

УДК 621.771.06:621.745.2

В.А. Хвист, А.Ю. Гридин, И.К. Огинский

**СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ СТАЛЬНОЙ ПОЛОСЫ В  
ВАЛКОВОМ КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ ПРИ ПОЛУЧЕНИИ  
БИМЕТАЛЛИЧЕСКОГО АЛЮМИНЕВО-СТАЛЬНОГО КОМПОЗИТА  
СПОСОБОМ ВАЛКОВОЙ РАЗЛИВКИ-ПРОКАТКИ**

*В работе описаны мероприятия, принятые для решения проблемы стабилизации стальной полосы-заготовки в двухвалковом кристаллизаторе при получении биметаллических алюминиево-стальных полос способом валковой разливки-прокатки. Эффективность примененных решений проиллюстрирована результатами экспериментов, проведенных на лабораторной установке.*

*Ключевые слова: БИМЕТАЛЛ, ВАЛКОВАЯ РАЗЛИВКА-ПРОКАТКА, СТАБИЛИЗАЦИЯ, КОМПОЗИЦИОННЫЙ МАТЕРИАЛ, СТАЛЬ-АЛЮМИНИЙ.*

*В роботі описані заходи, прийняті для вирішення проблеми стабілізації сталевий штаби-заготовки у двовалковому кристалізаторі при отриманні біметалічних алюмінієво-сталевих смуг способом валкової розливки-прокатки. Ефективність застосованих рішень проілюстрована результатами експериментів, проведених на лабораторній установці.*

*Ключеві слова: БИМЕТАЛ, ВАЛКОВА РОЗЛИВКА-ПРОКАТКА, СТАБІЛІЗАЦІЯ, КОМПОЗИЦІЙНИЙ МАТЕРІАЛ, СТАЛЬ-АЛЮМІНІЙ.*

*This paper describes the activities undertaken to solve the problem of steel strip stabilizing in a twin-roll crystallizer for obtaining the bimetallic aluminum-steel strips by method of twin-roll casting. The effectiveness of solutions is illustrated by results of experiments carried out at laboratory equipment.*

*Keywords: BIMETAL, TWIN-ROLL CASTING, STABILIZATION, COMPOSITE MATERIAL, STEEL-ALUMINUM.*

Биметаллы – материалы, состоящие из двух слоев разнородных металлов, – представляют особый класс конструкционных материалов с широкими эксплуатационными и технологическими характеристиками. В основе их практического применения лежит возможность создания композитов с заранее заданными или даже уникальными свойствами. Они позволяют также экономнее использовать остродефицитные и дорогостоящие металлы и сплавы.

Преимущества биметаллов и их высокие потребительские характеристики предопределили развитие их производства и применения в различных отраслях промышленности. Ведущее место в производстве и потреблении многослойных материалов традиционно занимают коррозионностойкие биметаллы на основе алюминия или его сплавов и стали.

В многослойном композите слои, как правило, выполняют различные функции. Основной слой чаще всего изготавливается из менее дорогостоящего материала и выполняет функцию силового элемента, имея большую, чем плакирующий слой, толщину. Плакирующий слой из более

ценных и дефицитных металлов и сплавов может иметь высокую коррозионную стойкость, электропроводность, износостойкость и так далее, или выполнять функцию декоративного покрытия. Сочетание в одном материале различных свойств является основой эффективности использования биметаллов [1].

Биметаллический листовой прокат, плакированный коррозионностойкими сталями, широко используют взамен нержавеющей сталей и цветных металлов, а также для продления срока службы оборудования из черных металлов.

В нефтяном машиностроении двухслойная сталь применяется для изготовления реакторов отгонки бензина из сырой нефти, смесителей, реакторов для рафинирования, отстойников, теплообменников, насосов, ректификационных колонн, коксовых камер и другого оборудования, работающего в средах сернистой нефти, гудронов, мазутов, газосырьевых и газопродуктовых смесей, содержащих водород, сероводород и т.д.

В химическом машиностроении композиты применяются при изготовлении кристаллизаторов, конденсаторов, вакуум-аппаратов, реакторов, варочных котлов, автоклавов, теплообменников, вымывных резервуаров, реакционных колонн и другого оборудования [2].

В целлюлозно-бумажной промышленности биметаллы применяют для изготовления варочных котлов, корпусов и ванн сгустителей, смесителей для бумажной массы, резервуаров для отходов, теплообменников, резервуаров для различных жидкостей и др.

В легкой и пищевой промышленности - для производства оборудования молочных заводов, перегонных кубовых установок, резервуаров для брожения, поточных линий для изготовления полуфабрикатов, барабанных сушилок и т.д.

В судостроении коррозионностойкий биметалл находит применение в качестве материала для изготовления различных деталей опреснителей, цистерн, емкостей, деталей корпусных конструкций, переходников и т.д.

В связи с широкой применимостью биметаллов в настоящее время используется несколько основных способов их получения, таких как клинопрессовая сварка, сварка взрывом и деформационная сварка прокаткой. Выбор конкретного метода производства обуславливается формой исходной заготовки и геометрией готового изделия, а также необходимыми свойствами зоны соединения и экономическими показателями процесса.

Сущность клинопрессовой сварки заключается в соединении разнородных, резко отличающихся по твердости, материалов путем нагрева соединяемых изделий на воздухе или в защитной среде и последующем впрессовывании детали из более твердого материала в более пластичный [3]. На рисунке 1 показаны две возможные схемы реализации данного способа получения биметаллических изделий. Как видно из представленной иллюстрации, данный метод ориентирован в основном на соединение

трубчатых конструкций и служит для производства различных переходников. Для производства более востребованного в машино- и судостроении листового биметаллического продукта этот способ соединения разнородных материалов использован быть не может.

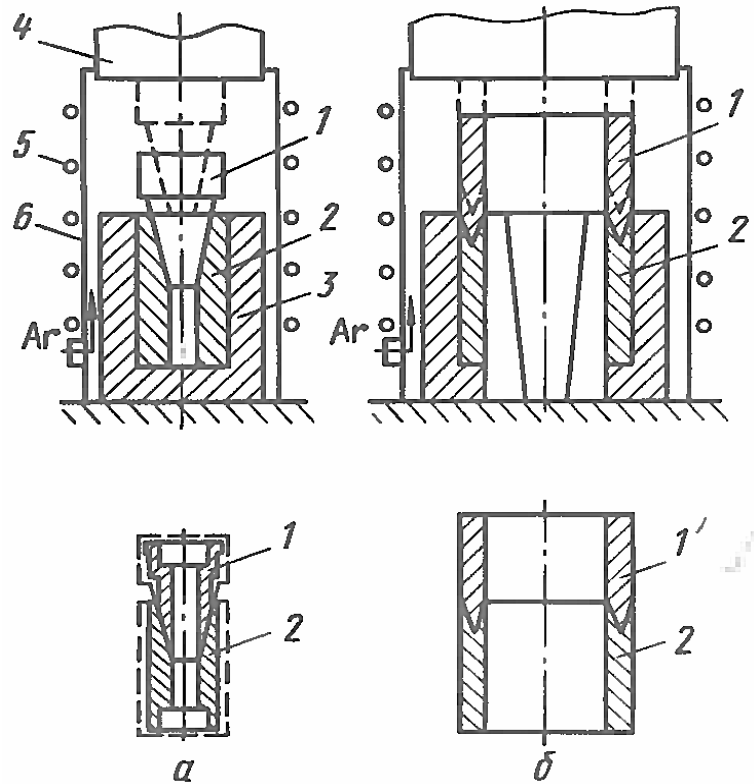


Рисунок – 1. Различные виды технологических схем клинопрессовой сварки трубчатых переходников малого (а) и большого (б) диаметра из разнородных материалов: 1 – деталь из более твердого материала; 2 – деталь из более мягкого материала; 3 – прессформа; 4 – шток прессы; 5 – нагреватель; 6 – корпус камеры

Более универсальной с точки зрения формы соединяемых заготовок из разнородных металлов является технология сварки взрывом. Процесс соединения материалов происходит за счет их высокоскоростного соударения, в ходе которого плакирующий слой метается на основу направленной энергией заряда взрывчатого вещества [4]. Качество сварки при данном способе производства многослойных композиций является наиболее высоким за счет образования на поверхности контакта специфического волнового рельефа, а также локального деформационного упрочнения материалов в приконтактных зонах. Однако у этого метода есть ряд существенных недостатков:

1. Повышенная опасность производства, связанная с использованием и хранением взрывчатых веществ.

2. Необходимость создания специально оборудованных и снабженных подъездными путями и транспортом полигонов, занимающих значительную площадь и, как правило, удаленных на некоторое расстояние от металлургических заводов.

3. Дискретность и локализация процесса, не позволяющая получать длинномерную композитную металлопродукцию.

Совокупность перечисленных недостатков приводит к высокой себестоимости изделий, изготовленных с применением технологии сварки взрывом, что ограничивает возможность их использования в гражданской технике.

Сварка прокаткой является наиболее высокопроизводительным и экономичным процессом получения биметаллов из перечисленных выше. Технология прокатки применяется для производства листов, полос, лент, фасонных профилей, прутков, проволоки как из разнородных металлов, так и из металлов, близких по химическому составу, но отличающихся по своим физическим и механическим свойствам [5]. Соединение компонентов биметалла происходит при их совместной горячей или холодной пластической деформации, осуществляемой в прокатных станах в вакууме или на воздухе.

Исходной заготовкой для получения биметалла служит пакет, состоящий из двух различных слоев металла в виде слябов и пластин. Для получения одного листа биметалла (рис.2а) обычно применяют одинарные пакеты, двойные симметричные пакеты – для получения двух листов биметалла (рис.2б) и тройные пакеты – для получения трех листов биметалла, два из которых двухслойные, а один трехслойный (рис.2в).

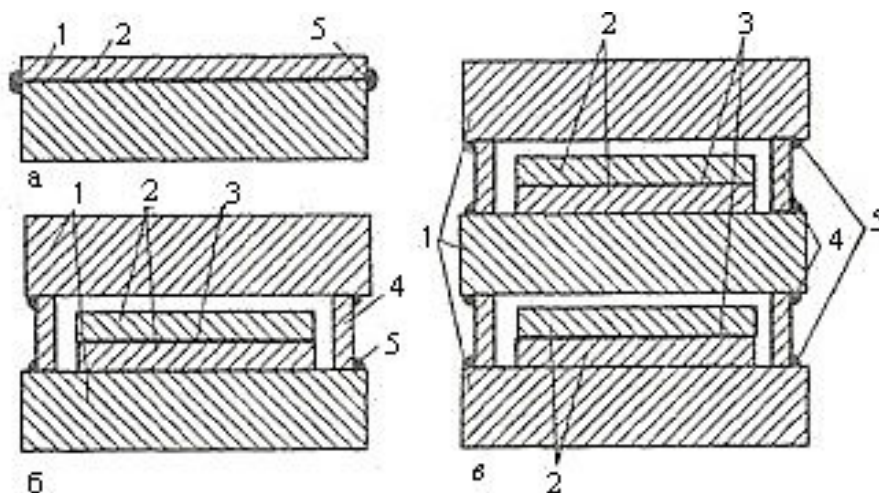


Рисунок – 2. Конструкции пакетов для сварки прокаткой:

- 1 – основной слой; 2 – плакирующий слой; 3 – разделительный слой;  
4 – технологическая планка; 5 – сварной шов

Сварку прокаткой применяют для получения двух- или трехслойных биметаллов, состоящих из стальной основы и плакирующих слоев из цветных металлов, например сталь + медь, сталь + латунь, медь + алюминий, алюминий + титан, алюминий + сталь + алюминий. Для получения доброкачественного соединения слоев в биметалле требуется значительная деформация при сварке прокаткой и чистота соединяемых поверхностей, причем особенно важно отсутствие органических веществ.

При сварке прокаткой соединение образуется в условиях высоких давлений пластической деформации и малой длительности взаимодействия. На начальной стадии взаимодействия между листами разнородных материалов происходит смятие микронеровностей и увеличение контактных поверхностей, приводящее вследствие значительной деформационной вытяжки к утонению и частичному разрушению оксидных пленок. В местах контакта между образованными ювенильными поверхностями двух материалов возникают зоны схватывания, между которыми могут оставаться полости, содержащие газы, а также оксидированные участки исходной поверхности. Возможность дальнейшего увеличения числа и площади областей схватывания определяется развитием процесса адсорбции остаточных газов металлом. При дополнительной пластической деформации, по мере поглощения газа металлом и развитии диффузионных процессов, зоны схватывания расширяются, область контакта превращается в непрерывную межфазную границу.

Недостатком способа получения биметаллических листов продольной прокаткой является необходимость использования в качестве заготовки тонких полос для каждого из компонентов будущего плоского композита, изготовление которых по традиционным технологиям предусматривает большое число операций, включая разливку толстых слябов, многопроходную прокатку с промежуточными подогревами, обработку поверхности полупродукта травлением или механическим путем и т.д.

Новый перспективный метод изготовления двух- и трехслойных биметаллических полос с применением машин непрерывной валковой разливки-прокатки, обеспечивающий сокращение технологической цепочки, уменьшение энергозатрат и выбросов вредных веществ в атмосферу, реализован на практике в Институте технологий г. Осака [6, 7, 8]. Японским ученым удалось получить плоский композит, состоящий из двух различных алюминиевых сплавов. Эксперименты проводились для комбинаций сплавов 3xxx-, 4xxx-, 5xxx-, 6xxx- и 8xxx-серий. Однако процесс получения биметаллических полос из разнородных материалов – например достаточно востребованного алюминиево-стального композита – способом валковой разливки-прокатки до недавнего времени на практике реализован не был.

Таким образом, целью научно-исследовательской работы стала разработка технологии получения биметаллических алюминиево-стальных полос, включающей в себя основные и вспомогательные операции, необходимые средства управления процессом разливки-прокатки для создания качественного двухслойного композита с высокой прочностью соединения. В ходе проведения экспериментальных исследований была выявлена необходимость стабилизации положения стальной полосы, подаваемой в кристаллизатор. Целью данной статьи является освещение примененных конструкторских и технологических решений, призванных

обеспечить стабильность стальной полосы в зоне кристаллизации-деформации, а также оценка их эффективности. К мероприятиям, осуществленным для реализации поставленной цели, относится разработка вводной проводки, использование разматывателя для подачи стальной ленты, а также приложение заднего и переднего натяжения к твердой полосе и готовому биметаллическому продукту соответственно.

Впервые эксперименты в данном направлении были осуществлены в рамках сотрудничества между кафедрой обработки давлением Национальной металлургической академии Украины и Институтом материаловедения Ганноверского университета им. Лейбница. Базой для проведения исследований стала экспериментальная установка валковой разливки-прокатки, созданная в результате совместной работы украинских и немецких специалистов. Отличительными особенностями конструкции разработанной машины являются интенсифицированный теплоотвод, организованный по всей внутренней поверхности составных водоохлаждаемых валков; возможность осуществления разливки в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а также при промежуточных положениях клетки. Для получения на установке литых полос с заданной поперечной клиновидностью предусмотрено отдельное перемещение нажимных винтов. Более подробная техническая информация об экспериментальной машине валковой разливки-прокатки приведена в работе [9].

Предлагаемый способ получения биметаллической алюминиево-стальной полосы состоит в следующем. Стальная лента толщиной от 0,2 до 1,5 мм и шириной от 50 до 200 мм с предварительно подготовленной поверхностью подается в пространство между вращающимися навстречу друг другу валками-кристаллизаторами непосредственно перед началом разливки. Предварительная обработка поверхности материала заключается в удалении с нее окисных пленок и локальных загрязнений. После позиционирования полосы через плоское сопло в зазор между одним из валков с одной стороны и стальной плоской заготовкой с другой стороны подводится расплав алюминия. Подготовленная поверхность стали обращена при этом к жидкому материалу. Расплавленный алюминий заполняет межвалковое пространство, прижимает стальную заготовку к поверхности второго валка, формируется зона кристаллизации-деформации постоянной протяженности, которая обеспечивает устойчивый процесс сквозного затвердевания расплава и его последующее пластическое формоизменение между водоохлаждаемым вращающимся инструментом. При значительных толщинах алюминиевого слоя между валком и стальной полосой с выходной стороны клетки вводится затравка, задачей которой является создание условий для заполнения зоны кристаллизации-деформации металлом в начальный момент разливки.

Процесс соединения компонентов биметаллической полосы предлагаемым способом носит диффузионный характер. Это обусловлено

действием высоких температур в зоне контакта, близкими в своих пиковых значениях к температуре плавления алюминия, а также давлением от пластической деформации металла, степень которой при валковой разливке-прокатке может достигать более 70%. При оптимальных условиях получения биметаллических алюминиево-стальных полос диффузионный слой должен быть сплошным, а его толщина не должна превышать 10 мкм. Соблюдение последнего требования снижает негативное влияние прочных, но хрупких интерметаллических  $Fe_xAl_y$  фаз и обеспечивает наилучшие свойства данной композиции материалов [10].

В качестве материалов для проведения исследований был выбран технический чистый алюминий, отвечающий спецификации EN AW-1070 (стандарт DIN EN 573-3:2007), а также аустенитная сталь X5CrNi18-10 (1.4301). Разливка осуществлялась в вертикальной плоскости, для чего клеть валковой разливки-прокатки была установлена в соответствующее горизонтальное положение.

В первой серии экспериментов стальная лента толщиной 0,5 мм и шириной 60 мм удерживалась вводными линейками и стабилизировалась за счет установки в качестве вводной проводки направляющих реек, которые были закреплены на станине клетки. Расстояние между рейками соответствовало ширине полосы и составляло 60 мм, длина направляющих равнялась 40 мм. Перемещение ленты по высоте не ограничивалось.

Дополнительным средством для удержания стальной полосы в поперечном направлении стало использование разматывателя, оснащенного механическим тормозом, который позволял регулировать величину заднего натяжения. В серии исследований с использованием стальной полосы размерами 0,5x60 мм устанавливалось заднее натяжение величиной 0 Н, 100 Н и 300 Н, а сам разматыватель был установлен на расстоянии 3 м от направляющих реек. Переднее натяжение осуществлялось вручную и находилось в пределах от 0 до 300 Н.

В ходе валковой разливки-прокатки биметаллических полос было установлено, что увеличение заднего и переднего натяжений положительно сказывается на стабилизации положения стальной полосы с валковым кристаллизаторе, однако относительно короткие неподвижные направляющие рейки не в состоянии удержать ленту от термических поводов, возникающих в исходно холодном плоском полупродукте при его контакте с алюминиевым расплавом, что, в конечном итоге, приводит к искажению формы стальной полосы и нежелательному попаданию жидкого компонента композита на ее лицевую поверхность. Очевидно, что качество такого биметаллического продукта становится неудовлетворительным.

Следующим шагом по повышению стабильности положения твердой плоской заготовки в зоне кристаллизации-деформации стала разработка конструкции вводной роликовой арматуры, включающей пару профилированных вертикальных и две пары гладких горизонтальных роликов (см. рис. 3). Узел вертикальных роликов выполнен с

возможностью регулирования расстояния между ними в зависимости от ширины стальной полосы.

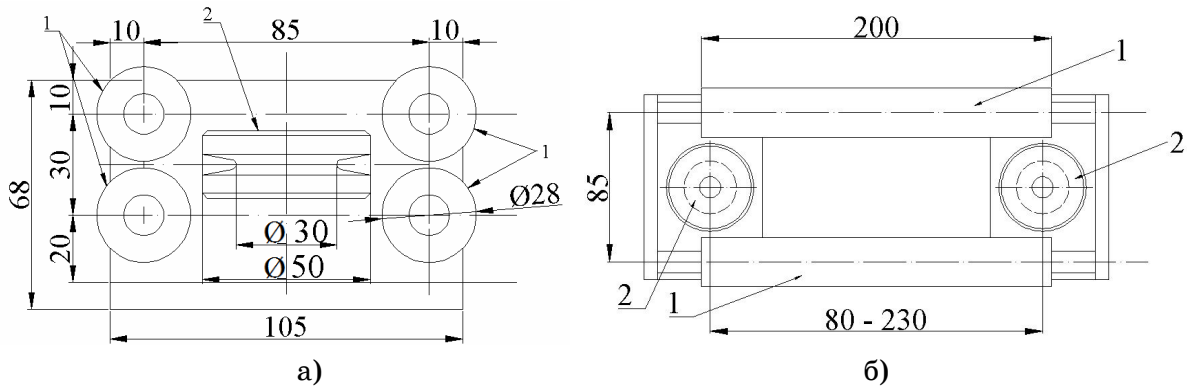


Рисунок – 3. Схема расположения пар направляющих роликов в вводной проводке: а – вид сбоку; б – вид сверху;

1 – горизонтальные валки, 2 – вертикальные калиброванные валки

Эксперименты по оценке эффективности использования роликовой вводной проводки проводились на стальной полосе 0,5x160 мм. Заднее и переднее натяжение устанавливалось на уровне 300 Н. Кроме того, разматыватель был перемещен ближе к машине валковой разливки-прокатки: расстояние от оси моталки до первой группы направляющих роликов составило 2 м.

Принятые меры оказались недостаточными для стабилизации положения стальной полосы в валковом кристаллизаторе. Термические поводки, по аналогии с предыдущей серией экспериментов, привели к попаданию расплавленного алюминия на лицевую сторону плоской стальной заготовки (см. рис. 4).

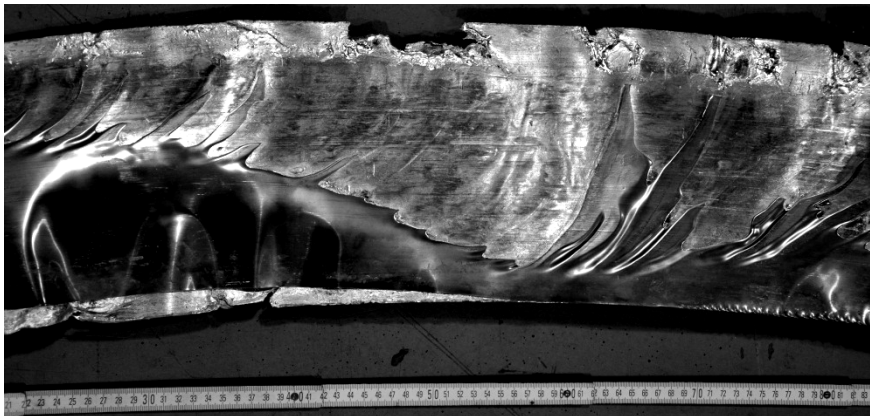


Рисунок – 4. Биметаллическая полоса, полученная после установки вводной проводки с тремя парами роликов

Одним из факторов, ответственным за данный негативный результат, можно считать относительно большое расстояние между зоной кристаллизации-деформации, где действуют термические напряжения, которые необходимо скомпенсировать, и вводной проводкой, которое составляет около 450 мм. За счет длинного плеча даже незначительные возмущающие силы приводят к возникновению момента, способного вызвать коробление и потерю стабильного положения полосы.



Компенсировать действие термических напряжений одной парой вертикальных роликов в проводке не представляется возможным.

Следующим этапом усовершенствования конструкции вводной роликовой арматуры стала установка второй группы направляющих роликов, аналогичной представленной на рисунке 3. Схема расположения групп направляющих роликов представлена на рисунке 5. Расстояние между двумя группами роликов выбрано таким образом, чтобы обеспечить возможность установки в данном промежутке устройства подогрева стальной полосы и составляет 400 мм. Дополнительной мерой стало увеличение заднего натяжения до 500 Н. Экспериментальная установка валковой разливки-прокатки с разработанной системой подачи стальной ленты для получения биметаллической алюминиево-стальной полосы показана на рисунке 6.

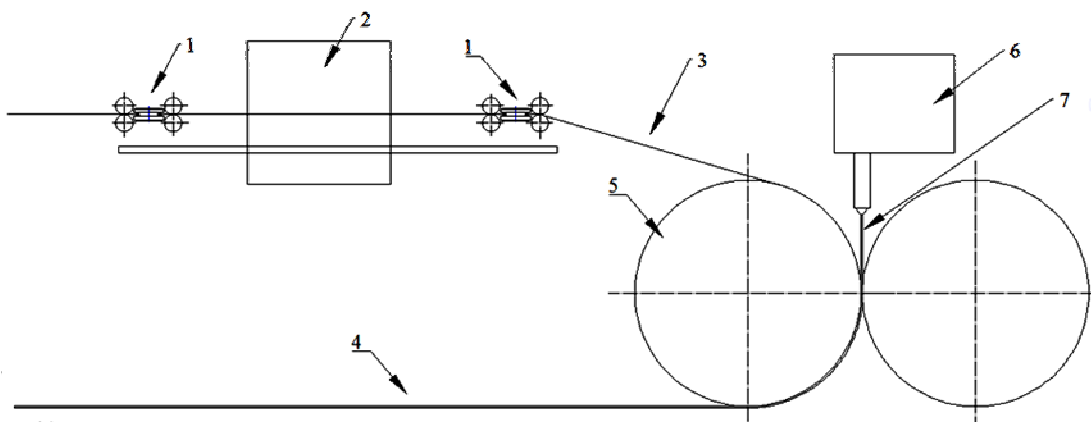


Рисунок – 5. Схема расположения двух групп направляющих роликов в системе подачи стальной полосы: 1 – направляющие ролики; 2 – место для расположения нагревателя; 3 – стальная полоса; 4 – биметаллическая полоса сталь – алюминий; 5 – водоохлаждаемые валки-кристаллизаторы; 6 – разливочный короб с соплом; 7 – жидкий алюминий

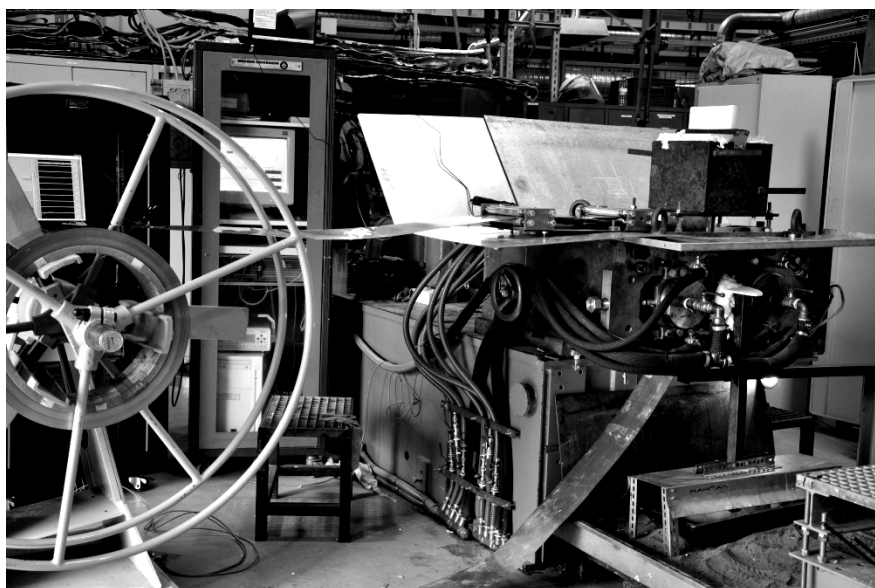


Рисунок – 6. Экспериментальная установка валковой разливки-прокатки перед экспериментом по разливке биметаллической алюминиево-стальной полосы

Принятый комплекс мер по усовершенствованию конструкции вводной проводки и увеличению натяжения позволил добиться стабилизации положения плоской стальной заготовки в валковом кристаллизаторе. Фотография биметаллической полосы со стороны, плакированной сталью, приведена на рисунке 7. В ходе разливки наблюдалась незначительная коробоватость стального слоя, что, однако, не привело к попаданию жидкого алюминия на лицевую поверхность стальной заготовки. Указанная коробоватость может быть устранена в ходе дальнейшей пластической деформации плоской продольной прокаткой с малыми обжатиями.



Рисунок – 7. Биметаллическая алюминиево-стальная полоса после принятия комплекса мер по ее стабилизации

### Выводы

В ходе проведенных экспериментальных исследований технология валковой разливки-прокатки была впервые успешно использована для получения биметаллических полос из разнородных материалов на примере двухслойной алюминиево-стальной композиции.

Разработана и опробована система подачи стальной полосы в валковый кристаллизатор, обеспечивающая стабильность положения твердой плоской заготовки в зоне кристаллизации-деформации. Система включает в себя разматыватель с возможностью регулирования заднего натяжения и вводную арматуру, состоящую по меньшей мере из двух групп роликов, каждая из которых содержит пару профилированных вертикальных и две пары гладких горизонтальных роликов. Выявлен диапазон величин заднего натяжения (300 – 500 Н), который является достаточным для стабилизации положения стальной полосы в зоне кристаллизации-деформации для установки приведенного вида.

Проведенный комплекс мероприятий позволяет продолжить исследования в направлении развития технологии валковой разливки-прокатки биметаллических полос из разнородных материалов, в частности с целью анализа влияния параметров процесса на свойства получаемого композита и микроструктуру зоны диффузионного соединения.

Список литературы

1. Голованенко С.А., Меандров Л.В. Производство биметаллов. – М.: Металлургия, 1966. – 304 с.
2. Засуха П.Ф. Биметаллический прокат /Засуха П.Ф. и др. – М.: Металлургия, 1970. – 264 с.
3. Шоршоров М.Х., Клинопресовая сварка давлением разнородных металлов /Шоршоров М.Х., Колесниченко В.А., Алехин В.П. – М.: Металлургия, 1982. – 112 с.
4. Король В.К., Гильденгорн М.С. Основы технологии производства многослойных металлов. – М.: Металлургия, 1970. – 237 с.
5. Голованенко С.А. Сварка прокаткой биметаллов. Под ред. Э.С. Каракозова. М., Металлургия, 1977. – 160 с.
6. T. Haga, S. Suzuki A twin-roll caster to cast clad strip. – Journal of Materials Processing Technology, 138, 2003 – P. 366–371.
7. T. Haga, R. Nakamura, S. Kumai, H. Watari Clad strip casting by a twin roll caster. – International Scientific Journal, 2009. – P. 117–124.
8. R. Nakamura, T. Yamabayashi, T. Haga, S. Kumai, H. Watari. Roll caster for the three-layer clad-strip. – International Scientific Journal, 2010. – P. 112–120.
9. Гридин А.Ю., Огинский И.К., Данченко В.Н., Бах Фр.-В. /Экспериментальная установка валковой разливки-прокатки тонких полос //Металлургическая и горнорудная промышленность. – 2010. – № 5. – С. 46–51.
10. Stahl-Alu-Hybridplatte ist serienreif //Blech, Rohre, Profile. – 2011. – №1-2. – P. 28.

Получено: 10.01.2012 г.

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЮЩИМИ  
ЕЕ ШТАМПАМИ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ДЕЙСТВИИ  
ТОРЦЕВЫХ НАГРУЗОК**

*Исследуется влияние истории нагружения негладкой пластины торцевыми нагрузками на процесс протягивания ее между плоскими штампами. Решение поставленной задачи проводится на основе уточненной теории пластин, приспособленной для контактных задач. Проведено исследование зависимости положения границ областей сцепления и проскальзывания с трением на лицевых поверхностях пластины от величины прикладываемых торцевых нагрузок при прохождении пластины между сжимающими ее штампами.*

*Ключевые слова: НОРМАЛЬНОЕ КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ, КАСАТЕЛЬНОЕ КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ, ОБЛАСТЬ СЦЕПЛЕНИЯ, ОБЛАСТЬ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ С ТРЕНИЕМ, ПЛАСТИНА, ЖЕСТКИЕ ШТАМПЫ, ТОРЦЕВЫЕ НАГРУЗКИ, ПРОДОЛЬНЫЕ УСИЛИЯ.*

*Досліджується вплив історії навантажування негладкою пластини торцевими навантаженнями на процес протягування її між плоскими штампами. Рішення поставленої задачі здійснюється на основі уточненої теорії пластин, пристосованої для контактних задач. Проведено дослідження залежності положення границь областей зчеплення і проковзування з тертям на лицьових поверхнях пластини від величини торцевих навантажень, що прикладаються при проходженні пластини між стискаючими її штампами.*  
*Ключові слова: НОРМАЛЬНА КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ, ДОТИЧНА КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ, ОБЛАСТЬ ЗЧЕПЛЕННЯ, ОБЛАСТЬ ПРОКОВЗУВАННЯ З ТЕРТЯМ, ПЛАСТИНА, ЖОРСТКІ ШТАМПИ, ТОРЦЕВІ НАВАНТАЖЕННЯ, ПОЗДОВЖНІ ЗУСИЛЛЯ.*

*The effect of loading history of the uneven plate loading by end loads on the process of pulling it between the bar punches . The solution of the formulated problem was carried out on the base improved theory of plates adapted for Hertzian problem.*

*A study of the dependence of the area's boundaries of adhesion and slipping with friction on plate's front surfaces from magnitude of the applied end loads with pulling of plate between compressing it hard punches has been held.*  
*Keywords: NORMAL CONTACT INTERACTION, THE TANGENTIAL CONTACT INTERACTION, THE REGION CLUTCH SLIP AREA WITH FRICTION, PLATE, HARD PUNCHES, END LOAD, THE LONGITUDINAL FORCES.*

**Введение**

На основе уточненных уравнений теории пластин [1] с коэффициентами для рассматриваемого класса контактных задач [2] в работе [3] рассмотрено взаимодействие негладкой пластины со сжимающими ее плоскими штампами. На торцах пластина нагружается силами, под действием которых с некоторого момента начинается прохождение ее между штампами. Было установлено, что в области контакта пластины и штампов в общем случае могут быть одновременно

участки сцепления, проскальзывания с трением и отставания, а также найдены области значений торцевых нагрузок, при которых имеет место только сцепление по всей области контакта, только проскальзывание с трением по всей области контакта и полное отставание. В работе [4] исследуется зависимость расположения точек смены состояний сцепления и проскальзывания с трением в области контакта и характер распределения контактных взаимодействий от значений симметрично приложенных торцевых нагрузок. Настоящая работа является продолжением работ [3, 4]. Здесь эти исследования проведены для несимметрично приложенных торцевых нагрузок, от действия которых с некоторого момента по всей области контакта исчезают области сцепления и начинается процесс протягивания пластины между штампами.

### Постановка задачи

Рассматривается процесс прохождения негладкой пластины толщины  $h$  и ширины  $2l$  между плоскими штампами ширины  $2a_u$  ( $a_u < l$ ) под действием продольной нагрузки, главный вектор которой  $P^-$  на левом торце и  $P^+$  – на правом (рис. 1). Пластина работает в условиях плоской деформации, штампам задается поступательное перемещение  $\pm W$ . Процесс существенно зависит от истории нагружения пластины в плоскости  $(\tilde{P}^+, \tilde{P}^-)$  [3]: можно начинать с приложения нагрузки  $P^\pm$ , когда  $W \leq 0$ , а можно начинать с зажатия пластины штампами. Исследуется несимметричный процесс, который тоже, как и при симметричном процессе [4], начинается с обжатия штампами без торцевых нагрузок, а затем прикладываются, равномерно увеличивающиеся во времени от нуля, силы  $P^\pm$  (траектории нагружения совпадают с осями  $\tilde{P}^\pm$  [3]).

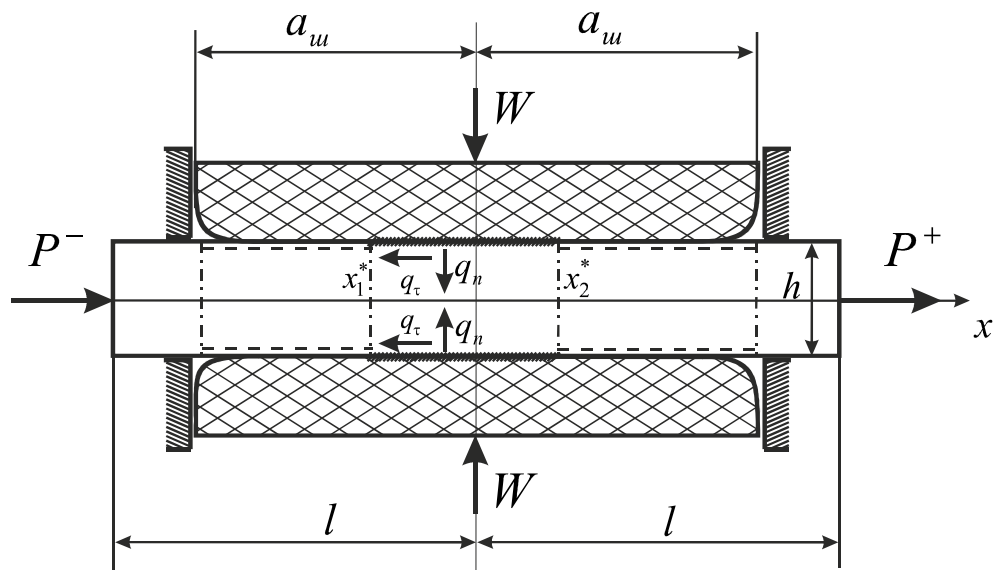


Рисунок – 1.

В начале процесса ( $P^\pm = 0$ ), как показывают вычисления контактных взаимодействий при сцеплении по всей области контакта  $2a$  (ширина области контакта, несмотря на скругление штампа, приблизительно считается равной ширине штампа  $2a = 2a_u$ ), имеется тенденция сохранения трех областей: при  $-a \leq x < x_1^*$  – проскальзывание влево, при  $x_1^* \leq x < x_2^*$  – сцепление,  $x_2^* < x \leq a$  – проскальзывание вправо. Задача состоит в получении зависимостей между положением границ областей сцепления и проскальзывания с трением ( $x_1^*$  – координата границы области проскальзывания влево с областью сцепления,  $x_2^*$  – координата границы области сцепления с областью проскальзывания вправо), а также соответствующего характера распределения контактного взаимодействия ( $q_r(x)$  – касательного контактного взаимодействия,  $q_n(x)$  – нормального контактного взаимодействия), от величины прикладываемых торцевых нагрузок  $P^\pm$ .

