

DOI: 10.34185/1991-7848.2023.01.06

УДК 622: 647.2

І.Д. Курганов

МОДЕЛЮВАННЯ ФРИКЦІЙНОЇ ПАРИ СТРІЧКОВОГО КОНВЕЄРА, ЯК ЕЛЕМЕНТА ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ ТРАНСПОРТУВАННЯ РУДНОЇ МАСИ У ДОДАТКУ PDE TOOLBOX МАТЕМАТИЧНОГО ПАКЕТУ MATLAB

***Анотація.** Запропоновано використання додатку PDE Toolbox математичного пакету Matlab, який забезпечує розв'язування диференціальних рівнянь у часткових похідних методом кінцевих елементів для моделювання пари тертя взаємодії приводного барабана та конвеєрної стрічки, у якості теплової моделі з розподіленими параметрами, стрічкового конвеєра, як елемента технологічного процесу транспортування рудної маси. Додаток містить графічний інтерфейс; засоби визначення виду рівнянь і граничних умов; порядок автоматичного формування сітки кінцевих елементів; засоби для візуалізації отриманого рішення та його анімації.*

Отримані результати розрахунків у програмі PDE Toolbox Matlab, які дають змогу отримати теплове поле пари тертя для аварійних та робочих режимів роботи приводного барабана досліджуваного конвеєра технологічного ланцюга транспортування вантажопотоку, які визначаються початковими та граничними умовами та коефіцієнтами рівняння теплопровідності Фур'є.

***Ключові слова:** стрічковий конвеєр, фрикційна пара, кут робочого ковзання, теплове поле, оптимальне керування, метод кінцевих елементів.*

Проблема та її зв'язок з науковими та практичними завданнями

Однією з аварійних ситуацій, що найбільш часто зустрічаються, яка призводить до зупинки конвеєрної лінії, є пробуксовування приводної станції одного з стрічкових конвеєрів тракту подачі транспортованої рудної маси. В результаті доводиться зупиняти весь конвеєрний тракт і здійснювати повторний пуск, але вже завантажених конвеєрів, що може призвести до пробуксовування фрикційної передачі стрічкових конвеєрів. У технологічній експлуатації стрічкових конвеєрів часто виникають ситуації, коли натяг

конвеєрної стрічки ослаблений, що викликає збільшення опору руху стрічки. В результаті підвищуються витрати потужності, що споживається, приводною станцією конвеєра і знижується к.к.д. фрикційної пари барабан-стрічка, що збільшує стирання робочих поверхонь стрічки та футерування барабана, а в результаті їх тертя-нагрівання.

Аналіз досліджень та публікацій

Дослідженням даної проблеми займалися автори робіт [1, 2, 4], які моделювали теплові процеси в зоні контакту стрічки та барабана та проводили експериментальні дослідження, що підтверджують результати моделювання та необхідність застосування заходів щодо усунення причин.

Так в роботі, яка була виконана В.С. Волотковським, отримані такі результати. На стрічкових конвеєрах великої довжини від 467 до 1870 м, площа зірваної нижньої обклашки стрічки змінюється від 15 до 25%, що викликано виникненням пробуксовування стрічки та великими значеннями напруги в нижній обкладці стрічки при її взаємодії з приводним барабаном.

У разі пробуксування температура у зоні зчеплення стрічки та барабана зростає до 300-350 °С за 15 хвилин його роботи [4]. У своїх роботах В.Г. Пілецький виконав моделювання фрикційної пари та досліджував теплові режими приводного барабана при пробуксуванні стрічки на ньому для різних швидкостей її руху та вплив кута обхвату барабана стрічкою на швидкість зростання температури нагрівання.

У роботі [2] автори М.О. Малютін, Л.І. Попов виконали математичне моделювання фрикційної пари з урахуванням рівняння теплопровідності Фур'є. Експериментальні дослідження температури тертя в контакті стрічка-барабан, проводилися на конвеєрах комбінату «Апатит», методом термопари із записом на осцилографі. Тут результати показали, що температура на контакті ковзання за зміну (5 годин безперервної роботи) зростає 79.5 до 127°С.

Постановка задачі

Автором роботи пропонується виконати моделювання фрикційної пари як моделі з розподіленими параметрами для подальшого її використання в розробці оптимальної системи автоматичного керування.

