,6,7,8,9,10} = 100$; $w_i = 1, \forall i = \overline{1,N}$			

Математична модель задачі є задачею про мінімальне k–кратне с-кульове покриття, яка записується у такий спосіб: знайти величину

$$\bar{R}(\lambda^*(\cdot), \tau_*^N) = \inf_{(\tau_1,\dots,\tau_N)\in\Omega^N} \sup_{x\in\Omega} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_N^k} \max_{i=\overline{1,N}} c(x,\tau_i)\lambda_i(x), \qquad (7)$$

де $\Lambda_N^k = \{\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_N)\colon \lambda_i = 0 \vee 1,\ i = \overline{1,N};\ \sum_{i=1}^N \lambda_i = k\}$, а також вектор-функцію $\lambda^*(\cdot)\colon \quad \forall x \in \Omega \quad \lambda^*(x) \in \Lambda_N^k$, та вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*,\dots,\tau_N^*) \in \Omega^N \subset E_2^N$, за яких у виразі (7) досягається нижня грань.

Вектор-функція $\lambda(\cdot)$ використовується для конструктивного запису математичної моделі задачі та є проміжним результатом, оскільки містить інформацію про те, які саме k центрів є найближчими до кожної точки з Ω.

Математичну формалізацію задачі можна здійснити і за допомогою моделей неперервних задач мультиплексного розбиття множин:

Задача 3. Потрібно за умов (1), (2) забезпечити

$$F_R(\bar{\omega},\tau^N) = \max_{l=\overline{1,L}} \sup_{x\in\Omega_{\sigma_l}} \max_{i\in\sigma_l}(c(x,\tau_i)/w_i + a_i)\rho(x) \to \min_{\substack{\bar{\omega}\in\Sigma_\Omega^{N,k} \\ \tau^N\in\Omega^N}}, \quad (8)$$

Задача 3 є задачею оптимального багатократного покриття множини при обмеженнях з оглядом на те, що за певних вихідних даних цільовий функціонал визначає величину радіуса оптимального покриття $R(\tau_*^N) = \inf_{\tau^N} \sup_{x\in\Omega} \min_{i=1,\dots,N} c(x,\tau_i)$.

Методи багатократного кульового покриття розроблені з використанням елементів теорії неперервних задач оптимального розбиття множин і передбачають редукцію до задач умовної оптимізації недиференційованих функцій, для розв'язування яких залучається апарат штрафних функцій та субградієнтні методи. Крім того, методи розв'язання задач оптимального багатократного кульового покриття з розміщенням центрів куль використовують так звану «регуляризацію» цільового функціоналу задачі задля забезпечення уникнення розташування центрів куль занадто близько один від одного.

Припустимо тепер, що центри можуть розташовуватися лише на певних об'єктах або місцях $v_m \in T,\ m = 1,\dots,M,\ T \subseteq \Omega$, які визначені координатами й вартістю організації в них логістичних хабів. Кількість потенційних місць є більшою за кількість центрів, які потрібно розмістити. У такому випадку задача носить частково комбінаторний характер, адже з усіх можливих місць розташування потрібно виділити такі N, $N < M$, за яких функціонал (8) набуває найменшого значення [13].

Задача оптимального вибору центрів τ_i з множини T і визначення зон їх обслуговування в регіоні Ω з метою мінімізації максимально можливого часу надання послуги будь-яким з k найближчих до споживача центрів математично записується у такий спосіб: знайти вектор $y^* = \{y_m^*\}_{m=\overline{1,M}}$, і відповідну вектор-функцію $\lambda^*(\cdot)$, за яких

$$\bar{R}(y,\lambda(\cdot)) = \sup_{x\in\Omega} \min_{\lambda(x)\in\Lambda_M^k} \max_{m=\overline{1,M}} c(x,v_m)\lambda_m(x) \to \min \quad (9)$$