### Построение решения

В работе [3] относительно касательного  $q_r(x)$  и нормального  $q_n(x)$  контактных взаимодействий были получены разрешающие дифференциальные уравнения четвертого порядка для области сцепления и второго порядка для области проскальзывания с трением. Для рассматриваемой задачи с учетом

– краевых условий на торцах, накладываемых на продольные усилия в областях проскальзывания с трением  $N_{T1}, N_{T2}$ :

$$N_{T1}^- = N_{T1}(-a) = -\frac{P^-}{h}, \quad N_{T2}^+ = N_{T2}(a) = \frac{P^+}{h}; \quad (1)$$

– условий сопряжения продольных усилий  $N_{T1}, N_{T2}, N_c$  на границах областей проскальзывания с трением и сцепления  $x_1^*, x_2^*$ :

$$N_{T1}^+ = N_{T1}(x_1^* - 0) = N_c(x_1^* + 0) = N^-, \quad N_{T2}^- = N_{T2}(x_2^* + 0) = N_c(x_2^* - 0) = N^+; \quad (2)$$

– дополнительных условий непрерывности касательного контактного взаимодействия на границах областей проскальзывания с трением и сцепления  $x_1^*, x_2^*$ :

$$q_r^-(x_1^*) = q_r(x_1^* - 0) = q_r(x_1^* + 0), \quad q_r^+(x_2^*) = q_r(x_2^* - 0) = q_r(x_2^* + 0), \quad (3)$$

решения этих дифференциальных уравнений имеют вид:

– в области сцепления  $x_1^* \leq x < x_2^*$ :

$$\left\{ \begin{aligned}
 q_r(x) &= \frac{q_r^+ - q_r^-}{2} \cdot \frac{\varphi_1'(x - e^+, e^-)}{\varphi_1'(e^-)} - \left( N^+ + N^- + \frac{8\nu GW}{1 - 2\nu} \right) \frac{\sigma_1 \cdot \varphi_2(x - e^+, e^-)}{4 \cdot \varphi_1'(e^-)} + \\
 &+ \frac{q_r^+ + q_r^-}{2} \cdot \frac{\varphi_2'(x - e^+, e^-)}{\varphi_2'(e^-)} - (N^+ - N^-) \frac{\sigma_1 \cdot \varphi_2(x - e^+, e^-)}{4 \cdot \varphi_2'(e^-)}, \\
 q_n(x) &= \frac{4(1 - \nu)GW}{1 - 2\nu} - \frac{\nu(2(q_r^+ + q_r^-)\Psi_{12}(x - e^+, e^-) + \sigma_1(N^+ - N^-)\Psi_{21}(x - e^+, e^-))}{2\sigma_1^2(1 - \nu)\varphi_2'(e^-)} - \\
 &- \frac{\nu \left( 2(q_r^+ - q_r^-)\Psi_{11}(x - e^+, e^-) + \sigma_1 \left( N^+ + N^- + \frac{8\nu GW}{1 - 2\nu} \right) \Psi_{22}(x - e^+, e^-) \right)}{2\sigma_1^2(1 - \nu)\varphi_1'(e^-)}, \\
 V(x) &= \frac{4G}{(1 - \nu)\Lambda_1} - \frac{2(q_r^+ + q_r^-)\Psi_{32}'(x - e^+, e^-) - \sigma_1(N^+ - N^-)\Psi_{31}(x - e^+, e^-)}{\varphi_2'(e^-)} - \\
 &- \frac{2(q_r^+ - q_r^-)\Psi_{31}'(x - e^+, e^-) - \sigma_1 \left( N^+ + N^- + \frac{8\nu GW}{1 - 2\nu} \right) \Psi_{32}(x - e^+, e^-)}{\varphi_1'(e^-)};
 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

– в области проскальзывания с трением влево  $-a \leq x < x_1^*$ :

$$\left\{ \begin{aligned}
 q_r(x) &= \frac{2GW}{\nu} \left( \left( 1 - \frac{\nu}{4GW} N^- \right) \cdot \Phi_2(-x - e_1^-, e_1^+) - \left( 1 + \frac{\nu}{4GWh} P^- \right) \cdot \Phi_1(-x - e_1^-, e_1^+) \right), \\
 q_n(x) &= -\frac{1}{f} q_r(x), \\
 V(x) &= u_r(x) + \frac{(1 - \nu)\Lambda_1 W}{\Lambda_{31} \nu f} \left( \left( 1 - \frac{\nu}{4GW} N^- \right) \cdot \Phi_4(-x - e_1^-, e_1^+) - \left( 1 + \frac{\nu}{4GWh} P^- \right) \cdot \Phi_3(-x - e_1^-, e_1^+) \right).
 \end{aligned} \right. \quad (5)$$

– в области проскальзывания с трением вправо  $x_2^* < x \leq a$ :

$$\left\{ \begin{aligned}
 q_r(x) &= \frac{2GW}{\nu} \left( \left( 1 - \frac{\nu}{4GWh} P^+ \right) \cdot \Phi_1(x - e_2^+, e_2^-) - \left( 1 - \frac{\nu}{4GW} N^+ \right) \cdot \Phi_2(x - e_2^+, e_2^-) \right), \\
 q_n(x) &= \frac{1}{f} q_r(x), \\
 V(x) &= u_r(x) + \frac{(1 - \nu)\Lambda_1 W}{\Lambda_{31} \nu f} \left( \left( 1 - \frac{\nu}{4GWh} P^+ \right) \cdot \Phi_3(x - e_2^+, e_2^-) - \left( 1 + \frac{\nu}{4GW} N^+ \right) \cdot \Phi_4(x - e_2^+, e_2^-) \right).
 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Здесь:

$e_1^\pm = \frac{a \pm x_1^*}{2}$ ,  $e_2^\pm = \frac{a \pm x_2^*}{2}$ ,  $e^\pm = \frac{x_2^* \pm x_1^*}{2}$ ,  $u_r$  – касательные перемещения точек лицевых поверхностей пластины,  $G$ ,  $\nu$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала,  $f$  – коэффициент трения скольжения,  $\Lambda_1 = 0,0025$ ,  $\Lambda_{31} = 0,115$  – коэффициенты уточненной теории пластин, соответствующие рассматриваемому классу задач [2], выражения функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\Psi_{11}(x)$ ,  $\Psi_{22}(x)$ ,  $\Psi_{31}(x)$ ,  $\Psi_{32}(x)$ ,  $\Phi_1(x)$ ,  $\Phi_2(x)$ ,  $\Phi_3(x)$ ,  $\Phi_4(x)$  приведены в работе [4].

Таким образом, в начале несимметричного процесса в общем решении (4) – (6) содержится шесть констант  $q_r^\pm$ ,  $N^\pm$ ,  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ . Для их определения имеется шесть условий:

$$\begin{cases} q_r^- = q_r(x_1^* - 0), & q_r^+ = q_r(x_2^* + 0), \\ V(x_1^* - 0) = V(x_1^* + 0), & V(x_2^* - 0) = V(x_2^* + 0), \\ q_n(x_1^* - 0) = q_n(x_2^* + 0), & q_n(x_2^* - 0) = q_n(x_2^* + 0). \end{cases} \quad (7)$$

Полученная система (7) линейна относительно констант  $q_r^\pm$ ,  $N^\pm$ . Исключая их из последних двух уравнений (7), с помощью первых четырех придем к системе двух трансцендентных уравнений относительно  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  вида:

$$\begin{cases} F_{11}(x_1^*, x_2^*)P^- + F_{12}(x_1^*, x_2^*)P^+ + F_{13}(x_1^*, x_2^*) = 0, \\ F_{21}(x_1^*, x_2^*)P^- + F_{22}(x_1^*, x_2^*)P^+ + F_{23}(x_1^*, x_2^*) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где функции  $F_{ij}(x_1^*, x_2^*)$  вычисляются, согласно указанному алгоритму построения уравнений (8), из формул (4) – (7).

Проблема выбора начального приближения решения системы (8) настоящей задачи упрощается тем, что рассматривается процесс, для начального состояния которого  $P^+ = P^- = 0$  решение  $x_2^* = -x_1^* = x_*$  уже известно [4]. Это решение и можно принять в качестве начального приближения при малых  $P^\pm$ . Для последующих значений  $P^\pm$ , в качестве начального, естественно принимать решение системы (8) для предыдущих значений  $P^\pm$ . Решение системы (8) при  $\nu = 0,45$ ,  $f = 0,4$ ,  $a = 2$  при  $P^+ = 0$  и  $P^-$ , возрастающим от нуля, приведено на рисунке 2. Пока  $P^-$  изменяется в пределах  $0 \leq \frac{P^-}{2GWh} < \frac{P_*^-}{2GWh} \approx 3,8$ , имеем в области контакта три участка. Соответствующие контактные взаимодействия для значений  $\frac{P^-}{2GWh} \approx 0; 1,8$  приведены на рисунках 4-а, 4-б.

Как видно, в окрестности границ участков сцепления – проскальзывания наблюдается тенденция к образованию разрыва в контактных взаимодействиях. В постановке теории упругости в этих точках функции  $q_r(x)$ ,  $q_n(x)$  имеют особенность [5] и для осуществления процесса необходимо потребовать выполнение условий:

$$\int_{x_*}^{x_* + \varepsilon} |q_r(x)| dx = \int_{x_* - \varepsilon}^{x_*} |q_r(x)| dx = f \int_{x_* - \varepsilon}^{x_*} |q_n(x)| dx.$$



В постановке уточненной теории пластин, приемлемой для контактных задач, в рассматриваемой точке имеет место разрыв первого рода и, поэтому при рассмотрении процесса, интегральные условия приближенно заменяются локальными

$$|q_{\tau}(x_*+0)| = |q_{\tau}(x_*-0)| = f|q_n(x_*-0)|.$$

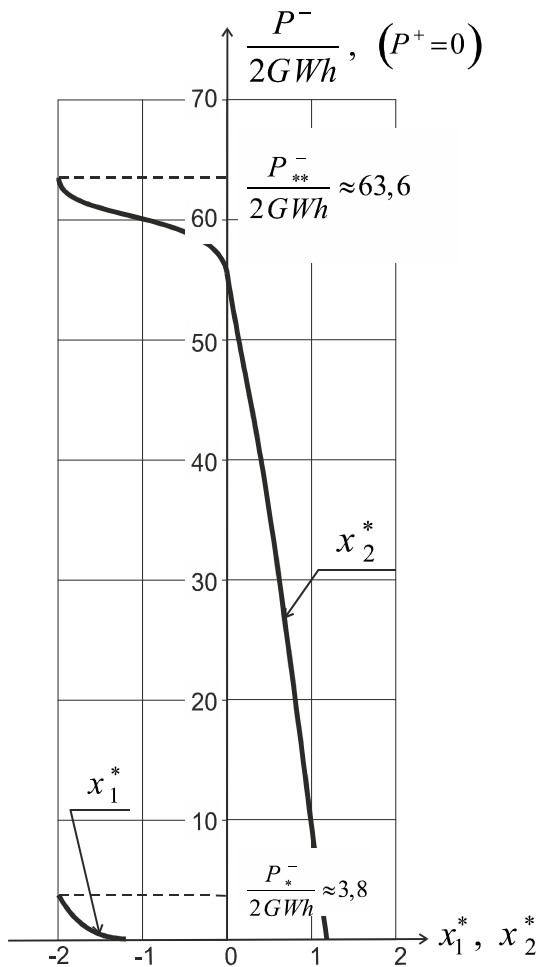
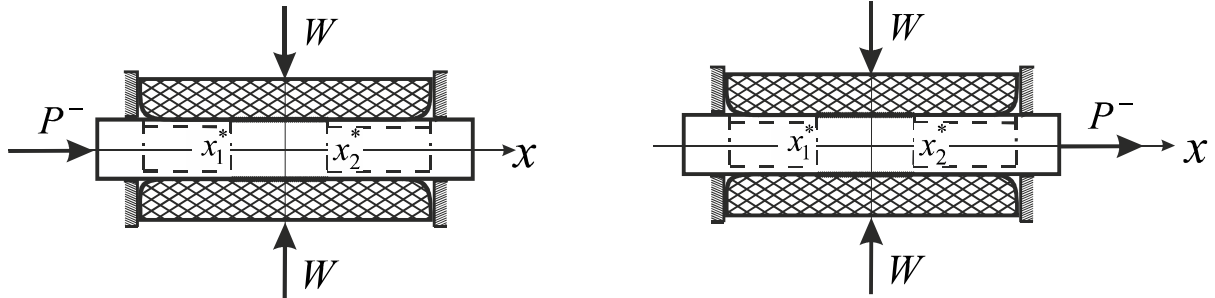


Рисунок - 2.

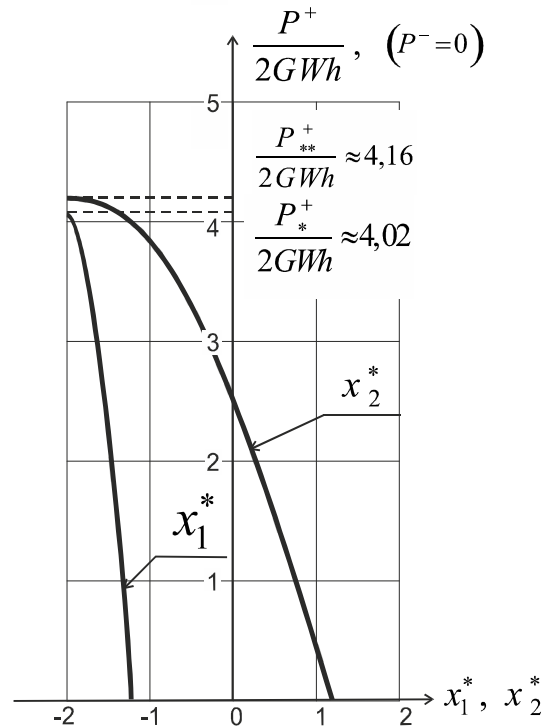


Рисунок - 3.

Для варианта, когда  $P^- = 0$ , а  $P^+$  увеличивается от нуля, решение системы (8) при  $\nu = 0,45$ ;  $f = 0,4$  и  $a = 2$  представлено на рисунке 3. При этом также пока  $P^+$  изменяется в пределах  $0 \leq \frac{P^+}{2GWh} < \frac{P^+}{2GWh} \approx 4,02$ , в области контакта имеется три участка. Соответствующие контактные

взаимодействия при значениях  $\frac{P^+}{2GWh} \approx 0; 2,03$  представлены на рисунках 5 – а, 5 – б соответственно.

Когда силы  $P^\pm$  достигают значений  $P^\pm = P_*^\pm$ , остается два участка в области контакта с одной точкой смены состояний  $x = x_2^*$ . Для процесса выталкивания пластины из промежутка между штампами ( $P^+ = 0$ ) находим  $x = x_2^* = 1,1$ . Для процесса вытаскивания пластины из промежутка между штампами ( $P^- = 0$ ) получаем  $x = x_2^* = -1,4$ . Здесь константа  $N^-$  уже определена  $N^- = \frac{P^-}{h}$ , а условие непрерывности обобщенного перемещения  $V(x)$  на левом конце области сцепления следует заменить условием:  $q_n(-a) = 0$ . Теперь общее решение систем (4), (6) принимает, соответственно областям, вид:

– в области сцепления  $-a \leq x \leq x_2^*$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_r(x) = \frac{q_r^+ - q_r^-}{2} \cdot \frac{\varphi_1'(x + e_2^-, e_2^+)}{\varphi_1'(e_2^+)} - \left( N^+ - \frac{P^-}{h} + \frac{8\nu GW}{1-2\nu} \right) \frac{\sigma_1 \cdot \varphi_2(x + e_2^-, e_2^+)}{4 \cdot \varphi_1'(e_2^+)} + \\ + \frac{q_r^+ + q_r^-}{2} \cdot \frac{\varphi_2'(x + e_2^-, e_2^+)}{\varphi_2'(e_2^+)} - \left( N^+ + \frac{P^-}{h} \right) \frac{\sigma_1 \cdot \varphi_2(x + e_2^-, e_2^+)}{4 \cdot \varphi_2'(e_2^+)}, \\ q_n(x) = \frac{4(1-\nu)GW}{1-2\nu} \frac{\nu \left( 2(q_r^+ + q_r^-) \Psi_{12}(x + e_2^-, e_2^+) + \sigma_1 \left( N^+ + \frac{P^-}{h} \right) \Psi_{21}(x + e_2^-, e_2^+) \right)}{2\sigma_1^2(1-\nu) \varphi_2'(e_2^+)} - \\ - \frac{\nu \left( 2(q_r^+ - q_r^-) \Psi_{11}(x + e_2^-, e_2^+) + \sigma_1 \left( N^+ - \frac{P^-}{h} + \frac{8\nu GW}{1-2\nu} \right) \Psi_{22}(x + e_2^-, e_2^+) \right)}{2\sigma_1^2(1-\nu) \varphi_1'(e_2^+)} \\ V(x) = - \frac{4G}{(1-\nu)\Lambda_1} \frac{2(q_r^+ + q_r^-) \Psi_{32}'(x + e_2^-, e_2^+) - \sigma_1 \left( N^+ + \frac{P^-}{h} \right) \Psi_{31}(x + e_2^-, e_2^+)}{\varphi_2'(e_2^+)} - \\ - \frac{2(q_r^+ - q_r^-) \Psi_{31}'(x + e_2^-, e_2^+) - \sigma_1 \left( N^+ - \frac{P^-}{h} + \frac{8\nu GW}{1-2\nu} \right) \Psi_{32}(x + e_2^-, e_2^+)}{\varphi_1'(e_2^+)}; \end{array} \right. \quad (9)$$

– в области проскальзывания с трением вправо  $x_2^* \leq x \leq a$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_r(x) = \frac{2GW}{\nu} \left( \left( 1 - \frac{\nu}{4GWh} P^+ \right) \cdot \Phi_1(x - e_2^+, e_2^-) - \left( 1 - \frac{\nu}{4GW} N^+ \right) \cdot \Phi_2(x - e_2^+, e_2^-) \right), \\ q_n(x) = \frac{1}{f} q_r(x), \\ V(x) = u_r(x) + \frac{(1-\nu)\Lambda_1 W}{\Lambda_{31} \nu f} \left( \left( 1 - \frac{\nu}{4GWh} P^+ \right) \cdot \Phi_3(x - e_2^+, e_2^-) - \left( 1 + \frac{\nu}{4GW} N^+ \right) \cdot \Phi_4(x - e_2^+, e_2^-) \right). \end{array} \right. \quad (10)$$

В выражениях (9), (10) содержится четыре неизвестные константы:  $q_r^\pm$ ,  $N^+$ ,  $x_2^*$ , для определения которых имеются четыре условия: три условия из системы (7) на правом конце области сцепления и условие равенства нулю нормального контактного взаимодействия на левом конце штампа

$$\begin{cases} q_r^+ = q_r(x_2^* + 0), \\ V(x_2^* - 0) = V(x_2^* + 0), \\ q_n(-a) = 0, \\ q_n(x_2^* - 0) = q_n(x_2^* + 0). \end{cases} \quad (11)$$

Исключая из последнего уравнения системы (11) с помощью предыдущих уравнений этой системы неизвестные константы  $q_r^\pm$ ,  $N^+$ , входящие линейно, получаем одно трансцендентное уравнение относительно  $x_2^*$  вида

$$F_1(x_2^*)P^- + F_2(x_2^*)P^+ + F_3(x_2^*) = 0, \quad (12)$$

где функции  $F_i(x_2^*)$ , аналогично функциям  $F_{ij}(x_1^*, x_2^*)$  системы (8), вычисляются по алгоритму построения уравнения (12).

При дальнейшем увеличении торцевых нагрузок  $P^\pm$  в зависимости от значений  $\nu$  и  $f$  процесс может развиваться по-разному. При рассматриваемом значении  $\nu = 0,45$ ;  $f = 0,4$  и  $a = 2$  в области сцепления тенденции к проскальзыванию не наблюдается. Таким образом, при дальнейшем увеличении сил  $P^\pm$  остается только две области с одной точкой смены состояний  $x_2^*$ , определяемой из уравнения (12). Его решение приведено на рисунке 2, когда  $P^+ = 0$ ,  $0 \leq P^- / (2GWh) < P_{**}^- / (2GWh) \approx 63,6$  и на рисунке 3, когда  $P^- = 0$ ,  $0 \leq P^+ / (2GWh) < P_{**}^+ / (2GWh) \approx 4,15$ .

Распределение контактных взаимодействий при выталкивании ( $P^+ = 0$ ) и  $P^- / (2GWh) = P_*^- / (2GWh) \approx 3,8$ ;  $P^- / (2GWh) \approx 35,6$  приведено на рисунках 4-в, 4-г. а при вытаскивании ( $P^- = 0$ ) и  $P^+ / (2GWh) = P_*^+ / (2GWh) \approx 4,02$ ;  $P^+ / (2GWh) \approx 4,09$  – на рисунках 5-в, 5-г соответственно. При значениях  $P_{**}^- / (2GWh) \approx 63,6$  и  $P_{**}^+ / (2GWh) \approx 4,15$  исчезает область сцепления. Распределение контактных взаимодействий при этом показано на рисунках 4-д и 5-д соответственно. При этом оказалось,  $q_r(-a) = 0$ , что согласуется с границей области полного проскальзывания.

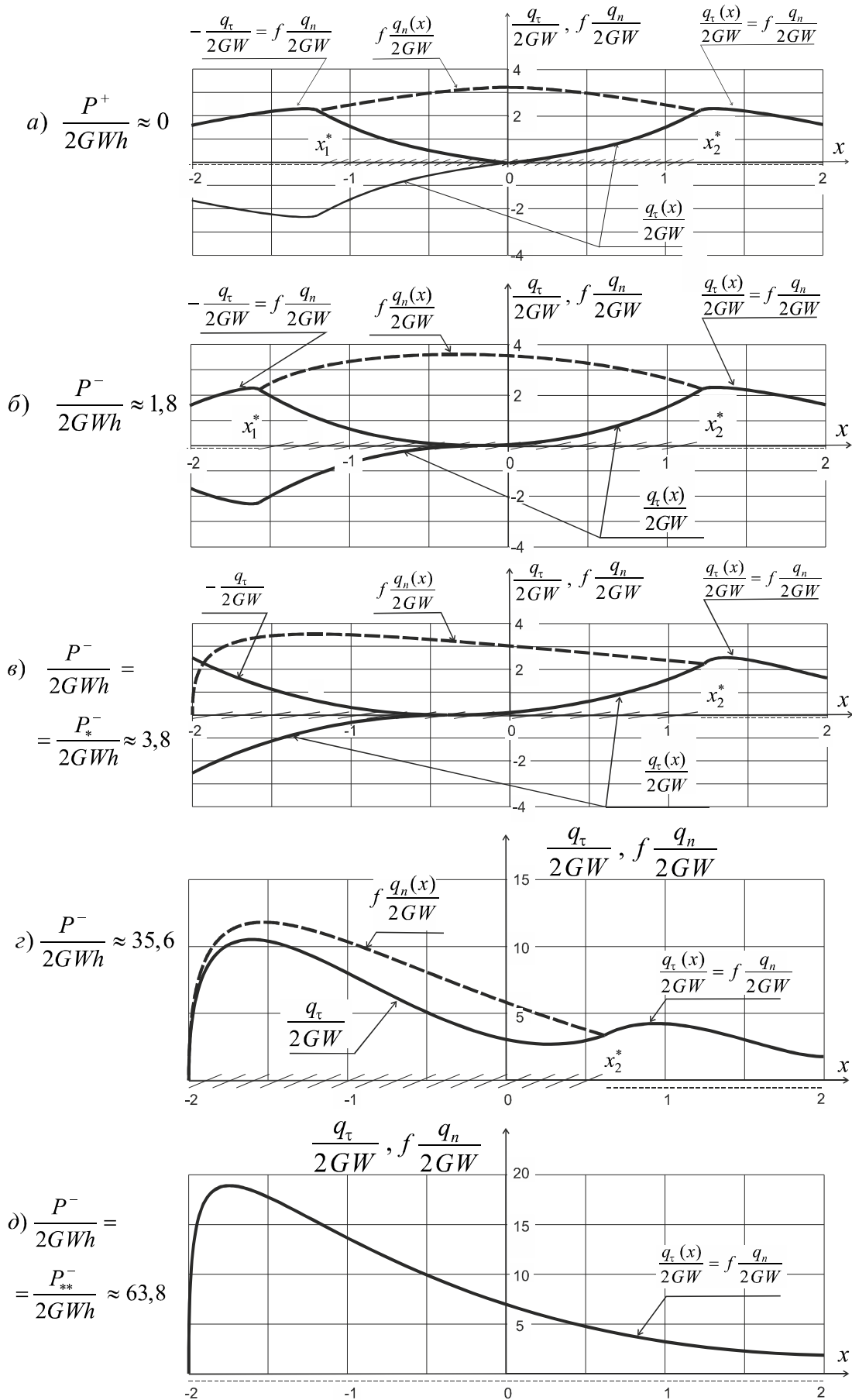


Рисунок - 4.

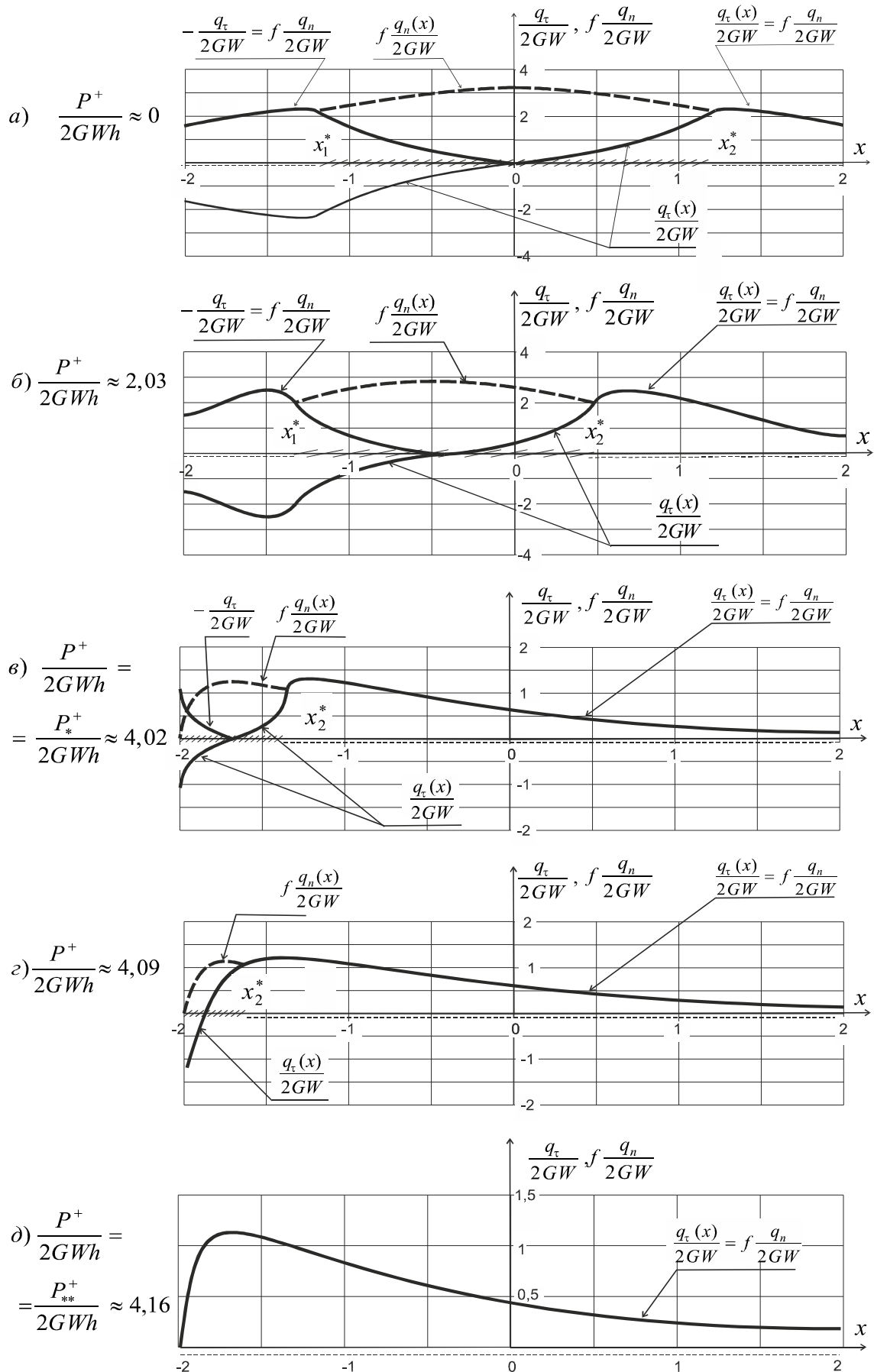


Рисунок - 5.

### Выводы

Были рассмотрены два несимметричных процесса.

При действии выталкивающей силы в первую очередь, уменьшается область проскальзывания слева до полного исчезновения, в то время как область проскальзывания справа практически не изменяется. Потом начинает увеличиваться область проскальзывания справа до наступления состояния полного проскальзывания вправо.

При действии вытаскивающей силы в первую очередь, также исчезает область проскальзывания слева, но одновременно увеличивается и область проскальзывания справа, то есть, область сцепления как бы смещается влево, одновременно уменьшаясь. Затем область проскальзывания слева исчезает и остается две области. Потом начинает увеличиваться область проскальзывания справа и наступает состояние полного проскальзывания.

Следует отметить, что для вытаскивания пластины требуется сила меньшая, чем для выталкивания (при параметрах:  $\nu=0,45$ ;  $f=0,4$ ;  $a=2$ ) в 14 раз.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980.
2. Наумова И.Ю. К решению контактных задач теории пластин в температурном поле // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 5(70).– Днепропетровск, 2010. – С.148–161.
3. Наумова И.Ю. Исследование зависимости характера взаимодействия пластины со сжимающими ее штампами от значения торцевых нагрузок // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 4(69).– Днепропетровск, 2010. – С.11–22.
4. Наумова И.Ю. Взаимодействие пластины со сжимающими ее штампами при симметричном действии торцевых нагрузок // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 5(82).– Днепропетровск, 2012. – С. 32–39.
5. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982.

Получено: 23.07.2012 г.

УДК 621.396.969

М.А. Рыбальченко, В.П. Иващенко,  
В.И. Головки, Р.В. Кирия, Г.А. Папанов

## ПРОВЕРКА НА АДЕКВАТНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗАВИСИМОСТИ РАСХОДА СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА ОТ УГЛА ОТКРЫТИЯ ЗАСЛОНКИ

*Получена математическая модель зависимости расхода сыпучего материала от угла открытия заслонки в зависимости от параметров выпускного отверстия, размеров частиц, свойств выгружаемого сыпучего груза, длины выпуска и скорости открытия затвора. Выполнен сравнительный анализ теоретических расчетов со статистическими данными фактической производительности загрузки наклонного (скипового) конвейера шихтовыми материалами действующей системы шихтоподачи доменной печи, полученными с использованием разработанной методики расчета секундных объемов.*

*Ключевые слова: ШИХТОВЫЕ МАТЕРИАЛЫ, ВЕСОВОЙ БУНКЕР, РАСХОД, ЗАСЛОНКА, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, АДЕКВАТНОСТЬ.*

*Отримана математична модель залежності витрати сипучого матеріалу від кута відкриття заслінки залежно від параметрів выпускного отвору, розмірів часток, властивостей сипучого матеріалу, що вивантажується, довжини випуску й швидкості відкриття затвору. Виконаний порівняльний аналіз теоретичних розрахунків зі статистичними даними фактичної продуктивності завантаження похилого (скіпового) конвеєра шихтовими матеріалами діючої системи шихтоподачі доменної печі, отриманими з використанням розробленої методики розрахунків секундних об'ємів.*

*Ключові слова: ШИХТОВІ МАТЕРІАЛИ, ВАГОВИЙ БУНКЕР, ВИТРАТА, ЗАСЛІНКА, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, АДЕКВАТНІСТЬ.*

*The mathematical model of dependence of expense of friable material is got from the corner of opening of zaslonki depending on the parameters of tape-hole, sizes of particles, properties of checkpointable friable load, lengths of issue and speed opening of breech-block. The comparative analysis of theoretical calculations is executed with statistical information of the actual productivity of load of sloping (skipovogo) conveyer shikhtovymi materials of the operating system of shikhtopodachi of high furnace, got with the use of the developed method of calculation of the second volumes.*

*Key words: CHARGE MATERIALS, WEIGH HOPPER, FLOW VALVE, MATHEMATICAL MODEL, ADEQUACY.*

Для решения задачи увеличения объема шихтовых материалов, загружаемых в печь за время одной подачи [1] необходимо увеличить по сравнению с существующими объемы весовых воронок системы шихтоподачи. Вместе с тем, увеличение объема весовой воронки связано с коренной реконструкцией шихтоподачи и, следовательно, со значительным ростом капитальных затрат.

В результате проведенных измерений численных значений высоты и длины параметров слоя, лежащего на конвейере, установлено, что очертание дозы материала, лежащего на конвейере имеет в сечении четко выраженную головную, центральную и хвостовую часть (высота и длина

слоя материала фиксировалась в трех точках сечения: центральной – по оси конвейера, левой и правой от центральной). Концевые части дозы на конвейере составляли от общей длины более 55 % (по коксу) и 46% (по агломерату и окатышам). Это связано с неравномерным характером поступления материала из весовой воронки, режимом работы, неравномерностью слоя материала.

Таким образом, значительная часть времени загрузки материалом конвейера расходуется непроизводительно и требует его сокращения. В связи с этим, одним из решений данной задачи может быть совмещение двух или нескольких доз материала, что позволит уменьшить цикл разгрузки весовых воронок. Это может быть достигнуто совмещением концевых частей этих доз за время их выдачи на конвейер.

В тоже время применение бесконусных загрузочных устройств значительно расширило технологические возможности регулирования и распределения шихты по радиусу колошника. При этом возникла возможность разработки новых методов управления газовым потоком, отличных от традиционных. Одним из таких методов является загрузка в печь многокомпонентных порций шихты с технологически обоснованным соотношением компонентов.

Однако бесконусное загрузочное устройство не предназначено для формирования порций шихты путем смешивания с одновременным сдвигом в процессе загрузки одного вида материала относительно другого на заданную величину. Реализовать формирование таких порций можно с помощью ЭВМ системы шихтоподачи в процессе разгрузки материалов из весовых воронок на доменный конвейер.

Результаты работ по повышению эффективности смешивания различных железосодержащих материалов на печах большого объема показали, что рациональное решение этих задач может быть получено и реализовано лишь при использовании комплексного подхода, учитывающего применение специальных приемов управления выпуском шихты, особенности формирования порций, конструкции весовых бункеров, механизмов выпуска и требований распределения материалов на колошнике.

К настоящему времени в доменном производстве опробованы и нашли применение двухкомпонентные порции [2], состоящие из агломерата и окатышей, окатышей и кокса, агломерата и кокса, а также трехкомпонентные [3], включающие в себя агломерат, кокс и окатыши. Как правило, смешанные порции, сформированные на конвейере имеют головную и смешанную части, отличающиеся составом компонентов. При этом общим требованием для порций любой структуры следует считать минимизацию длины порции на конвейере, что обеспечивает максимальное использование пропускной способности системы загрузки и рациональные режимы эксплуатации оборудования. Это требование выполняется при соблюдении зависимости:



$$\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\gamma_i} = \Pi, \quad (1)$$

где  $n$  – количество компонентов, подлежащих смешиванию в данной части порции;

$q_i$  – расход  $i$ -го компонента при выгрузке из бункерных весов, кг/с;

$\gamma_i$  – насыпная масса  $i$ -го компонента, кг/м<sup>3</sup>;

$\Pi$  – пропускная способность конвейера, м<sup>3</sup>/с.

Необходимым условием формирования многокомпонентной порции является применение адекватной математической модели процесса истечения сыпучего груза из весового бункера с регулируемой заслонкой.

Экспериментальные исследования процесса истечения шихтовых материалов на действующих системах показали, что традиционно применяемые для расчета требуемых величин расхода формулы Алферова, Зенкова дают завышенные значения. Расхождение расчетных и экспериментальных значений для шихтовых материалов доменной плавки достигает 30 % [4].

Поскольку математических моделей истечения сыпучего груза из весового бункера с регулируемой заслонкой не существует, то целью явилась разработка математической модели истечения материала из бункера с регулируемой заслонкой и установление зависимости расхода материала от угла открытия заслонки.

Такая модель была получена в результате математического описания структурно-механического состояния сыпучего материала в разных зонах в результате его истечения [5].

Полученная зависимость расхода и скорости истечения сыпучих материалов из бункера в зависимости от угла открытия заслонки, параметров выпускного отверстия, размеров частиц и свойств данного выгружаемого сыпучего груза [6] не описывает неустановившейся режим движения сыпучего материала, возникающий при быстром открытии затвора (на шихтоподаче доменной печи № 9 открытие затвора весового бункера кокса равно 4,4 с, агломерата – 4с).

В этой связи, в математическую модель, описывающую движение материала на выходе из весового бункера, была введена составляющая-инерционный напор, необходимый для преодоления инерции сыпучего материала. Длина выпускного лотка (установленного после секторного затвора) при истечении материала на конвейер также оказывает влияние, например, при увеличении его длины инерционный напор повышается.

В результате была получена зависимость расхода сыпучего материала от угла открытия заслонки в зависимости от параметров выпускного отверстия, размеров частиц, свойств выгружаемого сыпучего материала, длины выпуска и скорости открытия затвора:

$$Q = \eta b a^{1.5} \sqrt{g} - \frac{b \cdot B \cdot \cos(\phi - \beta) \cdot a \cdot l \cdot \operatorname{tg} \alpha}{(1 + \xi) \cdot (K_1 + \operatorname{tg} \alpha) \cdot \Delta t}, \quad (2)$$

где  $\eta = \frac{\delta \eta_0 \sin \alpha}{\sqrt{\delta^2 \sin^2 \alpha + k^2 K_2}}$ ;  $\delta = \frac{a}{d}$ ,  $K_2 = K_u \cdot \frac{l}{0.24 \cdot a \cdot \sin \alpha}$ ;

$$\eta_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos(\phi_c - \beta) B \sqrt{A + \chi'} \left( \frac{\operatorname{tg} \alpha}{K_1 + \operatorname{tg} \alpha} \right)^{1.5};$$

$$K_1 = \frac{1}{2} (f + \sqrt{1 + f^2}); \quad \chi' = f + \frac{1}{f} - \sqrt{1 + f^2};$$

$$A = \frac{\operatorname{tg} \phi_c (1 - K_1 \operatorname{tg} \beta)}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \phi_c}; \quad B = \frac{(K_1 + \operatorname{tg} \phi_c) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \phi_c}.$$

Здесь  $\eta$  – безразмерный коэффициент расхода сыпучего груза из бункера с горизонтальным выпускным отверстием и регулируемой заслонкой;

$b$  – длина щелевого выпускного отверстия, м;

$a$  – ширина выпускного отверстия, м;

$g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>

$d$  – средний размер частиц сыпучего груза, м;

$k$  – кинетический коэффициент, характеризующий потерю механической энергии потока сыпучего груза в результате столкновения частиц ( $k = 10-13$ );

$K_2$  – некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от условий истечения сыпучего груза из бункера;

$K_u$  – некоторый безразмерный коэффициент, определяющий инерцию на повороте, определяемый из эксперимента;

$f$  – коэффициент внутреннего трения сыпучего груза;

$\alpha$  – угол наклона заслонки, град.;

$\beta$  – угол наклона выходного сечения сыпучего груза из бункера с регулируемой заслонкой, град.;

$\phi_c$  – среднее значение угла наклона вектора скорости выхода частиц груза из бункера к горизонтали, град.;

$l$  – длина выпуска;

$\Delta t$  – время открывания затвора;

$\xi$  – коэффициент местных потерь [7].

