

DOI: 10.34185/1991-7848.2026.01.17

УДК 621.7:004.94

Д.О. Редчиць, С.В. Моїсеєнко, Д.С. Адаменко, К.В. Кремнева, О.В. Акіменко

**ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ
ВДОСКОНАЛЕННЯ ПРОЦЕСУ СЕЛЕКТИВНОГО ЛАЗЕРНОГО
ПЛАВЛЕННЯ ДЛЯ 3D-ДРУКУ**

***Анотація.** Актуальність дослідження зумовлена необхідністю підвищення точності прогнозування процесів селективного лазерного плавлення металевих порошків в адитивному виробництві. Метою роботи є розробка узагальненої фізико-математичної моделі та ефективного чисельного алгоритму з урахуванням теплообміну, гідродинаміки та еволюції вільної поверхні. Використано метод скінченних об'ємів і ітераційний розрахунковий блок GMRES. У результаті отримано розподіл поля температури в розрахунковій області з виділенням зони ліквідусу. Побудовано залежності ширини та глибини ванни розплаву від швидкості руху лазера та діаметру лазерної плями. Зроблено висновок про адекватність моделі та її придатність для інженерних розрахунків.*

***Ключові слова:** Математичне моделювання, адитивні технології, 3D-друк, вибіркоче лазерне плавлення (SLM), лазерне плавлення порошкового слою (LPBF), обчислювальна гідрогазодинаміка.*

Постановка проблеми

Загальна фізична постановка задачі селективного лазерного плавлення металевих порошків включає в себе розгляд процесів теплообміну порошку і ванни розплаву; гідродинаміки розплаву з виділенням фронту кристалізації; ефекти Марангоні, що виникають на поверхні розділу рідкої та газоподібної фаз; теплового впливу лазерного променя на поверхню порошку та розплаву (врахування абсорбції та відображення); випаровування продуктів плавлення (формування металевої пари), тиску віддачі при випаровуванні металу та теплового випромінювання з поверхні, фазових переходів з урахуванням питомої теплоти плавлення та пароутворення, формування пор у виробі, а

© Редчиць Д.О., Моїсеєнко С.В., Адаменко Д.С., Кремнева К.В., Акіменко О.В., 2026 Copyright for this paper by its authors. Use permitted under License CC BY 4.0.

також урахування дискретності порошкового шару та розбризкування рідкого металу з ванни розплаву.

Прийняті припущення та обмеження

Селективне лазерне плавлення порошоків є складним багатофазним процесом, що включає перехід між твердою, рідкою та газоподібною фазами. В даній роботі для спрощення математичної моделі зроблено такі припущення та обмеження [9].

- Розплавлений метал є ньютонівською стисливою рідиною.
- Режими течії вважаються ламінарними.
- Лазер є безперервним гаусівським джерелом енергії.
- Поглинаюча здатність металу вважається постійною.
- Втратами маси при випаровуванні металу нехтують в силу їхньої малості.
- Формування плазми не розглядається.
- Взаємодія лазера з випареним металом не розглядається
- Хімічні реакції у ванні розплаву є незначними.
- Фізичні властивості металів ізотропні та залежать від зміни температури.
- Для моделювання впливу відхилення густини на потік використовується наближення Бусінеска.
- Не враховується перерозподіл частинок порошку в околі ванни розплаву в силу ефекту денудації.
- Не враховується динаміка потоку газу, що виникає під час випаровування металу з поверхні розплаву.
- Взаємодія металевого порошку та ванни розплаву з інертним газом (аргоном) не розглядаються у явному вигляді.
- Адсорбція газу із навколишнього середовища не розглядається.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Математична модель, що розробляється, з одного боку, повинна враховувати основні фізичні процеси, що відбуваються, а з іншого боку, бути достатньо компактною для реалізації на сучасних персональних комп'ютерах [오류! 참조 원본을 찾을 수 없습니다.,2].

Аналіз наукової проблеми показав, що для коректного моделювання селективного лазерного плавлення необхідно враховувати наступні ключові аспекти: тепловий вплив лазерного променя на поверхню порошку та

розплаву; теплообмін порошку та ванни розплаву; термокапілярну конвекцію; випаровування продуктів плавлення з поверхні ванни розплаву; теплові втрати з поверхні на випромінювання та конвекцію; поглинання та виділення прихованого тепла фазового переходу; динаміку рідкої фази з виділенням фронту кристалізації; адсорбцію газу з навколишнього середовища; розбризкування/розсіювання частинок рідкого та твердого металу; тиск віддачі газу; силу тяжіння та поверхневого натягу; змочування.

Для надійної роботи SLM-обладнання та виготовлення якісних виробів необхідно створення ефективного, надійного та ретельно верифікованого програмного забезпечення для розв’язку зв’язаних задач термодинаміки ванни розплаву й інертного газу, а також їх взаємодії з металевим порошком.

Складні фізичні процеси, що відбуваються при селективному лазерному плавленні металевих порошоків, є тривимірними та нестационарними. Фізичні явища протікають у широкому діапазоні часових та просторових масштабів на різних фазах процесу від формування шару порошку до плавлення та затвердіння [3-5].

Надзвичайно високі швидкості нагрівання та охолодження викликають безліч динамічних та перехідних явищ у процесах LPBF, включаючи плавлення та часткове випаровування порошоків, течію розплавленого металу, викид та перерозподіл порошку, швидке затвердіння та нерівноважні фазові переходи [6-8].