і виконуються умови:

$$\sum_{m=1}^{M} y_m = N, \quad (10)$$

$$\sum_{m=1}^{M} \lambda_m(x) = k\ \forall x \in \Omega. \quad (11)$$

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

$$\lambda_m(x) \le y_m \ \forall m = \overline{1, M}, \forall x \in \Omega; \tag{12}$$

$$\lambda_m(x) = 0 \vee 1, \ m = \overline{1, M}; \forall x \in \Omega; \tag{13}$$

$$y_m = 0 \vee 1, \ \ m = \overline{1, M}, \tag{14}$$

$$\nu_m \in T, \ m = 1, \dots, M. \tag{15}$$

Тут змінні y_m і $\lambda_m(x)$ $\forall x \in \Omega$, є бінарними, для яких $y_m = 1$, якщо центр розміщений в точці $\nu_m \in T$, і y_m =0, якщо ν_m залишилася незадіяною, $m = 1, \dots, M$; а

$$\lambda_m(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x - \text{у зоні відповідальності центру } \nu_m, \\ 0 \text{ у протидлежному випадку, } m = \overline{1, M}, \end{cases}$$

В задачі (9) – (15) служби, що розміщуються, вважаються однаковими об'єктами. Якщо кожен з $\tau_i, i = \overline{1, N}$, характеризується певними параметрами, що відрізняють їх один від одного, так само, як і місця можливого розміщення цих об'єктів можуть мати різні властивості, то формою представлення змінних в задачі має бути матриця з елементами $\beta_{im}, i = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}$, такими що

$$\beta_{im} = \begin{cases} 1, \text{ якщо центр } \tau_i \text{ розміщується в точці } \nu_m, \\ 0, \text{ в протилежному випадку,} \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_{im} \le 1 \ \forall m = \overline{1, M}, \quad \sum_{m=1}^{M} \beta_{im} = 1 \ \forall i = \overline{1, N}.$$

Тоді має місце представлення $\tau_i = \sum_{m=1}^{M} \beta_{im} \nu_m$, $i = \overline{1, N}$.

Припустимо, що для функціонування нових центрів потрібно ресурсів у розмірі A ум. од., а організація центру в точці ν_m – a_m, $m = \overline{1, M}$. Тоді має бути враховано наступне обмеження:

$$\sum_{m=1}^{M} a_m \, y_m \le \text{A}, \tag{16}$$

і ставиться задача: знайти такі $y * = \{y_m^*\}_{m=\overline{1,M}}$, і $\lambda^*(x), x \in \Omega$, що задовольняють умови (10) – (16) і мінімізують функціонал (9).

Рис. 3 демонструє результати 3-кратного покриття заданої області, утвореного 11-ма центрами, вибраними з 17 заданих. Праворуч від охопленої та розділеної області вказано відповідність кольору зони та номерів ([i,j] або [i,j,k]) центрів, що її обслуговують. Покриття здійснено на основі евклідової метрики, що доцільно, наприклад, коли розміщені центри доставляють матеріальні ресурси засобами транспортної авіації. Відстань між центрами в межах міста краще описувати l_1-метрикою. На рис. 4 подано 2-кратне покриття області, згенероване 10-тю центрами, розташованими на наборі з 15 точок, з використанням l_1-метрики. В усіх наведених прикладах a_i згенеровані випадково з множини $\{1,2,3,4\}$ для кожного $i = \overline{1, N}$; $A = 2N$.

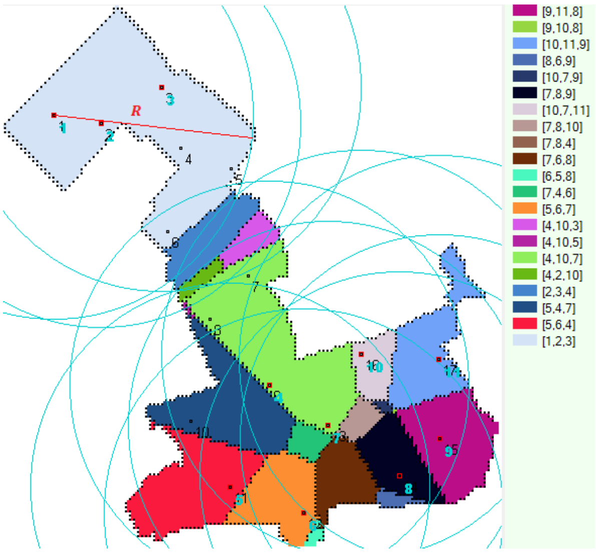


Рисунок 3 - Мінімальне 3-кратне покриття території зонами обслуговування 11 центрів, вибраних з 17 потенційних