При этом угол  $\beta$  определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a/l - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (0 \leq \alpha \leq 0,5\pi; \alpha - \beta \leq 0,5\pi). \quad (3)$$

Среднее значение угла  $\phi_c$  приблизительно можно определить по формуле:

$$\phi_c \approx \begin{cases} \frac{0,5\pi + \alpha}{2}, & \text{если } \beta \geq 0, (\alpha \leq \phi_c \leq 0,5\pi); \\ \frac{(0,5\pi + \beta) + \alpha}{2}, & \text{если } \beta < 0, (\alpha \leq \phi_c \leq 0,5\pi + \beta). \end{cases} \quad (4)$$

Для проверки адекватности полученной математической модели необходимо сравнение теоретических расчетов со статистическими данными фактической производительности загрузки наклонного (скипового) конвейера шихтовыми материалами действующей системы шихтоподачи доменной печи.

Решение данной задачи требует определения секундных объемов, позволяющих установить характер и величину неравномерности загрузки конвейера коксом, агломератом и окатышами в единицу времени.

Секундный объем прямо пропорционален средней площади поперечного сечения  $S_m$  материала, расположенного на ленте, и скорости движения ленты  $v_{кн}$  :

$$V_{м.т.} = \frac{(S_t + S_{t-1} + \sqrt{S_t \cdot S_{t-1}})}{3} \cdot v_{кн}, \quad (5)$$

где  $t$  – текущее время поступления материала на конвейер;

$S_t$  – площадь поперечного сечения в момент времени  $t$ ;

$S_{t-1}$  – площадь поперечного сечения в момент времени  $(t - 1)$ .

Относительно формы сечения дозы на ленте существует ряд предположений, рассмотренных, например, в работе Н.С.Полякова и И.Г.Штокмана [8], на основании которых можно выразить площадь  $S_t$  через ширину поперечного сечения материала. Так, К.Штуммелен предложил считать, что материал расположен на ленте слоем, ограниченным сверху дугой окружности, касательные которой АВ :и СВ в точках А и С пересечения с лентой наклонены к горизонтали под углом естественного откоса  $\rho_0$  (рис. 1). Ограничение материала снизу осуществляется лентой конвейера, поперечное сечение которой является частью окружности. Проверка этого предложения, выполненная по формуле

$$Z_k = \sqrt{l_k + \frac{16}{3} \cdot h_k^2} \quad (6)$$

где  $Z_k$  – длина дуги, образованной в сечении лентой конвейера;

$l_k$ ,  $h_k$  – соответственно ширина и высота сегмента, образованного лентой конвейера показала, что допущение является правильным, так как отклонение  $Z_k$  от действительной менее 0,5 %. Тогда радиус этой части окружности определится по формуле:

$$R_k = \frac{l_k^2 + 4 \cdot h_k^2}{8h_k} \quad (7)$$

Текущее значение величины  $h_{ц.в.}$  (рис. 1) получим из уравнения:

$$h_{ц.в.} = R_k - \sqrt{R_k^2 - \frac{l_0^2}{4}} \quad (8)$$

где  $l_0$  – текущее значение ширины поперечного сечения материала.

На основании работы [8], величина  $h_{ц.н.}$  будет равна:

$$h_{ц.н.} = \frac{l_0}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2} \quad (9)$$

$$h_{ц.н.} = H_{ц.} - h_{ц.в.} \quad (10)$$

где  $H_{ц.}$  – текущее значение высоты слоя материала.

Решая совместно уравнения (5)-(7), после преобразований получим:

$$l_0 = \frac{2 \left\{ \left[ \operatorname{tg} \frac{\rho_0}{2} (H_{ц.} - R_k) \right] \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\rho_0}{2} (H_{ц.} - R_k)^2 - (\operatorname{tg}^2 \frac{\rho_0}{2} + 1)(H_{ц.} - 2 \cdot H_{ц.} \cdot R_k)} \right\}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\rho_0}{2} + 1} \quad (11)$$

Величина площади поперечного сечения материала может быть рассмотрена в виде суммы:

$$S_t = S_{\epsilon} + S_n, \quad (12)$$

где  $S_{\epsilon}$  – площадь поперечного сечения материала, ограниченная прямой АС и снизу кривой АОС;

$S_n$  – площадь поперечного сечения материала, ограниченная сверху ломанной АД FRC и снизу прямой АС.

С учетом того, что длина  $\frown$  АОС равна:

$$Z_{\epsilon} = \sqrt{l_0^2 + \frac{16}{3} \cdot h_{ц.в.}^2} \quad (13)$$

Численное значение площади  $S_{\epsilon}$  определится из выражения:

$$S_{\epsilon} = \frac{R_k}{2} \left( \sqrt{l_0^2 + \frac{16}{3} \cdot h_{ц.в.}^2} - l_0 \right) + \frac{l_0 \cdot h_{ц.в.}}{2} \quad (14)$$

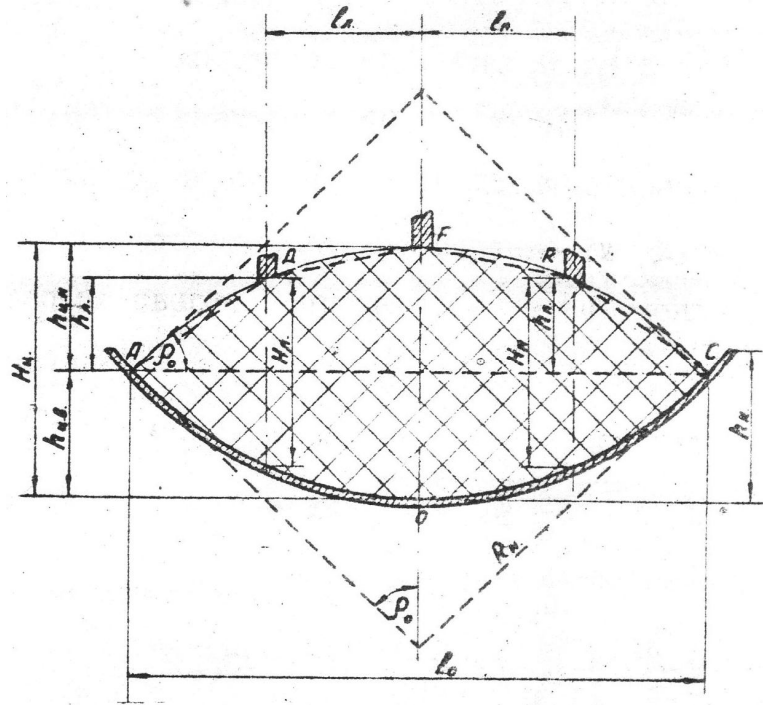


Рисунок – 1. Форма сечения материала на конвейере

Для упрощения вычислений, с некоторым запасом в сторону уменьшения возможной производительности конвейера, можно заменить

— AFC ломанной линией ADFRC. В этом случае величина  $S_n$  определится из выражения:

$$S_n = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{l_0}{2} - l_l \right) \cdot h_l + (h_l + h_{ц.н.}) \cdot l_l + \left( \frac{l_0}{2} - l_n \right) \cdot h_n + (h_n + h_{ц.н.}) \cdot l_n \right\} \quad (15)$$

$l_l, l_n$  – соответственно расстояние от оси левого и правого датчика до оси центрального;

$h_l, h_n$  – соответственно текущее значение высоты слоя материала от прямой AC до точки D и R.

Численное значение  $h_l$  будет равно:

$$h_l = h_{ц.н.} - [H_{ц} - (L_{ц} - L_l) - H_l], \quad (16)$$

$L_{ц}, L_l$  – соответственно расстояние по вертикали от места крепления центрального и левого датчика до ленты конвейера;

$H_l$  – высота сечения материала в точке его соприкосновения с левым датчиком.

Величина  $h_n$  определяется аналогично  $h_l$ .

С другой стороны, радиус окружности, дуга которой ограничивает материал сверху, определится из выражения[8]:

$$R_n = \frac{l_0}{2 \sin \rho_0} \quad (17)$$

С учетом того, что длина — AFC равна:

$$Z_n = \sqrt{l_0^2 + \frac{16}{3} \cdot h_{ц.н.}^2} \quad (18)$$

Численное значение площади  $S_n$  составит:

$$S_n = \frac{R_n}{2} \left( \sqrt{l_0^2 + \frac{16}{3} \cdot h_{ц.н.}^2} - l_0 \right) + \frac{l_0 \cdot h_{ц.н.}}{2} \quad (19)$$

Необходимо отметить, что расчет секундных объемов до момента касания материалом боковых датчиков и в дальнейшем при установке в вертикальное положение одного из них осуществляется на основании показаний перемещения центрального датчика.

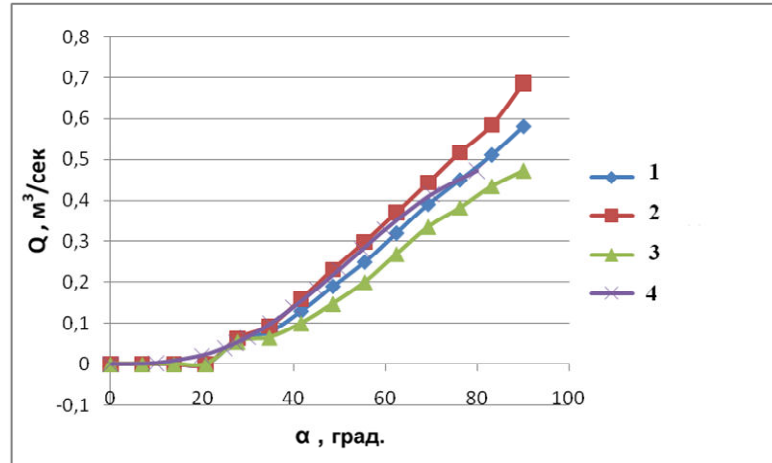
Полученные результаты производительности загрузки конвейера агломератом подтвердили, что расчеты секундных объемов с использованием выражения (15) являются достаточно точными. Так, например, при дозе агломерата в 22 м<sup>3</sup> ошибка в вычислениях составила менее 1,5%. При определении секундных объемов, где величина  $S_n$  была вычислена по формуле (19), ошибка составила 5,5%. В связи с этим, для получения статистических данных производительности загрузки конвейера шихтовыми материалами, секундные объемы определялись на основании показаний трех датчиков геометрии дозы.

При этом, угол естественного откоса кокса и агломерата был принят равным 43°, а окатышей – 34°. Результаты статистической обработки загрузки конвейера для одного вида материала (агломерата) представлены в таблице 1. Закон распределения случайных величин носит нормальный характер. Соответствие эмпирических и теоретических частот было проверено по критерию Пирсона.

Таблица 1

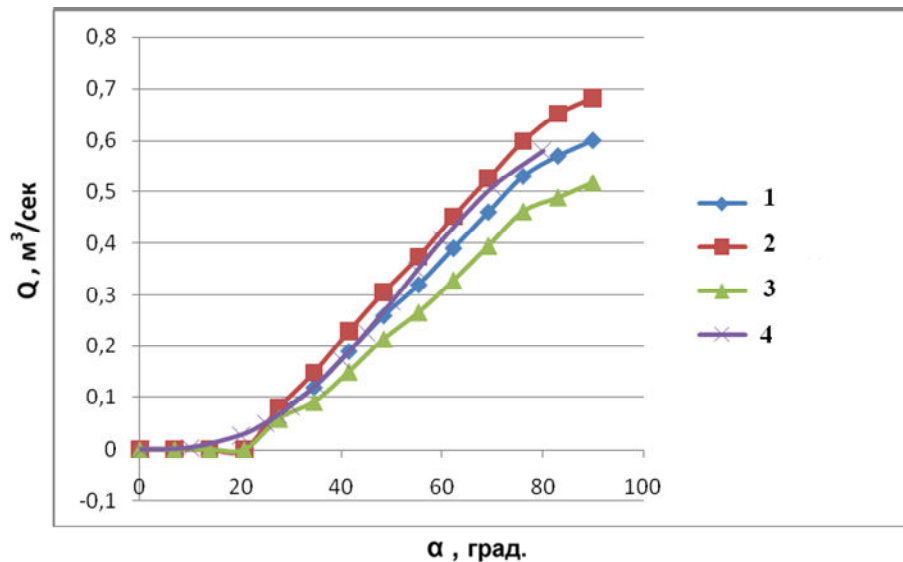
Материал	Время t(сек)	Секундный объем (м <sup>3</sup> /сек)		Отклонение секундного объема (м <sup>3</sup> /сек)		Центральная часть(м <sup>3</sup> /сек)	
		Головная часть М{V <sub>г</sub> }	Хвостов. часть М{V <sub>к</sub> }	Головная часть σ{V <sub>г</sub> }	Хвостов. часть σ{V <sub>к</sub> }	М{V <sub>ц</sub> }	σ{V <sub>ц</sub> }
Агломерат	1	0,06	0,65	0,004	0,093	0,66	0,070
	2	0,08	0,55	0,014	0,098		
	3	0,13	0,42	0,029	0,092		
	4	0,19	0,29	0,042	0,072		
	5	0,25	0,19	0,049	0,048		
	6	0,32	0,13	0,050	0,030		
	7	0,39	0,09	0,054	0,020		
	8	0,45	0,07	0,067	0,011		
	9	0,51	0,06	0,074	0,005		
	10	0,58	0,06	0,106	0,002		

Сравнительный анализ результатов показал, что теоретические расчеты с использованием разработанной математической модели зависимости расхода сыпучего материала от угла открытия заслонки совпадают с данными фактических измерений с отклонением от математического ожидания в пределах среднеквадратического отклонения (рис.2–4).



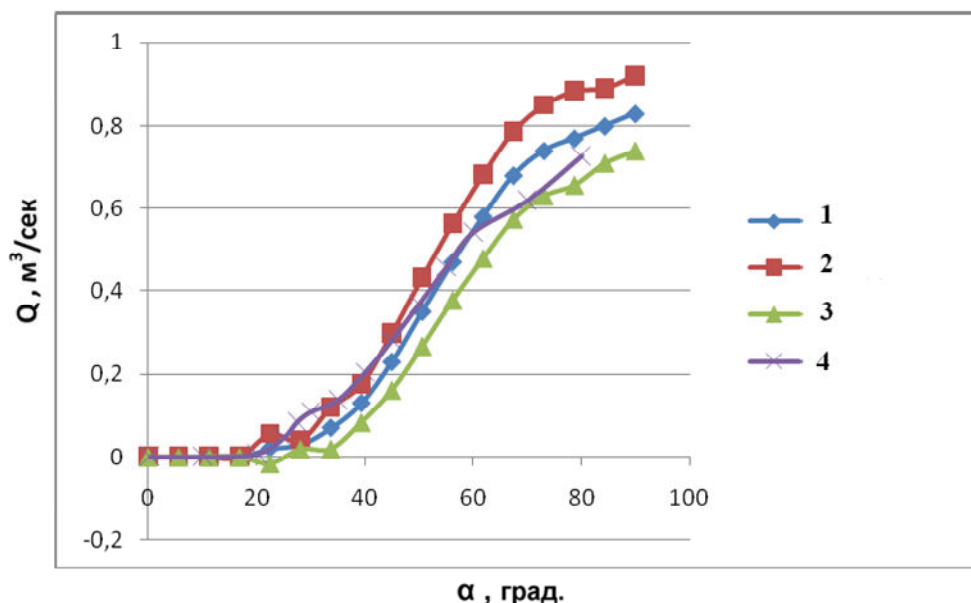
1 –математическое ожидание расхода агломерата  $M[Q]$ ;  
 2 –  $M[Q]+\sigma[Q]$ ; 3 –  $M[Q]-\sigma[Q]$ ; 4 – расчетные значения

Рисунок – 2. График зависимости расхода агломерата от угла открытия заслонки в зависимости от параметров выпускного отверстия, размеров частиц и свойств выгружаемого сыпучего груза, длины выпуска и скорости открытия затвора



1 –математическое ожидание расхода окатышей  $M[Q]$ ;  
 2 –  $M[Q]+\sigma[Q]$ ; 3 –  $M[Q]-\sigma[Q]$ ; 4 – расчетные значения

Рисунок – 3. График зависимости расхода окатышей от угла открытия заслонки в зависимости от параметров выпускного отверстия, размеров частиц и свойств выгружаемого сыпучего груза, длины выпуска и скорости открытия затвора



1 – математическое ожидание расхода кокса  $M[Q]$ ;  
 2 –  $M[Q]+\sigma[Q]$ ; 3 –  $M[Q]-\sigma[Q]$ ; 4 – расчетные значения

Рисунок – 4. График зависимости расхода кокса от угла открытия заслонки в зависимости от параметров выпускного отверстия, размеров частиц и свойств выгружаемого сыпучего груза, длины выпуска и скорости открытия затвора

#### Выводы

Анализ обширного статистического материала геометрических параметров дозы, транспортируемой наклонным конвейером, позволил установить, что концевые части дозы на конвейере составляют от общей ее длины: для кокса – более 55%, для агломерата и окатышей – более 46%. Таким образом, реализация подачи шихтовых материалов на сборный конвейер, совмещением цикла разгрузки каналов дает возможность увеличить объем доз шихтовых материалов, подаваемых в печь за время одной подачи.

С целью оптимального формирования многокомпонентной порции шихты на доменном конвейере, получена математическая модель зависимости расхода сыпучего материала от угла открытия заслонки в зависимости от параметров выпускного отверстия, размеров частиц, свойств выгружаемого сыпучего груза, длины выпуска и скорости открытия затвора.

Сравнительный анализ теоретических расчетов со статистическими данными фактической производительности загрузки наклонного (скипового) конвейера шихтовыми материалами действующей системы шихтоподачи доменной печи, полученные с использованием разработанной методики расчета секундных объемов, показал, что расчетные значения совпадают с данными фактических измерений с отклонением от математического ожидания в пределах среднеквадратического отклонения.



ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов З.И. Анализ работы печи № 9 объемом 5000м<sup>3</sup> за период январь-март 1975г. и разработка рекомендаций по технологии ведения печи и оборудования с целью увеличения производительности до 9000т в сутки. ИЧМ, Днепропетровск – Кривой Рог, 1975.
2. А.С. № 694446. Способ подачи шихтовых материалов в доменную печь/Праздников А.В., Клоцман Е.Я., Шутылев Ф.М., Головки В.И. и др.//Зарегистрировано 06.07.1979г.
3. А.С. № 1049549 СССР. Способ управления механизмами транспортной шихтоподачи доменных печей/Золотницкая Г.Д., Френкель М.М., Бургутин Ю.И. и др.//Зарегистрировано 22.06.1983.
4. Большаков В.И., Иванча Н.Г. Формирование смешанных порций шихтовых материалов на доменном конвейере//Металлургическая и горнорудная промышленность. – 2002. - №6. – с.79 – 83.
5. К вопросу об истечении сыпучего груза из бункера со щелевым отверстием / Р.В. Кирия, В.Ю. Максютенко, Д.Д. Брагинец, Б.И. Мостовой // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины. – Днепропетровск, 2008. - Вып 80. - С. 351-362.
6. Определение расхода сыпучего груза из бункера с регулируемой заслонкой/ Р.В. Кирия, В.Ю. Максютенко, Д.Д. Брагинец, Б.И. Мостовой // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАН Украины.
7. Кирия, Р.В. О коэффициенте внутренних потерь при движении сыпучей среды по элементам перегрузочных узлов ленточных конвейеров / Р.В. Кирия // Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр. / ИГТМ НАНУ. - Днепропетровск, 2003. – Вып. 41. - С. 159-167.
8. Поляков Н.С., Штокман И.Г. Основы теории и расчеты рудничных транспортных установок. Научно-техническое издательство литературы по горному делу, М., 1962.

Получено 11.06.2012 г.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЧАГА ДЕФОРМАЦИИ И КАЛИБРОВКА ОПРАВКИ АВТОМАТИЧЕСКОГО СТАНА

*Разработана математическая модель процесса продольной прокатки труб на автоматическом стане. Сформировано осевое сопротивление оправки потоку прокатываемого металла. Предложена методика калибровки оправки автоматического стана рациональной формы. Проведено опытно-промышленное испытание партии оправок рациональной калибровки на автоматическом стане. Показано влияние калибровок оправок стана на поперечную разностенность черновых и готовых бурильных труб, производимых на трубопрокатном агрегате.*

**Ключевые слова:** ОПРАВКА, ГИЛЬЗА СТАН, ТРУБА, ОЧАГ ДЕФОРМАЦИИ, КАЛИБРОВКА, ОСЕВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ, РАЗНОСТЕННОСТЬ, ДИНАМИКА, МЕТАЛЛ.

*Розроблено математичну модель процесу поздовжньої прокатки труб на автоматичному стані. Сформовано осьовий опір оправлення потоку металу, що прокочується. Запропоновано методикку калібрування оправлення автоматичного стана раціональної форми. Проведено дослідно-промислове випробування партії оправлень раціонального калібрування на автоматичному стані. Показано вплив калібрувань оправлень стана на поперечну різностінність чорнових і готових бурильних труб, вироблених на трубопрокатному агрегаті.*

**Ключові слова:** ОПРАВЛЕННЯ, ГИЛЬЗА СТАН, ТРУБА, ВОГНИЩЕ ДЕФОРМАЦІЇ, КАЛІБРУВАННЯ, ОСЬОВИЙ ОПІР, РІЗНОСТІННІСТЬ, ДИНАМІКА, МЕТАЛ.

*The mathematical model of process of the longitudinal rolling of pipes is worked out on an automatic figure. Axial resistance of mounting to the stream of the rolled metal is formed. Methodology of calibration of mounting of automatic figure of rational form offers. It is conducted industrial test of party of mounting of rational calibration on an automatic figure. Influence of calibrations of mounting of figure is shown on transversal разностенность of draft and ready boring pipes producible on a aggregate.*

**Keywords:** MOUNTING, A SHELL IS A FIGURE, PIPE, HEARTH OF DEFORMATION, CALIBRATION, AXIAL RESISTANCE, РАЗНОСТЕННОСТЬ, DYNAMICS, METAL.

Технологический процесс производства бесшовных труб на трубопрокатном агрегате (ТПА) со станами продольной прокатки предусматривает поэтапное формирование основных параметров прошитых гильз по диаметру и толщине стенки после на автоматическом стане. Промышленное освоение производства высококачественных бурильных труб на ТПА с автоматическими станами, обладающими повышенными эксплуатационными свойствами и уменьшенной материалоемкостью является наиболее актуальным. Качество бурильных труб – точность их геометрических размеров, чистота наружной и внутренней поверхности, механические свойства материала бурильных труб строго регламентируется стандартами или техническими условиями [1].

Деформация гильз после прошивного стана осуществляется на автоматическом стане в калиброванных валках и на короткой оправке, что приводит к существенному увеличению разностенности черновых труб. Характерно, что при продольной раскатке гильз на стане наиболее ярко проявляется поперечная разностенность (симметричная разностенность) гильз, обусловленная рядом факторов: несоответствием калибровки технологического инструмента (оправки и валков) размеру прокатываемых труб; перекосом оправки в плоскости, перпендикулярной оси прокатки; изменением зазора между валками и оправкой вследствие упругой деформации элементов клетки; потерей устойчивости стержня механизма удержания оправки. Это приводит к образованиям на контуре трубы участков, не обжимаемых круглыми частями калибра. При прокатке гильз, например на автоматическом стане ТПА 250, разностенность черновых труб резко возрастает. Если среднее значение разностенности гильзы после прошивного стана лежит в пределах 16–20 %, то после первого прохода оно повышается до 50–55 %. После второго прохода разностенность труб несколько снижается и для основного количества труб она составляет 20–22 %.

Прокатка бурильных труб на автоматическом стане отечественных ТПА осуществляется как на конических, так и на сферических оправках. Преимущественное распространение получили конические оправки. Однако в ряде случаев применяют сферические оправки. Следует отметить, что наличие сферической оправки в очаге деформации стана настолько затрудняет захват гильзы валками, что даже при сравнительно малых обжатиях требуется принудительная подача гильзы в валки при помощи пневматического вталкивателя.

По методике калибровки оправки автоматического стана [1] длина ее рабочей части находится исходя из максимальной величины обжатия стенки гильзы, а протяженность рабочего конуса оправки составляет 0,3–0,9 ее диаметра. При этом для облегчения входа оправки в гильзу торец ее округляется радиусом, величина которого возрастает с увеличением диаметра оправки.

Калиброванная коническая оправка состоит из двух основных частей: цилиндрического пояска и конического рабочего участка. Особо следует подчеркнуть тот факт, что при прокатке гильз на короткой оправке в круглом калибре с выпусками из-за неравномерности деформации в вершине и у разъема калибра черновая труба имеет значительную поперечную разностенность. Данная разностенность, как правило, симметрична и геометрически представляет собой определенное утолщение стенки гильзы в местах, соответствующих разъемам калибров соответственно при первом и втором проходах.

Опыт эксплуатации большинства автоматических станов отечественных ТПА показывает, что при неточной установке оправки (поясок оправки смещен от центра валков вперед или назад), а также из-за

повышенной толщины стенки исходной гильзы на стане в некоторых случаях наблюдается отсутствие захвата гильзы валками. Во избежание этого необходимо: установить правильно оправку в очаге деформации; уменьшить толщину стенки гильзы; увеличить диаметр прокатываемой гильзы до размеров ширины калибра валков. Чтобы не допустить образования этих дефектов, необходимо тщательно следить за настройкой автоматического стана, калибровкой оправок и валков и состоянием их рабочих поверхностей, активно использовать смазку (поваренную соль) перед каждым проходом и т.д.

Основное обжатие стенки гильзы происходит между валками и рабочей частью оправки. На выпускающем участке оправки стенка гильзы практически не меняется, а ее обжатие заканчивается на участке перехода от конической части оправки к цилиндрическому пояску.

Одним из способов повышения точности черновых труб при раскатке гильз на автоматическом стане является рациональное перераспределение вытяжек по соответствующим проходам, предусматривающее снижение обжатия во втором проходе и применение более тесных калибров с овальностью 1,04–1,05, а также конических оправок с увеличенным углом конусности.

Осевому перемещению металла в очаге деформации оправка оказывает определенное сопротивление, включающее лобовое сопротивление оправки и сопротивление, вызываемое силами трения. Вследствие несовершенства образующей рабочей поверхности, оправка в ходе высокоскоростного процесса продольной прокатки труб больше всего подвергается интенсивному износу со стороны обтекающего потока горячего металла. Это приводит к значительному увеличению осевого сопротивления оправки в очаге деформации и к нарушению устойчивости функционирования механизма ее удержания на оси прокатки. Сопротивление перемещению металла в очаге деформации с уменьшением угла конусности оправки повышается вследствие удлинения поверхности соприкосновения металла с оправкой. Минимальное суммарное сопротивление соответствует такому углу конусности, при котором достигается равенство лобового сопротивления и сопротивления от сил трения. Например, в условиях эксплуатации автоматического стана ТПА 250 наилучшие результаты получены при наличии смазки (поваренная соль) и использовании оправок с углом конусности 10–12°.

Отметим, что через определенное время эксплуатации происходит адаптация оправки процессу продольной прокатки и образующая ее рабочей поверхности приобретает реальную форму, которая, по картине износа, идентифицируется с некоторой рациональной кривой.

С целью разработки методики проектирования (калибровки) технологического инструмента, отработки и реализации устойчивых режимов прокатки труб на автоматическом стане, сформируем функционал

осевого сопротивления оправки на базе математической модели динамики процесса течения металла в очаге деформации.

Очаг деформации автоматического стана, с некоторыми допущениями, представляем в виде условно – круглого калибра, образованный валками и оправкой. Принимаем определенное допущение, что калибр автоматического стана, в дальнейшем, является строго осесимметричным. Тогда, поток прокатываемого металла в очаге деформации, в рамках гидродинамической модели, можно рассматривать в виде «вязкой» несжимаемой рабочей среды (рис. 1).

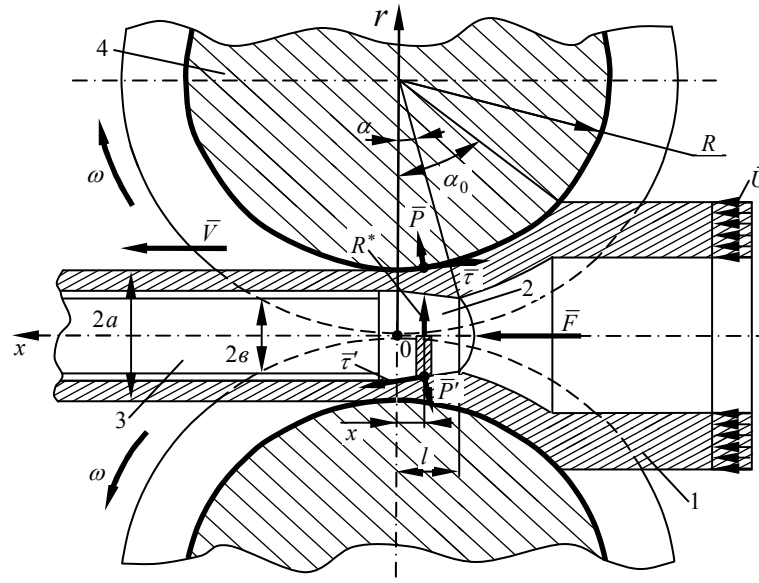


Рисунок – 1. Расчетная схема очага деформации автоматического стана:

1 – гильза; 2 – оправка; 3 – стержень оправки; 4 – рабочий валок

Следуя оговоренным условиям, в дальнейшем в рамках динамической модели очага деформации воспользуемся уравнениями Навье-Стокса [2, 3, 4]. Выбираем цилиндрическую систему координат и после отбрасывания конвективных членов данные уравнения запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left( \nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} \right), & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \nabla^2 V_x, & (2) \end{cases}$$

где  $\nabla^2 ( ) = \frac{\partial^2 ( )}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial ( )}{\partial r} + \frac{\partial^2 ( )}{\partial x^2}$  – обобщенный оператор Лапласа;  $\mu$  – коэффициент вязкости металла (рабочей среды).

Отметим, что коэффициент «вязкости» среды определяется согласно методикам [4, 5] исходя из зависимости сопротивления деформации от скорости и условий деформации металла.

Если считать, что длина зоны течения металла (зоны деформации) между оправкой и рабочими валками больше ее «ширины» (очаг деформации «узкий»  $l > a$ ) и при этом, принимая во внимание допущения об осесимметричности процесса, сохраняет свою силу ранее приведенный

анализ. Тогда, положив за основу  $V_x = U(x, r)$ , с учетом принятых допущений и преобразований, дифференциальные уравнения (1) и (2) для определения градиента давления металла в очаге деформации запишем в виде

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) \quad (3)$$

где  $U(x, r)$  – скорость течения металла в очаге деформации вдоль оси прокатки

Необходимо отметить, что решение дифференциального уравнения (3) позволяет получить аналитические зависимости для нахождения значений динамических составляющих энергосиловых параметров при продольной прокатке гильз на автоматическом стане. После обезразмеривания системы уравнений (3) и некоторых упрощений, соответственно, получаем преобразованное уравнение

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{r}}, \quad (4)$$

где  $\bar{x} = \frac{x}{a}$ ;  $\bar{r} = \frac{r}{a}$ ;  $\bar{U} = \frac{U}{V}$ ;  $\bar{p} = \frac{pa}{\mu V}$  – безразмерные параметры задачи;  $a$  – радиус гильзы.

Из решения дифференциального уравнения (4) находим скорость движения потока металла в очаге деформации [3]

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{r}) = \frac{1}{4} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \bar{r}^{-2} + C_1(\bar{x}) + C_2(\bar{x}) \ln \bar{r}. \quad (5)$$

Тогда, параметры интегрирования  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  определяем из уравнения (5), используя граничные условия задачи, опираясь на базовые условия воспроизведения процесса продольной прокатки гильз в очаге деформации стана и взаимодействия прокатываемого металла с технологическими инструментами в соответствующих зонах их контакта.

Принимая во внимание кинематику очага деформации, из условия взаимодействия металла с образующей оправки и по катающему радиусу вращающихся валков, формируем необходимые и достаточные граничные условия задачи в безразмерном виде

$$\bar{U} \Big|_{\bar{r}=1+\bar{R} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{\bar{R}^2}} \right)} = \bar{\omega} \left( \bar{R} + \frac{1}{2} \right) \text{ и } \bar{U} \Big|_{\bar{r}=\bar{R}^*(\bar{x})} = 0, \quad (6)$$

где  $\bar{R} = \frac{R}{a}$  – безразмерный радиус валка

После подстановок граничных условий (6) в уравнение (5) и необходимых преобразований находим параметры интегрирования  $C_1(\bar{x})$  и  $C_2(\bar{x})$  в виде

$$C_1(\bar{x}) = \frac{\bar{\omega}(R + 1/2)\Delta\bar{R}^*(\bar{x})\ln R^*(\bar{x}) - \frac{1}{4}\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}\left[\Delta^3\bar{R}^*(\bar{x}) - \Delta\bar{R}^{*3}(\bar{x})\ln\Delta\right]}{\bar{R}^*(\bar{x})\ln\bar{R}^*(\bar{x}) - \Delta\ln\Delta};$$

$$C_2(\bar{x}) = \frac{\bar{\omega}(\bar{R} + 1/2)\Delta - \frac{1}{4}\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}\left[\Delta^3 - \bar{R}^{*3}(\bar{x})\right]}{\Delta\ln\Delta - \bar{R}^*(\bar{x})\ln\bar{R}^*(\bar{x})}, \quad (7)$$

где  $\bar{\omega} = \frac{\omega a}{V}$ ;  $\bar{R}^*(\bar{x}) = \frac{R^*(x)}{a}$  – безразмерные параметры уравнения (угловая скорость вала и радиус образующей оправки в калибре);

$\Delta = 1 + \bar{R} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{\bar{x}^2}{\bar{R}^2}} \right]$  – параметр очага деформации, соответствующий

условному катающему радиусу в рассматриваемом сечении  $x$  очага деформации.

При течении потока металла в осесимметричном калибре очага деформации уравнение неразрывности, с учетом расположения оправки и параметров формирования трубы (гильз с заданными геометрическими размерами), записываем в форме закона постоянства мгновенных расходов. Данное уравнение представляем в безразмерной форме

$$2 \int_{\bar{R}^*(x)}^{\Delta} U r dr = 1 - \bar{b}^2. \quad (8)$$

где  $\bar{b} = \frac{b}{a}$ ;  $b$  – радиус цилиндрического пояска оправки.

Подставляя выражение (5) в (8) и используя параметры интегрирования  $C_1(\bar{x})$  и  $C_2(\bar{x})$  из уравнений (7) в рамках динамической модели процесса продольной прокатки труб, находим градиент давления в очаге деформации автоматического стана в безразмерной форме

$$\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{f_1(\bar{x})}{f_2(\bar{x})}, \quad (9)$$

где

$$f_1(\bar{x}) = \left(1 - \bar{b}^2\right) - \frac{\bar{\omega}(\bar{R} + 0,5)}{\Delta\ln\Delta - \bar{R}^*(\bar{x})\ln\bar{R}^*(\bar{x})} \quad (10)$$

$$\left[\bar{R}^*(\bar{x})\ln\bar{R}^*(\bar{x})\left[\Delta - \bar{R}^*(\bar{x})\right] + \Delta^2(\ln\Delta - 0,5) - \bar{R}^2(\ln\bar{R} - 0,5)\right];$$

$$f_2(\bar{x}) = \frac{\Delta^4 - \bar{R}^{*4}(\bar{x})}{8} - \frac{2\Delta\bar{R}^*(\bar{x})[\Delta^2 \ln \bar{R}^*(\bar{x}) - \bar{R}^{*2}(\bar{x}) \ln \Delta][\Delta - \bar{R}^*(\bar{x})]}{4(\Delta \ln \Delta - \bar{R}^*(\bar{x}) \ln \bar{R}^*(\bar{x}))} +$$

$$+ \frac{\Delta^3 - \bar{R}^{*3}(\bar{x})[\Delta^2(\ln \Delta - 0,5) - \bar{R}^2(\ln \bar{R} - 0,5)]}{4(\Delta \ln \Delta - \bar{R}^*(\bar{x}) \ln \bar{R}^*(\bar{x}))}. \quad (11)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (9), определяем величину давления металла в рассматриваемом сечении  $x$  очага деформации

$$\bar{p}(\bar{x}) = \int_0^{\bar{x}} \frac{f_1(\bar{x})}{\bar{x} f_2(\bar{x})} d\bar{x}. \quad (12)$$

Исходя из закона вязких трений (закона Ньютона) [5], в рамках динамической модели очага деформации, находим касательные напряжения (силы трения) в потоке прокатываемого металла. Для удобства решения поставленной задачи, касательные напряжения в очаге деформации представим в безразмерной форме

$$\bar{\tau}(\bar{x}, \bar{r}) = \frac{\tau a}{\mu V} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial r}. \quad (13)$$

Здесь  $\bar{\tau} = \frac{\tau a}{\mu V}$  – касательное напряжение в рассматриваемом сечении  $x$  очага деформации в безразмерной форме.

Следовательно, из (13) и (5) касательное напряжение в очаге деформации окончательно запишем в виде

$$\bar{\tau}(\bar{x}, \bar{r}) = \frac{1}{2} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \bar{r} + \frac{C_2(\bar{x})}{\bar{r}} = \frac{1}{2} \frac{f_1(\bar{x})}{f_2(\bar{x})} \bar{r} + \frac{C_2(\bar{x})}{\bar{r}}. \quad (14)$$

Тогда, с учетом энергосиловых параметров очага деформации (9) и (14), находим осевое сопротивление оправки потоку прокатываемого металла

$$\bar{F} = \frac{F}{2\pi\mu aV} = \int_{\ell}^0 2\pi\bar{R}^*(\bar{x})\bar{R}'^*(\bar{x})\bar{p}d\bar{x} + \int_{\ell}^0 2\pi\bar{R}^*(\bar{x})\bar{\tau}d\bar{x} \quad (15)$$

где  $\bar{\ell} = \bar{R} \sin \alpha$  – рассматриваемая длина зоны течения потока металла (зоны деформации без учета зоны редуцирования) в калибре автоматического стана.

После подстановок  $\bar{p}$  и  $\bar{\tau}$  в (15) имеем усилия на оправку и стержневую систему механизма удержания оправки при реализации технологического процесса прокатки гильзы на автоматическом стане

Для достоверности теоретических выкладок и практической ценности поставленной задачи более подробно остановимся на примере расчета калибровки оправки  $\delta_a = 114$  мм автоматического стана ТПА 250 ОАО «Азербору» (Азербайджанский трубопрокатный завод) на базе



СТП 14-163-88 [6]. Длину цилиндрического пояска оправки конической формы назначаем конструктивно 20 мм. При этом радиус перехода от рабочей к цилиндрической части оправки равен 28 мм, а длина рабочей части оправки должна обеспечить перекрытие зоны обжатия, поэтому ее определяют по максимальной величине обжатия стенки (практически принимаем 90мм).