Для моделювання динаміки ванни розплаву застосовуються чисельні підходи на основі: методу ґратчастих рівнянь Больцмана (Lattice Boltzmann Method – LBM); методу гідродинаміки згладжених часток (Smoothed Particle Hydrodynamics – SPH); моделей обчислювальної гідродинаміки (Computational Fluid Dynamics – CFD).

Метод ґратчастих рівнянь Больцмана не розв’язує безпосередньо рівняння Нав’є-Стокса, а моделює потік ньютонівської рідини дискретним кінетичним рівнянням Больцмана [10]. Методи ґратчастих рівнянь Больцмана мають нестійку поведінку на границі рухливих тіл. Крім того, розщеплення за фізичними процесами, що використовується в даному підході, призводить до першого порядку точності простору апроксимації конвективних доданків.

Перший порядок призводить до похибки апроксимації, зіставної з другими похідними (в'язкість, теплопровідність).

Метод гідродинаміки згладжених частинок є безсітковим, у якому середовище представлено великим набором фіктивних лагранжових частинок, кожна з яких визначається локальною функцією. Застосовуються стандартні фізичні рівняння, які розкладаються на взаємодії між сусідніми «частинками». Одним із недоліків SPH методу в порівнянні з сітковими методами є необхідність використання великої кількості частинок для якісного моделювання гідродинамічних течій.

Методи обчислювальної гідродинаміки засновані на розв'язанні нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса стисливого газу або нестисливої рідини, які є системою нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. Для моделювання вільної поверхні спільно з рівняннями Нав'є-Стокса застосовується метод об'єму рідини (VOF) або метод набору рівнів (LSM), які відносяться до класу ейлерових методів [11,13].

Мета дослідження

Метою дослідження є формулювання загальної постановки проблеми дослідження теплообміну та динаміки ванни розплаву з урахуванням вільної поверхні при взаємодії з лазерним променем з метою моделювання процесів селективного лазерного плавлення металевих порошків., а також розроблення чисельного алгоритму розв'язання вихідних рівнянь, який базується на тришаровій неявній схемі, що має другий порядок точності інтегрування за часом, третій порядок протипотокової апроксимації конвективних доданків, і другий порядок центрально-різницевої апроксимації дифузійних членів.

Викладення основного матеріалу дослідження

Математична постановка задачі селективного лазерного плавлення металевих порошків

З урахуванням прийнятих припущень загальна математична постановка задачі селективного лазерного плавлення металевих порошків зводиться до постановки окремих структурно зв'язаних між собою задач. А саме, таких як:

– задача про нестационарний теплообмін з урахуванням фазових переходів (плавлення порошкового матеріалу та подальша кристалізація

розплаву при охолодженні) при нагріванні металевих порошків рухомим лазерним променем;

– задача про динаміку рідкого металу в ванні розплаву з урахуванням об'ємних і поверхневих сил;

– задача про визначення нестационарної форми вільної поверхні ванни розплаву за наявності тиску віддачі, а також виникнення пор і розбризкування рідкого металу.

Моделювання вільної поверхні

Положення поверхні ванни розплаву априорі невідоме. Для відстеження положення та форми поверхні ванни розплаву (вільної поверхні) використовується метод об'єму рідини (VOF). Метод VOF вловлює межу розділу між двома фазами, що не змішуються, тобто межу між металом й інертним газом. Даний метод заснований на розв'язанні скалярного рівняння переносу для об'ємної частки рідини в комірці γ у вигляді [13]

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla(u \cdot \gamma) = 0,$$

де γ – фазова частка, яка позначає відношення об'єму, що займає металева фаза V_{metal} до загального об'єму комірки V , та визначається виразом

$$\gamma = \frac{V_{metal}}{V} = \begin{cases} 1 & \text{метал (рідкий, твердий)} \\ 0 < \gamma < 1 & \text{розділ фаз} \\ 0 & \text{інертний газ} \end{cases}.$$

При $\gamma = 0$ комірка повністю заповнений інертним газом, та повністю заповнений металом при $\gamma = 1$. Коли значення γ знаходиться у діапазоні між 0 и 1, в комірці існує границя розділу середовищ між металом та інертним газом.

Моделювання теплообміну

При описі конвективних переносів необхідно враховувати процеси теплопровідності між окремими частинами суцільного середовища (тепло- та масоперенесення), а також радіаційний теплообмін (випромінювання). Конвективне перенесення пов'язано з використанням тих чи інших моделей руху середовища. Найбільшого поширення в теорії тепло- та масоперенесення

отримали рівняння Нав'є-Стокса в наближенні Бусінеска. У розглянутій моделі густина, коефіцієнт теплопровідності та питома теплоємність є функціями температури $\rho = \rho(T)$, $C_p = C_p(T)$, $k = k(T)$, а також враховується прихована теплота фазових перетворень (плавлення та випаровування).

Рівняння теплообміну з конвективним членом може бути записане через питому ентальпію у вигляді [13]

$$\rho \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla(u \cdot h) \right] = \nabla(k \nabla T) + Q_{Laser} - Q_{Losses}, \quad (1)$$

де ρ – густина, k – коефіцієнт теплопровідності, T – температура, C_p – питома теплоємність, Q_{Laser} – об'ємне джерело тепла, Q_{Losses} – об'ємні втрати тепла, u – вектор швидкості, h – питома ентальпія, t – час.