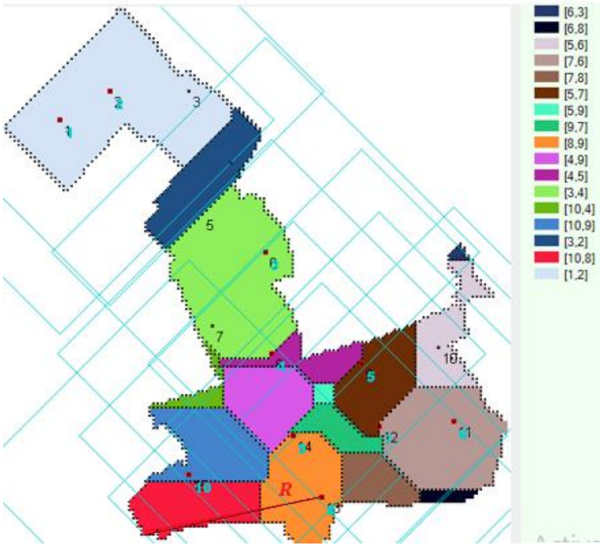


Рисунок 4 - Мінімальне 2-кратне покриття зонами обслуговування 10-ти центрів, вибраних з 15 заданих, l1-метрика

Висновки та перспективи подальших досліджень. Представлені математичні моделі та методи сегментації території щодо зон обслуговування центрів у вигляді неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин, які на відміну від відомих моделей та методів, дозволяють розподіляти споживачів послуг за критеріями мінімізації відстані до декількох найближчих сервісних пунктів із врахуванням їх можливостей, відображаючи спільне обслуговування мережею центрів споживачів, неперервно розподілених на певній території. Обґрунтовано використання моделей неперервних задач оптимального розбиття континуальної множини з розміщенням центрів підмножин та додатковими зв'язками для математичного опису розподілення матеріальних потоків в ієрархічних системах екстреної логістики. Розроблено модель частково-двоетапного евакуаційного процесу, яка є узагальненням неперервної задачі оптимального розбиття множин, позаяк однією із складових оптимального розв’язку її є дворівневе зонування території. Моделі узагальнено на випадок реструктуризації діючих елементів систем, коли певна кількість їх реформується.

Розроблені моделі та методи розв’язання неперервних задач оптимального мультиплексного розбиття множин використано у програмному додатку для зонування і розміщення об’єктів в системах екстреної логістики, що дозволяє планувати завчасні соціально-економічні та організаційні заходи, спрямовані

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

на підвищення техногенної безпеки, зокрема на підприємствах гірничо-металургійної галузі.

Роботу виконано у рамках державної бюджетної тематики за номером 0123U100011.

ЛІТЕРАТУРА

1. Коряшкіна Л.С., Дзюба С.В. (2023). Перерозподіл навантаження в системі екстреної логістики за рахунок оптимального розміщення її нових підрозділів. *International scientific-practical conference* “Modern trends and prospects for the development of science, education and society”: conference proceedings (Aarhus, Denmark, August 10, 2023). Aarhus, Denmark: Scholarly Publisher ICSSH, 2023. – C. 42 – 43.

2. Hezam, I.M., Nayeem, Mk., Lee, G.M. (2021). A Systematic Literature Review on Mathematical Models of Humanitarian Logistics. *Symmetry,* 13(1):11. https://doi.org/10.3390/sym13010011

3. Seraji H., Tavakkoli-Moghaddam R., Asian S., Kaur H. (2022). An integrative location-allocation model for humanitarian logistics with distributive injustice and dissatisfaction under uncertainty. *Annals of Operations Research*, Springer, vol. 319(1), p. 211-257, December. DOI: 10.1007/s10479-021-04003-5

4. Weng X, Duan S, Zhang J, Fan H. (2024). A Material Allocation Model for Public Health Emergency under a Multimodal Transportation Network by Considering the Demand Priority and Psychological Pain. *Mathematics,* 12(3):489. https://doi.org/10.3390/math12030489