Используя метод оптимизации [5] из условия минимума функционала осевого сопротивления оправки обтекающему потоку металла в пространстве очага деформации (16), путем реализации базовой вариационной задачи Эйлера, определяем рациональную форму (калибровку) образующей рабочей поверхности оправки автоматического стана ТПА 250, а также находим величины энергосиловых параметры процесса продольной прокатки труб на стане (рис. 2) (таблица 1).

Анализ полученных результатов показывает, что форма образующей оправки (калибровка), соответствующая рациональной кривой, при прочих равных условиях, обеспечивает оптимальное распределение давления металла и касательных напряжений по всей длине очага деформации. Это приводит к снижению осевого сопротивления оправки потоку металла.

Используя функционал осевого сопротивления оправки (15) путем реализацией многофакторного математического эксперимента, для конкретных маршрутов прокатки гильз, возможно изучение динамики процесса продольной прокатки труб. Полученные результаты позволяют, на соответствующем этапе проектирования технологического процесса, путем моделирования, обрабатывать и реализовывать устойчивые режимы течения металла в очаге деформации автоматического стана.

Далее исследуем влияние рациональной калибровки оправок автоматического стана на поперечную разностенность гильз и готовых бурильных труб. При этом применялись литые отоженные шлифованные оправки диаметром 114мм, сочленяемые со стрежнем механизма удержания с помощью специальных шпилек, известной и новой калибровок. Опытно – промышленное опробование оправок рациональной калибровки проводили на автоматическом стане ТПА 250. Для получения сравнительных результатов был приведен опытный прокат партии черновых труб 127x9,17мм (сталь 32Г2) в готовые трубы размером 114x7,0 мм.

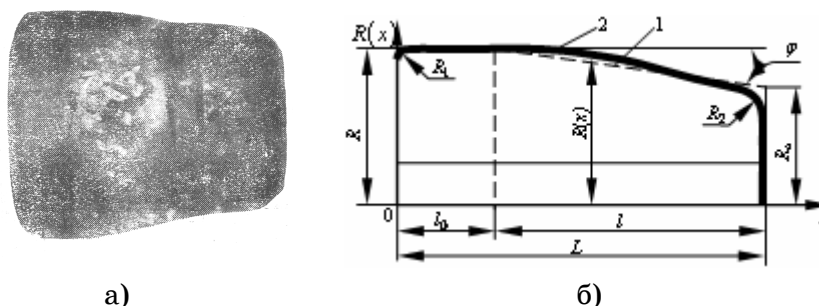
С целью создания в калибре симметричных условий деформации по периметру гильзы, была скорректирована рациональная калибровка оправки, способствующая созданию калибра с рациональными величинами обжатия по толщине стенки деформируемой трубы. В этом случае характерная форма ручья рабочих валков автоматического стана, как по вершине калибра, так и ближе к выпускам не изменяется.

Таблица 1

Расчетные величины энергосиловых параметров процесса прокатки гильз (партии черновых труб 127x9,17мм, сталь 32Г2 в готовые трубы размером 114x7,0 мм.) и размеры рациональной оправки автоматического стана ТПА 250 диаметром 114мм (первый проход)

№ п/п	Координата $x$ , мм	Касательные напряжения		Давление металла в очаге деформации, $p \cdot 10^9$ , Н / м <sup>2</sup>	Размеры рациональной оправки, $R^*(x)$ , мм
		На валке $\tau_a 10^9$ , Н / м <sup>2</sup>	На оправке $\tau_e 10^9$ , Н / м <sup>2</sup>		
1	20	0,292	0,405	0,736	57,00
2	30	0,268	0,332	0,621	56,80
3	40	0,231	0,291	0,533	55,40
4	50	0,208	0,266	0,461	54,10
5	60	0,197	0,254	0,395	53,60
6	70	0,160	0,251	0,334	52,20
7	80	0,102	0,198	0,217	49,10
8	90	0,051	0,082	0,095	48,300

Для обеспечения оптимальных условий течения металла в очаге деформации, гарантированного захвата гильз рабочими валками и стабилизации качества (разностенности) труб практически путем установлены рациональные соотношения между шириной калибра и его диаметром (высотой). Условия эксплуатации автоматического стана ТПА 250 №1 показывают, что для тонкостенных труб отношение ширины калибра  $B_k$  к его высоте  $D_k$  необходимо принять равным  $\xi = 1,03 \div 1,04$ , а для труб со средней и толстой стенкой  $\xi = 1,03 \div 1,04$ . В районе цилиндрического пояса сечению оправки придаем форму овала, который плавно сопрягается с калиброванным рабочим участком оправки. На оправке с  $\xi=1,02$  была прокатана выбранная партия труб, после чего были проведены замеры уровня их разностенности. Оценка влияния известной и новой калибровок оправок автоматического стана на точность прокатанных труб определялась путем сопоставления уровней разностенности гильз и готовых труб [6].



а) картина износа оправки автоматического стана диам. 114 мм;  
б) рациональная калибровка оправки

Рисунок – 2. Картина износа а) и калибровка оправки б) автоматического стана ТПА:  
1 – существующая конусная калибровка; 2 – рациональная калибровка

Первоначально была прокатана партия бурильных труб с применением оправок известной калибровки диаметром 114 мм (первый проход). После этого вторая партия труб прокатывалась с использованием овальной оправки с рациональным калиброванным участком, диаметр по вершине калибра которой составляет 114 мм, а по выпускам – 116 мм, т.е.  $\xi=1,02$ . После первого прохода в автоматическом стане концевые участки труб обеих партий были обмеряны по длине 1000 мм через каждые 100 мм в 8 точках по периметру.

Анализ результатов замеров показал, что применение оправки рациональной калибровки способствует снижению уровня поперечной разностенности черновых размеров гильз в среднем на 7-8% (рис.3), что создает необходимые предпосылки для сокращения величины концевой обрезки и повышения точности готовых бурильных труб (рис.4).

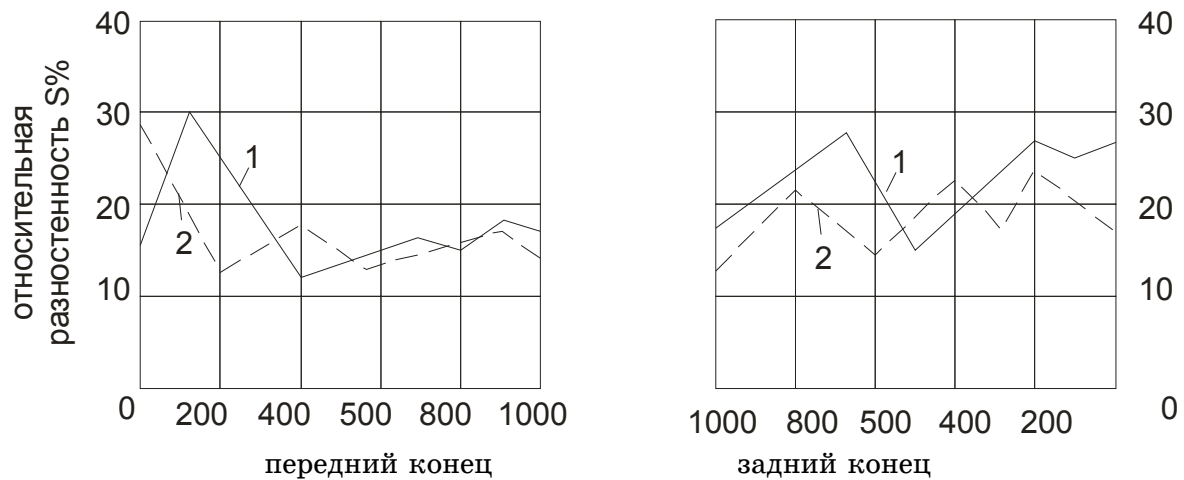


Рисунок – 3. Влияние калибровок оправок на разностенность труб после первого прохода на автоматическом стане  
1 – коническая оправка; 2 – новая оправка

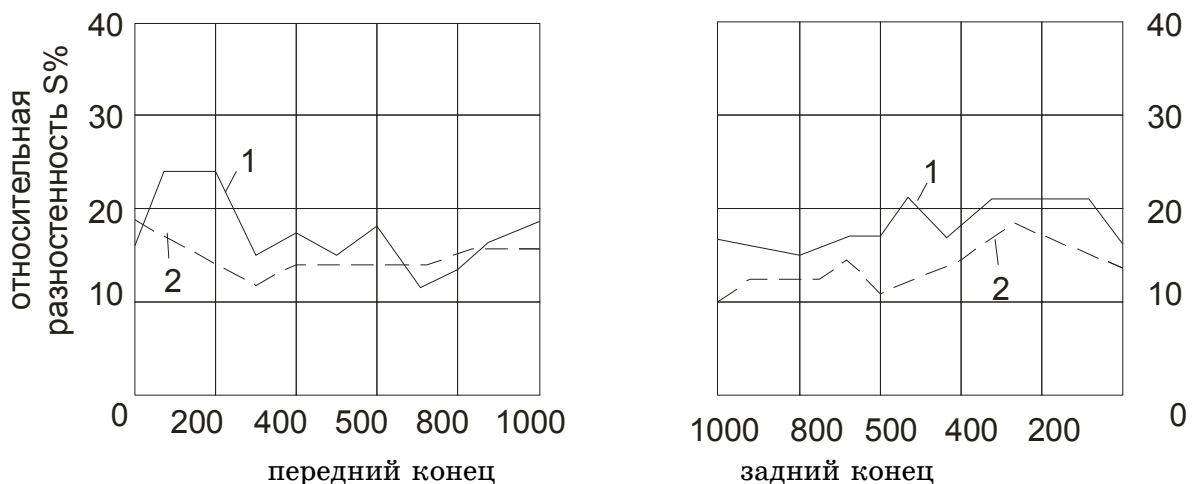


Рисунок – 4. Влияние калибровок оправок на разностенность готовых труб  
1 – коническая оправка; 2 – новая оправка

Процесс прокатки труб на автоматическом стане с применением оправки новой калибровки более устойчив и протекает без дополнительных остановок на настройку очага деформации.

### Выводы

1. Разработана математическая модель процесса продольной прокатки труб на автоматическом стане и решена задача о динамике высокоскоростного течения металла между рабочими валками и оправкой в очаге деформации на базе вязкой реологии рабочей среды.

2. Сформировано осевое сопротивление оправки обтекающему потоку металла в очаге деформации и минимизацией функционала осевого сопротивления оправки определена рациональная калибровка рабочего участка оправки.

3. На базе разработанной динамической аналогии установлено влияние формы рабочей поверхности (калибровки) оправки автоматического стана на формирование энергосиловых параметров очага деформации.

4. Путем оптимизации формы рабочей поверхности предложена новая калибровка оправки автоматического стана ТПА 250 на базе СТП 14-163-88, что обеспечивает в очаге симметричные условия деформации гильзы по периметру.

5. Изготовлена и опробована опытно – промышленная партия оправок рациональной калибровки с овальностью  $\xi=1,02$  на автоматическом стане ТПА 250.

6. Установлено влияние калибровки оправок автоматического стана ТПА 250 на поперечную разностенность черновых и готовых труб.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Данченко В.Н. Технология трубного производства. Учебник для вузов. /В.Н. Данченко, А.П. Коликов, Б.А. Романцев, С.В. Самусев // . – М.: Интермет - Инжиниринг, 2002. – 640 с.
2. Гун Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением. – М.: Металлургия, 1980. – 456 с.
3. Колмогоров Г.Л. Вопросы гидродинамической смазки при прессовании материалов жидкостью высокого давления./ Колмогоров Г.Л., Мельников Т.Е.// – Физика и техника высоких давлений. 1981, №3, с. 91-96.
4. Илюшин А.А. Механика сплошной среды. – 2-е изд. – М.: Издательство Московского Университета, 1978. – 288 с.
5. Гуляев Ю.Г. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением. /Гуляев Ю.Г., Чукмасов С.А., Губинский А.В.// – Киев.: Наукова думка, 1986. – 240 с.
6. Гамидов Ф.Дж. Совершенствование технологии производства обсадных труб и повышения их качества. Сталь №2, 2002 г., с. 73-76.

Получено 4.06.2012 г.

## МЕТОД КАРКАСНЫХ БЛОКОВ В МЕХАНИКЕ КОМПОЗИТНЫХ СРЕД ПРИ ВЫСОКИХ ГРАДИЕНТАХ СОСТОЯНИЯ

*Представляется метод каркасных блоков численного решения задач механики композитных сред при малых и больших деформациях компонентов среды. Метод может применяться при слабых и высоких макроскопических градиентах состояния среды. Метод включает макромеханический и локально-структурный уровни анализа. Изложение метода производится в дифференциальной форме и форме экстремальной задачи.*

**Ключевые слова:** СРЕДА КОМПОЗИТНАЯ, СРЕДА КУСОЧНО-ОДНОРОДНАЯ, СОСТОЯНИЕ СЛАБОГРАДИЕНТНОЕ, СОСТОЯНИЕ ВЫСОКОГРАДИЕНТНОЕ, УРОВЕНЬ МАКРОМЕХАНИЧЕСКИЙ, УРОВЕНЬ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИЙ, ДЕФОРМАЦИИ МАЛЫЕ, ДЕФОРМАЦИИ БОЛЬШИЕ.

*Представлено метод каркасних блоків чисельного розв'язання задач механіки композитних середовищ при малих і великих деформаціях компонентів середовища. Метод може застосовуватися при слабких і високих макроскопічних градієнтах стану середовища. Метод включає макромеханічний і локально-структурний рівні аналізу. Викладення методу проводиться в диференційній формі і формі екстремальної задачі.*

**Ключові слова:** СЕРЕДОВИЩЕ КОМПОЗИТНЕ, СЕРЕДОВИЩЕ КУСКОВО-ОДНОРІДНЕ, СТАН СЛАБОГРАДІЄНТНИЙ, СТАН ВИСОКОГРАДІЄНТНИЙ, РІВЕНЬ МАКРОМЕХАНІЧНИЙ, РІВЕНЬ МІКРОМЕХАНІЧНИЙ, ДЕФОРМАЦІЇ МАЛІ, ДЕФОРМАЦІЇ ВЕЛИКІ.

*Is the method of frame blocks the numerical solution of the mechanics of composite media at small and large deformations of the components of the medium. The method can be used for weak and high gradients of macroscopic state of the environment. The method includes macromechanical and locally-structural levels of analysis. Presentation of the method is performed in a differential form and shape of the extremal problem.*

**Keywords:** COMPOSITE MEDIUM, PIECEWISE HOMOGENEOUS MEDIUM, POORLY-GRADED STATE, HIGH-GRADIENT STATE, MACROMECHANICAL LEVEL, MICROMECHANICAL LEVEL, SMALL DEFORMATION, LARGE DEFORMATION.

### Введение

Предложен метод вычислительной механики композитных сред с высокими градиентами макроскопического состояния при малых и больших деформациях компонентов материала среды – метод каркасных блоков (МКБ). Метод включает два уровня анализа, базирующихся на выделении двух систем (множеств) материальных точек среды. Макромеханический (верхний, первый) уровень анализа основывается на разделении композитной среды на блоки, называемые каркасными, и введении соответствующей совокупности каркасных точек. В качестве каркасных точек принимаются вершины блоков, на которые разделяется композитная среда. Каркасные точки выполняют роль макроточек – точек

дискретизации верхнего уровня анализа. На микромеханическом (нижнем, втором) уровне анализа дискретизации подвергаются (каркасные) блоки среды. Множество каркасных точек является при этом подмножеством микроточек – узловых точек дискретизации нижнего уровня анализа. Соответственно системам макро- и микроточек вводятся в рассмотрение поля каркасных (макроскопических) и материальных (внутренних) перемещений, которые определяют положения точек соответствующих множеств в текущей конфигурации среды. Поле каркасных перемещений выполняет ключевую (определяющую) роль и методологически является первичным, а поле материальных перемещений, как производная поля каркасных перемещений, – вторичным. Макроскопическое и материальное (первого и второго уровней) поля перемещений в условиях высоких градиентов состояния среды определяются на базе дифференциальной или экстремальной формулировок статической либо динамической задачи исследования среды. Применение двухуровневого подхода позволит осуществить эффективную реализацию анализа среды при высоких градиентах состояния, в том числе в условиях внутренней потери устойчивости и проявлений краевого и кромочного эффектов.

### **1. О каркасной теории сред при плавных градиентах макроскопического состояния**

В [1, 2] представлена каркасная теория армированных волокнами сред периодического или квазипериодического строения при малых и больших деформациях. Такие среды рассматриваются как совокупности блоков представления структуры их материала, топология и геометрия которых не меняются или меняются несущественно с переходом от одного блока к смежному с ним другому блоку. Блоки в исходном состоянии представляют собой параллелепипеды, в общем случае косоугольные с плоскими, незначительно или сильно искривленными гранями, соответственно случаям прямых, глобально (слабо) или локально искривленных волокон «базовых» систем армирования материала среды. Точки в вершинах блоков материала выполняют роль «опорных» точек анализа среды и называются каркасными точками среды.

Теория имеет двухуровневый характер и построена на базе объединения макро- и микромеханического подходов в механике композитов. Во главу построения поставлено поле макроскопических перемещений, как исходное ключевое понятие теории. Поле макроскопических перемещений определяет материальные перемещения каркасных точек среды и, вместе с тем, содержание макро-механического уровня анализа. Поле материальных перемещений методологически является производной от поля макроскопических перемещений и определяет перемещения в компонентах материала среды и, вместе с тем, содержание микро-механического уровня анализа.

Общая постановка задачи предполагает несущественное изменение состояния материала среды на расстояниях порядка характерных размеров

структурных блоков, когда состояние среды не является макроскопически высокоградиентным (см. рис. 1). Объединение макро- и микромеханических подходов осуществляется на основе введения узловых точек макромеханического уровня анализа и выделения в их окрестностях узловых структурных блоков. Узловые блоки материала среды выделяются так, что при этом данные узловые точки являются их геометрическими центрами. Узловые блоки макромеханического уровня анализа также называются узловыми макроточками среды. Процедура анализа среды на базе введенной сетки узловых блоков осуществляется в следующей последовательности. На макромеханическом уровне анализа формулируется макрокраявая статическая или динамическая задача, целью которой является определение макроскопического (каркасного) поля перемещений среды. Макрокраявая (глобальная) задача строится на базе уравнений макроскопического движения (или равновесия) среды, выраженных в компонентах макроскопических перемещений и напряжений. Макроскопическое поле перемещений при этом рассматривается как задающее перемещения каркасных точек – вершин структурных блоков среды и, вместе с тем, макроскопическую деформацию среды.

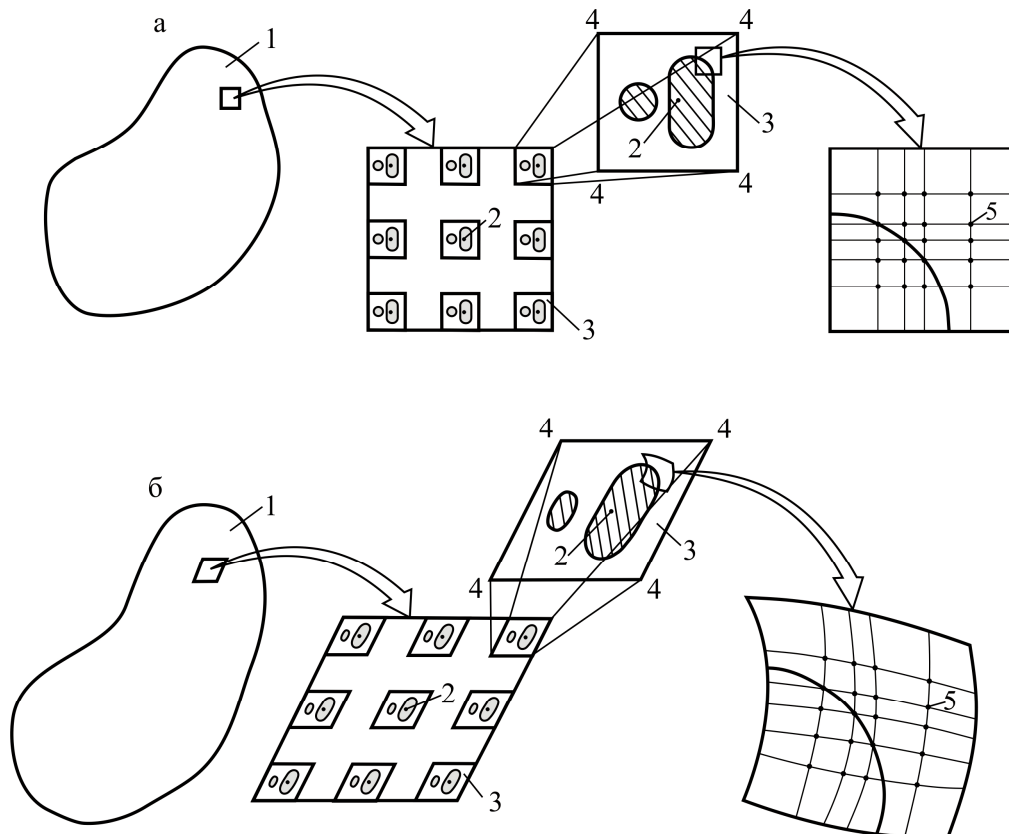


Рисунок 1 – Схема анализа среды композитного материала при больших деформациях с макроскопически плавными градиентами состояния. Представлены элементы схемы в исходном (а) и деформированном (б) состояниях:  
 1 – среда композитного материала; 2 – геометрические центры узловых блоков макромеханического уровня анализа; 3 – узловые блоки макромеханического уровня анализа (для таких блоков выделены элементы структуры);  
 4 – каркасные точки среды; 5 – узловые точки микромеханического уровня анализа.

На локально-структурном, так называемом микромеханическом уровне анализа, для узловых блоков среды формируются микрокраевые задачи. Граничные условия микрокраевых задач определяются значениями компонент макроскопической деформации по месту данных блоков в среде (узловых макроточек). Микрокраевые задачи для узловых блоков формулируются на базе уравнений МДТТ для компонентов материала блоков. Микрокраевые задачи решаются с учетом условий совместного деформирования компонентов материала на основе применения для каждого из узловых блоков сетки узловых точек микромеханического уровня анализа. Такие точки также называются узловыми макроточками среды (блоков представления материала среды). Исходя из информации о полях внутренних (материальных) перемещений среды производится расчет её макроскопических напряжений по месту узловых блоков в зависимости от компонент их макроскопической деформации. Осуществление данной операции позволяет замкнуть систему уравнений микрокраевой (глобальной) задачи. Введенные на базе каркасного поля перемещений понятия макроскопических деформаций и макроскопических напряжений актуальны как при малых, так и больших деформациях компонентов структуры, когда грани блоков испытывают сильные искривления и изламываются на поверхностях раздела составляющих компонентов (см. подробнее [2]).

Преимуществом данного объединения макро- и микромеханического подходов по сравнению с теорией взаимодействия многих деформируемых тел (кусочно-однородной среды) является то, что в первом случае анализа объем вычислений может быть на несколько порядков меньше объема вычислений во втором случае анализа. Объёмы указанных вычислений относятся между собою так, как суммарный объем узловых блоков среды относится к объему среды в целом. Данное соотношение зависит от того, в какой мере состояние среды изменяется с переходом от одного блока структуры к смежному с ним другому блоку.

Преимуществом макро-микромеханического подхода по сравнению с подходом в механике жестких композитов, базирующемся на идее гомогенизации, является наличие микромеханического уровня анализа. Микромеханический уровень анализа позволяет выявлять внутренние поля композитной среды и на их основе осуществлять прочностной анализ – анализ разрушения среды, являющийся одной из основных задач механики композитов. Отметим также и то, что рассматриваемый подход весьма органично осуществляется на основе распараллеливания вычислительной процедуры анализа среды. Благодаря указанным обстоятельствам предложенный путь моделирования композитной среды приобретает практическую ценность и может быть реализован на современных компьютерах достаточно большой вычислительной мощности.

На базе каркасной теории были выполнены исследования композитных материалов с одномерными, двухмерными и



пространственными схемами армирования при малых и больших деформациях матрицы и волокон [3 – 5]. Данная теория также получила свое обоснование на основе проведения расчетных и дублирующих экспериментальных исследований резинокордных материалов [6, 7] и ряда волокнистых тел при малых и больших деформациях материалов матрицы и волокон [8].

## 2. Условия макроскопически высокоградиентного состояния среды

При высоких градиентах макроскопического состояния регулярно армированной среды с периодическим или квазипериодическим строением в исходном состоянии поля перемещений, деформаций и напряжений (внутренние поля) значительно различаются для смежных блоков представления структуры материала среды. На рис. 2 изображена картина высокоградиентного деформирования композитной среды периодического строения при больших деформациях вместо картины плавногоградиентного деформирования среды на рис.1.

В случае больших деформаций среды периодического строения условие высокоградиентного состояния на макроскопическом уровне эквивалентно тому, что в деформированном состоянии строение материала среды становится существенно непериодическим. Блоки представления материала, будучи параллелепипедами (квазипараллелепипедами) в исходном (отсчетном) состоянии, в деформированной (текущей) среде становятся в общем случае существенно неправильными шестигранниками с разными между собой деформациями, искривлениями и изломами противоположных граней.

Для стохастически организованной среды понятие макроскопического градиента состояния не столь четко определяется. Состояние среды статистически однородного строения считаем макроскопически высокоградиентным, если смежные блоки представления структуры с одинаковыми между собой в исходном состоянии размерами (расстояниями между каркасными точками) в деформированном состоянии получают существенно отличающиеся между собою изменения своих соответствующих размеров. В случае больших деформаций стохастической среды для оценки градиентности её состояния на макроуровне можно сопоставлять между собой соответствующие характерные размеры её смежных блоков в деформированном состоянии.

Высокоградиентные состояния реализуются возле граничной поверхности среды в виде краевых и кромочных эффектов, возле поверхностей раздела областей среды с разными строениями (поверхностей разрыва параметров структуры). Такие состояния также реализуются в областях среды, находящих под воздействием внешних поверхностных и объемных сил с высокими градиентами (острыми пиками) макроскопических интенсивностей, когда данные интенсивности

существенно отличаются с переходом от одной блока материала среды к смежному с ним другому блоку. Состояние среды в тех областях, где её строение регулярное, но, вместе с тем, неперiodическое, рассматриваем методологически также как макроскопически высокоградиентное. Такое состояние создается, например, для кругового толстостенного цилиндра с редким расположением по окружному направлению волокон радиальной ориентации и по радиальному направлению волокон окружной ориентации.

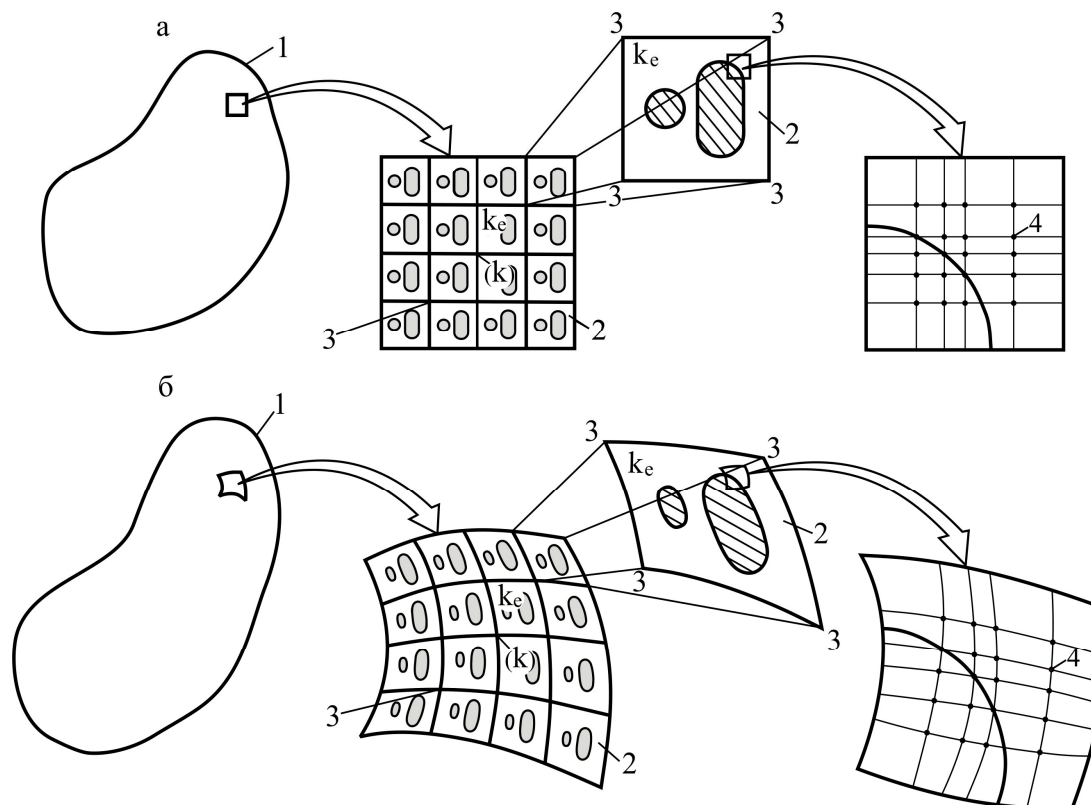


Рисунок 2 – Схема анализа среды композитного материала при больших деформациях с макроскопически высокими градиентами состояния. Представлены элементы схемы в исходном (а) и деформированном (б) состояниях: 1 – среда композитного материала; 2 – блоки среды; 3 – каркасные точки среды (узловые точки макромеханического уровня анализа); 4 – узловые точки микромеханического уровня анализа; (k) – одна из каркасных точек;  $k_e$  – один из блоков окрестности влияния каркасной точки (k).

В условиях высоких градиентов макроскопического состояния среды перестают быть актуальными введенные в [1, 2] понятия макроскопических деформаций и напряжений. Действительно, деформационные соотношения макромеханического уровня анализа, будучи производными поля макроскопических перемещений, характеризуют деформацию в целом каждого из блоков среды периодического (квазипериодического) строения. При малых градиентах состояния среды ее блоки претерпевают макроскопически аффинную трансформацию, при которой «макроскопическая» форма параллелепипеда практически сохраняется в деформированном состоянии. В случае высокоградиентного состояния среды периодического строения макроскопическая форма параллелепипедов

её блоков структуры при больших деформациях не сохраняется. Но тогда понятие тензора макроскопической деформации, как определяющее аффинную деформацию блоков материала, к анализу данного состояния среды неприменимо. Это понятие неприменимо и для высокоградиентного состояния среды при малых деформациях, так как и в этом случае имеют место существенные нарушения условий периодичности по локальным перемещениям (как разницы материальных и макроскопических перемещений). Вместе с понятием макроскопических деформаций становится неприменимым к анализу среды и понятие макроскопических напряжений, как основанное на первом понятии (см. подробнее [1, 2]).

Однако, понятие поля макроскопических (каркасных) перемещений, как определяемого положениями каркасных точек среды, остается актуальным и в условиях высоких градиентов ее состояния. Данное понятие применимо к армированным средам регулярного и стохастического строений и кусочно-однородным средам регулярного и нерегулярного строений.

### 3. Концепция метода каркасных блоков

При анализе на базе рассматриваемого подхода состояния деформируемой среды ее следует разделить на блоки (каркасные блоки). В качестве блоков среды периодического или квазипериодического строения целесообразно принимать блоки, которые состоят из одного или некоторого числа блоков представления материала вместе с их «отсекаемыми» граничной поверхностью среды частями. В случае среды со структурой достаточно мелкого масштаба число блоков представления материала, включаемых блоками среды, может быть весьма большим (особенно для нанокompозитной среды).

В качестве каркасных точек среды принимаем вершины выделенных определенным образом ее каркасных блоков. Поле перемещений, задаваемое перемещениями каркасных точек среды, называем полем каркасных или макроскопических перемещений среды. Расположение каркасных точек имеет регулярный или нерегулярный характер, определяемый строением среды. В представляемом методе вычислительной механики композитных сред с высокими градиентами состояния полю перемещений каркасных точек, как и в случае теории [1, 2], принадлежит ключевая (определяющая) роль.

Метод каркасных блоков включает макро- и микромеханический уровни анализа, на базе которых осуществляется двухуровневая минимализация (экстремализация) функционала состояния среды. Макромеханический уровень анализа заключается в определении поля  $\hat{u}(\hat{\theta}^i, t)$  макроскопических (каркасных) перемещений среды, разделенной на каркасные блоки, задаваемого перемещениями её каркасных точек в вершинах блоков (см. рис.2). Каркасные точки служат узловыми точками дискретной схемы микромеханического уровня анализа. На

микромеханическом (локально-структурном) уровне анализа при определенных на макромеханическом уровне перемещениях каркасных точек последовательно решаются краевые задачи для окрестностей влияния каркасных точек, состоящих из слоев блоков вокруг них (см. п. 4). Краевые задачи для окрестностей влияния каркасных точек решаются на базе модели кусочно-однородного тела методами вычислительной механики деформируемого твердого тела (МДТТ) с использованием узловых точек дискретной схемы микромеханического уровня анализа. В итоге решения краевых задач для окрестностей влияния каркасных точек выявляются внутренние поля каркасных блоков, составляющих среду, и, таким образом, внутренние поля среды в целом.

Определение перемещений каркасных точек и узловых точек локально-структурного анализа осуществляем на основе экстремализации таких функционалов состояния среды, как функционал полной энергии (статическая задача), функционал действия (динамическая задача) либо иной функционал, связываемый с решаемой для среды задачей. При очередном шаге по истории нагружения (деформирования) среды из условий стационарности функционала состояния на макромеханическом (верхнем) уровне анализа определяется поле макроскопических (каркасных) перемещений как совокупность перемещений каркасных точек среды. Каркасное поле перемещений должно при этом удовлетворять граничным и начальным условиям, накладываемым на материальные перемещения среды в данной истории её нагружения. На основе последовательного решения задач локально-структурного (нижнего) уровня анализа для окрестностей влияния каркасных точек определяются внутренние поля среды – поля перемещений, деформаций и напряжений в ее структурных составляющих, как отвечающие перемещениям каркасных точек, найденных на верхнем уровне анализа при заданных граничных и начальных условиях и внешних воздействиях:

$$u_{ni}(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}^i = u_i(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}^i, \quad q_{nij}(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}^i \mathring{r}^j = q_{ij}(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}^i \mathring{r}^j, \quad (3.1)$$

$$J_n \sigma_n^{ij}(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}_i \mathring{r}_j = J \sigma^{ij}(\hat{\theta}^i, t) \mathring{r}_i \mathring{r}_j, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \hat{\theta}^i \in V_n, \quad t_0 \leq t \leq t_k,$$

где  $V_n$  – область среды, занимаемая  $n$ -й структурной составляющей;  $n$  – индекс идентификации структурных составляющих материала среды, как-то: матрицы, систем матричных включений, систем волокон и т.п.;  $u_i$  – компоненты (ковариантные) вектора перемещений;  $q_{ij}$  – компоненты (ковариантные) меры деформации Коши-Грина;  $J \sigma^{ij}$  – компоненты (контравариантные) обобщенного тензора напряжений (симметричного тензора напряжений Пиола-Кирхгофа);  $\mathring{r}_i, \mathring{r}^i$  – основные и взаимные

базисные векторы применяемой системы материальных координат  $\hat{\theta}^i$  в отсчетном состоянии среды.

Информация о внутренних полях (3.1) позволяет в случае статически деформируемой среды найти функционал её полной энергии в виде вкладов функционалов полных энергий блоков среды. Данный функционал при больших перемещениях и деформациях следует определять на основе пошаговой процедуры, производимой в соответствии с последовательностью нагружения среды, когда  $t$  выполняет роль параметра или совокупности параметров нагружения среды. В условиях обратимой (упругой) деформируемости компонент материала и консервативного (потенциального) характера внешних сил функционал полной энергии армированной среды представляем в виде

$$I|_s = \sum_e I_e|_s = \sum_e \sum_n I_{en}|_s = \sum_e \sum_n \int_{V_{en}} \Phi_n[q_{ij}|_s] dV_{en} + \sum_e \sum_n \int_{V_{en}} \rho P_n[u_i|_s] dV_{en} + \sum_e \sum_n \int_{A_{(\sigma)en}} \Pi_n[u_i|_s] dA_{(\sigma)en}, \quad (3.2)$$

$$q_{ij} = \dot{q}_{ij} + \dot{\nabla}_i u_j + \dot{\nabla}_j u_i + \dot{\nabla}_i u_\alpha \dot{\nabla}_j u^\alpha, \quad s = 1, 2, \dots$$

Здесь  $I|_s$  – значение функционала полной энергии среды в объеме  $V$  с граничной поверхностью  $A$  на  $s$ -шаге нагружения (деформирования);  $I_e|_s$  – значение функционала полной энергии  $e$ -блока среды в объеме  $V_e$  на  $s$ -шаге нагружения;  $I_{en}|_s$  – значение функционала полной энергии  $n$ -й компоненты материала в пределах  $e$ -блока среды в объеме  $V_{en}$  на  $s$ -шаге нагружения;  $\Phi_n$  – упругий потенциал  $n$ -й компоненты материала;  $q_{ij}$  – компоненты меры деформации Коши–Грина;  $\dot{\nabla}_i$  – символ ковариантной производной по координате  $\hat{\theta}^i$  в метрике отсчетной конфигурации;  $P_n$  – потенциальная функция плотности массовых сил для  $n$ -й компоненты материала;  $\Pi_n$  – потенциальная функция плотности поверхностных сил, отнесенных к единице площади в отсчетном состоянии для  $n$ -й компоненты материала с гранью  $A_{(\sigma)en}$  в части граничной поверхности среды  $A_\sigma$ , через которую среда нагружается. Величины на  $s$ -шаге нагружения среды отмечены « $s$ » в качестве нижнего индекса. Для компонент вектора перемещения  $u_i$  и меры деформации  $q_{ij}$  номер  $n$ -й компоненты (фазы) материала как и в (3.1) опускается.