Температурне поле розраховується виходячи з наступного співвідношення

$$C_p = \frac{h - h_{ref}}{T - T_{ref}},$$

$$T_{ref} = \begin{cases} T_0 \\ T_s \\ T_l \\ T_b \\ T_b \end{cases} \quad h_{ref} = \begin{cases} h_0 \\ h_s \\ h_l \\ h \\ h_v \end{cases} \quad C_p = \begin{cases} C_{Ps}, & h < h_s \\ C_{Ps}(1 - f_l) + C_{Pl}f_l, & h_s \leq h \leq h_l \\ C_{Pl}, & h_l < h < h_b, \\ C_{Pl}, & h_b \leq h \leq h_v \\ C_{Pl}, & h > h_v \end{cases}$$

де T_s – температура солідуса, T_l – температура ліквідуса, T_b – температура кипіння (пароутворення), C_{Ps} – питома теплоємність при температурі солідуса, C_{Pl} – питома теплоємність при температурі ліквідуса, h_v – питома теплота пароутворення, h_l – питома теплота при температурі ліквідуса, h_s – питома теплота при температурі солідуса.

Вагова функція f_l визначає частку твердої та рідкої фази в об'ємі, що розглядається. В рідкій фазі $f_l = 1$, в твердій фазі $f_l = 0$ та лінійний профіль в двофазному середовищі. Функція f_l визначається як

$$f_l = \begin{cases} 0, & T < T_s \\ \frac{T-T_s}{T_l-T_s}, & T_s \leq T \leq T_l \\ 1, & T > T_l \end{cases}$$

Теплофізичні властивості металу в двофазному середовищі розраховуються за наступною інтерполяційною залежністю [13]

$$\psi = (1 - f_l)\psi_s + f_l\psi_l, \quad \psi \in [\rho, \mu, C_p, k].$$

де ψ – конкретна властивість металу в моделі (густина, коефіцієнт динамічної в'язкості, питома теплоємність, теплопровідність), ψ_l і ψ_s – відповідні властивості у рідкій та твердій фазі відповідно.

При моделюванні теплофізичні властивості двох фаз, що не змішуються, розраховуються за допомогою континуальної формули, заснованої на класичній теорії сумішей. Об'ємно-фракційне середнє значення загальної теплофізичної властивості задається як [13]

$$\vartheta = \gamma\vartheta_{metal} + (1 - \gamma)\vartheta_{gas}, \quad \vartheta \in [\rho, \mu, C_p, k], \quad (2)$$

де ρ, μ, C_p, k – густина, коефіцієнт динамічної в'язкості, питома теплоємність та коефіцієнт теплопровідності відповідно.

Множник ϑ_{metal} в рівнянні (2) представляє собою теплофізичні властивості металевій фазі та задається наступним чином

$$\vartheta_{metal} = \vartheta_{liquid,metal} \cdot f_l + \vartheta_{solid,metal}(1 - f_l),$$

Складова Q_{Losses} в рівнянні (1) представляє собою теплові втрати від випаровування, конвекції, випромінювання та визначається як

$$Q_{Losses} = (q_{vaporation} + q_{convection} + q_{radiation})|\nabla\gamma| \frac{2\rho C_p^{eff}}{\rho_{metal}C_p^{metal} + \rho_{gas}C_p^{gas}},$$

Коли температура металу перевищує точку кипіння, необхідно враховувати втрати тепла під час його випаровування. Втрати тепла за рахунок

випаровування є добутком питомої теплоти пароутворення h_v та масової втрати випаровування \dot{m}_v та визначаються як [9]

$$q_{\text{vaporation}} = h_v \cdot \dot{m}_v,$$

де h_v – питома теплота пароутворення, \dot{m}_v – швидкість випаровування з одиниці площі.

Швидкість випаровування (масова витрата) визначається як [9]

$$\dot{m}_v = (1 - \beta)p_v \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}},$$

де p_v – тиск пари, p_0 – тиск навколишнього середовища, M – молярна маса, R – універсальна газова постійна, β – коефіцієнт акомодатії, який показує частку молекул пари, що поглинається поверхнею ($\beta = 0.18$).

Тиск пари при температурі T може бути розраховано за наступним співвідношенням

$$p_v = 0.54p_0 \exp \left[\frac{h_v M}{RT_b} \left(1 - \frac{T_b}{T} \right) \right].$$

Зазвичай вважається, що тепловий потік пропорційний різниці температур між поверхнею та навколишнім середовищем.

Конвективний теплообмін визначається наступним чином

$$q_{\text{convection}} = \alpha(T - T_0),$$

де α – коефіцієнт конвективної теплопередачі ($\alpha = 50 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}$), T_0 – температура навколишнього середовища ($T_0 = 293 \text{ К}$).

Відповідно до інтегрального закону випромінювання абсолютно чорного тіла (закон Стефана-Больцмана), який визначає залежність густини потужності випромінювання абсолютно чорного тіла від його температури, теплові втрати через випромінювання можна виразити

$$q_{radiation} = \sigma \varepsilon (T^4 - T_0^4),$$

де σ – постійна Стефана-Больцмана ($\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$); ε – коефіцієнт випромінювання ($0 < \varepsilon < 1$).