Викладення матеріалів і результатів

Для вирішення поставленої задачі використовується додаток PDE Toolbox (від англ. Partial Differential Equation – диференціальне рівняння в часткових похідних), який містить пакет MATLAB. Додаток забезпечує вирішення диференціальних рівнянь в часткових похідних методом кінцевих елементів у двомірній постановці. Додаток включає графічний інтерфейс; інструменти завдання форми рівнянь і граничних умов; процедуру автоматичної генерації сітки кінцевих елементів; засоби для візуалізації отриманого рішення та його анімації. У зв'язку з тим, що середовище для вирішення завдань представлено не тільки алгоритмом реалізації, але й засобами введення і виведення даних і результатів, тому практичний розрахунок температурного стану досліджуваної системи розділяється на три етапи:

- підготовка початкової бази даних (БД) до розрахунку (опис геометрії, фізичних характеристик, генерація сіткового розбиття) - модуль введення початкових даних;

- розрахунок за допомогою чисельного методу та отримання БД числових результатів – модуль обчислень;

- візуалізацію та інтерпретацію результатів моделювання, отримання на виході готового робочого документа – модулем виведення результатів.

Модуль введення здійснює такі основні функції:

- опис геометрії об'єкта;
- дискретизація області визначення;
- вказівку фізичної поведінки областей та границь.

Стандартними геометричними фігурами є прямокутник (в окремому випадку квадрат), еліпс (в окремому випадку коло), багатокутник.

Операція завдання параметрів областей і кордонів для задач теплообміну дозволяє уточнити фізичну поведінку об'єкта, що досліджується: описати фізичні характеристики матеріалів елементів досліджуваної системи, джерела тепла, граничні умови, початкові умови (для нестационарних завдань). Під час вирішення рівняння теплопровідності програма PDETool дозволяє вводити граничні умови першого роду (умова Діріхле) або умови другого роду (умови Неймана). Умови Діріхле мають вигляд

$$h \cdot u = r,$$

де h, r – скалярні коефіцієнти. Умови Неймана мають вид

$$n \cdot c \cdot \text{grad } u + q \cdot u = g,$$

де n – вектор одиничної зовнішньої нормалі до границі розрахункової області; c – коефіцієнт PDE; q та g – скалярні коефіцієнти. Його фізичний зміст – завдання потоку температури на границі протягом усього процесу.

Для математичного представлення досліджуваної моделі необхідно задати значення коефіцієнтів рівняння теплопровідності. В результаті, розрахункова область розбивається на декілька зон. Для кожної із зон необхідно ввести значення коефіцієнтів рівняння. Рівняння у діалоговому вікні представлено у такому вигляді

$$\rho \cdot C \cdot \text{div}(k \cdot \text{grad}(T)) = Q + h \cdot (T_{\text{ext}} - T),$$

де ρ - щільність речовини ρ ; C - питома теплоємність речовини C ; k - теплопровідність речовини λ ; Q - об'ємна щільність потужності зовнішніх джерел тепла Q . Другий доданок правої частини рівняння у цьому вікні записано некоректно. " $h \cdot (T_{\text{ext}} - T)$ " - це не об'ємно розподілене джерело тепла, а складова щільності потоку теплової потужності через зовнішню границю розрахункової області, пропорційна різниці температур навколишнього середовища та границі розрахункової області. Насправді цей доданок відноситься до граничних умов, які в завданнях електромагнетизму називаються "імпедансними". Здесь h - коефіцієнт конвективного або кондуктивного теплообміну розрахункової галузі з навколишнім середовищем, Вт м⁻² К⁻¹; T_{ext} - температура навколишнього середовища при нескінченному віддаленні від розрахункової області (тут передбачається, що розрахункова область оточена нескінченним однорідним середовищем без джерел тепла); T - температура границі розрахункової області [5].

Модуль обчислень температурного розподілу в області складної форми отримує на вході геометричний опис сітки, фізичні характеристики та граничні умови, формує та вирішує підсумкову систему рівнянь алгебри. На виході він видає значення шуканих величин (температур, температурних градієнтів тощо) у кожному вузлі сітки. Основу обчислювального модуля складають використані під час його проектування розрахункові алгоритми. У окремому випадку таким є алгоритм методу кінцевих елементів, який складається з наступних чотирьох етапів:

– виділення кінцевих елементів (розбивка заданої області кінцеві елементи); визначення апроксимуючих функцій кожного елемента, якими, зазвичай, виявляються поліноми;

– об'єднання кінцевих елементів у ансамбль. На цьому етапі отримані рівняння, що відносяться до окремих елементів, об'єднуються в систему, яка є моделлю безперервної функції, що потрібна;

– визначення невідомих вузлових значень функції. Ця процедура є найбільш складною у МКЕ. Для її реалізації розглянемо наступний алгоритм.