В условиях необратимого деформирования компонентов структуры под воздействием консервативных и неконсервативных внешних сил следует перейти к инкрементальному определению функционала полной энергии,

позволяющему помимо истории (последовательности) деформирования среды учитывать и историю деформирования ее материала [9]. Инкрементальный функционал для среды в целом записываем как сумму соответствующих инкрементальных функционалов для блоков среды, а в свою очередь последние функционалы – в виде суммы соответствующих вкладов для компонентов блоков:

$$\begin{aligned} \Delta I|_{s+1} &= \sum_e \Delta I_e|_{s+1} = \sum_e \sum_n \Delta I_{en}|_{s+1} = \\ &= \sum_e \sum_n \left[ \int_{V_{en}} \left( J\sigma^{ij}|_s + \frac{1}{2} \Delta(J\sigma^{ij})|_{s+1} \right) \Delta \varepsilon_{ij}|_{s+1} dV_{en} - \right. \\ &- \int_{V_{en}} \rho_n \left[ F^i|_s + k_f \Delta F^i|_{s+1} \right] \Delta u_i|_{s+1} dV_{en} - \int_{A_{(\sigma)en}} \left[ \sigma^i|_s + k_\sigma \Delta \sigma^i|_{s+1} \right] \Delta u_i|_{s+1} dA_{(\sigma)en} - \\ &- \left. \int_{A_{(c)en}} \left[ (\sigma_v|_s + \Delta \sigma_v|_{s+1}) \Delta u_v|_{s+1} + (\sigma_\tau|_s + \Delta \sigma_\tau|_{s+1}) \Delta u_\tau|_{s+1} \right] dA_{(c)en} \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \Delta q_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \overset{\circ}{\nabla}_i (\Delta u_j) + \overset{\circ}{\nabla}_j (\Delta u_i) + \overset{\circ}{\nabla}_i (\Delta u_\alpha) \overset{\circ}{\nabla}_j u^\alpha + \overset{\circ}{\nabla}_i u_\alpha \overset{\circ}{\nabla}_j (\Delta u^\alpha) + \right. \\ &+ \left. \overset{\circ}{\nabla}_i (\Delta u_\alpha) \overset{\circ}{\nabla}_j (\Delta u^\alpha) \right], \quad s = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Здесь  $J\sigma^{ij}$  и  $\Delta(J\sigma^{ij})$  – компоненты обобщенного тензора напряжений на  $s$ –шаге инкрементального нагружения и их приращения на последующем  $s+1$ –шаге нагружения, которые определяются с учетом истории предшествующего деформирования;  $u_i(u^i)$  и  $\Delta u_i(\Delta u^i)$  – компоненты вектора перемещения на предыдущем шаге нагружения и их приращения на последующем шаге нагружения;  $\Delta \varepsilon_{ij}$  и  $\Delta q_{ij}$  – приращения компонент  $\varepsilon_{ij}$  и  $q_{ij}$  тензора деформации Коши–Грина и тензора меры данной деформации на  $s+1$ –шаге нагружения;  $F^i$  и  $\Delta F^i$  – компоненты вектора массовых сил на предыдущем шаге нагружения и их приращения на последующем шаге;  $\sigma^i$  и  $\Delta \sigma^i$  – компоненты вектора интенсивности поверхностных сил в части граничной поверхности  $A_{(\sigma)}$  на предыдущем шаге нагружения и их приращения на последующем шаге, отнесенные к площади в отсчетном состоянии;  $k_f$  и  $k_\sigma$  – коэффициенты, определяемые характером объемных и поверхностных сил соответственно;  $\sigma_v$ ,  $\sigma_\tau$ ,  $u_v$ ,  $u_\tau$  и  $\Delta \sigma_v$ ,  $\Delta \sigma_\tau$ ,  $\Delta u_v$ ,  $\Delta u_\tau$  – напряжения и перемещения в поверхности и из поверхности контактного взаимодействия  $A_{(c)}$  на предыдущем шаге и их приращения на последующем шаге (поверхность контактного взаимодействия  $A_{(c)}$  среды с другими телами итерационно уточняется на основе применяемого закона

контактного взаємодія, в т.ч. при наявності тріння). (Подробнее об інкрементальному функціоналі  $\Delta I|_{s+1}$  см. [9].)

В случає динамічно деформовуємої среды дослідження її руху здійснюється на основі функціоналу дії (варіаційний принцип Гамільтона). В загальному случає необратимого деформування під впливом консервативних і неконсервативних сил в умовах контактної взаємодії з оточуючими тілами даний функціонал слід представити в інкрементальному вигляді, виділив вклади блоків і вклади компонентів матеріала в блоках:

$$\begin{aligned} \Delta I|_{s+1} &= \sum_e \Delta I_e|_{s+1} = \sum_e \sum_n \Delta I_{en}|_{s+1} = \int_{t_s}^{t_{s+1}} [\Delta T - \Delta U + \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3] dt, \\ \Delta T &= \sum_e \sum_n \int_{V_{en}} \frac{1}{2} \rho \frac{\partial \Delta u^i}{\partial t} \frac{\partial \Delta u_i}{\partial t} dV_{en}, \quad \Delta U = \sum_e \sum_n \int_{V_{en}} \left( J \sigma^{ij} + \frac{1}{2} \Delta (J \sigma^{ij}) \right) \Delta \varepsilon_{ij} dV_{en}, \\ \Delta L_1 &= \sum_e \sum_n \int_{V_{en}} \rho [F^i + k_f \Delta F^i] \Delta u_i dV_{en}, \quad (\hat{\theta}^i, t) \in V \times [t_s, t_{s+1}], \quad V = \bigcup_{e,n} V_{en}, \quad (3.4) \\ \Delta L_2 &= \sum_e \sum_n \int_{A_{(\sigma)en}} [\sigma^i + k_\sigma \Delta \sigma^i] \Delta u_i dA_{(\sigma)en}, \\ &(\hat{\theta}^i, t) \in A_\sigma \times [t_s, t_{s+1}], \quad A_{(\sigma)} = \bigcup_{e,n} A_{(\sigma)en}, \\ \Delta L_3 &= \sum_e \sum_n \int_{A_{(c)en}} [(\sigma_v + \Delta \sigma_v) \Delta u_v + (\sigma_\tau + \Delta \sigma_\tau) \Delta u_\tau] dA_{(c)en}, \\ &(\hat{\theta}^i, t) \in A_{(c)} \times [t_s, t_{s+1}], \quad A_{(c)} = \bigcup_{e,n} A_{(c)en}, \quad s = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Матеріальні (внутрішні) переміщення среды при заданих граничних умовах і зовнішніх впливах визначаються тільки полем макроскопічних (каркасных) переміщень, задаючим переміщення її каркасных точок:

$$\hat{u}(\hat{\theta}^i, t) \Rightarrow \left[ \hat{u}(\hat{\theta}^i_{(1)}, t), \hat{u}(\hat{\theta}^i_{(2)}, t), \dots, \hat{u}(\hat{\theta}^i_{(k)}, t), \dots, \hat{u}(\hat{\theta}^i_{(k_{\max})}, t) \right]. \quad (3.5)$$

Етим обумовлюється визначення значень функціонала (3.2) як функції переміщень каркасных точок среды:

$$\begin{aligned} I|_s &= I|_s \left[ \hat{u}(\hat{\theta}^i_{(k)})|_s \right] = I|_s \left[ \hat{u}(\hat{\theta}^i_{(1)})|_s, \dots, \hat{u}(\hat{\theta}^i_{(k)})|_s, \dots \right], \quad (3.6) \\ &s = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max}, \end{aligned}$$

где  $k$  – індекс нумерації каркасных точок среды, заключаемый в круглые скобки;  $k_{\max}$  – число точек среды, принятых в качестве каркасных, в том числе расположенных на граничной поверхности среды.

Функціонал (3.6) визначається на основі шагової процедури продовження рішення задачі по параметрам послідовності навантаження среды. Дана процедура враховує історію навантаження среды, але не матеріала (не являється інкрементальною).

Инкрементальный функционал приращения энергии (3.3) определяем как функцию приращений перемещений каркасных точек на  $(s+1)$ -шаге деформирования:

$$\Delta I|_{s+1} = \Delta I|_{s+1} \left[ \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i)|_s, \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i)|_{s+1} \right] = \Delta I|_{s+1} \left[ \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(1)}^i)|_s, \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(1)}^i)|_{s+1}, \dots, \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i)|_s, \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i)|_{s+1}, \dots \right], \quad s = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max}. \quad (3.7)$$

Инкрементальный функционал приращения действия (3.4) определяем как функционал текущих приращений перемещений (траекторий) каркасных точек на промежутке  $t_s \leq t \leq t_{s+1}$  для  $s+1$ - шага деформирования среды:

$$\Delta I|_{s+1} = \Delta I|_{s+1} \left[ \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s), \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t) \right]_{t_s}^{t_{s+1}} = \Delta I|_{s+1} \left[ \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(1)}^i, t_s), \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(1)}^i, t), \dots, \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s), \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t), \dots \right]_{t_s}^{t_{s+1}}, \quad (3.8)$$

$$t_s \leq t \leq t_{s+1}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max}.$$

При этом оба функционала (3.7) и (3.8) определяются в зависимости от предыстории деформирования среды и её материала, которая предшествует моменту времени  $t_s$ .

Таким образом, в рассматриваемом подходе анализ композитной среды сводится к отысканию перемещений её каркасных точек, доставляющих стационарное значение функционалу энергии (3.6), функционалу инкрементального приращения энергии (3.7) или функционалу инкрементального приращения действия (3.8). При этом определяются внутренние поля среды (поля в компонентах материала среды), отвечающие перемещениям каркасных точек при заданных граничных и начальных условиях и внешних воздействующих полях. В отличие от метода конечных элементов (МКЭ) [10] или метода локальных вариаций (МЛВ) [11] в методе каркасных блоков (МКБ) вместо конечных элементов из однородного материала присутствуют каркасные блоки среды. При этом функционалы энергии или действия для блоков определяются из решений формируемых для окрестностей влияния краевых задач, а не на основе аппроксимации полей перемещений с помощью базисных функций, как это имеет место для МКЭ. Такая аппроксимация в рассматриваемом подходе не может быть применена в силу структурного строения блоков, когда поля их внутренних перемещений имеют локальный характер с разрывами градиентов на границах раздела структурных составляющих. Далее представим схемы метода каркасных блоков в формах дифференциальной и экстремальной задач на верхнем уровне анализа.

#### 4. Макромеханический уровень анализа

Рассмотрим схему макромеханического уровня анализа в случае статической постановки задачи деформирования среды на базе вычисления



функционала полной энергии (3.2) как функции перемещений каркасных точек

$$I = I[\hat{\mathbf{u}}_{(1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k_{\max})}] = \sum_e \sum_n I_{en} = \sum_e I_e, \quad (4.1)$$

$$I_e = \sum_n \int_{V_{en}} \Phi_n[q_{ij}] dV_{en} + \sum_n \int_{V_{en}} P_n[u_i] dV_{en} + \sum_n \int_{A_{(\sigma)en}} \Pi_n[u_i] dA_{(\sigma)en}, \quad s = 1, 2, \dots.$$

(индекс нумерации  $s$  – шага нагружения среды упускаем), где  $I_e$  – функционал энергии для блока « $e$ » среды. Представляемая далее схема макромеханического анализа применима и для случая описания деформирования среды на основе инкрементального функционала (3.3) с тем отличием, что операции метода МКБ производятся с инкрементальными приращениями перемещений каркасных точек  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  вместо самих перемещений  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$ . Данная схема применима и в случае описания динамического деформирования среды на основе функционала инкрементального действия (3.4) с той поправкой, что операции метода производятся не на конечных приращениях перемещений, а на текущих приращениях перемещений (траекториях) каркасных точек среды на инкрементальных промежутках времени  $t_s \leq t \leq t_{s+1}$ ,  $s = 0, 1, \dots$ .

Функционал энергии среды (4.1) (функционал (3.2)) вычисляем на основе решения краевых задач для всех  $e$  – блоков среды в условиях их совместного деформирования при перемещениях каркасных точек

$$\hat{\mathbf{u}}_{(1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k_{\max})} \Rightarrow \left( \hat{\mathbf{u}}_{(\hat{\theta}_k^i)}; \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max} \right), \quad (4.2)$$

которые определены на соответствующем этапе решения задачи деформирования среды в качестве оптимизирующего функционал приближения. Необходимое условие стационарности рассматриваемого функционала приводит к системе уравнений, которые определяют значения перемещений каркасных точек среды (4.2) как обращающие в нуль производные первого порядка от функции (4.1) по перемещениям этих же каркасных точек:

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(1)}} \left( \hat{\mathbf{u}}_{(1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \dots \right) = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(2)}} \left( \hat{\mathbf{u}}_{(1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \dots \right) = 0, \quad (4.3)$$

$$\dots, \quad \frac{\partial I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}} \left( \hat{\mathbf{u}}_{(1)}, \hat{\mathbf{u}}_{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \dots \right) = 0, \dots.$$

Каждую из векторных производных (4.3) рассматриваем как совокупность трех производных по компонентам  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)i}$  вектора перемещения

$\hat{\mathbf{u}}_{(k)} = \hat{\mathbf{u}}_{(k)i} \hat{\mathbf{r}}^i$ . К уравнениям (4.3) можно прийти и на основе принципа возможных (виртуальных) перемещений  $\delta I = (\partial I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(i)}) \delta \hat{\mathbf{u}}_{(i)} = 0$ .

Полагаем, что вариация (приращение)  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  перемещения  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  каркасной точки (k) изменяет состояние среды для тех её блоков, которые составляют некоторую окрестность данной каркасной точки. Такую окрестность называем окрестностью влияния каркасной точки. Новое значение энергии среды (4.1), обусловленное изменением перемещения каркасной точки, определится новым значением энергии  $I_{(k)}$  окрестности влияния каркасной точки (k) как суммой энергий  $I_{k_e}$  блоков, составляющих данную окрестность:

$$I_{(k)} = \sum_{k_e} I_{k_e}; I_{k_e} = I_e, e \rightarrow k_e, \quad (4.4)$$

где  $I_{k_e}$  находится по формуле (4.1) для энергии  $I_e$  блока с номером  $k_e$  в качестве  $e$ .

В силу понятия окрестности влияния каркасной точки имеет место представление энергии среды (3.2) и иных энергетических функционалов состояния среды, как (3.3), (3.4), в аддитивном виде

$$I = I_{(k)} + \bar{I}_{(k)}; I_{(k)} = I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)}), \quad (4.5)$$

где  $I_{(k)}$  – энергия окрестности влияния каркасной точки (k),  $\bar{I}_{(k)}$  – энергия среды за исключением окрестности влияния каркасной точки (k). При изменении положения точки (k) изменяется энергия  $I_{(k)}$  (является функцией  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$ ), энергия  $\bar{I}_{(k)}$  остается без изменения. Новые значения энергий блоков  $I_e$  из окрестности влияния каркасной точки (k) определяем на основе решения краевой задачи для окрестности из этих блоков при новом (варьированном) перемещении  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  данной каркасной точки.

Можно применять одно-, двух-, трехслойные и т.д. схемы окрестностей влияния каркасных точек. В случае однослойной схемы считаем, что перемещение каркасной точки влияет на состояние её окрестности, образованной одним слоем блоков вокруг каркасной точки. Такая окрестность, расположенная внутри среды, содержит  $2 \times 2 \times 2 = 8$  блоков и  $3 \times 3 \times 3 = 27$  каркасных точек. (Для макроскопически одномерной задачи однослойная окрестность влияния содержит 2 блока и 3 каркасных точек (поверхностей), для макроскопически двумерной задачи –  $2 \times 2 = 4$  блоков и  $3 \times 3 = 9$  каркасных точек (линий)). На рис. 3,а в плоскости плана схематично изображены 4 блока из 8 блоков, включаемых однослойной окрестностью точки (k). При двухслойной схеме окрестность влияния каркасной точки содержит  $4 \times 4 \times 4 = 64$  блоков и  $5 \times 5 \times 5 = 125$  каркасных точек. (Для макроскопически одномерной задачи двухслойная окрестность влияния содержит 4 блока и 5 каркасных точек (поверхностей), для макроскопически двумерной задачи –  $4 \times 4 = 16$  блоков и  $5 \times 5 = 25$  каркасных

точек (линий)). Из 64 блоков, включаемых двухслойной окрестностью точки (k), на рис. 3,б в плоскости плана показаны 16 блоков.

В общем случае p – слойной окрестности влияния каркасной точки число включаемых окрестностью блоков  $2p \times 2p \times 2p$  и каркасных точек  $(2p+1) \times (2p+1) \times (2p+1)$  (при плоской или осесимметричной постановке задачи на макромеханическом уровне –  $2p \times 2p$  блоков и  $(2p+1) \times (2p+1)$  каркасных точек).

Решение системы уравнений (4.3), определяющее перемещения каркасных точек, находим на основе дискретного метода Ньютона [12]. В результате применения данного метода приходим к итеративной последовательности систем уравнений метода каркасных блоков, реализуемого в форме дифференциальной задачи:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(l)}} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}_{(m)}^n} \left( \hat{\mathbf{u}}_{(l)}^{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_{(l)}^n \right) + \frac{\partial I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}_{(m)}^n} = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots, \quad (4.6)$$

где  $\hat{\mathbf{u}}_{(l)}^n$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_{(l)}^{n+1}$  – предыдущее (уточняемое) и последующее (уточненное) приближения перемещения (l) – каркасной точки;  $\partial I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  и  $\partial^2 I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(l)}$  – первая производная по перемещению (k) – каркасной точки и производная второго порядка по перемещениям (k) – и (l) – каркасных точек от функционала энергии, которые вычисляются для совокупности уточняемых приближений перемещений каркасных точек среды  $\hat{\mathbf{u}}_{(m)}^n$ ,  $m = 1, 2, \dots$ .

Производные от энергии по перемещениям каркасных точек (4.3) определяем численным способом на основе применения конечных разностей второго порядка точности с учетом (4.5) как

$$\frac{\partial I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}} = \frac{I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}) - I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} - \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)})}{2 \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (4.7)$$

Здесь  $I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)})$ ,  $I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} - \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)})$  – значения функционала энергии окрестности влияния (k) – каркасной точки, получаемые им при изменении (варьировании) перемещения  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  каркасной точки с номером k на величины  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  и  $-\Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  соответственно, когда перемещения остальных каркасных точек среды не изменяются.

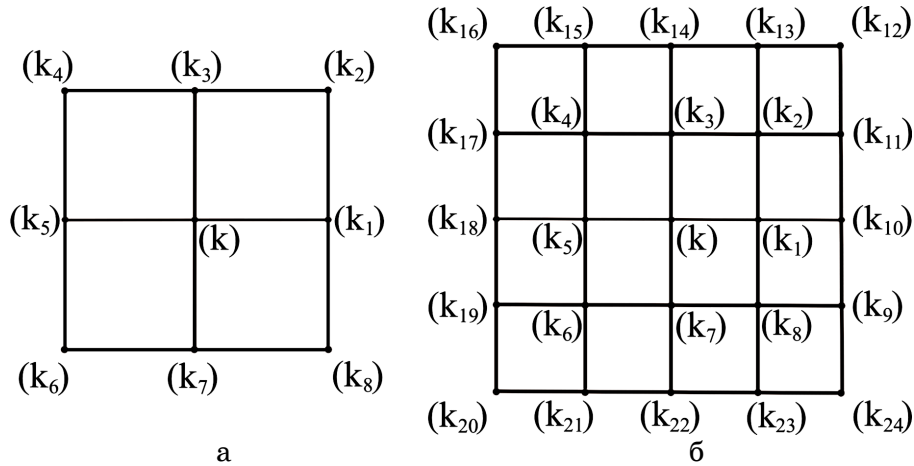


Рисунок 3 – Схемы однослойной (а) и двухслойной (б) окрестностей влияния каркасной точки (k) в плоскости плана.

Производные второго порядка от функционала энергии (4.1) по перемещениям (k)– и (l)– каркасных точек  $\partial^2 I / \partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)} \neq 0$  в том случае, если окрестности влияния каркасных точек (k) и (l) пересекаются между собой. Примем во внимание представление энергии среды в виде

$$I = I_{(kl)} + \bar{I}_{(kl)}, \quad I_{(kl)} = I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)}), \quad (4.8)$$

где  $I_{(kl)}$  – энергия объединения пересекающихся между собой окрестностей влияния каркасных точек (k) и (l),  $\bar{I}_{(kl)}$  – энергия среды за исключением объединения пересекающихся окрестностей влияния каркасных точек (k) и (l). Изменение положений точек (k) и (l) обуславливает изменение энергии  $I_{(kl)}$ , энергия  $\bar{I}_{(kl)}$  при этом не изменяется.

Частные производные второго порядка от энергии вычисляем на основе применения конечных разностей с учетом (4.8) как ( $k \neq l$ ):

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)}} = \frac{I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} + \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} + \Delta \hat{u}_{(l)}) - I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} - \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} + \Delta \hat{u}_{(l)}) - I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} + \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} - \Delta \hat{u}_{(l)}) + I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} - \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} - \Delta \hat{u}_{(l)})}{4 \Delta \hat{u}_{(k)} \Delta \hat{u}_{(l)}}, \quad (4.9)$$

$$k, l = 1, 2, \dots$$

(окрестности влияния точек (k) и (l) пересекаются между собой). Здесь  $I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} + \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} + \Delta \hat{u}_{(l)}), \dots, I_{(kl)}(\hat{u}_{(k)} - \Delta \hat{u}_{(k)}, \hat{u}_{(l)} - \Delta \hat{u}_{(l)})$  – значения функционала энергии объединения пересекающихся между собой окрестностей влияния (k)– и (l)– каркасных точек, которые последний получает при изменении перемещения  $\hat{u}_{(k)}$  точки (k) на величины  $\Delta \hat{u}_{(k)}$  и  $-\Delta \hat{u}_{(k)}$  при одновременном изменении перемещения  $\hat{u}_{(l)}$  точки (l) на

величины  $\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}$  и  $-\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}$ . При этом производная второго порядка (4.6) от функционала  $I$  по перемещениям точек  $(k)$  и  $(l)$  понимается как совокупность его девяти производных второго порядка по компонентам  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)i}$ ,  $i=1,\dots,3$  и  $\hat{\mathbf{u}}_{(l)j}$ ,  $j=1,\dots,3$  данных векторов. Энергия объединения пересекающихся между собой окрестностей влияния двух каркасных точек определяется на основе решения соответствующей микрокраевой задачи для данного объединения окрестностей влияния.

Нетрудно показать, что частные производные второго порядка в (4.6) по перемещениям каркасных точек  $(k)$  и  $(l)$  с непересекающимися между собой окрестностями влияния равняются нулю. Применяя конечную разность по  $\hat{\mathbf{u}}_l$  от первой производной  $\partial I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  как разницу значений этой производной при  $\hat{\mathbf{u}}_{(l)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}$  и  $\hat{\mathbf{u}}_{(l)} - \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}$  и принимая во внимание (4.5), в силу независимости энергии  $k$ -окрестности от состояния  $l$ -окрестности, найдем:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(l)}} = \frac{1}{2\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}} \left( \frac{I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}) - I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} - \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)})}{2\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}_{(l)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}} - \right. \quad (4.10)$$

$$\left. - \frac{I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}) - I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} - \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)})}{2\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}_{(l)} - \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(l)}} \right) = 0, \quad k, l = 1, 2, \dots$$

(окрестности влияния точек  $(k)$  и  $(l)$  не пересекаются между собой).

Вторые производные при  $k = l$  в (4.6) определяем исходя из значения энергии окрестности влияния точки  $(k)$  при исходном перемещении  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  и двух значений энергии, обусловленных изменениями каркасного перемещения на величины  $\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  и  $-\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}$ :

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}^2} = \frac{I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}) - 2I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)}) + I_{(k)}(\hat{\mathbf{u}}_{(k)} - \Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)})}{\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}\Delta\hat{\mathbf{u}}_{(k)}}, \quad (4.11)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Для каркасных точек, расположенных на части поверхности среды с кинематическими условиями, задаются их перемещения, определяемые данными условиями. Система уравнений дискретного метода Ньютона (4.6) содержит уравнения, отвечающие каркасным точкам  $(k)$ , которые располагаются внутри среды и на части граничной поверхности с заданными силовыми условиями. Матрица  $\partial^2 I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(l)} \Big|_{\hat{\mathbf{u}}_{(m)}^n}$ ,  $k, l = 1, 2, \dots$  системы данных уравнений, определяемая как (4.9) – (4.11), симметрична и имеет ленточный характер. Ширина ленты ненулевых элементов матрицы определяется числом слоев блоков в окрестностях влияния каркасных точек.

В случае однослойных окрестностей влияния производные  $\partial^2 I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(l)}$  отличны от нуля по перемещениям только тех  $(l)$  – каркасных точек, которые содержатся в окрестности влияния  $(k)$  – каркасной точки. Для внутренней каркасной точки  $(k)$ , не принадлежащей граничной поверхности среды, с однослойной окрестностью влияния из 8 блоков с 27-ю каркасными точками, отличными от нуля являются следующие производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial^2 \hat{\mathbf{u}}_{(k)}} \neq 0, \frac{\partial^2 I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k_1)}} \neq 0, \dots, \frac{\partial^2 I}{\partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)} \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k_{26})}} \neq 0, \quad (4.12)$$

где  $k, k_1, k_2, \dots, k_{26}$  – номера каркасных точек из однослойной окрестности влияния точки  $(k)$ . Каждое из соотношений (4.12), записанное в векторной форме, устанавливает отличные от нуля элементы матрицы, являющиеся вторыми производными от энергии  $I$  по компонентам перемещений  $\hat{\mathbf{u}}_{(k)1}, \hat{\mathbf{u}}_{(k)2}, \hat{\mathbf{u}}_{(k)3}; \dots; \hat{\mathbf{u}}_{(k_{26})1}, \hat{\mathbf{u}}_{(k_{26})2}, \hat{\mathbf{u}}_{(k_{26})3}$ . Таким образом, ширина ленты ненулевых элементов матрицы системы линейных уравнений (4.6) итерационной процедуры дискретного метода Ньютона для внутренних каркасных точек среды равняется  $27 \times 3 = 81$ . Для каркасных точек на граничной поверхности среды ширина ленты ненулевых элементов матрицы меньше. Если каркасная точка располагается на пересечении трех гладких частей наружной поверхности среды (является угловой), то её окрестность влияния состоит из одного блока с 8-ю каркасными точками и соответствующая ширина ленты матрицы  $8 \times 3 = 24$ . Для каркасной точки на пересечении двух гладких частей наружной поверхности окрестность влияния включает два блока с 12-ю каркасными точками, соответствующая ширина ленты матрицы  $12 \times 3 = 36$ . Если каркасная точка располагается на части наружной поверхности среды, которая может быть гладкой или кусочно-гладкой, то её однослойная окрестность влияния содержит 4 блока с 18 каркасными точками и ширина ленты матрицы равняется  $18 \times 3 = 54$ .

В случае двухслойных окрестностей влияния каркасных точек отличными от нуля производными от производной  $\partial I / \partial \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$  являются производные не только по перемещениям каркасных точек, содержащиеся в окрестности влияния  $(k)$  – каркасной точки. Отличны от нуля также и производные по перемещениям каркасных точек из одного (третьего) слоя, окружающего данную двухслойную окрестность. Общее число каркасных точек в двухслойной окрестности и её окружающем (третьем) слое  $7 \times 7 \times 7 = 343$ . Поэтому в уравнениях (4.6) для рассматриваемой каркасной точки  $(k)$  не равны нулю следующие вторые производные от функционала энергии:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(k)}} \neq 0, \frac{\partial^2 I}{\partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(k_1)}} \neq 0, \dots, \frac{\partial^2 I}{\partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(k_{342})}} \neq 0. \quad (4.13)$$

Здесь  $(k_1), \dots, (k_{342})$  – номера каркасных точек, которые помимо самой точки  $(k)$  расположены в окрестности влияния данной точки и слое, который к ней примыкает. Таким образом, число ненулевых элементов в строке матрицы системы уравнений (4.6) в случае двухслойной схемы метода равняется  $343 \times 3 = 1029$  – для внутренних каркасных точек на глубине трех и более слоев от граничной поверхности.

В общем случае  $p$ -слойной схемы для фиксированной каркасной точки  $(k)$  производные  $\partial^2 I / \partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)}$  отличны от нуля только по перемещениям тех каркасных точек, которые содержатся как в окрестности влияния точки  $(k)$  из  $p$  слоев, так и в  $p-1$  окружающих слоях. Число каркасных точек  $(l)$  в  $p$ -слойной окрестности и примыкающих к ней слоях, по перемещениям которых производные  $\partial^2 I / \partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)}$ ,  $k = \text{const}$  отличны от нуля, равняется  $(4p-1) \times (4p-1) \times (4p-1)$ . Соответственно, число ненулевых элементов в строке матрицы системы уравнений (4.4) равно  $(4p-1)^3 \times 3$ .

Окрестности влияния каркасных точек, примыкающие к граничной поверхности среды, и их слои «притяжения» состоят из меньшего числа блоков и частей блоков, отсекаемых граничной поверхностью среды. Такие окрестности содержат меньшее число каркасных точек, по перемещениям которых вторые производные от функционала энергии  $\partial^2 I / \partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)}$  отличаются от нуля.

Для точек  $(k)$  с однослойными окрестностями, расположенных на части граничной поверхности среды с внешней нагрузкой, число ненулевых элементов в строке матрицы системы уравнений (4.6) будет меньшим, чем для каркасной точки в «глубине» среды. В случае двухслойных окрестностей влияния соответствующая ситуация имеет место уже для каркасных точек, расположенных в трех приграничных слоях каркасных точек. При  $p$ -слойных окрестностях влияния ширина ленты матрицы для точек из  $2p-1$  приграничных слоев каркасных точек среды меньше, чем ширина ленты матрицы для более «глубоко» расположенных каркасных точек (здесь в контексте изложения удобнее рассматривать слои (поверхности) расположения каркасных точек вместо слоев блоков).

Для точек  $(k)$ , которые располагаются на части граничной поверхности среды с кинематическими условиями, соответствующие уравнения системы уравнений (4.6) не формируются. Число слоев каркасных точек  $(k)$ , для которых число ненулевых элементов

$\partial^2 I / \partial \hat{u}_{(k)} \partial \hat{u}_{(l)}$  меньше, чем для «глубоко» расположенных точек, на единицу больше числа соответствующих слоев каркасных точек возле «силовой» части граничной поверхности.

В случае реализации метода каркасных блоков в форме экстремальной задачи производится прямая минимизация функционала полной энергии среды (4.1) на основе последовательного варьирования перемещений её каркасных точек. Для каждого вновь варьированного (измененного) значения перемещения каркасной точки решаются краевые задачи для её окрестности влияния. В результате решения данных краевых задач определяются новые внутренние поля окрестности влияния (k) – каркасной точки и измененное (новое) значение её энергии  $I_{(k)}$ . В соответствии с (4.5) энергия среды при рассматриваемом подходе обуславливается лишь изменением энергии окрестности влияния каркасной точки, то измененное (новое) значение энергии среды  $I = I_{(k)} + \bar{I}_{(k)}$ , где  $\bar{I}_{(k)}$  – значение энергии среды за исключением окрестности влияния точки (k), которое при варьировании её перемещения не изменяется.

Варьирование перемещений каркасных точек производится с учетом соответствующих ограничений (кинематических граничных условий). Если варьирование перемещения каркасной точки приводит к уменьшению энергии её окрестности влияния (4.4), то вариация каркасного перемещения считается актуальной. Если энергия окрестности влияния увеличивается, то вариация перемещения аннулируется, т.е. производится возврат к предшествующим значениям перемещения каркасной точки и энергии ее окрестности соответственно. После завершения вариационной процедуры для данной каркасной точки производится выполнение процедуры для окрестности влияния смежной с ней другой каркасной точки и т.д., в соответствии с известной схемой МЛВ [11]. Отличие от известной схемы в том, что внутренние поля окрестности влияния каркасной точки при этом определяются на основе решения микрокраевых задач, а не на основе аппроксимации полей перемещений с помощью конечно-элементных базисных функций.

Метод каркасных блоков при его реализации в экстремальной форме можно применять для исследования деформирования композитных сред (как, впрочем, и однородных) в условиях наличия ограничений на переменные задачи в виде неравенств (контактные задачи, учет сил трения и т.п.).

Однослойная схема по сравнению с многослойными более просто реализуется, требует наименьшего объема вычислений и, вместе с тем, по точности анализа такая, как многослойные схемы. Последнее вполне очевидно из реализации подхода в форме экстремальной задачи. Погрешность анализа композитной среды на основе предложенного подхода, реализуемого как в дифференциальной, так и экстремальной



формах, не зависит от степени дискретизации на верхнем уровне анализа (масштаба разбиения среды на блоки, задающем густоту каркасных точек). Погрешность подхода определяется только точностью решения краевых (локально-структурных) задач для блоков среды на основе уравнений МДТТ, то есть зависит только от степени дискретизации нижнего уровня анализа (дискретизации блоков среды).

Метод каркасных блоков, разумеется, можно применять и к расчету (анализу) однородной среды. Энергия блоков, на которые разбивается однородная среда, может определяться разными методами вычислительной механики, как-то: методом конечных разностей (МКР), методом конечных элементов (МКЭ), методами нелинейного программирования и др. При этом точность расчета среды будет зависеть не от размеров блоков (числа каркасных точек), а от плотности дискретной сетки (степени дискретизации) блоков в расчете с помощью применяемого метода. (Формально однородная среда, как и структурная, может быть разбита на несколько блоков с единственной каркасной точкой внутри среды, являющейся их общей вершиной).

### 5. Микромеханический (локально-структурный) уровень анализа

На микромеханическом (локально-структурном) уровне анализа среды для окрестностей влияния ее каркасных точек формируются краевые (микробраевые) задачи. Соответственно статическому или динамическому характеру макромеханической (в целом для среды) краевой задачи на микромеханическом уровне решаются микробраевые задачи в статической или динамической постановках. Решения микробраевых задач выявляют внутренние поля в окрестностях влияния каркасных точек. В итоге их решений внутренние поля выявляются в целом для всей среды. На основе найденных внутренних полей окрестностей влияния определяются функционалы энергии, приращения энергии или действия для окрестностей влияния (для среды в целом данные функционалы задаются (3.2), (3.3) и (3.4) соответственно). Функционалы состояния среды вычисляются при реализациях подхода как в дифференциальной, так и экстремальной формах. В случае МКБ в форме дифференциальной задачи микробраевые задачи решаются также для объединений попарно пересекающихся между собой окрестностей влияния каркасных точек среды (см. п.4).

Уравнения движения компонентов материала окрестностей влияния каркасных точек среды представляем в виде

$$\dot{\nabla}_i \left[ (q_n / \dot{q})^{1/2} \sigma^{ij} (\delta_j^k + \dot{\nabla}_j u_n^k) \right] + \rho_n \left( F_n^k - \frac{\partial v_n^k}{\partial t} \right) = 0, \quad (5.1)$$

$$F_n^k = \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{r}^k, \quad v^k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}^k, \quad \hat{\theta}^i \in V_{(k)n}, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad n = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $V_{(k)n}$  – область окрестности влияния (k)–точки, занимаемая n–й структурной составляющей;  $\rho_n(\hat{\theta}^i)$ ,  $F_n^k(\hat{\theta}^i, t)$  – плотность материала и компоненты внешней массовой силы для n–й составляющей среды;  $u_n^k, v_n^k = \partial u_n^k / \partial t$  – компоненты перемещения и скорости n–й составляющей среды;  $\overset{\circ}{\nabla}_i$  – ковариантная производная в метрике  $\overset{\circ}{q}_{ij}$  исходной конфигурации среды по координатной переменной  $\hat{\theta}^i$ .

В более общих случаях исследования среды необходимо исходить непосредственно из вариационной формулировки краевой задачи для среды в целом на базе конечного функционала (3.2) или инкрементального функционала (3.3) в случае статической задачи и на базе инкрементального функционала (3.4) в случае динамической задачи. В этих случаях МКБ применяется в форме экстремальной задачи. Следует исходить из соответствующих вариационных формулировок краевых задач для окрестностей влияния каркасных точек. Для статической задачи, формулируемой на базе (3.2), вариационная формулировка краевой задачи для окрестности влияния каркасной точки (k) предполагает решение этой задачи производить на основе определения стационарного значения функционала энергии окрестности влияния этой точки для действительного поля перемещений  $\mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t)$ :

$$I_{(k)}|_s = \sum_n I_{(k)n}|_s = \sum_n \int_{V_{(k)n}} \Phi_n[q_{ij}|_s] dV_{(k)n} + \sum_n \int_{V_{(k)n}} \overset{\circ}{\rho} P_n[u_i|_s] dV_{(k)n} + \quad (5.2)$$

$$+ \sum_n \int_{A_{(k)n}} \Pi_n[u_i|_s] dA_{(k)n} = \text{extremum}, \quad V_{(k)} = \bigcup_n V_{(k)n}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь и далее  $I_{(k)}$  и  $I_{(k)n}$  – функционалы полной энергии окрестности влияния в объеме  $V_{(k)}$  каркасной точки (k) и n–й компоненты материала в объеме  $V_{(k)n}$  в пределах окрестности точки (k);  $A_{(k)n}$  – грань n–й компоненты окрестности (k)–точки в части граничной поверхности среды  $A_\sigma$ , через которую среда нагружается.

В качестве внешних условий микрокраевой задачи задаем перемещение каркасной точки (k) и его варьированные значения по найденному из решения системы уравнений (4.6) или прямой экстремализацией функционала (4.1) каркасному полю перемещений (3.5) как:

$$\mathbf{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) = \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s), \quad \mathbf{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) + \Delta \mathbf{u}_{(k)} = \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) + \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) - \Delta \mathbf{u}_{(k)} = \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) - \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $t_s$  – значения параметра продолжения  $t$  в соответствии с последовательностью нагружения среды.

Условия на части граничной поверхности окрестности влияния, включаемой граничной поверхностью среды, определяются перемещениями и плотностями в ней внешних поверхностных сил:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t_s) &= \bar{\mathbf{u}}(\hat{\theta}^i, t_s), \quad \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \cap A_u, \\ \boldsymbol{\sigma}(\hat{\theta}^i, t_s) &= \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{\theta}^i, t_s), \quad \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \cap A_\sigma, \quad s=1,2,\dots, \quad k=1,2,\dots, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $A_{(k)}$  – граничная поверхность окрестности влияния  $(k)$  – каркасной точки;  $A_u, A_\sigma$  – части граничной поверхности среды  $A$  с заданными векторами перемещения  $\bar{\mathbf{u}}$  и напряжения  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  соответственно (для окрестностей влияния внутри среды такие условия отсутствуют).

Микрокраевая задача для окрестности влияния каркасной точки  $(k)$  решается при задаваемых для окрестности условиях (5.3), (5.4) и фиксированном положении той части внешней поверхности окрестности влияния, которая располагается внутри среды. Такое положение данной части внешней поверхности окрестности влияния определяется при выполнении той части итерационной процедуры анализа среды, которая предшествует варьированию положения данной каркасной точки. Соответствующее условие на части поверхности ограничения окрестности каркасной точки, которая расположена внутри среды, представим в виде

$$\mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t_s) = \mathbf{u}^{(r)}(\hat{\theta}^i, t_s), \quad \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \setminus A, \quad s=1,2,\dots, \quad k=1,2,\dots. \quad (5.5)$$

Здесь  $\mathbf{u}^{(r)}(\hat{\theta}^i, t_s)$  – поле перемещений среды, найденное на основе итерационной процедуры варьирования положениями каркасных точек среды до выполнения варьирования положением данной  $(k)$  – каркасной точки на  $s$  – шаге нагружения среды.