Розподіл джерела тепла є важливим параметром під час моделювання процесів селективного лазерного плавлення порошків. Існують два види моделей джерела тепла: поверхневий та об'ємний. Модель поверхневого джерела тепла найкраще підходить для режиму провідності, оскільки в цьому режимі енергія прикладається до поверхні деталі. У той час як об'ємне джерело тепла більш адаптоване для режиму глибокого проплавлення, коли енергія до ванни розплаву підводиться через западину (порожнину), що формується, внаслідок впливу тиску віддачі. Потік тепла на поверхні від лазерного променя підпорядковується гауссівському розподілу та записується як

$$q_{laser} = \frac{2\eta P_{laser}}{\pi r_0^2} \exp\left(\frac{-2r^2}{r_0^2}\right),$$

де η – коефіцієнт поглинання металу, P_{laser} – потужність лазера, r_0 – радіус лазерного променя, r – відстань від центру лазерного променя, яка визначається як

$$r = \sqrt{(x - x_0 - v_{laser}t)^2 + (y - y_0)^2},$$

де x, y – координати вузла розрахункової сітки, x_0, y_0 – початкові координати центру лазерного променя, v_{laser} – швидкість лазерного променя.

$$Q_{Laser} = q_{laser} \cdot |\nabla\gamma| \frac{2\rho C_{p\,eff}}{\rho_{metal}C_{p\,metal} + \rho_{gas}C_{p\,gas}},$$

Моделювання динаміки рідкого металу

У роботі розглядається рух рідкого металу за малих швидкостей. У цьому випадку ефектами стисливості рідкого металу нехтують і його можна розглядати як в'язку нестисливу рідину [12].

Динаміка потоку рідини описується рівняннями збереження маси та імпульсу – рівняннями Нав'є-Стокса для нестисливої рідини в наближенні

Бусінеска. Основна ідея наближення полягає в особливості врахування залежності густини від температури [13]

$$\nabla \cdot u = 0,$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right] = -\nabla P + \mu \Delta u + F_{Buoyancy} + F_{Darcy} + F_{Surface}, \quad (3)$$

де ∇ – оператор Гамільтона, t – час, u – вектор швидкості, P – тиск, ρ – густина рідкого металу, μ – коефіцієнт динамічної в'язкості.

Доданок $F_{Buoyancy}$ в рівнянні (3) представляє собою виштовхуючу (архімедову) силу. Відхилення густини рідкого металу при зміні температури призводить до виникнення природної конвекції, і зазвичай виражається за допомогою наближення Бусінеска наступним чином

$$F_{Buoyancy} = \rho g [1 - \beta_T (T - T_m)],$$

де g – прискорення вільного падіння, β_T – коефіцієнт теплового розширення, T_m – температура плавлення.

Доданок F_{Darcy} у рівнянні (3) є дисипацією механічної енергії при терті в двофазній зоні (коли рідина проходить через пористе середовище). Даний доданок відповідає за плавне зниження швидкості рідкого металу на межі розділу фаз і перетворює її на нуль у зоні нерозплавленого металу. Передбачається, що цей доданок змінюється в залежності від частки рідини f_l і виражається відповідно до рівняння Козені-Кармана

$$F_{Darcy} = - \frac{(1-f_l)^2}{f_l^3 + b} C u,$$

де C – демпфуюча константа ($C = 1.6 \cdot 10^5$), b – константа, що запобігає діленню на нуль, коли рідка фракція f_l стає рівною нулю ($b = 10^{-6}$).

Джерельний член $F_{Surface}$ в рівнянні (3) представляє собою сили, які діють на межі розділу середовищ

$$F_{Surface} = \left\{ \sigma_{\gamma} k \cdot \hat{n} + \frac{d\sigma_{\gamma}}{dT} [\nabla T - \hat{n}(\hat{n} \cdot \nabla T)] + P_v \cdot \hat{n} \right\} |\nabla \gamma| \frac{2\rho}{\rho_{metal} + \rho_{gas}},$$

де σ_{γ} – коефіцієнт поверхневого натягу, $k = -(\nabla \cdot \hat{n})$ – середня кривизна вільної поверхні, $\hat{n} = \nabla \gamma / |\nabla \gamma|$ – вектор одиничної нормалі до поверхні, $d\sigma_{\gamma}/dT$ – температурний коефіцієнт поверхневого натягу.

Перший доданок – це сила поверхневого натягу, що діє за нормаллю до межі розділу середовищ, другий доданок – сила, обумовлена термокапілярною конвекцією (конвекція Бенара-Марангоні), що діє в тангенціальному напрямку і викликана просторовою зміною коефіцієнта поверхневого натягу вздовж межі розділу середовищ через градієнт температури, а третій доданок – тиск віддачі, що вчинюють пари металу на верхню поверхню ванни розплаву. Множник перерозподіляє розподілені сили у бік щільнішої фази (метал), що дозволяє уникнути виникнення помилкових потоків у газовій фазі

Множник $2\rho/(\rho_{metal} + \rho_{gas})$ перерозподіляє розподілені сили у бік щільнішої фази (метал), що дозволяє уникнути виникнення помилкових потоків у газовій фазі.

Аналіз результатів розв'язку теплової задачі селективного лазерного плавлення металевих порошків.

