

УДОСКОНАЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РУХУ ТВЕРДИХ ЧАСТИНОК У ПОТОЦІ РІДИНИ

Надригайло Т.Ж.¹ [ORCID], Богданенко О.С.² [ORCID]

¹ Дніпровський державний технічний університет, к.т.н., доцент, Україна

² Дніпровський державний технічний університет, студентка, Україна

Анотація. Рух твердих частинок у потоці рідини є класичною задачею двофазної гідродинаміки.

У роботі розглянуто основні закономірності руху твердих частинок у потоці рідини. Проведено аналіз сил, що діють на частинку, та сформульовано математичну модель руху в рамках підходу Ейлер-Ейлер. Особливу увагу приділено режимам течії, впливу турбулентності та міжфазній взаємодії.

Актуальність теми дослідження полягає в тому, що процеси, пов'язані з рухом частинок, лежать в основі хімічних реакторів, теплообмінних апаратів, систем очищення води й газу. Моделювання переносу зважених частинок необхідне для прогнозування забруднення водою, оцінки накопичення осаду, аналізу поширення мікропластику. Процеси транспортування твердих частинок важливі при гідротранспорті вугілля і руди, бурінні свердловин, роботі нафтогазових систем. Таким чином, проблема, що розглядається, має широке застосування в гідродинаміці, хімічній технології, екології і енергетиці.

Ключові слова: потік рідини, суспензія, рух твердих частинок, двофазне середовище, масоперенос.

Рух твердих частинок у рідині являє собою складний фізичний процес, обумовлений взаємодією інерційних, в'язких і гравітаційних сил. Такі процеси широко зустрічаються в природних і інженерних системах: транспорт наносів у річках, пневмо-гідротранспорт, процеси осадження і фільтрації, робота реакторів з псевдозрідженим шаром.

В залежності від концентрації частинок розрізняють:

- розріджені дисперсні системи (одиначні частинки);
- щільні суспензії (взаємодія частинок суттєва);

Складність задачі обумовлена нелінійністю рівнянь руху і різноманітним режимів течії.

Фундаментальна теорія руху частинок у турбулентних потоках представлена у роботі [1]. Монографії [2, 3] містять теорію з багатофазних течій та моделювання. У роботах [4, 5] описані сучасні чисельні методи (DNS, DEM), що використовуються для вирішення задач руху твердих частинок у потоці рідини та газах.

В даній роботі представлено математичну модель руху твердо-рідинного середовища (суспензії). Для моделювання руху твердих частинок у потоці рідини зазначимо наступні припущення:

- взаємодія між частинками не враховується, оскільки їх розміри та маси є незначними в порівнянні з потоком рідини;
- взаємодія частинок на навколишнє середовище (рідину) також ігнорується, оскільки кількість частинок значно менша за кількість рідини в системі;
- розмір і маса частинок вважаються постійними, так само як і густина рідини.

Тобто, маємо два суцільних середовища, де рідина переносить частинки. Кількість цих частинок невелика і вони не розчиняються у рідині. Рух середовища можна зобразити у вигляді наступної системи рівнянь:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p' + \nu_1(1 + \beta(A + y))\Delta\vec{v} + \left(\zeta' + \frac{\nu_1}{3} + \beta\left(\zeta'y + \frac{\nu_1}{3}(A + y)\right)\right)\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\vec{v}) - \beta y \vec{g} - x \nabla^k (\beta \vec{w}_2 w_2^k), \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}\vec{v} = y(-\vec{\nabla} \cdot (\beta \vec{w}_2) + \Phi), \quad (2)$$

де \vec{v} – барицентрична швидкість середовища в цілому, $p' = p_d/\rho_1^0$ – динамічна складова тиску нормована на густину рідини, $\nu_1 = \mu_1/\rho_1^0$ – кінематична в'язкість рідини, $\zeta' = \zeta'/\rho_1^0$ – друга в'язкість рідини, $\Phi = J_{12}/\rho_2^0$ – інтенсивність фазових перетворень, $y = 1 - x$, $x = \rho_2^0/\rho_1^0$, A – коефіцієнт моделі в'язкості Ейнштейна, β – об'ємна частка твердої фази, \vec{g} – вектор прискорення вільного падіння, \vec{w}_2 – дифузійна швидкість твердої фази.

Враховуючи припущення 3, складова $\Phi = 0$. А враховуючи припущення 2, складовою $x \nabla^k (\beta \vec{w}_2 w_2^k)$ знехтуємо.

Тоді, можемо записати рівняння швидкості руху твердої фази:

$$(C_A + x) \frac{d_2 \vec{v}_2}{dt} = -y \vec{g} + \vec{f}_D - \frac{1}{\beta} x \Phi \vec{v}_2, \quad (3)$$

$$\vec{f}_D = - \left(C_{1D} v_1 \frac{v_{21}}{a^2} + C_{2D} \frac{v_{21}^2}{a} \right) \vec{n}_{21}, \quad (4)$$

де C_A – коефіцієнт приєднаної маси, \vec{v}_2 – швидкість руху твердої фази, \vec{f}_D – питома сила опору, $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ – відносна швидкість фаз, C_{1D} – лінійний (в'язкий) опір (відповідає закону Стокса), C_{2D} – квадратичний (інерційний) опір, який відповідає закону Ньютона при великих числах Рейнольдса. Для наших припущень маємо: $C_{1D} = 18$, $C_{2D} = 0$.