5. Tlili, T., Abidi, S., & Krichen, S. (2018). A mathematical model for efficient emergency transportation in a disaster situation. *American Journal of Emergency Medicine*, 36, 1585–1590. DOI:10.1016/j.ajem.2018.01.039

6. Safaei, A.S., Farsad, S., Paydar, M.M. (2018). Emergency logistics planning under supply risk and demand uncertainty. *Oper Res Int J*. https://doi.org/10.1007/s12351-018-0376-3

7. Ehsani, B., Karimi, H., Bakhshi, A., Aghsami, A., Rabbani, M. (2023). Designing humanitarian logistics network for managing epidemic outbreaks in disasters using Internet-of-Things. A case study. *Computers and Industrial Engineering*. 175:C. Online publication date: 1-Jan-2023. https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108821

8. Koriashkina, L., Us, S., Odnovol, M., Stanina, O., Dziuba, S.(2024). Two-stage problems of optimal location and distribution of the humanitarian logistics system’s structural subdivisions. *Naukovyi visnyk Natsionalnoho hirnychoho universytetu*, 1.

9. Дзюба, С., Коряшкіна, Л., Станіна, О., Лубенець, Д. (2023). Математичні моделі оптимізаційних задач частково-двоетапної евакуації населення із зонуванням постраждалої території. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 3, С. 12 – 16. doi: https://doi.org/10.32782/IT/2023-3-2
10. Mallozzi, L., Puerto, J., Rodríguez-Madrena, M. (2019). On Location-Allocation Problems for Dimensional Facilities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer, vol. 182(2): 730-767, August. DOI: 10.1007/s10957-018-01470-y
11. Mohamadi, A., Yaghoubi, S., Pishvaee, M.S. (2019). Fuzzy multi-objective stochastic programming model for diaster relief logistics considering telecommunication infrastructures: a case study. *Oper Res Int J*, 19(1):59-99
12. Коряшкіна, Л., Сазонова, М., Udновол, М. (2023). Алгоритми територіальної сегментації для мережі сервісних центрів із перекриттям зон обслуговування. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 2, 12–25. doi: https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-2
13. Dziuba, S., Bulat, A., Koriashkina, L., Blyuss, B. (2023). Discrete-Continuous Model of the Optimal Location Problem for the Emergency Logistics System. Available at SSRN: http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4401341

REFERENCES

1. Koriashkina, L.S., Dziuba, S.V. (2023). Pererozpodil navantazhennia v systemi ekstrenoi lohistyky za rakhunok optymalnoho rozmishchennia yii novykh pidrozdiliv. *International scientific-practical conference* “Modern trends and prospects for the development of science, education and society”: conference proceedings (Aarhus, Denmark, August 10, 2023). Aarhus, Denmark: Scholarly Publisher ICSSH, 2023. – C. 42 – 43.
2. Hezam, I.M., Nayeem, Mk., Lee, G.M. (2021). A Systematic Literature Review on Mathematical Models of Humanitarian Logistics. *Symmetry*; 13(1):11. https://doi.org/10.3390/sym13010011
3. Seraji H., Tavakkoli-Moghaddam R., Asian S., Kaur H. (2022). An integrative location-allocation model for humanitarian logistics with distributive injustice and dissatisfaction under uncertainty. *Annals of Operations Research*, Springer, vol. 319(1), p. 211-257, December. DOI: 10.1007/s10479-021-04003-5
4. Weng, X., Duan, S., Zhang, J., Fan, H. (2024). A Material Allocation Model for Public Health Emergency under a Multimodal Transportation Network by Considering the Demand Priority and Psychological Pain. *Mathematics*, 12(3):489. https://doi.org/10.3390/math12030489

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)