Задача про нестационарний теплообмін є найбільш важливою, оскільки вичерпна інформація про тепловий режим потрібна як при описі процесів плавлення та кристалізації, так і при оцінюванні глобального напружено-деформованого стану тіла, отриманого селективним лазерним плавленням. Розв'язання цієї задачі без явного опису динаміки розплаву, але з адекватним прогнозом формування ванни за ізотермами ліквідусу та солідусу є найбільш поширеним методом розрахунку залежності властивостей виробу від параметрів технологічного процесу.

Основне рівняння, яке описує нестационарний просторовий переніс тепла є рівняння теплопровідності. З метою урахування фазових переходів рівняння теплопровідності розв'язувалось відносно ентальпії. В якості початкових умов задавалася постійна температура 293°К. Граничні умови склалися з умов Діріхле, Неймана та Ньютона. При цьому враховувалися втрати тепла за рахунок конвекції та випромінювання. У розробленій моделі густина,

коєфіцієнт теплопровідності та питома теплоємність є функціями температури. Також враховувалася прихована теплота фазових перетворень (плавлення та випаровування).

Рівняння теплопровідності записувалось в криволінійній системі координат. Дискретний аналог вихідного рівняння теплопровідності побудовано методом скінчених об’ємів. Похідні у дифузійних членах апроксимуються центрально-різницевою схемою другого порядку точності.

Розроблений алгоритм базується на тришаровій неявній схемі з підітераціями за псевдочасом τ другого порядку точності за фізичним часом t

$$\left[\frac{1}{J\Delta\tau} + \frac{1.5}{J\Delta t} + \left(\frac{\partial \hat{r}}{\partial h} \right)^{n+1,m} \right] (h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}) = -\hat{r}^{n+1,m} - \frac{1.5\hat{h}^{n+1,m} - 2\hat{h}^n + 0.5\hat{h}^{n-1}}{\Delta t}.$$

де верхній індекс n позначає момент часу $t = n\Delta t$, а індекс m відповідає псевдочасовому ітераційному шару, \hat{r} – права частина в рівнянні теплопровідності.

Отримана скалярна система лінійних алгебраїчних рівнянь неявної схеми розв’язувалася методом мінімізації узагальненої нев’язки (GMRES) з неповним LU-розкладанням (ILU(k)) загальної матриці системи у якості передзумовлювання [14, 15].

Розміри області, що розглядалася, за довжиною, шириною та висотою становила $3000 \times 1000 \times 1000$ мкм відповідно. Крок інтегрування за часом дорівнював 10^{-5} с.

В результаті проведеного комп’ютерного моделювання нестационарних процесів селективного лазерного плавлення металевих порошків отримано розподіл поля температури в розрахунковій області з виділенням зони ліквідусу (рис. 1). Побудовано залежності ширини та глибини ванни розплаву від швидкості руху лазера та діаметру лазерної плями (рис. 2, 3).

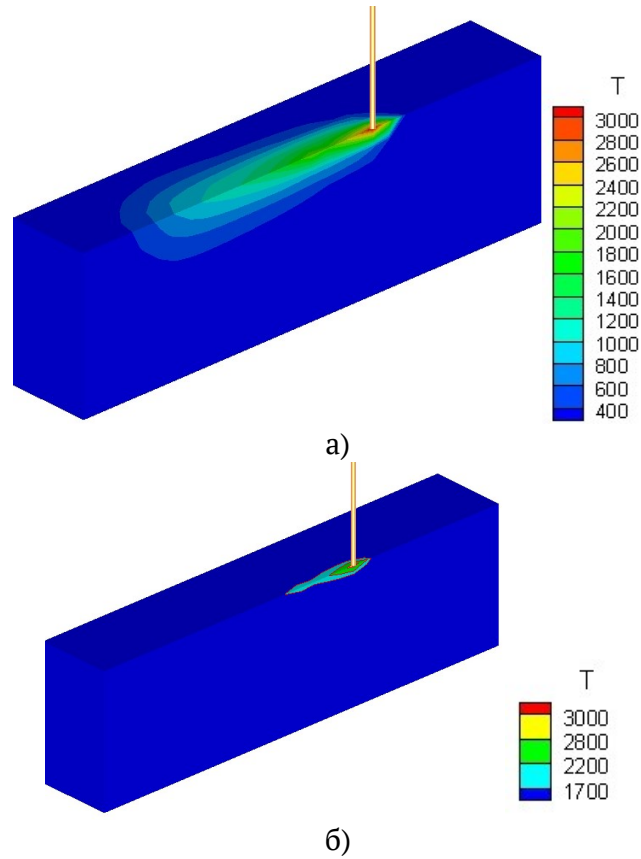


Рисунок 1 – Розподіл температури в розрахунковій області (а) з виділенням зони ліквідусу (б).