Припущення для рівняння (1) включає незмінність кількості частинок у вибраному одиничному об'ємі, яке виконується при їх узгодженому колективному русі, якщо це не так, то до рівняння (1) ще додається ефективна дифузійна компонента:

$$\vec{w}_2^d = - \frac{1}{\beta} D \vec{\nabla} \beta. \quad (5)$$

Тоді

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2^c + \vec{w}_2^d, \quad (6)$$

де \vec{v}_2^c – колективна складова швидкості твердої фази, яка задовольняє рівнянню (1). З урахуванням цього, рівняння масопереносу твердої фази матиме вигляд:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\beta \vec{v}_2^c) = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} \beta) + \Phi, \quad (7)$$

де D – ефективний коефіцієнт, що описує нерегулярний рух частинок за рахунок турбулентних вихорів.

Турбулентний характер руху враховується двопараметричною моделлю турбулентності, в якості якої виступає алгебраїчний вираз. Для розв'язку рівнянь моделі (1) – (7) використовуємо метод розщеплення за фізичними факторами для несоленоїдалного руху [6].

Висновки

Рух твердих частинок у потоці рідини являє собою фундаментальну задачу механіки суцільних середовищ і багатофазних течій. Сучасні математичні моделі дозволяють враховувати широкий спектр фізичних ефектів, однак

залишаються нерозв'язані проблеми, пов'язані з турбулентністю і взаємодією частинок.

Дана математична модель є удосконаленою версією моделі руху шламу абразивної обробки металу в миючому розчині [7], в якій було використано лагранжевий підхід для опису руху твердих частинок.

Подальший розвиток методів моделювання, включаючи чисельні та експериментальні підходи є перспективним напрямком наукових досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Balachandar, S., & Eaton, J. K. (2010). Turbulent dispersed multiphase flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42, 111–133.
<https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.010908.165243>
2. Crowe, C. T., Schwarzkopf, J. D., Sommerfeld, M., & Tsuji, Y. (2011). *Multiphase Flows with Droplets and Particles* (2nd ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b11103>
3. Fox, R. O. (2012). *Computational Models for Turbulent Reacting Flows*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139033898>
4. Tenneti, S., Garg, R., & Subramaniam, S. (2011). Drag law for monodisperse gas–solid systems using particle-resolved direct numerical simulation. *International Journal of Multiphase Flow*, 37(9), 1072–1092. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.05.010>
5. Guo, Y., & Curtis, J. S. (2015). Discrete element method simulations for complex granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 47, 21–46.
<https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010814-014644>
6. Огурцов А.П., Самохвалов С.Є. Математичне моделювання теплофізичних процесів у багатофазних середовищах. – К.: Наукова думка. – 2001. – 412 с.
7. T. Nadryhailo, V. Vernyhora, A. Korobochka, A. Sasov. Modeling the trajectory of motion of metallic and abrasive particles in a washing gutter / *Eastern European Journal of Advanced Technologies*. VOL 1, NO 1 (103) (2020) ENGINEERING TECHNOLOGICAL SYSTEMS C. 21-31.

IMPROVEMENT OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE MOTION OF SOLID PARTICLES IN LIQUID FLOW

Tetiana Nadryhailo, Olha Bohdanenko

Abstract. *The motion of solid particles in a fluid flow is a classical problem of two-phase hydrodynamics.*

The paper considers the basic laws of motion of solid particles in a fluid flow. The forces acting on the particle are analyzed and a mathematical model of motion is formulated within the framework of the Euler-Euler approach. Particular attention is paid to flow regimes, the influence of turbulence and interphase interaction.

The relevance of the research topic lies in the fact that processes associated with the motion of particles underlie chemical reactors, heat exchangers, water and gas purification systems. Modeling the transport of suspended particles is necessary for predicting pollution of water bodies, assessing sediment accumulation, and analyzing the distribution of microplastics. The processes of transporting solid particles are important in the hydrotransport of coal and ore, drilling wells, and the operation of oil and gas systems. Thus, the problem under consideration has wide application in hydrodynamics, chemical technology, ecology, and energy.

Keywords: *fluid flow, suspension, movement of solid particles, two-phase medium, mass transfer.*

REFERENCES

1. Balachandar, S., & Eaton, J. K. (2010). Turbulent dispersed multiphase flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42, 111–133.
<https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.010908.165243>
2. Crowe, C. T., Schwarzkopf, J. D., Sommerfeld, M., & Tsuji, Y. (2011). *Multiphase Flows with Droplets and Particles* (2nd ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/b11103>
3. Fox, R. O. (2012). *Computational Models for Turbulent Reacting Flows*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139033898>
4. Tenneti, S., Garg, R., & Subramaniam, S. (2011). Drag law for monodisperse gas–solid systems using particle-resolved direct numerical simulation. *International Journal of Multiphase Flow*, 37(9), 1072–1092. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2011.05.010>
5. Guo, Y., & Curtis, J. S. (2015). Discrete element method simulations for complex granular flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 47, 21–46.
<https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010814-014644>
6. Ohurtsov A.P., Samokhvalov S.YE. Matematychnye modelyuvannya teplofizychnykh protse-siv u bahatofaznykh seredovyshchakh. – K.: Naukova dumka. – 2001. – 412 s. [in Ukrainian].
7. T. Nadryhailo, V. Vernyhora, A. Korobochka, A. Sasov. Modeling the trajectory of motion of metallic and abrasive particles in a washing gutter / *Eastern European Journal of Advanced Technologies*. VOL 1, NO 1 (103) (2020) ENGINEERING TECHNOLOGICAL SYSTEMS C. 21-31.