5. Tlili, T., Abidi, S., Krichen, S. (2018). A mathematical model for efficient emergen-emergency transportation in a disaster situation. *American Journal of Emergency Medicine*, 36, 1585–1590. DOI:10.1016/j.ajem.2018.01.039
6. Safaei, A.S., Farsad, S., Paydar, M.M. (2018). Emergency logistics planning under supply risk and demand uncertainty. *Oper Res Int J*. https://doi.org/10.1007/s12351-018-0376-3
7. Ehsani, B., Karimi, H., Bakhshi, A., Aghsami, A., Rabbani, M. (2023). Designing humanitarian logistics network for managing epidemic outbreaks in disasters using Internet-of-Things. A case study. *Computers and Industrial Engineering*. 175:C. Online publication date: 1-Jan-2023. https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108821
8. Koriashkina, L., Us, S., Odnovol, M., Stanina, O., Dziuba, S.(2024). Two-stage problems of optimal location and distribution of the humanitarian logistics system's structural subdivisions. *Naukovyi visnyk Natsionalnoho hirnychoho universytetu*, 1.
9. Dziuba S., Koriashkina, L., Stanina, O., Lubenets, D. (2023). Mathematical models of optimization problems of partially two-stage population evacuation with territory segmentation. *Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security*, 3, 13–21, doi: https://doi.org/10.32782/IT/2023-3-2
10. Mallozzi, L., Puerto, J., Rodríguez-Madrena, M. (2019). On Location-Allocation Problems for Dimensional Facilities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer, vol. 182(2): 730-767, August. DOI: 10.1007/s10957-018-01470-y
11. Mohamadi, A., Yaghoubi, S., Pishvaee, M.S. (2019) Fuzzy multi-objective stochastic programming model for diaster relief logistics considering telecommunication infrastructures: a case study. *Oper Res Int J*, 19(1): 59-99
12. Koriashkina, L., Sazonova, M., Odnovol, M. (2023). Algorithms of territorial segmentation for a facility network with overlapping service zones. Information Technology: Computer Science, Software Engineering and Cyber Security, 2, 12–25. doi: https://doi.org/10.32782/IT/2023-2-2
13. Dziuba, S., Bulat, A., Koriashkina, L., Blyuss, B. (2023). Discrete-Continuous Model of the Optimal Location Problem for the Emergency Logistics System. Available at SSRN: http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4401341

Received 15.12.2023.
Accepted 19.12.2023.

Mathematical models and methods of objects' location with area zoning in emergency logistics

The mathematical models for distribution processes related to organizing precautionary measures in the event of threats or occurrences of man-made emergencies are presented. The tasks include optimal zoning of territories with the fixing of zones by ob-

jects of social purpose for service provision. Provision is made for: the possibility of overlapping zones in case the nearest center cannot provide the service; optimal placement of a certain number of new centers of emergency logistics systems with simultaneous redistribution of the load on all their structural elements; the selection of locations of structural subdivisions based on existing facilities. The optimality criteria involve minimizing either the time to provide the service even to the most remote object in the given territory, or the total distance to the nearest centers from consumers that are densely distributed in the given territory, and/or the organizational costs associated with the arrangement of new centers. Mathematical models are proposed in the form of continuous problems of optimal multiplex partitioning of sets with a linear or minimax functional of quality. The latter provides such placement of centers that provides optimal multiple coverage of the territory (with a minimum radius of multiple coverage). Methods for solving the formulated problems were developed using LP-relaxation of linear problems with Boolean variables, duality theory to reduce the initial problems of infinite-dimensional programming to problems of conditional optimization of a non-smooth function of several variables, and modern methods of non-differentiated optimization.
Key words: emergency logistics, multiplex partitioning of sets, multiple circle coverage, modeling, optimization

Коряшкіна Лариса Сергіївна – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу і управління, Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Україна.

Дзюба Сергій Володимирович – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, учений секретар, Придніпровський науковий центр НАН України та МОН України, Україна.

Koriashkina Larysa Sergiyivna – Candidate of Physics and Mathematics Science, Associate Professor of the Department of System Analysis and Control, Dnipro University of Technology, Ukraine.

Dziuba Serhii Volodymyrovych – Doct. Sc. (Tech.), Associate Professor, scientist secretary Pridniprovsky Scientific Center of the National Academy of Sciences of Ukraine and of Ministry of Education and Science of Ukraine, Ukraine.

ISSN 1562-9945 (Print)
ISSN 2707-7977 (Online)