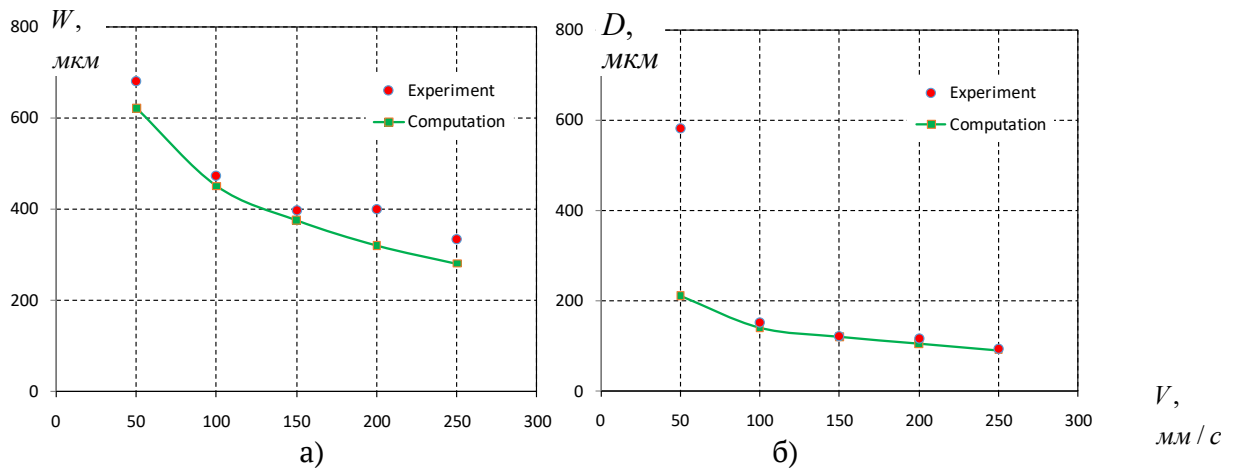


Рисунок 2 – Залежність ширини та глибини ванни розплаву від швидкості руху лазера (потужність лазера $P = 400$ Вт, діаметр лазерної плями $d = 205$ μm).

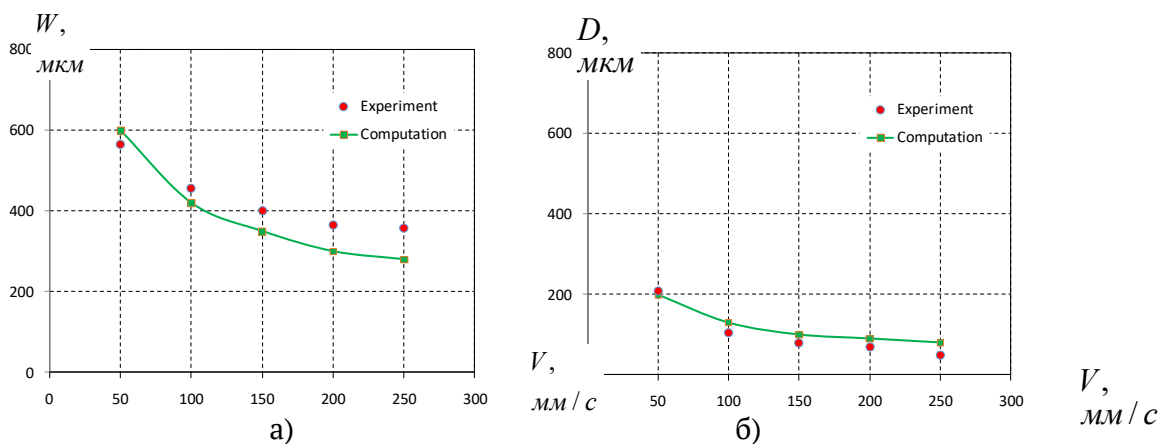


Рисунок 3 – Залежність ширини та глибини ванни розплаву від швидкості руху лазера (потужність лазера $P = 400$ Вт, діаметр лазерної плями $d = 262$ мкм)

Виділено два основні режими, що відбуваються при селективному лазерному плавленні металевих порошків – режим провідності та режим глибокого проплавлення. Ці режими істотно відрізняються один від одного, суттєво впливають на якість виробу, а їх існування залежить від щільності потужності в одиницю часу. В режимі глибокого проплавлення використання моделі на базі лише одного рівняння теплопровідності дає незадовільні результати, які суттєво відрізняються від експериментальних даних. Показано, що при селективному лазерному плавленні металевих порошків у режимі провідності достатньо використовувати лише рівняння теплопровідності з урахуванням фазових переходів. Отримані результати задовільно збігаються з експериментальними даними.

Висновки

Розглянуто фізичні процеси, що відбуваються при селективному лазерному плавленні металевих порошків. Визначено, які основні фізичні процеси необхідно враховувати для адекватного моделювання селективного лазерного плавлення металевих порошків.

В результаті проведеного огляду методів математичного моделювання обрано клас математичних моделей, який дозволяє якісно та кількісно відтворювати реальні фізичні процеси з достатньою точністю та прийнятними витратами часу. Визначено напрями розробки математичних моделей для опису процесів, що відбуваються при селективному лазерному плавленні металевих порошків.

Сформульовано загальну постановку проблеми дослідження теплообміну та динаміки ванни розплаву з урахуванням вільної поверхні при взаємодії з лазерним променем з метою моделювання процесів селективного лазерного плавлення металевих порошків. Постановка проблеми базується на розв'язку рівняння теплообміну, рівнянь Нав'є-Стокса в наближенні Бусінеска, а також рівняння, що описує поведінку вільної поверхні ванни розплаву при взаємодії з лазером.