Внутренние граничные условия при бездефектном контакте составляющих представляют равенства между собой перемещений и напряжений в структурных составляющих на границах их раздела в рассматриваемой каркасной окрестности:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m(\hat{\theta}^i, t_s) &= \mathbf{u}_n(\hat{\theta}^i, t_s), \quad \boldsymbol{\sigma}_m(\hat{\theta}^i, t_s) = \boldsymbol{\sigma}_n(\hat{\theta}^i, t_s), \\ \hat{\theta}^i &\in A_{(k)mn}, \quad s=1,2,\dots, \quad k=1,2,\dots, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $A_{(k)mn}$  – поверхность раздела матрицы с номером « $m$ » и волокон или матричных включений системы армирования с номером « $n$ » в окрестности влияния каркасной точки  $(k)$ ;  $\mathbf{u}_m, \boldsymbol{\sigma}_m$  и  $\mathbf{u}_n, \boldsymbol{\sigma}_n$  – векторы перемещений и напряжений в компонентах « $m$ » и « $n$ » композитной среды.

Решения «микрокраевых» задач (5.2) – (5.6) при определяющих уравнениях компонентов материала позволяют найти внутренние поля среды  $u_{ni}(\hat{\theta}^i, t_s), \varepsilon_{nij}(\hat{\theta}^i, t_s), J_n \sigma_n^{ij}(\hat{\theta}^i, t_s)$ , отвечающие полю ее каркасных

перемещений  $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}^i, t_s)$  на  $s$ -шаге нагружения (перемещениям каркасных точек  $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s)$ ,  $k=1,2,\dots,k_{\max}$ ).

В случае исследования среды на базе инкрементального функционала (3.3) решения краевых задач для окрестностей влияния каркасных точек также базируются на уравнениях и условиях, которые записываются вместо (5.2) – (5.6) в соответствующем инкрементальном виде. В такой постановке задачи временная координата  $t$  выполняет роль параметра продолжения с инкрементальными по нему шагами, отвечающими дискретным значениям  $t = t_s$ ,  $s = 1, 2, \dots$ ;  $t = t_0$  – отвечает отсчетному состоянию среды.

В случае исследования динамического деформирования среды на базе функционала (3.4) решение задач деформирования окрестностей влияния каркасных точек производится на базе соответствующих экстремальных формулировок для данных окрестностей:

$$\Delta I_{(k)}|_{s+1} = \sum_n \Delta I_{(k)n}|_{s+1} = \int_{t_s}^{t_{s+1}} [\Delta T - \Delta U + \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3] dt = \text{extremum},$$

$$\left( \int_{t_s}^{t_{s+1}} \Delta T dt, \int_{t_s}^{t_{s+1}} \Delta U dt, \int_{t_s}^{t_{s+1}} \Delta L_1 dt, (\hat{\theta}^i, t) \in V_{(k)} \times [t_s, t_{s+1}] \right), \quad (5.7)$$

$$\left( \int_{t_s}^{t_{s+1}} \Delta L_2 dt, (\hat{\theta}^i, t) \in A_{(k)} \cap A_{\sigma} \times [t_s, t_{s+1}] \right),$$

$$\left( \int_{t_s}^{t_{s+1}} \Delta L_3 dt, (\hat{\theta}^i, t) \in A_{(k)} \cap A_c \times [t_s, t_{s+1}] \right), \quad s = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Здесь  $\Delta I_k$  и  $\Delta I_{(k)n}$  – инкрементальные функционалы действия для окрестности влияния каркасной точки ( $k$ ) и  $n$ -й компоненты материала в пределах окрестности влияния точки ( $k$ ), которые включаются функционалом для среды в целом (3.4).

В качестве внешнего граничного условия исходное или уточняемое (варьируемое) поле каркасных перемещений (3.5) задает приращения перемещений (траектории движения) каркасных точек в инкрементальном промежутке времени  $t_s \leq t \leq t_{s+1}$ :

$$\Delta \mathbf{u}(\hat{\theta}_k^i, t) = \Delta \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_k^i, t), \quad t_s \leq t \leq t_{s+1}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max}. \quad (5.8)$$

На части граничной поверхности окрестности влияния, включаемой граничной поверхностью среды, в качестве внешних условий задаются текущие приращения перемещений и плотностей распределения внешних сил на инкрементальном шаге:

$$\Delta \mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t) = \Delta \bar{\mathbf{u}}(\hat{\theta}^i, t), \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \cap A_u, t_s \leq t \leq t_{s+1}, \quad (5.9)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}(\hat{\theta}^i, t) = \Delta \boldsymbol{\sigma}(\hat{\theta}^i, t), \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \cap A_\sigma, t_s \leq t \leq t_{s+1}, s = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots .$$

Оставшееся внешнее граничное условие задает неизменяемое для рассматриваемого шага нагружения текущее положение части граничной поверхности окрестности влияния каркасной точки, которая расположена внутри среды:

$$\Delta \mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t) = 0, \hat{\theta}^i \in A_{(k)} \setminus A, t_s \leq t \leq t_{s+1}, s = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

(текущее положение данной части внешней поверхности окрестности влияния определяются при выполнении той части процедуры, которая предшествует варьированию траекторией данной каркасной точки).

Внутренние граничные условия при бездефектном контакте компонентов материала представляют равенства между собой приращений перемещений и напряжений в компонентах на границах их раздела в рассматриваемой каркасной окрестности на текущем инкрементальном шаге:

$$\Delta \mathbf{u}_m(\hat{\theta}^i, t) = \Delta \mathbf{u}_n(\hat{\theta}^i, t), \Delta \boldsymbol{\sigma}_m(\hat{\theta}^i, t) = \Delta \boldsymbol{\sigma}_n(\hat{\theta}^i, t), \quad (5.11)$$

$$\hat{\theta}^i \in A_{(k)mn}, t_s \leq t \leq t_{s+1}, s = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots .$$

К внешним (5.8) – (5.10) и внутренним (5.11) условиям следует присоединить начальные условия, задающие приращения перемещений и скорости окрестности влияния в начальный момент инкрементального шага нагружения. При непрерывном с течением времени изменении перемещений и скоростей среды приращения перемещений в начальный момент очередного шага нагружения равны нулю:

$$\Delta \mathbf{u}(\hat{\theta}^i, t_s) = 0, \hat{\theta}^i \in V_{(k)}, t_s \in [t_s, t_{s+1}], s = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots .$$

Скорости в начальный момент очередного шага нагружения определяются как

$$\mathbf{v}(\hat{\theta}^i, t_s) = \left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_{t_s} = \left. \frac{d\Delta \mathbf{u}}{dt} \right|_{t_s}, \hat{\theta}^i \in V_{(k)}, t_s \in [t_s, t_{s+1}], s = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots .$$

Микромеханический анализ среды производится на основе выделения окрестностей влияния каркасных точек, образуемых одним слоем блоков, имеющих каркасную точку в качестве общей для них вершины. Можно также применять с двумя, тремя и большим числом слоев окрестности влияния каркасных точек (см. п. 4). В случае применения окрестностей влияния с двумя и более слоями блоков, другие каркасные точки в окрестности «базовой» точки (k) выполняют такую же роль, как точки дискретной схемы микромеханического уровня анализа (разумеется, к самой точке (k) это не относится).

При изменении (варьировании) на макромеханическом уровне анализа перемещений либо траекторий каркасных точек производится переычисление внутренних полей их окрестностей влияния на базе решения микрокраевых задач (5.1) или (5.2), (5.3) – (5.6) (статическое

нагружение) либо (5.7) – (5.11) (динамическое нагружение). Решение данных микрокраевых задач для окрестностей каркасных точек среды может осуществляться на базе метода конечных элементов, метода конечных разностей, метода локальных вариаций и других известных методов МДТТ.

Если метод МКБ применяется в дифференциальной форме, то наряду с микрокраевыми задачами для окрестностей влияния каркасных точек решаются также и микрокраевые задачи для объединений попарно пересекающихся между собой их окрестностей влияния. Микрокраевые задачи для объединений пересекающихся окрестностей влияния каркасных точек формулируются так, как и для отдельных окрестностей влияния. Отличием является лишь то, что вместо перемещения (5.3) одной каркасной точки (k) задаются перемещения двух каркасных точек (k) и (l) с пересекающимися окрестностями влияния на основе найденного поля каркасных перемещений  $\hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}^i, t)$ , как-то:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) &= \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s), \quad \mathbf{u}(\hat{\theta}_{(l)}^i, t_s) = \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(l)}^i, t_s), \\ \mathbf{u}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) \pm \Delta \mathbf{u}_{(k)} &= \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(k)}^i, t_s) \pm \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(k)}, \\ \mathbf{u}(\hat{\theta}_{(l)}^i, t_s) \pm \Delta \mathbf{u}_{(l)} &= \hat{\mathbf{u}}(\hat{\theta}_{(l)}^i, t_s) \pm \Delta \hat{\mathbf{u}}_{(l)}, \\ s &= 1, 2, \dots, \quad k, l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Благодаря заданию перемещений каркасных точек и последовательному решению задач локально-структурного уровня анализа для отдельных окрестностей влияния среды, а не в целом для среды, вычисление внутренних полей среды приобретает устойчивый характер. Для задач с экстремальной формулировкой процедура вычисления внутренних полей в условиях, когда перемещения (модули векторов) значительно превосходят расстояния между смежными точками дискретной схемы микромеханического анализа, требует намного меньшего объема вычислений. Это имеет место из-за возможности применения больших шагов по истории нагружения среды на базе использования поля перемещений каркасных точек среды. Взаимные перемещения смежных каркасных точек могут при этом на порядок и более превосходить расстояния между смежными точками локальной дискретизации блоков (окрестностей влияния). Тогда перемещения каркасных точек определяют соответственно большие перемещения микроточек каркасных блоков в качестве исходного приближения для последующего выполнения вариационной процедуры локально-структурного уровня анализа при реализации последнего на ее основе.

## 6. Заключение

Предложенный метод каркасных блоков (МКБ) представляет собой двухуровневый макро–микромеханический подход в механике композитных сред при малых и больших деформациях компонентов

материала среды. Метод может применяться при слабых и высоких градиентах макроскопического состояния среды, а также для сред, строение которых не позволяет производить такую классификацию их состояния. Данный подход по сравнению с чисто микромеханическим (моделью кусочно-однородной среды), когда каждый из элементов структуры рассчитывается в условиях его совместного деформирования со всей остальной средой в целом (а не в пределах блока), имеет важные преимущества.

Блочный характер подхода позволяет организовать эффективный алгоритм на базе параллельного решения локальных краевых задач для окрестностей каркасных точек из блоков среды в случае МКБ в форме экстремальной задачи и для окрестностей и объединений попарно пересекающихся окрестностей каркасных точек в случае МКБ в форме дифференциальной задачи.

Двухуровневый подход реализуется устойчиво и с меньшим объемом вычислений на основе каркасного поля перемещений, задающего материальные перемещения каркасных точек среды. Это обусловливается возможностью применения на макромеханическом уровне достаточно больших шагов по нагружению среды, обуславливающих каркасные перемещения и вместе с ними перемещения локально-структурного уровня, которые могут на порядки превосходить размеры структуры материала среды. Каркасные точки при этом выполняют роль базовых (опорных) точек численной реализации анализа среды.

В подходе можно применять укрупненные блоки армированной (кусочно-однородной) среды, включающие то или иное число блоков представления структуры материала. Тогда плотность расположения каркасных точек среды уменьшается, а расстояния между смежными каркасными точками увеличиваются. Это целесообразно при анализе сред со структурой мелкого масштаба (например, нанотехнологической), когда перемещения деформируемой среды на несколько порядков превосходят характерные размеры ее структуры. Погрешность анализа среды при этом зависит не от плотности расположения каркасных точек, а от точности микромеханического уровня анализа, которая определяется плотностью расположения узловых точек дискретной схемы данного уровня.

Метод каркасных блоков позволяет производить исследование потери внутренней (и приповерхностной) устойчивости с поведением материала среды при закритических деформациях. Это производится на основе варьирования разбиением среды на блоки тех или иных размеров (варьирования расположением каркасных точек как узловых вершин выделяемых блоков среды). На основе варьирования размерами блоков и соответствующей организации локально-структурного уровня их анализа по кусочно-однородной модели выявляется потеря внутренней устойчивости и эволюция закритического деформирования материала среды (переходы к устойчивым формам равновесия материала).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахундов В.М. Структурная макроскопическая теория жестких и мягких композитов. Инвариантное описание //Механика композит. материалов. – 1998. – Т. 34, №5. – С. 595–612.
2. Ахундов В.М. Каркасная теория жестких и мягких композитов с неискривленными и искривленными структурами. Инвариантное описание //Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т. 6, №2. – С. 275–293.
3. Ахундов В.М. Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 2. Однонаправлено армированные композиты // Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, №1. – С. 29–50.
4. Ахундов В.М. Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 3. Двухнаправлено армированные композиты //Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, №4. – С. 479–492.
5. Ахундов В.М. Анализ эластомерных композитов на основе систем волокон. 4. Трехнаправленно армированные композиты //Механика композит. материалов. – 2001. – Т. 37, №3. – С. 355–376.
6. Ахундов В.М., Лунев В.П. Расчет и экспериментальное исследование растяжения и сжатия однонаправленного резинокордного композита // Механика композит. материалов. – 1999. – Т. 35, №3. – С. 325–334.
7. Ахундов В.М., Лунев В.П. Расчет и экспериментальное исследование растяжения перекрестно армированного резинокордного композита //Механика композит. материалов. – 2001. – Т. 37, №2. – С. 215–225.
8. Akhundov V.M. Modeling the large deformations of fibrous bodies of revolution by using a two-level carcass theory and an applied one-level theory // Sixteenth International Conference Mechanics of Composite Materials. – Riga, 2010. – P. 29.
9. Ахундов В.М. Статическая и динамическая экстремальные задачи упруговязкопластической среды при больших упругих, ползучести и пластических деформациях // Теория и практика металлургии. –2010. – № 1 – 2. – С. 145–152. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – Киев: Вища школа, 1982.– 480 с.
10. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. – М.: Наука, 1973. –238 с.
11. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.



УДК 621.74:669.131.2:669.131.4

М.О. Матвеева, В.Н. Беспалько, Е.В. Жиленкова, Б.В. Климович

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ МИКРОЛЕГИРОВАНИЯ ТИТАНОМ  
НА ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ В  
ПОЛОВИНЧАТЫХ ЛИТЕЙНЫХ ЧУГУНАХ**

*Методом дифференциально-термического анализа исследовали процессы, происходящие при нагреве в микролегированном титаном чугуна. Подтверждены данные по влиянию дисперсности металлической матрицы, формы и распределения графита на температуры фазовых переходов. Установлено, что титан в исследуемых пределах (0,017...0,044 %) сдвигал образование окисной пленки в область более низких температур. В опытных чугунах процессы интенсивного окисления начинались уже при температурах 460...500 °С. Поэтому примеси титана в исследуемом интервале концентраций могут отрицательно влиять на жаростойкость отливок.*

*Ключевые слова: ЧУГУН, ТИТАН, МИКРОЛЕГИРОВАНИЕ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТЕРМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, ЖАРОСТОЙКОСТЬ.*

*Методом диференційно-термічного аналізу досліджували процеси, що відбуваються при нагріванні у мікролегованому титаном чавуні. Знайшли підтвердження данні по впливу дисперсності металевої матриці, форми та розподілу вуглецю на температури фазових переходів. Встановлено, що титан у межах, що досліджуються (0,017...0,044 %) зсував утворення окисної плівки в область більш низьких температур. У дослідних чавунах процеси інтенсивного окислення починалися вже при температурах 460...500 °С. Саме тому домішки титану в інтервалі концентрацій, що досліджується може мати негативний вплив на жаростійкість виливків.*

*Ключові слова: ЧАВУН, ТИТАН, МІКРОЛЕГУВАННЯ, ДИФЕРЕНЦІЙНО-ТЕРМІЧНИЙ АНАЛІЗ, ЖАРОСТІЙКІСТЬ.*

*By differential thermal analysis processes occurring during heating in the microalloyed iron of titanium. Validated data on the influence of dispersion of the metal matrix, shape and distribution of graphite on the temperature phase transition. Found that the titanium in the range investigated (0.017...0.044%) shifts the formation of the oxide film in the region of lower temperatures. In experienced cast irons intensive oxidation processes started already at 460... 500°C. Therefore titanium impurities in the investigated range of concentrations can adversely affect the heat resistance of the castings.*

*Key words: CAST IRON, TITANIUM, MICRO-ALLOYING, DIFFERENTIAL THERMAL ANALYSIS, HEAT RESISTANCE.*

Исследования физической природы и механизма процессов формирования структур Fe-C сплавов имеют существенное значение для развития общей теории сплавов и для решения задач литейного производства, в частности производства отливок из чугунов. Титан всегда присутствует в чугунах, поскольку его содержат железные руды, кроме того он может попадать в расплав из шихтовых материалов (стальных и чугунных отходов). Примеси титана в шихтовых материалах не только усиливают энергетическую неравноценность различных межатомных

взаимодействий, но и приводят к заметным структурным особенностям в твердом состоянии чугуна.

**Анализ состояния вопроса.** Небольшое количество титана в жидком чугуне способствует его графитизации [1]. По данным работы [2] он несколько снижает прочность чугуна, так как нейтрализует (связывает) азот. Титан является раскислителем и модификатором, который способствует измельчению первичных зерен, повышает дисперсность структуры и антикоррозионные свойства [3, 4]. Титан в количествах 0,03 – 0,10 % вводят в специальные конструкционные серые чугуны для повышения их износостойкости, за счет образования карбидов или карбонитридов [5]. Также отмечается перспективность его использования как основного карбидообразующего элемента в белых износостойких чугунах [6].

Установлено, что практически отсутствуют данные о процессах фазовых переходов в чугунах с микродозами титана, происходящих в области низких температур, которые определяют начало газопоглощения, что важно при анализе жаростойкости отливок.

**Целью настоящих исследований** является изучение влияния примесей титана на фазовые переходы в половинчатых литейных чугунах, а также на эксплуатационные свойства отливок, сформированные в результате этих фазовых переходов.

**Методы исследования.** Опытные плавки проведены на высокочастотной установке ВЧИ10-10/0,44. Масса единовременной загрузки  $0,2 \pm 0,01$  кг. Химический состав базового чугуна (% , по массе): С 3,14; Si 2,20; Mn 0,61; Cr 0,20; S 0,03; P 0,05. Время плавки в разогретом тигле  $100 \pm 10$  с. Температуру металла в печи определяли термопарой Pt/Pt с записью на потенциометре КСП-4.

Любое изменение состояния металлов и сплавов (фазовое, внутрифазовое или структурное превращения) вызывает изменение энтальпии, а потому должно сопровождаться тепловым эффектом – выделением или поглощением тепла. Для исследования химических реакций и превращений, происходящих под влиянием нагрева или охлаждения сплавов, применяется метод дифференциального термического анализа, позволяющий измерять незначительные тепловые эффекты, и метод термогравиметрии, с большой точностью, определяющий изменение массы исследуемого образца в процессе превращения [7].

Кривая термогравиметрического анализа (ТГ) позволяет следить за превращениями исследуемого металла и произвести расчеты с определенным количеством продуктов реакции. Трудности оценки кривой ТГ привели к созданию дифференциальной термографии. Кривая скорости изменения массы образца во времени (ДТГ) дает достаточно надежные данные о превращениях в исследуемом металле. Одновременное определение изменения массы и энтальпии позволяет полнее анализировать

происходящие превращения. Совместные термический и термогравиметрический анализы осуществляются с помощью дериватографа. Методика проведения экспериментов описана в работе [8].

**Экспериментальные исследования и обсуждение результатов.** В серии плавок по исследованию влияния титана на фазовые переходы в навеску исходного чугуна помещали его возрастающее количество, далее металл расплавляли в печи, выдерживали температуру перегрева 1390 – 1410 °С. Результаты химического анализа чугуна опытных плавок приведены в табл. 1.

Таблица 1

Химический состав металла опытных плавок

№№ п/п	Элемент, % по массе (Fe остальное)					
	C	Si	Mn	S	P	Ti
Исх. чугун	3,75-3,80	2,00-2,10	0,61-0,65	0,03-0,04	0,04-0,05	-
1	3,73-3,77	1,79-1,86	0,61-0,65	0,02-0,03	0,04-0,05	0,017-0,019
2	3,60-3,68	2,00-2,15	0,61-0,68	0,03-0,04	0,04-0,05	0,022-0,024
3	3,75-3,80	1,80-1,86	0,60-0,68	0,02-0,03	0,04-0,05	0,030-0,032
4	3,51-3,60	1,72-1,78	0,60-0,68	0,02-0,03	0,04-0,05	0,041-0,044

Анализ термогравиметрических кривых (ТГ) показал, что с повышением содержания титана в опытном чугуне, температуры начала приращения массы образца и ее интенсивного прироста снижались (табл. 2). В образце исходного чугуна аналогичные процессы происходили при более высоких температурах. Установлено, что титан сдвигает образование окисной пленки в область более низких температур.

Таблица 2

Результаты анализа кривых термогравиметрического анализа

Параметр	Температура, °С				
	исх.чуг.	T1	T2	T3	T4
Начало приращения массы	460	450	410	390	370
Интенсивный рост массы	750	500	485	480	460

В результате изучения кривых изменение величины теплового эффекта процесса (ДТА) установлены следующие закономерности (рис. 1):

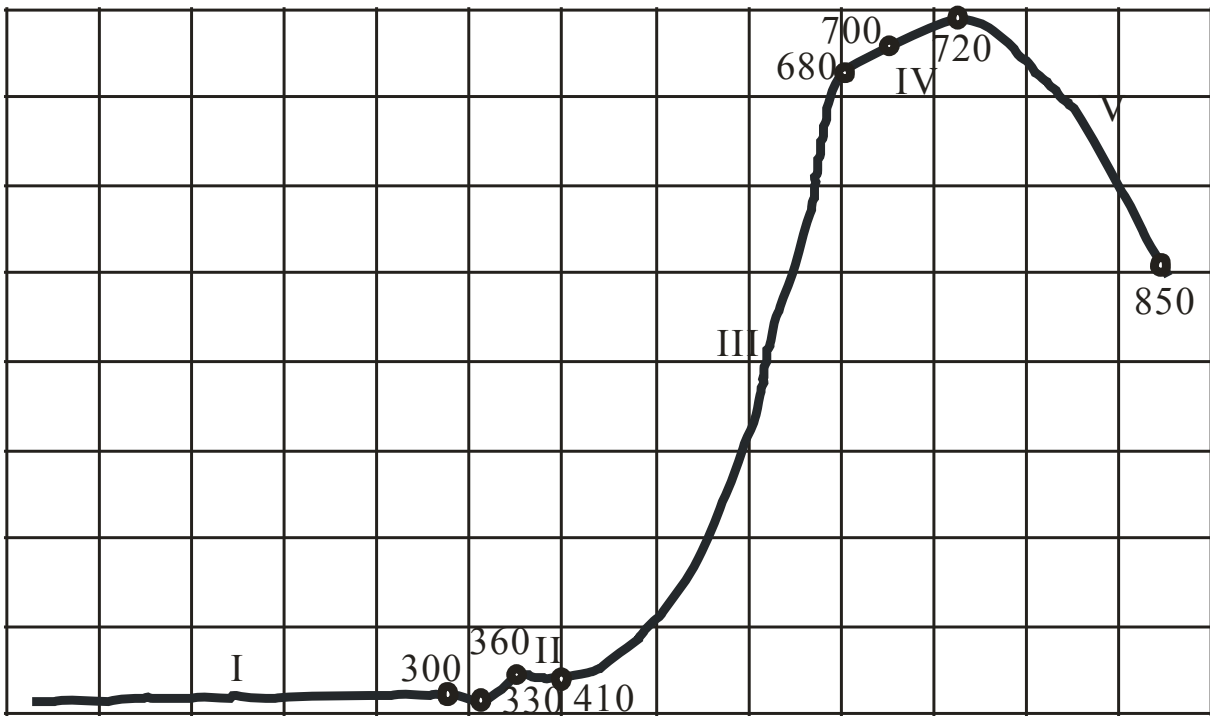
- на экспериментальных кривых всех образцов выделены пять температурных интервалов, которые характеризовали различные процессы, происходящие в чугуне при нагреве – I, II, III, IVиV (табл. 3);

- изменения на кривых ДТА для всех образцов при температурах ниже 300 °С близки по характеру;

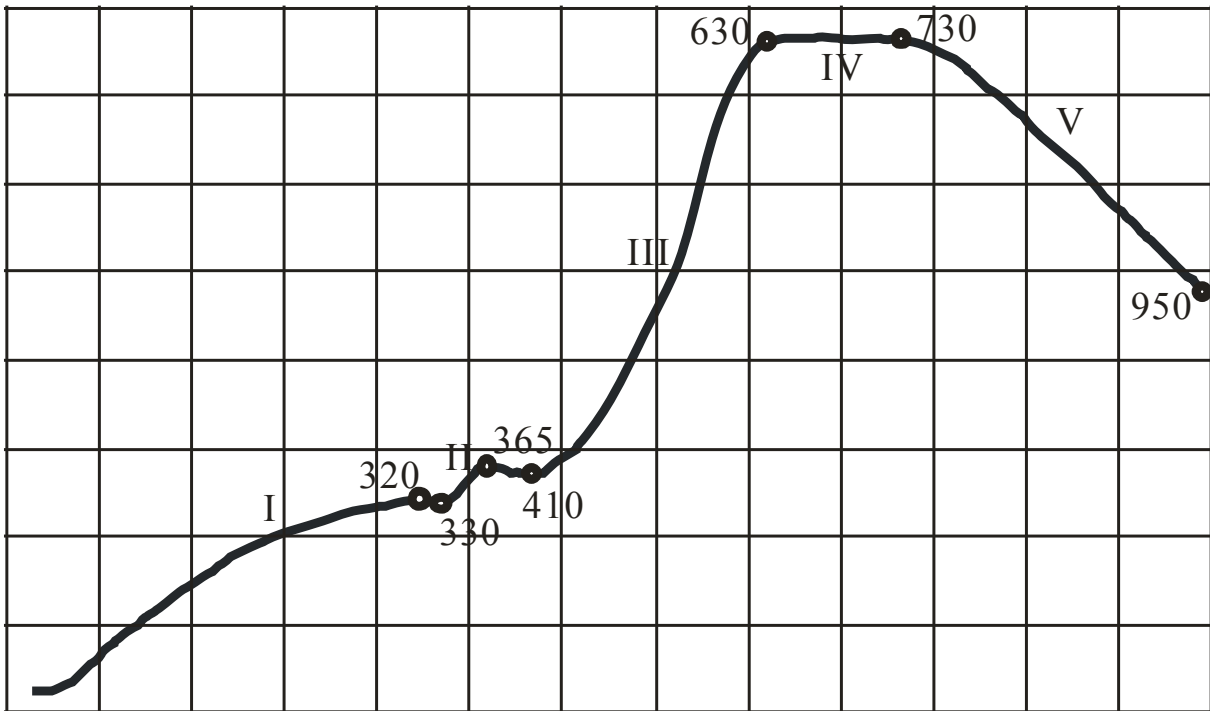
- характер изменения кривых T1 и T4 в интервале температур 300... 600°С аналогичен;

- ход кривой ДТА в интервале температур 600...800°С для образца исходного чугуна подобен кривой ДТА для образца T3;

- на кривых T2 и T3 имеются горизонтальные площадки, что свидетельствует о равенстве тепловых эффектов проходящих процессов.

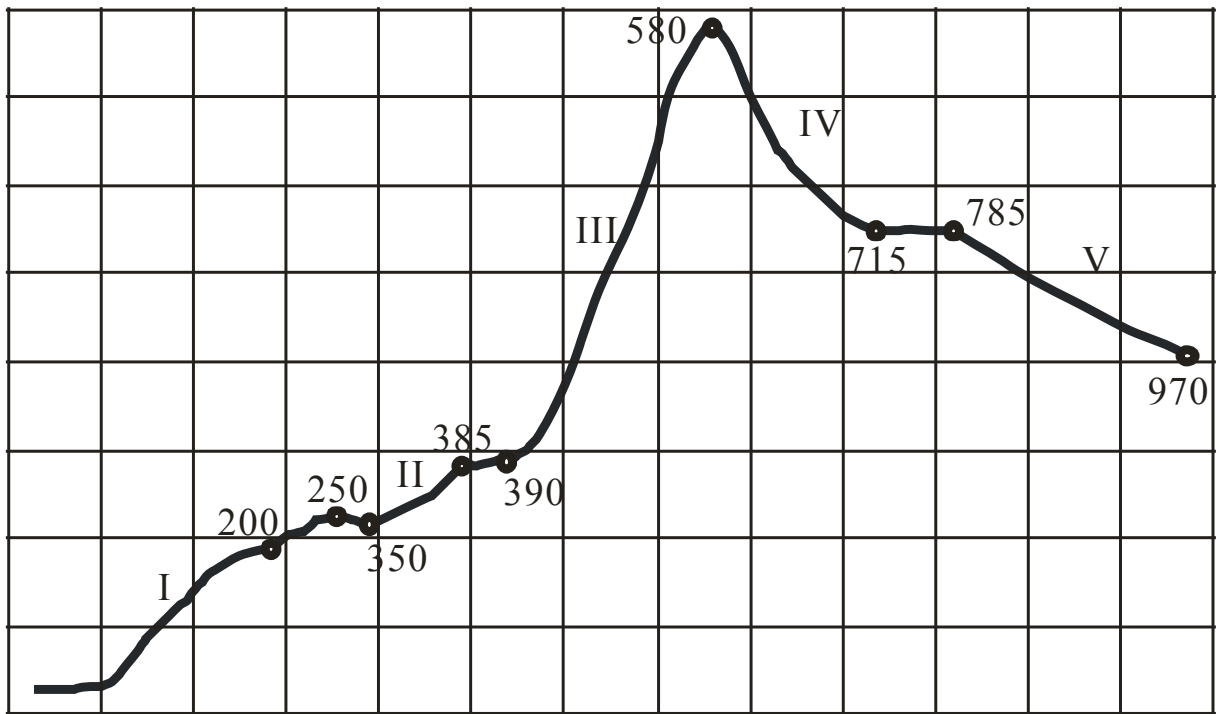


а

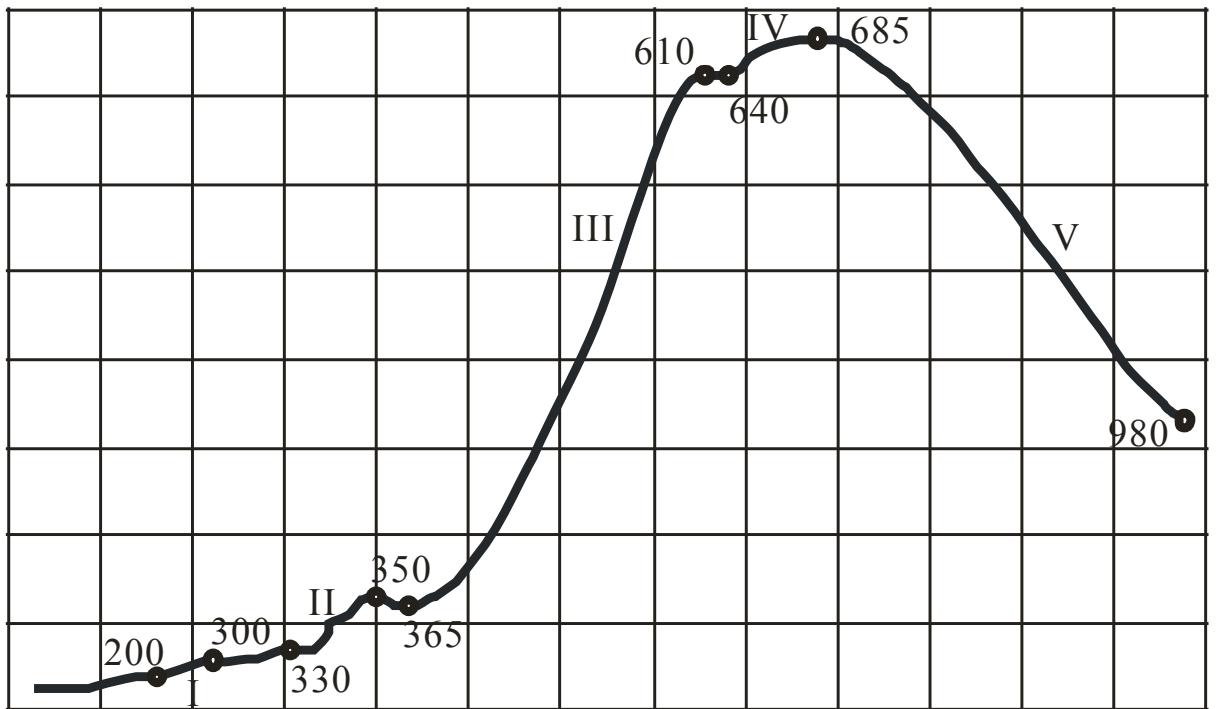


б

Рисунок – 1. Кривые ДТА металла опытных плавов:  
а – 0,017...0,019 % Ti;  
б – 0,022...0,024 % Ti



В



Г

Рисунок – 1. Кривые ДТА металла опытных плавов:  
в – 0,030...0,032 % Ti;  
г – 0,041...0,044 % Ti

## Анализ кривых ДТА

№ образца	Интервал температур и Q* процесса				
	I	II	III	IV	V
Исх.обр.	0-40-60	60-130-340	340-610	610 - 710 - 820	820-900
	Q	+ Q	- Q	- Q	- Q
T1	0-(250)-300	300-360	410-680	680 - 700 - 720	720-850
	+ Q	- Q	- Q	+ Q	- Q
T2	0-320	320-355	355-630	630-730	730-950
	+ Q	- Q	- Q	Q	- Q
T3	0-200	250-350	350-580	580-715;715-785	785-970
	+ Q	- Q	- Q	+ Q - Q	- Q
T4	100-200-300	300-330	330-610	610-640; 640-685	685-980
	Q	Q	- Q	Q + Q	- Q

Примечание.

- Q - процесс идет с уменьшением температуры и поглощением тепла;
- Q - процесс идет с поглощением тепла при постоянной температуре;
- + Q - процесс идет с повышением температуры и выделением тепла.

Структура исходного образца – серый чугун с пластинчатым графитом и феррито-перлитной матрицей. Участок IV (см. рис. 1, а) на кривой ДТА для этого образца связан с процессами аустенитизации перлита. Аустенитизация в интервале температур эвтектоидного равновесия начинается, когда феррит пересыщается углеродом и термодинамически возможен переход  $\alpha \rightarrow \gamma$ . По мере  $\alpha \rightarrow \gamma$  превращения идет последовательное растворение цементита перлита. При дальнейшем нагреве (участок V) развиваются процессы растворения графита и полиморфное превращение  $\alpha \rightarrow \gamma$ , в котором участвует  $\alpha$  твердый раствор матрицы чугуна, образованный при охлаждении по реакции  $A \rightarrow \Phi + \Gamma$ . Для начала этих превращений требуется большая степень перегрева, увеличение разности свободных энергий фаз, поэтому они реализуются при более высоких температурах, чем процесс аустенитизации перлита. Аустенитизация в участках с перлитной матрицей происходит значительно быстрее, чем в участках с ферритной матрицей [9]. Выше эвтектоидного интервала (метастабильного и стабильного равновесия) перлит и феррит переходят в аустенит, который при дальнейшем нагреве обогащается углеродом (повышается растворимость углерода в аустените) в результате растворения.

Участки I на кривых ДТА могут быть связаны как с процессами газопоглощения, так и с релаксацией напряжений возле включений графита. Наиболее быстро релаксация пиковых напряжений осуществляется в чугуне с грубыми пластинами графита и медленнее в чугуне с графитом компактной формы [10]. При введении 0,041% Ti количество грубых пластин графита снижалось и в основном преобладал графитзавихренной формы смеждендритным распределением.

Возможность этого процесса подтверждает кривая ДТА на участке I в образце Т4 – она более пологая, что свидетельствует о снижении его интенсивности.

Участки II и III идентифицируются с процессами, происходящими при изменении дисперсности перлита, IV и V – с процессами аустенитизации перлита и растворением графита.

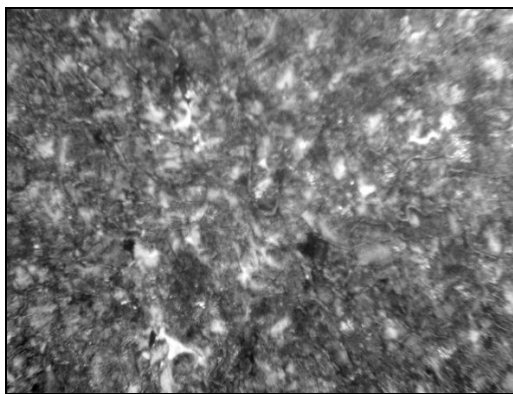
Согласно литературных данных [9] в стабильной системе титан влияет на положение критических точек  $C'$ ,  $E', S'$ , они смещаются в сторону меньших концентраций углерода. Положительное влияние малых количеств титана (менее 0,1%) на графитизацию связано с тем, что карбид TiC служит подложкой для зародышей графита.

При введении титана в чугуны замедляется процесс перлитного превращения, увеличивая устойчивость переохлажденного аустенита. Природа увеличения устойчивости переохлажденного аустенита под влиянием легирующих элементов довольно сложная. Легирующие элементы могут замедлять перлитное превращение по нескольким причинам:

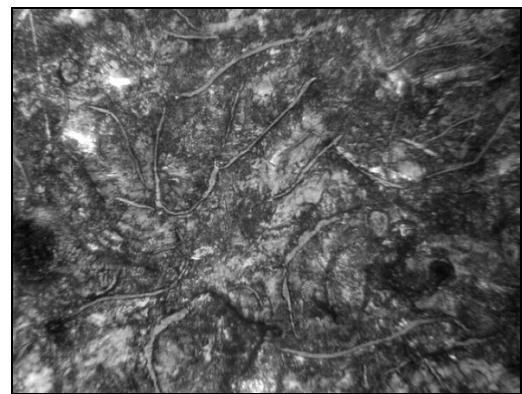
- в результате образования специальных карбидов, при этом в аустените необходимо диффузионное перераспределение легирующих элементов, атомы которых менее подвижны, чем атомы углерода;
- замедление диффузии углерода;
- уменьшения скорости полиморфного  $\gamma \rightarrow \alpha$  превращения.

По данным [11] титан укрупняет перлит при эвтектоидном превращении. В исследованиях [12] также установлено, что при содержании Ti 0,041...0,044% перлит стал однороднее.

Микроструктура экспериментальных чугунов состоит из графита, перлита и очень небольшого количества цементита (менее 0,5 %). Однако, количество, форма, распределение графита, а так же дисперсность и однородность перлита отличались. На рис. 2 показаны характерные структуры.



а



б

Рисунок – 2. Микроструктура металлической матрицы экспериментальных чугунов, Ч 300:

а – Ti 0,017...0,019 %; б – Ti 0,041...0,044 %

В экспериментальных чугунах графит формировался, как при кристаллизации (графит эвтектический и возможно в образцах Т1 и Т4 графит первичный), так и в твердом состоянии (графит вторичный, а в небольших объемах и эвтектоидный). Однако самостоятельных структурных составляющих графит вторичный и графит эвтектоидный не образуют, они наслаиваются на графит уже присутствующий в структуре.