При виділенні кінцевих елементів значення функцій u_1, u_2, u_3, \dots у вузлах розглядаються як невідомі змінні, які необхідно знайти. З цих значень, взятих по всій розрахунковій області, формується стовпцева матриця, яку позначимо $[u(\Sigma)]$. Кожному рядку $[u(\Sigma)]$ відповідає вузол сітки кінцевих елементів. Тоді апроксимацією для всієї розрахункової області (у двовірному випадку) буде

$$u(x,y) \approx [N(\Sigma)] [u(\Sigma)], \quad (1)$$

де $[N(\Sigma)]$ – матричний рядок функцій форми всіх кінцевих елементів, що входять до розрахункової області. При складанні матриць $[N(\Sigma)]$ та $[u(\Sigma)]$ проводиться наскрізна нумерація вузлів.

Наступний етап - побудова системи алгебраїчних рівнянь на основі кінцево-елементної апроксимації. В результаті розв'язання задачі вузлові значення u_1, u_2, u_3, \dots повинні бути "підібрані" так, щоб вони забезпечували найкраще наближення до істинного розподілу $u(x, y)$. Цей "підбір" може здійснюватися у різний спосіб.

Визначення невідомих вузлових значень функції PDE Toolbox Matlab реалізується проекційним кінцево-елементним методом. Проекційний метод заснований на мінімізації нев'язки в диференціальному рівнянні, при підстановці до нього наближеного рішення замість точного. У методі кінцевих елементів оцінка нев'язки проводиться за окремими елементами, і також зводиться до вирішення системи рівнянь алгебри щодо вузлових значень $u(x)$.

Рішення диференціального рівняння у часткових похідних у додатку PDE Toolbox MATLAB засноване на застосуванні методу Гальоркіна з кінцевими елементами. Розглянемо математичний опис цього методу на прикладі параболічного рівняння PDE

$$d \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(c \cdot \text{gradu}) + a \cdot u = f. \quad (2)$$

Застосування методу Гальоркіна до рівняння (2) дає таке інтегральне рівняння

$$\int_V [N]^T \left(d \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(c \cdot \text{grad}(u)) + a \cdot u \right) dV = \int_V [N]^T \cdot f dV. \quad (3)$$

Щоб знизити порядок диференціального оператора в лівій частині (3), потрібно матрицю-стовпець вагових функцій, рівних функцій форми, записати під знак дивергенції

$$\begin{aligned} & \int_V [N]^T \cdot d \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_V -\text{div}([N]^T \cdot c \cdot \text{grad}(u)) dV + \\ & + \int_V (\text{grad}[N]^T \cdot c \cdot \text{grad}(u) + [N]^T \cdot a \cdot u) dV = \quad . \\ & = \int_V [N]^T \cdot f dV \end{aligned}$$

Застосуємо теорему про дивергенцію до другого інтегралу останнього рівняння, перенесемо його в праву частину і застосуємо кінцево-елементну апроксимацію (1) до шуканого поля u

$$\begin{aligned} & \int_V [N]^T \cdot d \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dV + \\ & + \int_V \left(\text{grad}[N]^T \cdot c \cdot \text{grad}[N] + [N]^T \cdot a \cdot [N] \right) dV \cdot [u(\Sigma)] = \\ & = \int_V [N]^T \cdot f \cdot dV + \int_S [N]^T \cdot c \cdot \text{grad}(u) \cdot dS \end{aligned}$$

або коротше

$$[K] \cdot [u(\Sigma)] = [F], \quad (4)$$

де $[K] = \int_V [N]^T \cdot d \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_V \left(\text{grad}[N]^T \cdot c \cdot \text{grad}[N] + [N]^T \cdot a \cdot [N] \right) dV$ –

глобальна матриця коефіцієнтів (матриця “жорсткості” [3]);

$[F] = \int_V [N]^T \cdot f dV + \int_S [N]^T \cdot c \cdot \text{grad}(u) \cdot dS$ – глобальна матриця-стовпчик правої

частини (матриця “навантажень”).

При виконанні розрахунків глобальне матричне рівняння (4) формується шляхом накопичення під час розгляду всіх кінцевих елементів

$$[K] = \sum_{(e)} [K^{(e)}]; \quad [F] = \sum_{(e)} [F^{(e)}] + \sum_{(\Gamma e)} [F^{(\Gamma e)}],$$

де

$$[K^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \cdot d \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dV + \int_{V^{(e)}} \left(\text{grad} [N^{(e)}]^T \cdot c \cdot \text{grad} [N^{(e)}] + [N^{(e)}]^T \cdot a \cdot [N^{(e)}] \right) dV$$

– локальна (елементарна) матриця коефіцієнтів; $[F^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \cdot f dV$ –

елементарна матриця правої частини; $[F^{(\Gamma e)}] = \int_{S^{(e)}} [N^{(e)}]^T \cdot c \cdot \text{grad}(u) \cdot dS$ –

гранично-елементна матриця правої частини; де $V^{(e)}$ – об'єм кінцевого елемента, $S^{(e)}$ – поверхневий елемент границі розрахункової області, dS – векторний диференціал площі граничної поверхні.