Для опису нестационарних теплових процесів, що відбуваються при селективному лазерному плавленні металевих порошків, розглянуто рівняння теплопровідності в криволінійній системі координат. Розроблено чисельний алгоритм розв'язання вихідних рівнянь, який базується на тришаровій неявній схемі, що має другий порядок точності інтегрування за часом, третій порядок протипотокової апроксимації конвективних доданків, і другий порядок центрально-різницевої апроксимації дифузійних членів. Узгодження полів тиску і швидкості в рівняннях Нав'є-Стокса здійснювалось за допомогою методу штучної стисливості, модифікованого для розрахунку нестационарних задач. Система вихідних рівнянь інтегрувалась чисельно з використанням методу скінченного об'єму. Система лінійних алгебраїчних рівнянь неявної схеми розв'язувалась методом мінімізації узагальненої нев'язки (GMRES) з неповним LU-розкладанням (ILU(k)) загальної матриці системи у якості передзумовлювання.

В результаті проведеного чисельного моделювання нестационарних процесів селективного лазерного плавлення металевих порошків отримано розподіл поля температури в розрахунковій області з виділенням зони ліквідусу. Побудовано залежності ширини та глибини ванни розплаву від швидкості руху лазера та діаметру лазерної плями.

Виділено два основні режими, що відбуваються при селективному лазерному плавленні металевих порошків – режим провідності та режим глибокого проплавлення. Ці режими істотно відрізняються один від одного, суттєво впливають на якість виробу, а їх існування залежить від щільності потужності в одиницю часу.

В режимі глибокого проплавлення використання моделі на базі лише одного рівняння теплопровідності дає незадовільні результати, які суттєво

відрізняються від експериментальних даних. Показано, що при селективному лазерному плавленні металевих порошків у режимі провідності достатньо використовувати лише рівняння теплопровідності з урахуванням фазових переходів. Отримані результати задовільно збігаються з експериментальними даними.

ЛІТЕРАТУРА/ REFERENCES

1. Kopeika O.V., Tereshchenko A.V. Wind-power transforming systems. *Journal of Mathematical Sciences*. 2001. 104 (6). Pp. 1631-1634. DOI: 10.1023/A:1011329213322
2. Redchyts D. O., Gourjii A. A., Moiseienko S. V., Bilousova T. P. Aerodynamics of the turbulent flow around a multi-element airfoil in cruise configuration and in takeoff and landing configuration. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2019. 5(7, 101). P. 36–41.
3. Khairallah S. A., Martin A. A., Lee J. R., Guss G., Calta N. P., Hammons J. A., Nielsen M., Chaput K., Schwalbach E., Shah M. N., Chapman M. G., Willey T. M., Rubenchik A. M., Anderson A. T., Wang Y. M., Matthews M. J., King W. E. Controlling interdependent meso-nanosecond dynamics and defect generation in metal 3D printing. *Science*. 2020. 5 (5). P. 660–665. DOI: 10.1126/science.aay7830.
4. Li L., Gong J., Xia H., Peng G., Hao Y., Meng S., Wang J. Influence of scan paths on flow dynamics and weld formations during oscillating laser welding of 5A06 aluminum alloy. *Journal of materials research and technology*. 2021. 30 (11). P. 294-298. DOI:10.1016/j.jmrt.2020.12.102
5. Xua J., Rong Y., Huang Y., Wang P., Wang C. Keyhole-induced porosity formation during laser welding. *Journal of Materials Processing Tech.* 2018. 252. P. 720-727. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2017.10.038
6. Bunaziv I., Akselsen O. M., Ren X., Nyhus B., Eriksson M. Laser Beam and Laser-Arc Hybrid Welding of Aluminium Alloys. *Journal Metals*. 2021. 59 (11). P. 59. DOI: 10.3390/met11081150.
7. Liu P., Huang L., Gan L., Lei Y. Effect of plate thickness on weld pool dynamics and keyhole-induced porosity formation in laser welding of Al alloy. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.* 2020. 111. P. 735-747. DOI: 10.1007/s00170-020-05818-5.
8. Matthews J., Guss G., Khairallah S. A., Rubenchik A. M., Depond P. J., King W. E., Matthews M. J. Denudation of metal powder layers in laser powder bed fusion processes. *Journal Metals*. 2016. 114. P. 33-42. DOI: 10.1016/j.actamat.2016.05.017
9. Zhang T., Li H., Liu S., Shen S., Xie H., Shi W., Zhang G., Shen B., Chen L., Xiao B., Wei M.. Evolution of molten pool during selective laser melting of Ti-6Al-4V. *Journal Physics*. 2018. 17 (11). P. 17. DOI: 10.1088/1361-6463/aeee04.
10. Korner C., Bauer A., Attar E. Fundamental consolidation mechanisms during selective beam melting of powders. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 2013. 18 (21). P. 18. DOI: 10.1088/0965-0393/21/8/085011.
11. Zhang Y., Chen Q., Guillemot G., Gandin C.A, Bellet M. Numerical modelling of fluid and solid thermomechanics in additive manufacturing by powder-bed fusion: Continuum and level set formulation applied to track- and part-scale simulations. *Mecanique*. 2018. 346. P. 1055-1071. DOI: 10.1016/j.crme.2018.08.008.
12. Redchyts D. O., Shkvar E. A., Moiseienko S. V. Computational Simulation of Turbulent Flow Around Tractor-Trailers. *Fluid Dynamics and Materials Processing*. 2020. 16 (1). P. 91–103. DOI: 10.32604/fdmp.2020.07933.