Аустенитизация начинается при пересыщении феррита углеродом, когда становится термодинамически возможна переупаковка атомов железа (переход  $\alpha \rightarrow \gamma$ ). Аустенит зарождается и растет в перлите, при этом аустенит сначала насыщается углеродом, который поступает в основном из растворяющегося цементита. По мере осуществления полиморфного превращения происходит растворение цементита, а затем и графита. При дальнейшем нагреве (участок V) происходит растворение графита вторичного.

Структурные изменения серого чугуна с перлитной матрицей в интервале температур эвтектоидного превращения связаны с аустенитизацией перлита и науглероживанием матрицы. Скорость этих процессов зависит от состава чугуна, структуры матрицы, количества и разветвленности графитных включений, степени микроликвации примесей. В работе [9] описано влияние формы графита на процессы аустенитизации чугуна. В чугунах с грубопластинчатым графитом его растворение затруднено из-за потери контакта с матрицей в результате превращения. В чугунах с сильно разветвленным графитом вероятность потери контакта меньше, степень ликвации примесей (кремния) меньше, центров  $\alpha \rightarrow \gamma$  – превращения возникает больше, пути диффузии углерода меньше. Благодаря этому достигается большая скорость аустенитизации и науглероживания аустенита, а также сужение интервала этого процесса.

Изменение температур начала образования аустенита и начала растворения графита вторичного при повышении содержания титана приведено в табл. 4. Проведенный анализ свидетельствует, что увеличение содержания титана в чугуне до 0,032 % понижает температуру начала аустенитизации перлита и повышает температуру начала растворения вторичного графита, таким образом, расширяет интервал превращения перлита. Дальнейшее повышение содержания титана до 0,041...0,044 % приводит к сужению этого температурного интервала.



Температуры начала образования аустенита и растворения графита вторичного

Температура, °С	Содержание титана, % (по массе)				
	исх. чугуи	0,017...0,019	0,022...0,024	0,030...0,032	0,041...0,044
Начало образования аустенита	610	680	630	580	610
Начало растворения графита вторичного	770	720	730	785	685

Различия в ходе кривых ДТА на участках IV и V можно объяснить различием формы и распределения графита, которые были отмечены в образцах с различным содержанием титана [3].

С увеличением дисперсности структуры, как графита, так и перлита время аустенитизации уменьшается. Скорость протекания этого процесса пропорциональна коэффициенту диффузии углерода и градиенту концентрации вблизи границ раздела фаз Ф/А и Ф/Ц, а также в участках с графитом. Поэтому повышение содержания титана до 0,041...0,044 % приводящее к увеличению доли графита в виде мелких завихрений псевдоэвтектического типа способствует аустенитизации и уменьшению разницы температур на участке IV. Трудности в разделении графита эвтектоидного и вторичного не позволяют рассчитать их объемную долю в структуре чугуна при различном содержании титана. Можно предположить, что различие в ходе кривых ДТА на участках IV и V связано с различием формы и распределения графита, влиянием этих параметров на кинетику процесса аустенитизации и растворения графита, что приводит к разной суммарной величине теплового эффекта при нагреве в интервале температур 680...980 °С.

#### Выводы

Проведенные исследования позволили установить, что экспериментальные концентрации титана не оказывали влияния на процессы газопоглощения и релаксацию напряжений возле включений графита в интервале температур до 300 °С.

Подтверждены данные по влиянию дисперсности металлической матрицы, формы и распределения графита на температуры фазовых переходов. Содержание титана до 0,032 % понижает температуру начала аустенитизации перлита и повышает температуру начала растворения вторичного графита, следовательно, расширяет интервал перлитного превращения. Дальнейшее повышение содержания титана до 0,041...0,044 % приводит к образованию измельченного междендритного

графита, огрублению перлита и соответственно к сужению этого температурного интервала.

Титан в исследуемых пределах (0,017...0,044 %) сдвигал образование окисной пленки в область более низких температур, в опытных чугунах процессы интенсивного окисления начинались уже при температурах 460...500 °С. Поэтому примеси титана в исследуемом интервале концентраций могут отрицательно влиять на жаростойкость отливок.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по чугуному литью / под ред. Н. Г. Гиршовича. - 3-е изд., перераб. и доп. - Л. : Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1978. - 758 с.: ил., табл., библиогр. - С. 741-753.
2. Чугун / [Шерман А. Д., Жуков А. А., Абдуллаев Е. В. и др.]; под ред. А.Д. Шермана и А. А. Жукова. -1-е изд. - М. : Металлургия, 1991. - 576 с.
3. Матвеева М. О. Влияние титана на формирование структуры чугуна / М. О. Матвеева, О. М. Шаповалова // Металознавство та термічна обробка металів. – 2008. – № 1. – С. 65–75.
4. Матвеева М. О. Исследования коррозионной стойкости чугунов экономнолегированных титаном / М. О. Матвеева, Е. Э. Чигиринец, А.А. Макарова // Вісник Донбаської Державної Машинобудівної Академії. – 2009. – № 1 (15). – С. 203–207.
5. Chapman J., Mannion G. Titanium Bearing Cast Irons for Automotive Bracing Application // Foundry Trade Journal 1982. February 25. P.232; 235-237; 239-242; 244-248.
6. Цыпин И. И. Белые износостойкие чугуны. Структура и свойства / И. И. Цыпин. - М. : Металлургия, 1983. - 176 с.
7. Металловедение и термическая обработка стали: Справ. изд. – 3-е изд., перераб. и доп. В 3-х т. Т1. Методы испытаний и исследования/ Под ред. Бернштейна М.Л., Рахштадта А.Г. М.: Металлургия, 1983. 352 с.
8. Шаповалова О. М. Влияние хрома на фазовые превращения в чугунах / О. М. Шаповалова, М. О. Матвеева, В. М. Беспалько // Современные проблемы металлургии. – 2006. – С. 15–26.
9. Бунин К. П. Основы металлографии чугуна / К. П. Бунин, Я. Н. Малиночка, Ю. Н. Таран. - М. : Металлургия, 1969. - 416 с.
10. Новиков И. И. Теория термической обработки металлов. - М. : Металлургия, 1986, 480 с.
11. Бунин К. П. Строение чугуна / К. П. Бунин, Ю. Н. Таран. - М. : Металлургия, 1972. - 160 с.
12. Матвеева М. О. Влияние титана на формирование структуры чугуна / М. О. Матвеева, О. М. Шаповалова // Металознавство та термічна обробка металів. – 2008. – № 1. – С. 65–75.

УДК 622.647.82:51.001.57

Р.В. Кирия, Т.Ф. Мищенко, Ю.В. Бабенко

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ  
АККУМУЛИРУЮЩЕГО БУНКЕРА В РЕЖИМЕ ПОДДЕРЖАНИЯ В  
НЕМ ОБЪЕМА ГРУЗА В ЗАДАНЫХ ПРЕДЕЛАХ**

*На основании кусочно-марковских процессов с непрерывным временем и дискретным состоянием разработана математическая модель функционирования аккумулярующего бункера в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах. Получена зависимость среднего объема груза в бункере от производительности питателя. Результаты аналитических исследований достаточно хорошо совпадают с результатами имитационного моделирования.*

*Ключевые слова: АККУМУЛИРУЮЩИЙ БУНКЕР, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, РЕЖИМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ, ОБЪЕМ ГРУЗА, ЛЕНТОЧНЫЙ КОНВЕЙЕР УГОЛЬНОЙ ШАХТЫ.*

*На основі кусково-марківських процесів з безперервним часом і дискретним станом розроблено математичну модель функціонування акумулюючих бункерів в режимі підтримки в ньому об'єму вантажу в заданих межах. Одержано залежність середнього об'єму вантажу в бункері від продуктивності живильника. Результати аналітичних досліджень достатньо добре співпадають з результатами імітаційного моделювання.*

*Ключові слова: АКУМУЛЮЮЧИЙ БУНКЕР, МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, РЕЖИМ ФУНКЦІОНУВАННЯ, ОБ'М ВАНТАЖУ, СТРІЧКОВИЙ КОНВЕЄР ВУГІЛЬНОЇ ШАХТИ*

*Based on piecewise-markovian processes with continuous time and discrete state was developed and mathematical model of functioning of accumulative hopper in the mode of keeping cargo volume within prescribed limits. Dependence of average cargo volume in hopper on productivity of batcher was obtained. Results of analytical researches have good coincidence with simulation results.*

*Keywords: ACCUMULATIVE HOPPER, MATHEMATICAL MODEL, MODE OF FUNCTIONING, CARGO VOLUME, COAL MINE BELT CONVEYER.*

Аккумулярующие бункеры получили широкое распространение в системах подземного конвейерного транспорта угольных шахт.

Аккумулярующие бункеры предназначены для обеспечения независимой работы смежных технологических звеньев транспорта в периоды их аварийных отказов в работе или остановок по той или иной причине, а также для уменьшения влияния простоев конвейерных линий на работу очистных и подготовительных забоев.

Применение аккумулярующих бункеров в системах подземного конвейерного транспорта позволяет значительно повысить пропускную способность и надежность их работы.

Для эффективной работы аккумулярующих бункеров в системе подземного конвейерного транспорта угольных шахт необходимо поддерживать в бункере объем груза в заданных пределах. Причем

величина этих пределов зависит от места расположения бункера в системе конвейерного транспорта.

На угольных шахтах разгрузка бункера осуществляется с помощью питателя (рис. 1) В этом случае производительность разгрузки бункера может регулироваться путем изменения скорости питателя или размером выпускного отверстия.

Однако в условиях угольных шахт из-за существенной неравномерности поступающего в бункер грузопотока и низкой надежности управляющего оборудования непрерывное поддержание в бункере объема груза в заданных пределах с помощью изменения скорости питателя или размера выпускного отверстия невозможно.

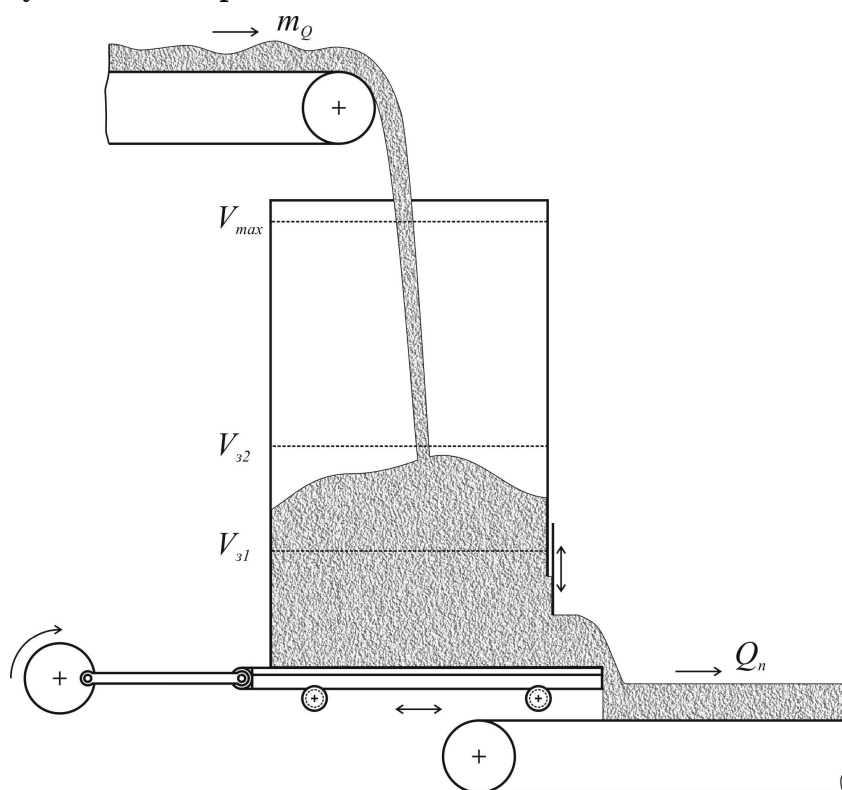


Рисунок – 1. Схема работы аккумулирующего бункера в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах

Поэтому на практике поддержание в аккумулирующем бункере объема груза в заданных пределах осуществляется путем включения и выключения питателя.

В настоящее время для поддержания объема груза в бункерах в заданных пределах включение и выключение питателя осуществляется вручную.

Для повышения эффективности управления поддержанием в аккумулирующем бункере объема груза в заданных пределах необходимо применение компьютерных технологий на основе контроллеров. Для этого необходимо на основе математической модели процесса функционирования аккумулирующего бункера в режиме поддержания объема груза в заданных пределах разработать алгоритм его оптимального управления.

**Целью статьи** является математическое моделирование процесса функционирования аккумулирующего бункера в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах.

**Постановка задачи.** Предположим, что поступающий в бункер и разгружаемый из него грузопотоки  $Q_s$  и  $Q_p$  соответственно представляют собой последовательности прямоугольных импульсов высотой, равной средней производительности загрузки и разгрузки грузопотока  $m_Q$  и  $Q_n$  соответственно, и интервалов работы  $t_1$ ,  $t_2$  и простоя  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  конвейерного оборудования, распределенных по экспоненциальному закону (рис. 2).

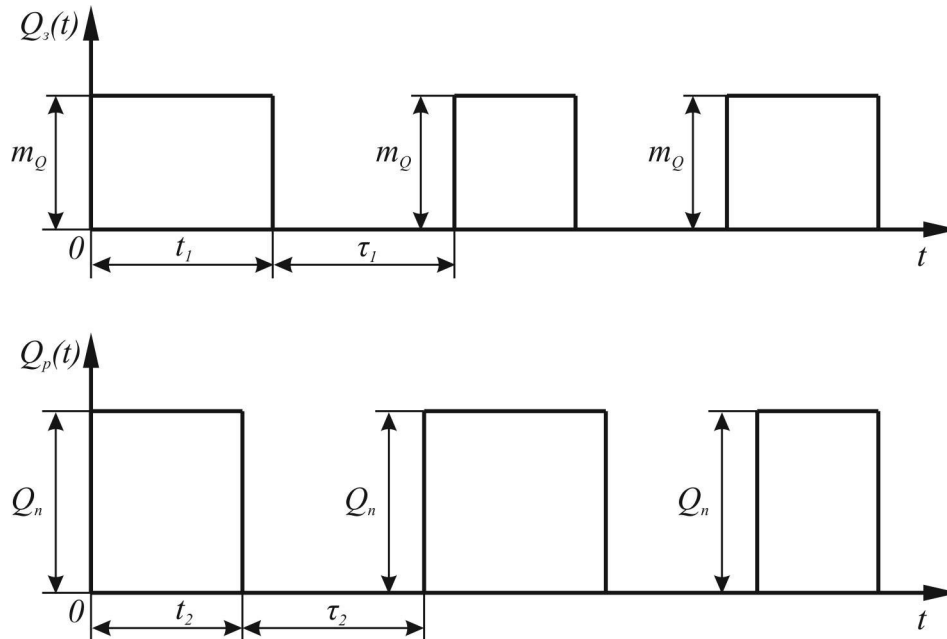


Рисунок – 2. Графики поступающего в аккумулирующий бункер грузопотока (а) и выходящего из аккумулирующего бункера грузопотока (б)

Обозначим интенсивность потоков отказов и восстановлений надбункерной и подбункерной конвейерных линий через  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  и  $\lambda_2$ ,  $\mu_2$  соответственно.

В режиме поддержания в бункере объема груза в заданных пределах надбункерная конвейерная линия работает постоянно. В случае достижения заданного минимального объема груза в бункер  $V_{s1}$  (м<sup>3</sup>) питатель отключается и подбункерная конвейерная линия останавливается. Работает только надбункерная конвейерная линия. При достижении заданного максимального объема груза в бункере  $V_{s2}$  (м<sup>3</sup>) питатель снова включается и происходит разгрузка бункера до объема  $V_{s1}$ . При этом надбункерная конвейерная линия выключается только в случае аварийного переполнения бункера.

Для предотвращения постоянного переполнения аккумулирующего бункера производительность питателя  $Q_n$  должна быть больше средней производительности поступающего грузопотока  $m_Q$  ( $Q_n > m_Q$ ).

Необходимо определить средний объем  $V_c$  груза в бункере.

В работе [1] была разработана математическая модель функционирования аккумулирующего бункера в режиме перегрузки, когда надбункерная конвейерная линия и питатель не отключаются. Этот режим имеет место при  $m_Q < Q_n$  и достаточно большом объеме аккумулирующего бункера. Эта модель основана на уравнениях Ховарда [2], справедливых для марковских процессов с непрерывным временем и дискретными состояниями, которые имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = q_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)V_1 + \lambda_1 V_2 + \lambda_2 V_3, \\ \frac{dV_2}{dt} = q_2 + \mu_1 V_1 - (\lambda_2 + \mu_1)V_2 + \lambda_2 V_4, \\ \frac{dV_3}{dt} = q_3 + \mu_2 V_1 - (\lambda_1 + \mu_2)V_3 + \lambda_1 V_4, \\ \frac{dV_4}{dt} = q_4 + \mu_2 V_2 + \mu_2 V_3 - (\mu_1 + \mu_2)V_4, \end{cases} \quad (1)$$

где  $q_1 = \frac{m_Q - Q_n}{\gamma}$ ;  $q_2 = -\frac{Q_n}{\gamma}$ ;  $q_3 = \frac{m_Q}{\gamma}$ ;  $q_4 = 0$ ;  $\gamma$  – удельный вес груза, т/м<sup>3</sup>;

$V_1, V_2, V_3, V_4$  – объемы груза в бункере в начальный момент времени  $t$ , соответствующие первому, второму, третьему и четвертому состояниям процесса накопления груза в бункере, м<sup>3</sup>.

При первом состоянии надбункерная и подбункерная конвейерные линии работают; при втором состоянии надбункерная конвейерная линия не работает, а подбункерная работает; при третьем состоянии надбункерная конвейерная линия работает, а подбункерная не работает; при четвертом состоянии надбункерная и подбункерная конвейерные линии не работают.

При этом начальные условия имеют вид: при  $t = 0$   $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = 0$ .

Если простой одновременно надбункерной и подбункерной конвейерных линий является маловероятным событием, то система уравнений Ховарда (1) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = q_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)V_1 + \lambda_1 V_2 + \lambda_2 V_3, \\ \frac{dV_2}{dt} = q_2 + \mu_1 V_1 - \mu_1 V_2, \\ \frac{dV_3}{dt} = q_3 + \mu_2 V_1 - \mu_2 V_3, \end{cases} \quad (2)$$

где  $q_1 = \frac{m_Q - Q_n}{\gamma}$ ;  $q_2 = -\frac{Q_n}{\gamma}$ ;  $q_3 = \frac{m_Q}{\gamma}$ .

При этом выполняются начальные условия: при  $t = 0$   $V_1 = V_2 = V_3 = 0$ .

Решение этой системы уравнений при достаточно больших  $t$  ( $t \rightarrow \infty$ ) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= \frac{\mu_1(\lambda_2 + \mu_2)m_Q - \mu_2(\lambda_1 + \mu_1)Q_n}{\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1} t + \frac{\lambda_1(\mu_2^2 + \lambda_2\mu_2 - \lambda_2\mu_1)}{(\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)^2} m_Q - \\
 &\quad - \frac{\lambda_2(\mu_1^2 + \lambda_1\mu_1 - \lambda_1\mu_2)}{(\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)^2} Q_n; \\
 V_2(t) &= \frac{\mu_1(\lambda_2 + \mu_2)m_Q - \mu_2(\lambda_1 + \mu_1)Q_n}{\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1} t - \frac{\mu_1(\lambda_2^2 + 2\lambda_2\mu_2 + \mu_2^2 + \lambda_1\lambda_2)}{(\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)^2} m_Q - \\
 &\quad - \frac{\lambda_2\mu_1(\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)}{(\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)^2} Q_n; \\
 V_3(t) &= \frac{\mu_1(\lambda_2 + \mu_2)m_Q - \mu_2(\lambda_1 + \mu_1)Q_n}{\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1} t + \frac{\lambda_1\mu_2(\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_2)}{(\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)^2} m_Q + \\
 &\quad + \frac{\mu_2(\lambda_1^2 + 2\lambda_1\mu_1 + \mu_1^2 + \lambda_1\lambda_2)}{(\mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)^2} Q_n.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Среднее количество груза в бункере, независимо от начального состояния надбункерного и подбункерного конвейеров, согласно формуле полной вероятности [3] определяется по формуле:

$$V_c = P_1V_1(t) + P_2V_2(t) + P_3V_3(t), \tag{4}$$

где  $P_1$  – вероятность того, что надбункерная и подбункерная конвейерные линии работают одновременно;  $P_2$  – вероятность того, что надбункерная конвейерная линия простаивает, а подбункерная конвейерная линия работает;  $P_3$  – вероятность того, что надбункерная конвейерная линия работает, а подбункерная конвейерная линия простаивает.

Величины  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  определяются как вероятности состояний системы, состоящей из последовательно независимых надбункерной и подбункерной конвейерных линий.

Согласно [4], при  $t \rightarrow \infty$  имеем

$$P_1 = \frac{\mu_1\mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}; P_2 = \frac{\lambda_1\mu_2}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}; P_3 = \frac{\lambda_2\mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}. \tag{5}$$

Подставляя последние равенства (5) в выражение (4), после преобразования получим

$$V_c = \left( \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} \cdot \frac{m_Q}{\gamma} - \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot \frac{Q_n}{\gamma} \right) t$$

или

$$V_c = \frac{1}{\gamma} (\bar{m}_Q - \bar{Q}_n) t, \tag{6}$$

где  $\bar{m}_Q = M[Q_s] = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} m_Q$ ;  $\bar{Q}_n = M[Q_p] = \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} Q_n$ .

Следовательно, средний объем груза в аккумулирующем бункере прямо пропорционален разности математических ожиданий производительностей поступающего и разгружаемого грузопотоков и времени работы бункера. Кроме того, из (7) следует, что если  $\bar{m}_Q > \bar{Q}_n$ , то  $V_c > 0$ , если  $\bar{m}_Q \leq \bar{Q}_n$ , то  $V_c \leq 0$ , т.е. если  $\bar{m}_Q \leq \bar{Q}_n$ , то бункер пуст.

Полученные результаты теоретических исследований для функционирования аккумулирующего бункера в режиме перегрузки достаточно хорошо совпадают с результатами экспериментальных исследований [5].

В случае, если аккумулирующий бункер работает в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах, процесс функционирования бункера представляет собой кусочно-марковский процесс, состоящий из загрузки (не работает питатель) и разгрузки бункера (работает питатель) (рис. 3). При этом, если предположить, что объем груза в бункере  $V(t)$  является эргодическим случайным процессом [3], то средний объем груза в бункере можно определить из выражения

$$V_c = M[V(t)] = M \left[ \frac{1}{\xi_c} \int_0^{\xi_s} V_s(t) dt + \frac{1}{\xi_c} \int_0^{\xi_p} V_p(t) dt \right], \quad (7)$$

где  $V(t) = V_s(t) + V_p(t)$ ;  $V_s(t)$  – текущий объем груза в бункере в момент загрузки, м<sup>3</sup>;  $V_p(t)$  – текущий объем груза в бункере в момент разгрузки, м<sup>3</sup>;  $\xi_c$  – время цикла загрузки и разгрузки бункера, с;  $\xi_s$ ,  $\xi_p$  – время загрузки и разгрузки бункера соответственно, с.

При этом  $\xi_c$ ,  $\xi_s$ ,  $\xi_p$  являются случайными величинами, удовлетворяющими условию

$$\xi_c = \xi_s + \xi_p. \quad (8)$$

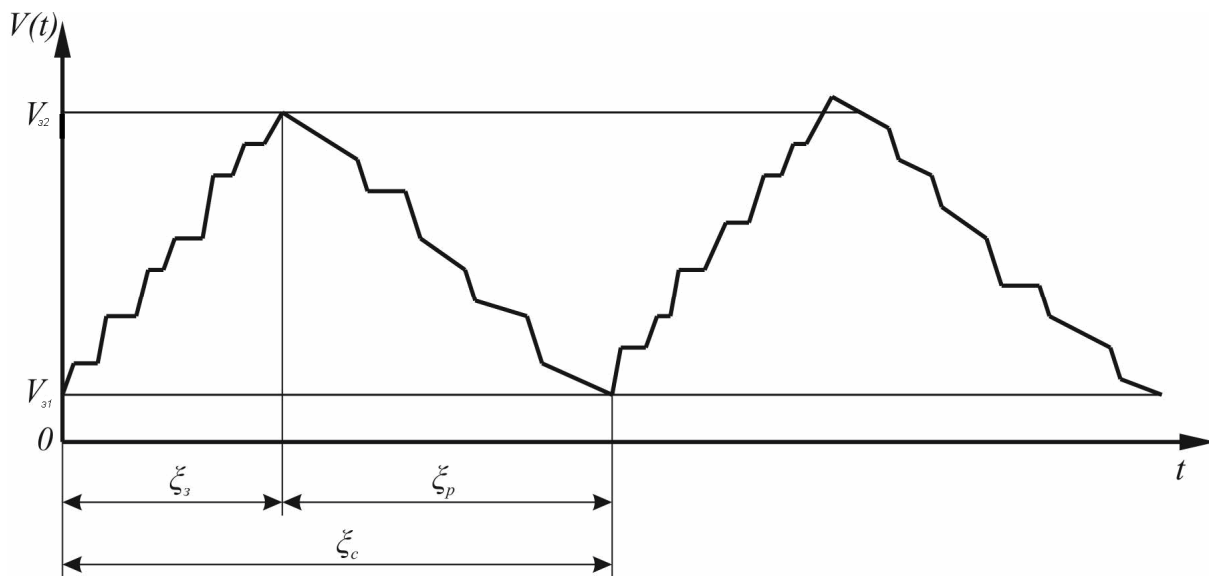


Рисунок – 3. Реализация случайного процесса объема груза в бункере в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах



Из последнего равенства следует [3]

$$M[\xi_c] = M[\xi_s] + M[\xi_p]$$

или

$$t_c = t_s + t_p, \quad (9)$$

где  $t_c$  – среднее время цикла загрузки и разгрузки бункера, с;  $t_s, t_p$  – среднее время загрузки и разгрузки бункера соответственно, с.

Математические ожидания объемов груза в бункере  $V_s(t)$  и  $V_p(t)$  можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} M[V_s(t)] &= V_{s1} + \frac{\bar{m}_Q}{\gamma} \cdot t, \text{ если } 0 < t < \xi_s; \\ M[V_p(t)] &= V_{s2} + \frac{(\bar{m}_Q - \bar{Q}_n)}{\gamma} \cdot t, \text{ если } \xi_s < t < \xi_p. \end{aligned} \quad (10)$$

Согласно [3], математическое ожидание случайной величины  $Y(t)$ , являющейся интегралом случайной величины  $V(t)$  с математическим ожиданием, линейно зависящим от времени, и случайным верхним пределом  $\xi(t)$ , можно определить по формуле

$$M[Y(t)] = M \left[ \int_0^{\xi(t)} V(t) dt \right] = b m_\xi + \frac{a}{2} (m_\xi^2 + \sigma_\xi^2), \quad (11)$$

где  $M[V(t)] = a + bt$ ;  $m_\xi = M[\xi(t)]$ ;  $\sigma_\xi^2 = D[\xi(t)]$ .

Используя соотношение (11), с учетом (10), равенство (7) после преобразования примет вид:

$$V_c = \frac{V_{s1}t_s + V_{s2}t_p}{t_c} + \frac{\bar{m}_Q(t_s^2 + \sigma_s^2) - (\bar{Q}_n - \bar{m}_Q)(t_p^2 + \sigma_p^2)}{2\gamma t_c}, \quad (12)$$

где  $\sigma_s, \sigma_p$  – средние квадратичные отклонения времени загрузки  $\xi_s$  и разгрузки  $\xi_p$  бункера, с.

Предполагая, что  $\sigma_s \ll t_s$  и  $\sigma_p \ll t_p$ , равенство (12) примет вид:

$$V_c = \frac{V_{s1}t_s + V_{s2}t_p}{t_c} + \frac{\bar{m}_Q t_s^2 - (\bar{Q}_n - \bar{m}_Q) t_p^2}{2\gamma t_c}. \quad (13)$$

Для определения среднего времени загрузки  $t_s$  и разгрузки бункера  $t_p$ , аналогично уравнениям Ховарда [2], составим уравнения относительно средних времен достижения заданного количества груза в бункере  $\theta_i$  при различных начальных состояниях надбункерной и подбункерной конвейерных линий.

В результате получим

$$\begin{cases} q'_1 \frac{d\theta_1}{dm} = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\theta_1 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2\theta_3, \\ q'_2 \frac{d\theta_2}{dm} = 1 + \mu_1\theta_1 - (\lambda_2 + \mu_1)\theta_2 + \lambda_2\theta_4, \\ q'_3 \frac{d\theta_3}{dm} = 1 + \mu_2\theta_2 - (\lambda_1 + \mu_2)\theta_3 + \lambda_1\theta_4, \\ q'_4 \frac{d\theta_4}{dm} = 1 + \mu_2\theta_2 + \mu_2\theta_3 - (\mu_1 + \mu_2)\theta_4, \end{cases} \quad (14)$$

где  $q'_1 = m_Q - Q_n$ ;  $q'_2 = -Q_n$ ;  $q'_3 = m_Q$ ;  $q'_4 = 0$ ;  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  – средние времена заполнения заданного количества груза в бункер, соответствующих в начальный момент времени первому, второму, третьему и четвертому состояниям надбункерной и подбункерной конвейерных линий;  $m$  – текущее значение количества груза в бункере.

При этом начальные условия принимают вид: при  $m = 0$   $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$ .

Если одновременный простой надбункерной и подбункерной конвейерных линий является маловероятным событием, то система уравнений (14) примет вид:

$$\begin{cases} q'_1 \frac{d\theta_1}{dm} = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\theta_1 + \lambda_1\theta_2 + \lambda_2\theta_3, \\ q'_2 \frac{d\theta_2}{dm} = 1 + \mu_1\theta_1 - \mu_1\theta_2, \\ q'_3 \frac{d\theta_3}{dm} = 1 + \mu_2\theta_1 - \mu_2\theta_3, \end{cases} \quad (15)$$

где  $q'_1 = m_Q - Q_n$ ;  $q'_2 = -Q_n$ ;  $q'_3 = m_Q$ .

При этом начальные условия имеют вид: при  $m = 0$   $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ .

Определим среднее время загрузки бункера  $t_3$  при неработающем питателе. В этом случае  $\lambda_2 = 0$ , а уравнение (14) примет вид:

$$\begin{cases} q'_1 \frac{d\theta_1}{dm} = 1 - \lambda_1\theta_1 + \lambda_1\theta_2, \\ q'_2 \frac{d\theta_2}{dm} = 1 + \mu_1\theta_1 - \mu_1\theta_2, \end{cases} \quad (16)$$

где  $q'_1 = m_Q$ ;  $q'_2 = 0$ ;  $\theta_1$  – среднее время, за которое количество груза в бункере увеличится на  $m$  при условии, что в начальный момент времени надбункерная конвейерная линия работает;  $\theta_2$  – среднее время, за которое количество груза в бункере увеличится на  $m$  при условии, что в начальный момент времени надбункерная конвейерная линия не работает.

При этом начальные условия имеют вид: при  $m = 0$   $\theta_1 = \theta_2 = 0$ .

Решая систему уравнений (16), получим:

$$\theta_1 = \frac{m}{\bar{m}_Q}; \quad \theta_2 = \frac{m}{\bar{m}_Q} + \frac{1}{\mu_1}. \quad (17)$$

Полагая в последнем равенстве  $m = \gamma(V_{s2} - V_{s1})$ , в результате имеем

$$\theta_1 = \frac{\gamma(V_{s2} - V_{s1})}{\bar{m}_Q}; \quad \theta_2 = \frac{\gamma(V_{s2} - V_{s1})}{\bar{m}_Q} + \frac{1}{\mu_1}. \quad (18)$$

Среднее время загрузки бункера  $t_s$ , т.е. среднее время, в течение которого объем груза в бункере уменьшится от  $V_{s2}$  до  $V_{s1}$  при произвольном начальном состоянии надбункерной конвейерной линии, определим по формуле

$$t_s = P'_1\theta_1 + P'_2\theta_2, \quad (19)$$

где  $P'_1, P'_2$  – вероятность работы и простоя надбункерной конвейерной линии соответственно.

В случае стационарного процесса, т.е. при  $t \rightarrow \infty$   $P_1, P_2$  определяются по формулам

$$P'_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}; \quad P'_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}. \quad (20)$$

Подставляя (18) и (20) в (19), после преобразования получим:

$$t_s = \frac{\gamma(V_{s2} - V_{s1})}{\bar{m}_Q} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu_1)\mu_1}, \quad (21)$$

Для определения времени разгрузки бункера  $t_p$ , т.е. когда включен питатель, необходимо решить уравнение (14).

Однако получение аналитического решения уравнений (14) и (15) связано с большими математическими трудностями. Поэтому сначала получим аналитические решения уравнений (14) для частной задачи при непрерывной работе подбункерной конвейерной линии, т.е. при  $\lambda_2 = 0$ . А затем, используя это решение, получим приближенное решение системы уравнений (14) при  $\lambda_2 \neq 0$ .

Предположим, что в момент, когда объем груза в бункере достигает  $V_{s2}$ , включают питатель, а подбункерная конвейерная линия непрерывно работает, т.е.  $\lambda_2 = 0$ . Тогда система уравнений (14) примет вид:

$$\begin{cases} q'_1 \frac{d\theta'_1}{dm} = 1 - \lambda_1\theta'_1 + \lambda_1\theta'_2, \\ q'_2 \frac{d\theta'_2}{dm} = 1 + \mu_1\theta'_1 - \mu_1\theta'_2, \end{cases} \quad (22)$$

где  $q'_1 = m_Q - Q_n$ ;  $q'_2 = -Q_n$ .

Здесь  $\theta'_1, \theta'_2$  – среднее время, за которое количество груза в бункере уменьшается на  $m$  (т) при условии, что в начальный момент надбункерная конвейерная линия работает и не работает соответственно. Решая систему

уравнений (22) при начальных условиях  $m = 0$ ,  $\theta'_1 = \theta'_2 = 0$  и полагая  $m = \gamma(V_{32} - V_{31})$ , в результате получим:

$$\theta'_1 = \frac{\gamma(V_{32} - V_{31})}{(Q_n - \bar{m}_Q)} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu_1)^2} \cdot \frac{Q_n m_Q}{(Q_n - \bar{m}_Q)^2} \times \left[ 1 - e^{-\frac{\gamma(V_{32} - V_{31})(\lambda_1 + \mu_1)(Q_n - \bar{m}_Q)}{(Q_n - m_Q)Q_n}} \right]; \quad (23)$$

$$\theta'_2 = \frac{\gamma(V_{32} - V_{31})}{(Q_n - \bar{m}_Q)} - \frac{\mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1)^2} \cdot \frac{m_Q(Q_n - m_Q)}{(Q_n - \bar{m}_Q)^2} \times \left[ 1 - e^{-\frac{\gamma(V_{32} - V_{31})(\lambda_1 + \mu_1)(Q_n - \bar{m}_Q)}{(Q_n - m_Q)Q_n}} \right]. \quad (24)$$

Если разгрузка из бункера осуществляется непрерывно ( $\lambda_2 = 0$ ), т.е. без остановок подбункерной конвейерной линии, то время разгрузки бункера будет меньше, чем в случае остановок подбункерной конвейерной линии ( $\lambda_2 \neq 0$ ). Если объем груза в бункере  $V_{32}$  увеличить на объем среднего количества груза, не пропущенного подбункерной конвейерной линией за время ее простоя  $t_n$  в течение времени  $t_p$ , то время разгрузки бункера объемом  $V'_{32}$  при непрерывно работающей подбункерной конвейерной линии ( $\lambda_2 = 0$ ) приблизительно совпадает со средним временем  $t_p$  разгрузки бункера объемом  $V_{32}$ , но с остановками подбункерной конвейерной линии ( $\lambda_2 \neq 0$ ).

Следовательно, если в равенство (23) вместо  $\theta'_1$  подставить  $t_p$ , а вместо  $V_{32}$  подставить  $V'_{32}$ , определенное из выражения

$$V'_{32} = V_{32} + t_n \frac{Q_n}{\gamma}, \quad (25)$$

где  $t_n = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} t_p$  – среднее время простоя подбункерной конвейерной линии в течение времени  $t_p$ , то получим уравнение относительно  $t_p$ :

$$t_p = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot \frac{Q_n}{(Q_n - \bar{m}_Q)} t_p + \frac{\gamma(V_{32} - V_{31})}{(Q_n - \bar{m}_Q)^2} \times \left[ 1 - e^{-\frac{\gamma(V'_{32} - V_{31})(\lambda_1 + \mu_1)(Q_n - \bar{m}_Q)}{(Q_n - m_Q)Q_n}} \right]. \quad (26)$$

где  $V'_{32} = V_{32} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{Q_n}{\gamma} t_p$ .

Последнее уравнение решается методом последовательных приближений. При этом за нулевое приближение принимается значение  $\theta'_1$  из (23), т.е.  $t_p = \theta'_1$ .

Предположим, что разность  $V'_{32} - V_{31}$  – большая величина, тогда из равенства (26), пренебрегая экспонентой в квадратных скобках, получим среднее время загрузки  $t_p$  в виде:

$$t_p = \frac{\theta_p}{\left[1 - \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 + \mu_2)} \cdot \frac{Q_n}{(Q_n - \bar{m}_Q)}\right]}; \quad (27)$$

где

$$\theta_p = \frac{\gamma(V_{32} - V_{31})}{(Q_n - \bar{m}_Q)} + \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \mu_1)^2} \cdot \frac{Q_n m_Q}{(Q_n - \bar{m}_Q)^2}.$$

Подставляя в (13)  $t_s$  и  $t_p$ , определенные соответственно по формулам (21) и (27), а вместо  $V_{32}$  значение  $V'_{32}$ , определенное по формуле (25), получим средний объем груза в бункере  $V_c$  в режиме поддержания в нем объема груза в заданных пределах:

$$V_c = \frac{V_{31}t_s + V'_{32}t_p}{t_s + t_p} + \frac{\bar{m}_Q t_s^2 - (Q_n - \bar{m}_Q)t_p^2}{2\gamma(t_s + t_p)}, \quad (28)$$

где  $V'_{32} = V_{32} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{Q_n}{\gamma} t_p$ .