При моделюванні плоскопаралельних полів об'ємні інтеграли (4) можна замінити на двовимірні, а поверхневі – на криволінійні, враховуючи, що $dV = z \cdot dU$, $dS = z \cdot dl \cdot 1_z$, і z можна скоротити в лівій та правій частині (4). Тут dU – диференціал двовимірної розрахункової області у площині $z = \text{const}$, dl – векторний диференціал довжини границі розрахункової області.

PDE Toolbox MATLAB підтримує лише симплекс – елементи та лише двовимірні крайові завдання. У зв'язку з цим формули для обчислення елементних матриць, що відповідають рівнянню (2), мають вигляд

$$[K^{(e)}] = 0.5 \cdot c^{(e)} \Delta^{(e)} \cdot \left([a_x]^T \cdot [a_x] + [a_y]^T \cdot [a_y] \right) + a^{(e)} \cdot \frac{\Delta^{(e)}}{24} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$[F^{(e)}] = f^{(e)} \cdot \frac{\Delta^{(e)}}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [F^{(\Gamma e)}] = \left(b_x^{(\Gamma e)} \cdot \Delta y^{(\Gamma e)} - b_y^{(\Gamma e)} \cdot \Delta x^{(\Gamma e)} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = b_n^{(\Gamma e)} \cdot |\Delta l^{(\Gamma e)}| \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де $c^{(e)}$, $a^{(e)}$, $f^{(e)}$ – постійні значення параметрів рівняння (2) у межах кінцевого елемента;

$\Delta^{(e)}$ – визначник елемента, що дорівнює його подвоєній площі;

$\Delta l^{(\Gamma e)} = \Delta x^{(\Gamma e)} \cdot 1_x + \Delta y^{(\Gamma e)} \cdot 1_y$ – вектор довжини граничного елемента;

$b^{(\Gamma e)} = b_x^{(\Gamma e)} \cdot 1_x + b_y^{(\Gamma e)} \cdot 1_y = c \cdot \text{grad}(u)$ – постійне значення вектора в межах граничного елемента (відповідно до заданих граничних умов Неймана).

Формули (5) впливають із співвідношень, властивих двовимірним симплекс - елементам [3]

$$\int_{U^{(e)}} N_1^a \cdot N_2^b \cdot N_3^c dU = \Delta^{(e)} \cdot \frac{a! \cdot b! \cdot c!}{(a+b+c+2)}; \int_L N_1^a \cdot N_2^b dl = l \cdot \frac{a! \cdot b!}{(a+b+1)!},$$

де L – відрізок прямий, l – його довжина; a, b, c – довільні цілі числа ≥ 0 ;

$$\Delta^{(e)} = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \right).$$

Таким чином, кінцево-елементна технологія розв'язання задач математичної фізики зводиться до обчислення елементних матриць, відповідних заданому PDE, складання з них глобального матричного рівняння, вирішення цього рівняння та аналізу вузлового розподілу шуканої величини.

Отримане на виході модуля обчислень рішення часто не може безпосередньо використовуватися, так як маса необробленої чисельної інформації є занадто великою для сприйняття користувачем.

Модуль виведення здійснює такі функції:

- витягує значну інформацію;
- представляє значну інформацію у графічній формі для полегшення її сприйняття та інтерпретації (у вигляді графіка поверхні, кривих змін температури, карти ізотерм тощо);
- постачає необхідну цифрову та графічну інформацію у вказаний текстовий документ (наприклад, файл текстового редактора Word або табличного процесора Excel).

В результаті моделювання теплового поля фрикційної передачі при встановленому режимі роботи конвеєра отримано розподіл температури, представлений на рис. 1. При температурі довкілля 20°C температура фрикційної пари за 30 хвилин роботи конвеєра збільшилася на 5°C.