13. Aggarwal A., Patel S., Kumar A. Selective Laser Melting of 316L Stainless Steel: Physics of Melting Mode Transition and Its Influence on Microstructural and Mechanical Behavior. Minerals, Metals & Materials Society. Published online. 2019. 12. P. 1106-1116.
14. Moiseienko S., Tuchyna U., Redchyts D., Zaika V., Vygodner I. Comparative Analysis of Numerical Methods for Solving Linear Equation Systems for Poisson's equation. Advances in Mechanical and Power Engineering. CAMPE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2023. P 169–177. DOI:10.1007/978-3-031-18487-1_17
15. Van der Vorst, H. A. Iterative Methods for Large Linear. Utrecht, Netherlands. 2002. P. 195 p.

Received 11.03.2026.

Accepted 16.04.2026.

Published 30.04.2026

UDC 621.7:004.94

Dmytro Redchyts, Svitlana Moiseienko, Denys Adamenko,
Kateryna Kremneva, Oksana Akimenko

MATHEMATICAL MODELING FOR APPLICATIONS THE SELECTIVE LASER MELTING PROCESS IN 3D PRINTING

Abstract. *This paper provides an overview of the physical processes occurring during selective laser melting of metal powders, as well as an overview of methods for mathematically modeling these processes. The key physical processes that must be taken into account for an adequate modeling of selective laser melting of metal powders are identified. A general physical and mathematical model is formulated to solve the problem of selective laser melting of metal powders. The assumptions and constraints adopted for the formulated physical model are presented. The governing equations describing heat transfer processes, liquid metal dynamics, and the shape of the free surface are considered. The initial and boundary conditions are presented. Taking into account the requirements for mathematical models, a numerical algorithm for solving the governing equations has been developed, based on a three-layer implicit scheme with second-order accuracy in time integration, third-order counter-current approximation of convective terms, and second-order central difference approximation of diffusion terms. The pressure and velocity fields in the Navier-Stokes equations were coupled using the artificial compressibility method, modified for the calculation of unsteady problems. The system of initial equations was numerically integrated using the finite volume method. The system of linear algebraic equations of the implicit scheme was solved using the well-known generalized misfit minimization (GMRES) method with an incomplete LU decomposition of the total system matrix as preconditioning.*

Numerical simulations of the transient processes of selective laser melting of metal powders have yielded a temperature field distribution in the computational domain, highlighting the liquidus zone. Dependences of the width and depth of the molten pool on the laser velocity and the laser spot diameter have been plotted.

Keywords: *Mathematical modeling, additive technologies, 3D printing, selective laser melting (SLM), laser powder bed fusion (LPBF), computational fluid dynamics.*

Редчиць Дмитро Олександрович - д.ф.-м.н., професор, директор Інституту транспортних систем і технологій Національної академії наук України; провідний науковий співробітник Інституту прикладних систем управління Національної академії наук України; професор кафедри математичного моделювання та системного аналізу Дніпровського державного технічного університету, E-mail: redchits_da@ua.fm, ORCID: 0000-0001-8538-6026.

Моїсеєнко Світлана Вікторівна - к.т.н, доцент, завідувачка кафедри інформатики і комп'ютерних наук Херсонського національного технічного університету; старший науковий співробітник Інституту прикладних систем управління Національної академії наук України, E-mail: 4moiseenko@ukr.net, ORCID: 0000-0001-5802-3887.

Адаменко Денис Сергійович - к.т.н, доцент, старший науковий співробітник Інституту прикладних систем управління Національної академії наук України, E-mail: adamenko.denys@ukr.net, ORCID: 0009-0009-9635-7867.

Кремнева Катерина Володимирівна - к.т.н, старший науковий співробітник Інституту прикладних систем управління Національної академії наук України, E-mail: kremneva.kateryna@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1807-3390.

Акіменко Оксана Володимирівна - провідний інженер Інституту транспортних систем і технологій Національної академії наук України; молодший науковий співробітник Інституту прикладних систем управління Національної академії наук України, E-mail: samsonova@ua.fm, ORCID: 0000-0002-4562-4795.

Redchyts Dmytro - Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine; Leading Researcher of Institute of Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine; Professor of the Department of Mathematical Modelling and System Analysis of the Dniprovsky State Technical University, E-mail: redchits_da@ua.fm, ORCID: 0000-0001-8538-6026.

Moiseienko Svitlana - Candidate of technical sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Informatics and Computer; Senior Researcher of Institute of

Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine, E-mail: 4moiseenko@ukr.net, ORCID: 0000-0001-5802-3887.

Adamenko Denys - Candidate of technical sciences, Associate Professor, Senior Researcher of Institute of Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine, E-mail: adamenko.denys@ukr.net, ORCID: 0009-0009-9635-7867.

Kremneva Kateryna - Candidate of technical sciences, Senior Researcher of Institute of Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine, E-mail: kremneva.kateryna@gmail.com, ORCID: 0000-0003-1807-3390.

Akimenko Oksana - Leading Engineer of the Institute of Transport Systems and Technologies of the National Academy of Sciences of Ukraine; Junior Researcher of Institute of Applied Control Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine, E-mail: samsonova@ua.fm, ORCID: 0000-0002-4562-4795.