Подставляя  $V'_{32}$  в (28), с учетом (9), после преобразования получим

$$V_c = \frac{V_{31}t_s + V_{32}t_p}{t_c} + \frac{\bar{m}_Q t_s^2 - (Q_n - \bar{m}_Q)t_p^2}{2\gamma t_c} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \mu_2} \cdot \frac{Q_n}{\gamma} \cdot \frac{t_p^2}{t_c}. \quad (29)$$

На рис. 4 показаны графики зависимости среднего объема груза в бункере от производительности питателя  $Q_n$  при различных значениях интенсивности потока отказов надбункерной конвейерной линии  $\lambda_1 = 0,025; 0,05; 0,1$  мин<sup>-1</sup>. При этом исходные данные принимали значения:  $m_Q = 3,7$  т/ч;  $V_{31} = 4$  м<sup>3</sup>;  $V_{32} = 100$  м<sup>3</sup>;  $\mu_1 = 0,06139$  мин<sup>-1</sup>;  $\lambda_2 = 0,017$  мин<sup>-1</sup>;  $\mu_2 = 0,069$  мин<sup>-1</sup>.

Там же показаны результаты имитационного моделирования.

Из рис. 4 видно, что при увеличении производительности питателя  $Q_n$  средний объем груза в аккумулялирующем бункере  $V_c$  уменьшается и при  $Q_n \rightarrow \infty$  средний объем груза в бункере  $V_c \rightarrow \frac{V_{31} + V_{32}}{2} = 52$  м<sup>3</sup>. Кроме того, при увеличении интенсивности отказов надбункерной конвейерной линии  $\lambda_1$  средний объем  $V_c$  уменьшается.

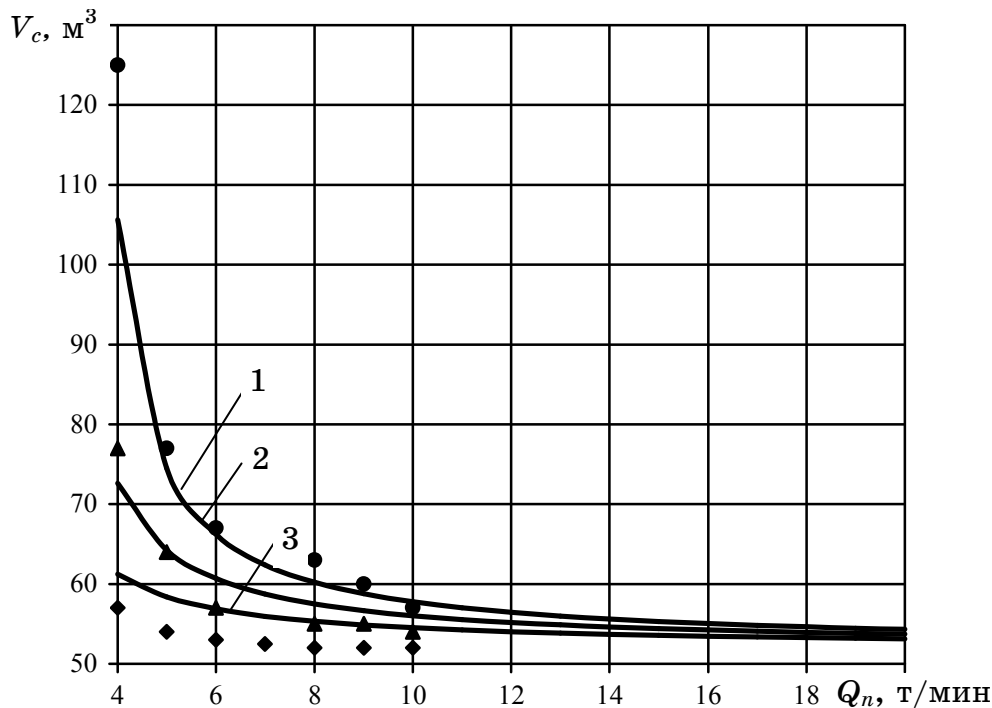


Рисунок – 4. График зависимости  $V_c$  от  $Q_n$  при различных значениях  $\lambda_1$ :  
теоретические кривые:

1 –  $\lambda_1 = 0,025 \text{ мин}^{-1}$ ; 2 –  $\lambda_1 = 0,05 \text{ мин}^{-1}$ ; 3 –  $\lambda_1 = 0,1 \text{ мин}^{-1}$ ;  
результаты имитационного моделирования:

• –  $\lambda_1 = 0,025 \text{ мин}^{-1}$ ; ▲ –  $\lambda_1 = 0,05 \text{ мин}^{-1}$ ; ◆ –  $\lambda_1 = 0,1 \text{ мин}^{-1}$

Следовательно, на основе кусочно-марковских процессов разработана математическая модель процесса функционирования аккумулирующего бункера, работающего в режиме поддержания объема груза в заданных пределах. Получено приближенное аналитическое решение задачи о среднем объеме груза в бункере, которая с достаточной точностью совпадает с результатами имитационного моделирования.

На основе полученных результатов исследований установлено, что с увеличением производительности питателя средний объем груза в бункере уменьшается и при больших значениях  $Q_n \rightarrow \infty$  стремится к полусумме максимального и минимального заданных объемов груза в бункере.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кирия Р. В. Математическая модель функционирования аккумулирующего бункера конвейерных линий угольных шахт / Р. В. Кирия // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 2(79). – Дніпропетровськ, 2012. – С. 152–161.
2. Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы / Р. А. Ховард. – М.: Советское радио, 1964. – 192 с.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: КНОРУС, 2010. – 480 с.
4. Гнеденко Б. В. Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
5. Кирия Р. В. Имитационные модели функционирования усредняющих и аккумулирующих бункеров конвейерных линий угольных шахт / Р. В. Кирия, Д. Д. Брагинец, Т. Ф. Мищенко // Геотехническая механика. – Днепропетровск: ИГТМ НАНУ. – 2008. – № 77. – С. 100–109.

## ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ДЕФЕКТОВ ПОДШИПНИКОВ НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНОГО ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

*Данная работа посвящена оценке эффективности методов диагностированию поврежденных подшипников, а также контроля состояния объектов роторного типа в аварийные и прежде всего в предаварийные периоды их работы на основе многомерного фрактального анализа. С учетом предположения о самоподобности процессов, протекающих в нормально функционирующем объекте, рассматривается задача диагностирования поврежденных подшипников с использованием методов RS-анализа и максимума моделей вейвлет – преобразования (ММВП).*

*Ключевые слова: ФРАКТАЛ, МУЛЬТИФРАКТАЛ, ДИАГНОСТИКА.*

*Дана робота присвячена оцінці ефективності методів діагностування пошкоджень підшипників, а також контролю стану об'єктів роторного типу в аварійні і перш за все в предаварійні періоди їх роботи на основі багатовимірного фрактального аналізу. З урахуванням припущення про самоподібність процесів, що протікають в нормально функціонуючому об'єкті розглядається задача діагностування пошкоджень підшипників з використанням методів RS-аналізу та максимуму моделей вейвлет - перетворення (ММВП).*

*Ключові слова: ФРАКТАЛ, МУЛЬТИФРАКТАЛА, ДІАГНОСТИКА.*

*This paper is devoted to assessing the effectiveness of methods for diagnostics of bearing damage, as well as monitoring of rotary-type objects into emergency and especially in times of near misses of their work based on the multidimensional fractal analysis. Based on the assumption of self-similarity of processes in normal operating facilities, the problem of diagnostics bearing damage using techniques RS-analysis models and maximum wavelet - transformation (WTMM).*

*Keywords: FRACTAL, MULTIFRACTAL, DIAGNOSTICS.*

### Введение

Поиск эффективных методов для контроля состояния объектов управления роторного типа (двигатели, энергоустановки и т.д.) в аварийные и прежде всего в предаварийные периоды их работы, попрежнему является актуальным [1]. Особенно это важно для обеспечения бесперебойного функционирования оборудования предприятий непрерывного цикла такого как, например, прокатные станы в металлургии, горнотранспортные системы, автоматизированные линии в машиностроении и т. п.

В данной работе с учетом предположения о самоподобности процессов, протекающих в нормально функционирующем объекте рассматривается задача диагностирования поврежденных подшипников с использованием методов нормированного RS-анализа и максимума моделей вейвлет – преобразования. Обработываемые вибрационные сигналы получены с

помощью акселерометра, установленного со стороны привода двигателя в позиции зоны нагрузки подшипника вала.

Целью исследования является оценка эффективности методов диагностирования поврежденных подшипников качения и сравнение данных методов обработки между собой. В качестве исходных данных использовались сигналы, снятые с объекта без повреждений и с тестовых подшипников со специально нанесенными точечными дефектами, отдельно на внутреннюю дорожку качения, на элемент качения (т.е. шарик) и на внешнюю дорожку качения размером 0.007, 0.014 и 0.021 дюймов в диаметре электроэрозионным способом. Данные измерялись с частотами дискретизации 12 кГц и 48 кГц [2].

### Метод R/S – анализа

Пусть  $X(t)$  - исследуемая временная зависимость некоторой величины  $X$ , измеренной в дискретные целочисленные моменты времени  $t$ . Представим себе, что  $X$  является некоторой накопленной величиной и может быть представлена как сумма некоторых элементарных вкладов  $\xi(t)$ . Например, если  $X$  - координата броуновской частицы, то  $\xi$  - это элементарные смещения флуктуации такой частицы.

Рассмотрим поведение величин  $X$  и  $\xi$  в некотором ограниченном интервале времени  $t \in [1; \tau]$ . Для этого интервала времени можно вычислить среднюю величину приращений  $\xi$ :

$$\langle \xi \rangle_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t). \quad (1)$$

Одновременно можно построить новую величину  $X(t, \tau)$ , которая будет иметь смысл накопленных отклонений от среднего за данный период:

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{ \xi(u) - \langle \xi \rangle_{\tau} \}. \quad (2)$$

при  $X(1, \tau) = X(\tau, \tau) = 0$ .

Введем размах  $R(\tau)$  как максимальное отклонение  $X(t, \tau)$  за рассматриваемый интервал времени:

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau). \quad (3)$$

Тогда для анализа фрактальной размерности  $D$  исходной кривой  $X(t)$  достаточно построить эмпирическую зависимость Херста (5), безразмерного отношения  $R/S$  от величины временного интервала  $\tau$ , где  $S$  - среднеквадратическое отклонение  $\xi$  от среднего за тот же интервал времени:

$$S(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{ \xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau} \}^2}. \quad (4)$$



$$M \left[ \frac{R(\tau)}{S(\tau)} \right] \sim \lambda \tau^H, \quad (5)$$

где  $M$  – математическое ожидание,  $\lambda = \text{const} > 0$ ,  $H$  - показатель Херста.

При этом фрактальная размерность:

$$D = 2 - H. \quad (6)$$

Таким образом, для определения фрактальной размерности  $D$  исследуемого процесса необходимо построить нормированную зависимость  $R(\tau)/S(\tau)$  в двойном логарифмическом масштабе и провести линейную аппроксимацию. Тангенс угла наклона  $\beta$  непосредственно даст значение показателя Херста  $H = \beta$ , связанного с величиной фрактальной размерности  $D$  соотношением (6).

В изложенном выше алгоритме метода нормированного R/S – анализа зависимости  $R(\tau)$  и  $S(\tau)$  всегда рассчитываются только для начального интервала времени  $\tau$ . Вместе с тем метод может быть усовершенствован, если проводить усреднение  $R(\tau)$  и  $S(\tau)$  по нескольким временным окнам продолжительностью  $\tau$ , взятым в разных положениях на анализируемой кривой  $X(t)$  [3].

#### Метод максимумов модулей вейвлет – преобразования

Алгоритм ММВП предусматривает проведение исследования нерегулярного поведения функции  $g(x)$  в два этапа. На первом этапе осуществляется прямое вейвлет-преобразование по формуле:

$$W(a, x_0) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi\left(\frac{x - x_0}{a}\right) g(x) dx. \quad (7)$$

Результат вейвлет-преобразования интерпретируется как поверхность в трехмерном пространстве (рис. 1а). При этом важная информация содержится в скелетоне, или линиях локальных экстремумов поверхности коэффициентов  $W(a, x)$ , поиск которых проводится на каждом масштабе  $a$  (рис. 1б).

Выбор базисной вейвлет-функции определяется тем, какую информацию необходимо получить из сигнала  $g(x)$ . Необходимым условием является то, чтобы выбранный вейвлет был бы не менее широкополосным, чем анализируемый сигнал. При этом относительно выбора параметра  $m$

для  $m$ -вейвлета в  $\Psi^{(m)} = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left[ \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right]$  следует отметить, что, с

одной стороны, увеличение  $m$  позволяет проигнорировать крупномасштабные полиномиальные составляющие (устранить тренд) и анализировать мелкомасштабные вариации данной функции, с другой стороны, многократное дифференцирование приводит к увеличению числа линий локальных экстремумов вейвлет - коэффициентов и появлению большого количества дополнительных линий, обрывающихся на малых

масштабах. Такие линии являются слишком короткими для того, чтобы

$$W(a, x_0) \sim a^{h(x_0)}$$

проводить по ним оценки степенных зависимостей вида  $W(a, x_0) \sim a^{h(x_0)}$ , и представляют собой помехи при проведении численного анализа сингулярностей, исследуемого сигнала  $g(x)$ .

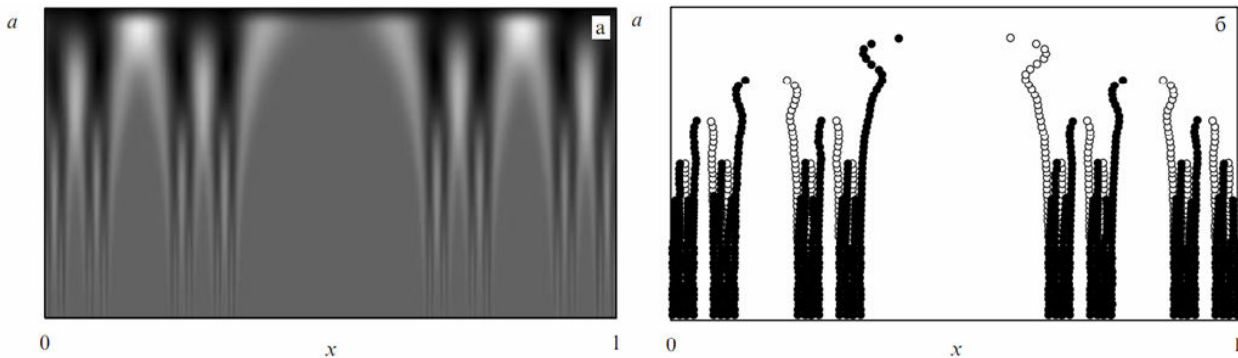


Рисунок 1 - (а) Результат вейвлет - преобразования в проекции на плоскость  $aOx$ : большие значения вейвлет - коэффициентов  $W(a, x)$  соответствуют более темным участкам. (б) Линии локальных экстремумов поверхности коэффициентов  $W(a, x)$ : минимумов (светлые кружки) и максимумов (темные кружки)

Известно, что вейвлет - преобразование характеризуется регулярной функцией  $W(a, x_0)$  даже при нерегулярности исследуемого сигнала  $g(x)$ . При этом вся информация о возможной особенности  $g(x)$ , включая ее локализацию  $x_0$  и показатель  $h(x_0)$ , отражается в асимптотическом поведении коэффициентов  $W(a, x_0)$  при малых масштабах  $a$ . Если коэффициенты на малых масштабах расходятся, то функция  $g(x)$  имеет особенность в  $x_0$  и экспонента Гельдера  $h(x_0)$  может быть определена путем представления зависимости  $W(a, x_0) \sim a^{h(x_0)}$  в двойном логарифмическом масштабе и вычисления наклона зависимости  $\ln Z(q, a) / (\ln a)$ . Если коэффициенты  $W(a, x_0)$  близки к нулю в окрестности  $x_0$  на малых масштабах, то функция  $g(x)$  является регулярной в этой точке.

Следует обратить внимание на такое важное обстоятельство при расчете гельдеровских экспонент, которое состоит в требовании теоретической независимости искомым характеристик от выбора базисных функций вейвлет - преобразования. Последнее позволяет говорить, в некотором смысле, об универсальности анализа локальных нерегулярностей (хотя разложение по вейвлетам, разумеется, зависит от выбранного базиса).

Выделением скелетона заканчивается первый шаг алгоритма ММВП. Анализ выделенных линий локальных экстремумов или локальных максимумов модулей вейвлет - преобразования теоретически позволяет вычислять гельдеровские экспоненты, т.е. анализировать сингулярности исследуемого процесса  $g(x)$ . Однако такой подход  $h(x_0)$  является неточным - при увеличении масштаба сказывается влияние соседних нерегулярностей, что приводит к различным ошибкам. В многомерном фрактальном анализе проводят расчеты на основе так называемых обобщенных частичных сумм

$Z(q, a)$ , позволяющих получать более надежные оценки характеристик исследуемых процессов [4]. Отсюда второй шаг метода ММВП заключается в построении обобщенных частичных сумм по формуле

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} |W(a, x_l(a))|^q, \quad (8)$$

где  $L(a)$  - множество всех линий ( $l$ ) локальных максимумов модулей вейвлет-коэффициентов, существующих на масштабе  $a$ ;  $x_l(a)$  характеризует положение на этом масштабе максимума, относящегося к линии  $l$ . В данном случае принципиальным моментом, обеспечивающим устойчивость метода, является то, что рассматриваются модули вейвлет-коэффициентов. Без этого (с учетом информации о фазах) метод не позволил бы получить устойчивое решение, поскольку в общем случае вычисление максимумов может создавать проблемы, связанные с устойчивостью метода. В то же время сама процедура вейвлет-преобразования подразумевает вычисление коэффициентов в пределах частотно - временного окна, что автоматически обеспечивает усреднение. Из этого следует, что формула (8) не подходит для отрицательных значений  $q$ , поскольку возможна ситуация, в которой  $W(a, x_l(a))=0$ . В этой связи на практике используется другая формула:

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left( \sup_{a' \leq a} |W(a', x_l(a'))| \right)^q, \quad (9)$$

т.е. выбирается максимальное значение модуля коэффициентов вейвлет-преобразования вдоль каждой линии на масштабах, меньших заданного значения  $a$ . Выполняется следующая зависимость:

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad (10)$$

где величину  $\tau(q)$ , которая определяется для некоторого значения  $q$  путем вычисления наклона зависимости  $\ln Z(q, a) / (\ln a)$ , называют *скейлинговой экспонентой*. В свою очередь, вариация степеней  $q$  при построении частичных сумм (9) позволяет получить линейную зависимость для монофрактальных объектов ( $H=d\tau/dq=const$ ) и нелинейную зависимость  $\tau(q)=qh-D(h)$  с большим числом гёльдеровских экспонент  $h(q)=d\tau/dq \neq const$  в случае мультифракталов. С другой стороны, известно [4]:

$$Z(q, a) \sim a^{(q-1)D_q}. \quad (11)$$

Тогда  $\tau(q) = (q-1)D_q$ .

Здесь  $D_q$  – обобщённая фрактальная размерность [5].

При некоторых значениях  $q$  скейлинговые экспоненты  $\tau(q)$  имеет простую интерпретацию. Так, существует взаимосвязь между  $\tau(2)$  и показателем степени  $\beta$  функции спектральной плотности мощности  $S(f) \sim 1/f^\beta$  исследуемого сигнала с частотой  $f=1/T$ :

$$\beta=2+\tau(2). \quad (12)$$

При этом известно, что спектральная плотность мощности связана с автокорреляционной функцией преобразованием Фурье. Отсюда по известным  $\beta$  можно определить скорость спада корреляций  $\psi(\tau) \sim \tau^\gamma$ , т.е. показатель  $\gamma$  [4].

**Спектр сингулярности**  $f(a)$  можно вычислить при помощи масштабируемого показателя  $\tau(q)$  из обобщенных частичных функций  $Z(q,a)$ . В случае, если  $\tau(q)$  является непрерывно дифференцируемой функцией, то можно записать следующее соотношение [5]:

$$\begin{cases} q = \frac{df}{da}, \\ \tau(q) = q\alpha - f(\alpha). \end{cases} \quad (13)$$

С другой стороны соотношение (13) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{d\tau}{dq}, \\ f(\alpha) = q\alpha - \tau(q) \end{cases} \quad (14)$$

В отличие от метода структурных скелетонных функций, основанный на вейвлет-преобразовании мультифрактальный анализ позволяет исследовать сингулярности при отрицательных значениях  $q$ . При этом обобщенные частичные функции  $Z(q,a)$  при  $q < 0$  характеризуют особенности скейлинга для слабых сингулярностей (малых флуктуаций), а при  $q > 0$  – для сильных сингулярностей (больших флуктуаций) [4].

**Практическая часть.** Рассмотрим применение вышеизложенных методов для технического диагностирования подшипников.

## 1. Метод R/S – анализа

### 1.1 Анализ данных, измеренных с частотой дискретизации 12 кГц:

Испытания объекта без повреждений подшипника (рис. 2а).

В результате расчета коэффициента Херста получено:

$$H=0.5273.$$

Коэффициент Херста находится в пределах  $0.5 < H < 1$ , что говорит о персистентности исследуемого процесса.

Зная коэффициент Херста, можно найти фрактальную размерность:

$$D=2-0.5273=1.4721.$$

Испытания объекта при повреждении подшипников с размером  $0.007''$  (рис. 2б).

$$H=0.3621; D=1.6379.$$

Коэффициент Херста находится в пределах  $0 < H < 0.5$ . Это говорит о антиперсистентности процесса, что характеризует объекта с хаотичной дискретизацией.

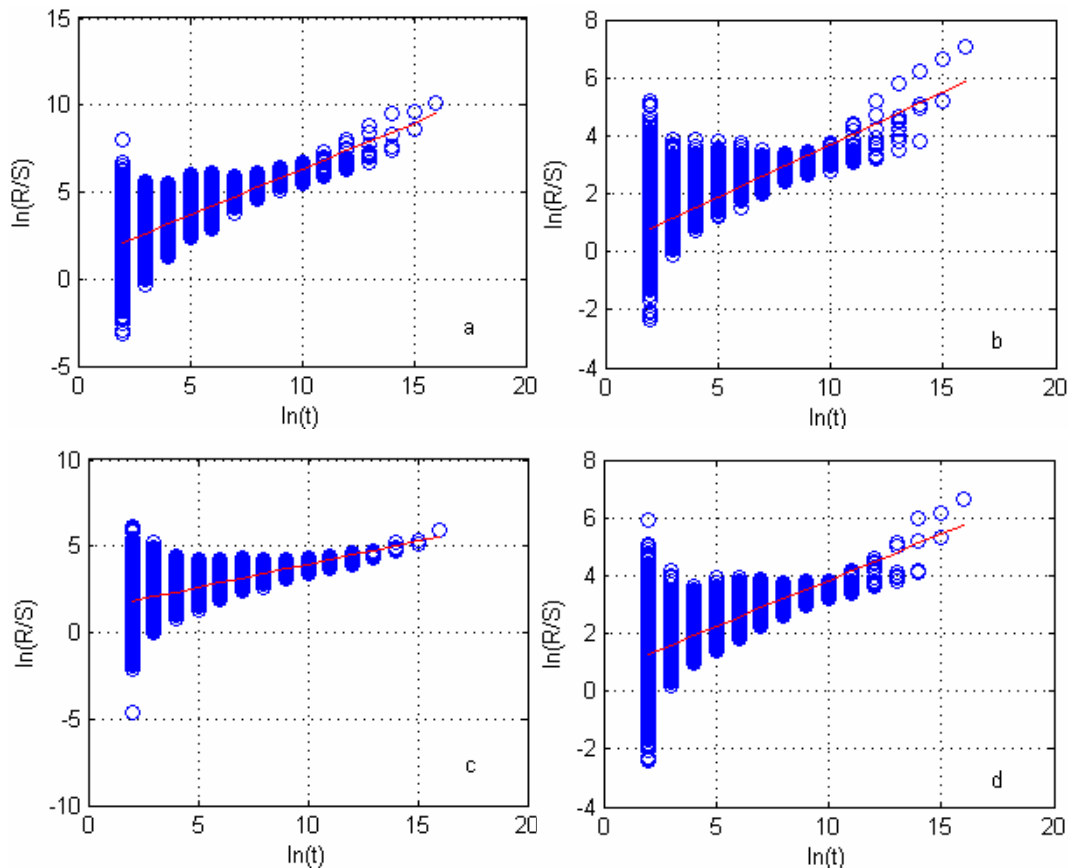


Рисунок 2 - Зависимости  $\ln(R/S)$  от  $\ln(t)$  при различных повреждениях подшипника исследуемого объекта; (а) Испытания объекта без повреждений подшипника; (б) Испытания объекта при повреждении шарика подшипника с дефектом размером  $0.007''$ ; (с) Испытания объекта при повреждении шарика подшипника с дефектом размером  $0.014''$ ; (d) Испытания объекта при повреждении шарика подшипника с дефектом размером  $0.021''$

Испытания объекта при повреждении подшипников с размером  $0.014''$  (рис. 2с).

$$H=0.2691; D=1.7309.$$

С увеличением повреждения до  $0.014''$ , значение коэффициента Херста стало еще меньше, т.е. возрастает хаотичность процесса, фрактальная размерность выше. Чем ближе фрактальная размерность к двум, тем ниже степень самоподобности сигнала и в большей степени наблюдается хаотичность объекта.

Испытания объекта при повреждении подшипников размером  $0.021''$  (рис. 2d).

$$H=0.3198; D=1.6802.$$

Испытания объекта при повреждениях различных элементов подшипника сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Испытания объекта при частоте дискретизации 12 кГц

Размер повреждения, [дюйм]	Фрактальная размерность $D$ при повреждении шарика	Фрактальная размерность $D$ при повреждении внутренней дорожки качения	Фрактальная размерность $D$ при повреждении внешней дорожки качения
0''	1.4721	1.4721	1.4721
0.007''	1.6379	1.7706	1.7263
0.014''	1.7309	1.7299	1.6781
0.021''	1.6802	1.7503	1.7463

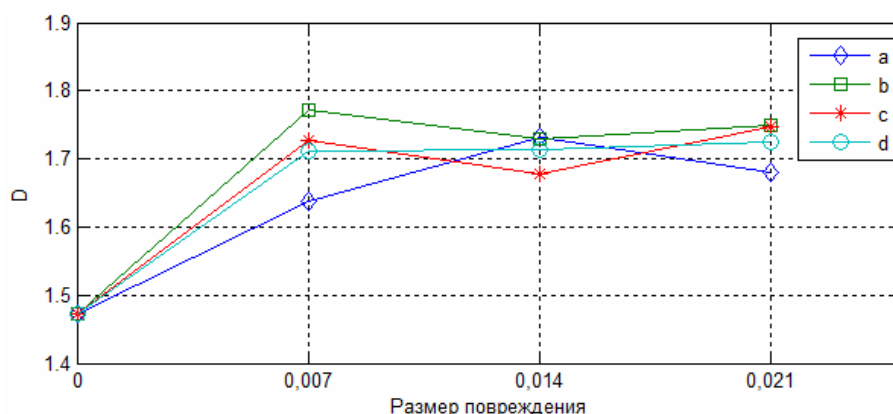


Рисунок 3 – Зависимость фрактальной размерности от размера повреждения при частоте дискретизации 12 кГц; (а) Фрактальные размерности при повреждении шарика; (б) Фрактальные размерности при повреждении внутренней дорожки качения; (с) Фрактальные размерности при повреждении внешней дорожки качения; (д) Среднеарифметическая фрактальная размерность повреждений подшипника

**1.2 Анализ данных измеренных с частотой дискретизации 48 кГц**

Таблица 2

Испытания объекта при повреждениях с частотой дискретизации 48 кГц

Размер повреждения, [дюйм]	Фрактальная размерность $D$ при повреждении шарика	Фрактальная размерность $D$ при повреждении внутренней дорожки качения	Фрактальная размерность $D$ при повреждении внешней дорожки качения
0''	1.4317	1.4317	1.4317
0.007''	1.5478	1.6413	1.7487
0.014''	1.6291	1.4735	1.4993
0.021''	1.5799	1.7162	1.6662

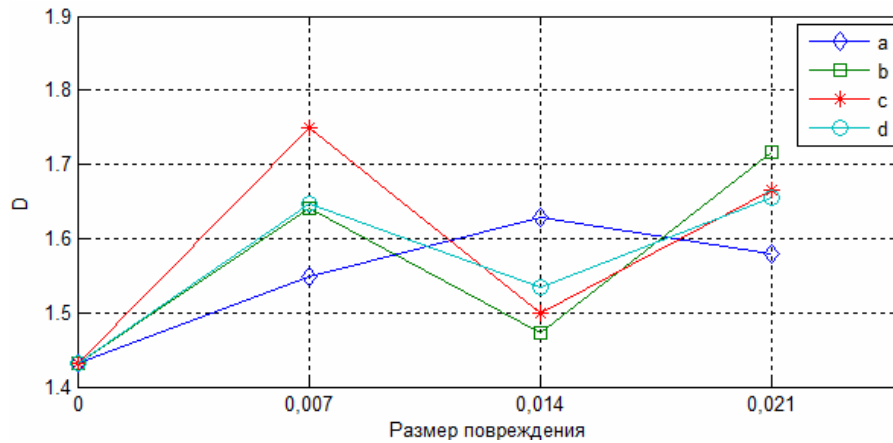


Рисунок 4 – Зависимость фрактальной размерности от размера повреждения при частоте дискретизации 48 кГц; (а) Фрактальные размерности при повреждении шарика; (б) Фрактальные размерности при повреждении внутренней дорожки качения; (с) Фрактальные размерности при повреждении внешней дорожки качения; (д) Среднеарифметическая фрактальная размерность повреждений подшипника

## 2. Метод максимумов модулей вейвлет – преобразования

### 2.1 Анализ данных, измеренных с частотой дискретизации 12 кГц:

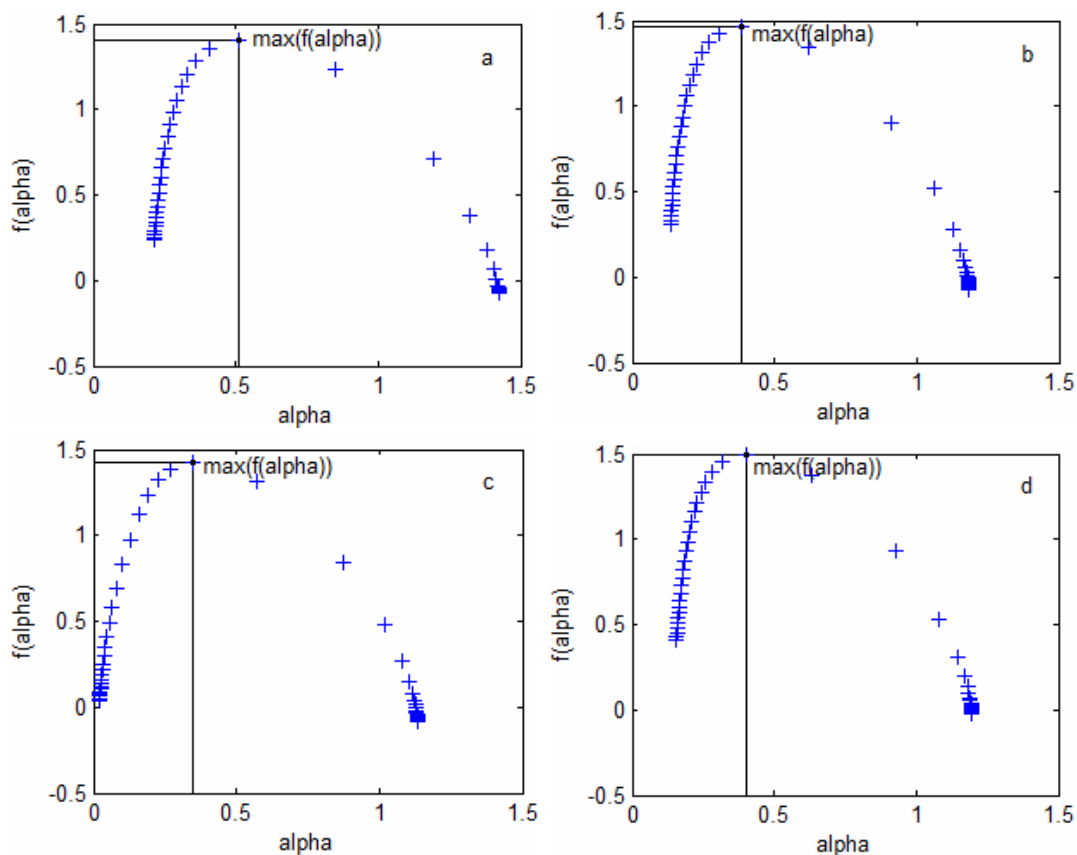


Рисунок 5 – Спектры сингулярностей; (а) Испытания двигателя без повреждений; (б) Испытания объекта при повреждении шарика подшипника с 0.007''; (с) Испытания объекта при повреждении шарика подшипника с 0.014''; (д) Испытания объекта при повреждении шарика подшипника с 0.021''

Таблица 3

Испытания объекта при частоте дискретизации 12 кГц

Размер повреждения, [дюйм]	Фрактальная размерность $D$ при повреждении шарика	Фрактальная размерность $D$ при повреждении внутренней дорожки качения	Фрактальная размерность $D$ при повреждении внешней дорожки качения
0''	1.4077	1.4077	1.4077
0.007''	1.4694	1.4522	1.5317
0.014''	1.4263	1.4594	1.4655
0.021''	1.4966	1.4561	1.4809

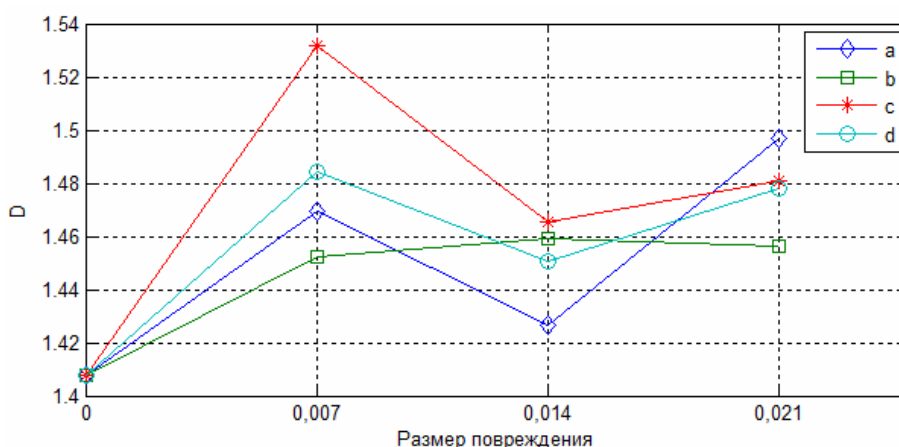


Рисунок 6 – Зависимость фрактальной размерности от размера повреждения при частоте дискретизации 12 кГц; (а) Фрактальные размерности при повреждении шарика; (б) Фрактальные размерности при повреждении внутренней дорожки качения; (с) Фрактальные размерности при повреждении внешней дорожки качения; (д) Среднеарифметическая фрактальная размерность повреждений подшипника

## 2.2 Анализ данных, измеренных с частотой дискретизации 48 кГц:

Таблица 4

Испытания двигателя при повреждениях с частотой дискретизации 48 кГц

Размер повреждения, [дюйм]	Фрактальная размерность $D$ при повреждении шарика	Фрактальная размерность $D$ при повреждении внутренней дорожки качения	Фрактальная размерность $D$ при повреждении внешней дорожки качения
0''	1.3470	1.3470	1.3470
0.007''	1.3544	1.3368	1.3545
0.014''	1.3587	1.3621	1.3595
0.021''	1.3773	1.3660	1.3654



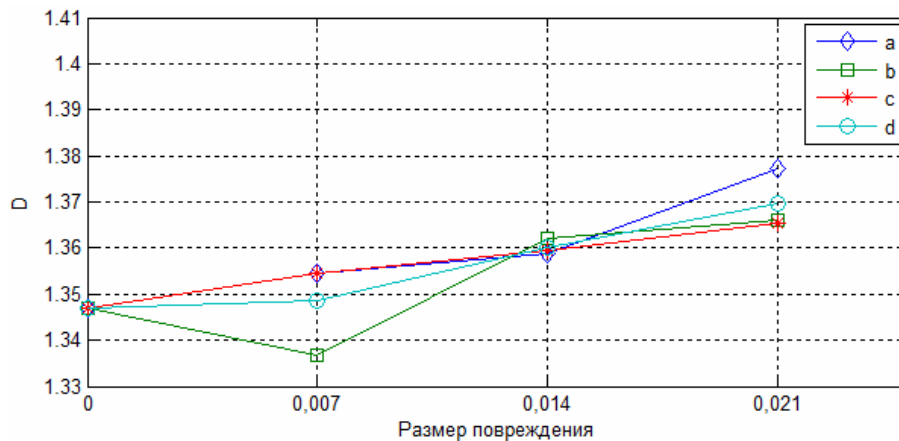


Рисунок 7 – Зависимость фрактальной размерности от размера повреждения при частоте дискретизации 48 кГц; (а) Фрактальные размерности при повреждении шарика; (б) Фрактальные размерности при повреждении внутренней дорожки качения; (с) Фрактальные размерности при повреждении внешней дорожки качения; (d) Среднеарифметическая фрактальная размерность повреждений подшипника

### Выводы

Методы фрактального вейвлет – анализа позволяют вычислить предел предсказуемости, характеризующий внутреннее свойство динамической системы, связанное с неустойчивостью, хаотичностью, затуханием корреляций и её диссипативными свойствами, т.е. определяют текущее состояние системы. Вычисления коэффициента Херста показывают, что сигнал, измеренный на подшипниках, без повреждений относится к персистентным процессам. В то же время результаты исследования показали, что значение фрактальности меняется в соответствии с размером повреждений подшипников. Это значит, что с помощью метода Херста и метода ММВП можно выявить степень дефектности подшипника. По полученным результатам видно, что результаты имеют одинаковый характер при разных частотах дискретизации 12 и 48 кГц. В свою очередь, это лишь дополнительным образом доказывает самоподобность системных процессов. Частота дискретизации по сути это масштаб, а как известно, фрактальная размерность на разных масштабах сохраняется. Метод R/S – анализа показал подобные результаты выявления дефектов, что таким же образом, доказывает корректность применения фрактальных методов для технического диагностирования повреждения подшипников.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Михалёв А.И., Журавлев В.Н., Сухомлин Р.А. Комбинированный метод анализа сигналов на основе Гильберта-Хуанга и вейвлет-преобразований в задаче диагностики дефектов подшипников // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. - Выпуск 1 (78). - Днепропетровск, 2012. – С. 165-177.
2. Case Western Reserve University Bearing Data Center. Seeded Fault Test Data [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://csegroups.case.edu/bearingdatacenter/pages/welcome-case-western-reserve-university-bearing-data-center-website>.

3. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. Методические заметки. Екатеринбург. - 2004. – С. 60 – 62.
4. Павлов А.Н., Анищенко В.С. Мультифрактальный анализ сложных сигналов. Методические заметки. – Успехи физических наук. – 2007. – С. 859 – 876.
5. Muzy J.F., Bacry E, Arneodo A. The multifractal formalism revisited with wavelets. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 4, No. 2 – 1994. pp. 245-302.