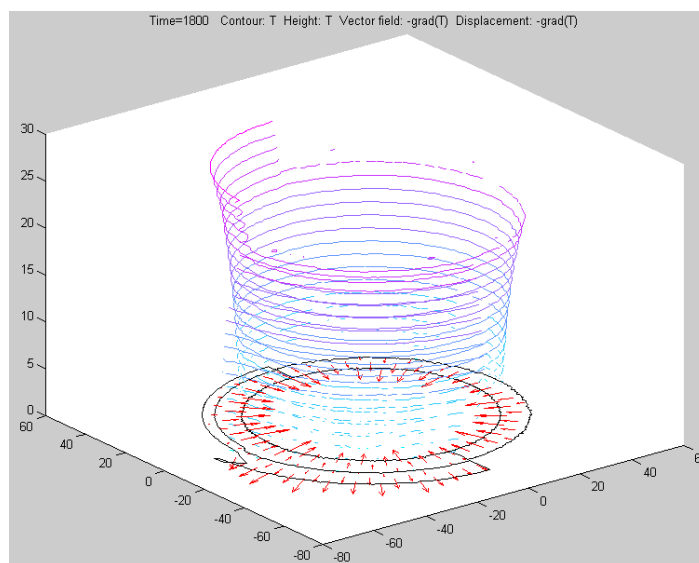


Рисунок 1 – Розподіл теплового поля у фрикційній парі барабан-стрічка при встановленому режимі роботи конвеєра

Висновки та напрямок подальших досліджень

Таким чином, результати обчислень у PDE Toolbox Matlab дозволяють отримати теплове поле роботи фрикційної пари для різних режимів роботи приводного барабана досліджуваного конвеєра технологічного ланцюга транспортування вантажопотоку, які задаються початковими та граничними умовами та коефіцієнтами рівняння теплопровідності Фур'є.

ЛІТЕРАТУРА

1. Волотковский В.С. Особенности применения и износа конвейерных лент на установках большой протяженности: Тр. Ин-та горн. дела. М-во черн. металлургии СССР// Свердловск, 1976.-Вып. 50.- С.70-76.
2. Малути́н М. А., Попов Л.И. Исследование контактной температуры в приводах ленточных конвейеров // Горный журнал. – 1972. -№2. –С. 115-119.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
4. Трошило В.С., Пилецкий В.Г. Исследование нагрева ленты конвейера при пробуксовке приводного барабана // Гірнична електромеханіка та автоматика. – 1999. - №2(61). – С. 200-204.
5. Шмелев В.Е. Partial Differential Equations Toolbox. Инструментарий решения дифференциальных уравнений в частных производных.

REFERENCES

1. Volotkovsky V.S. Features of the use and wear of conveyor belts on long-distance installations: Tr. In-ta mountain. affairs. M-in black metallurgy of the USSR // Sverlovsk, 1976.-Iss. 50.- P.70-76.
2. Maluyutin M.A., Popov L.I. Investigation of contact temperature in drives of belt conveyors // Mining Journal. - 1972. -№2. -WITH. 115-119.
3. Segerlind L. Application of the finite element method. – M.: Mir, 1979. – 392 p.
4. Troshchilo V.S., Piletsky V.G. Investigation of the heating of the conveyor belt during the slipping of the drive drum. - 1999. - No. 2 (61). - S. 200-204.

5. Shmelev V.E. Partial Differential Equations Toolbox. Tools for solving partial differential equations <http://matlab.exponenta.ru/pde/book1/>.

Received 17.01.2023.

Accepted 25.02.2023.

UDC 622: 647.2

I. Kurganov

MODELING OF THE FRICTION PAIR OF A BELT CONVEYOR AS AN ELEMENT OF THE TECHNOLOGICAL PROCESS OF ORE MASS TRANSPORTATION IN THE PDE TOOLBOX APPLICATION OF THE MATLAB MATHEMATICAL PACKAGE

It is proposed to use the PDE Toolbox application of the Matlab mathematical package, which provides the solution of differential equations in partial derivatives by the finite element method for modeling the friction pair of the interaction of the drive drum and the conveyor belt, as a thermal model with distributed parameters, of the belt conveyor as an element of the technological process of transporting ore masses. The application contains a graphical interface; means of determining the type of equations and boundary conditions; the order of automatic formation of the grid of finite elements; tools for visualization of the obtained solution and its animation.

The obtained results of calculations in the PDE Toolbox Matlab program, which make it possible to obtain the thermal field of the friction pair for the emergency and working modes of operation of the drive drum of the investigated conveyor of the technological chain of cargo flow transportation, which are determined by the initial and boundary conditions and coefficients of the Fourier heat conduction equation.

Keywords: belt conveyor, a frictional couple, operating slip angle, thermal field, optimum control, finite element method.

Курганов Ігор Дмитрович, кандидат технічних наук, старший викладач кафедри автоматизації, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Криворізький національний університет.

Kurganov Igor, Candidate of Technical Sciences, Senior Foreman of the Department of Automation, Computer Science and Information Technologies, Kryvyi Rih National University.