

**АЛГОРИТМ BRANCH-CUT-AND-PRICE ДЛЯ ТОЧНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ
ЗАДАЧІ МАРШРУТИЗАЦІЇ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ З ОБМЕЖЕННЯМИ
НА ВАНТАЖОПІДЙОМНІСТЬ**

Ленський М.М.¹ [ORCID], Михальчук Г.Й.² [ORCID]

¹Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, аспірант, Україна

²Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
кандидат фізико-математичних наук, Україна

Анотація. У роботі подано реалізацію алгоритму *branch-cut-and-price* для точного розв'язання задачі маршрутизації транспортних засобів з обмеженнями на вантажопідйомність (*Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP*). Метод поєднує модель розбиття множини (*set partitioning formulation*), стартову евристику на основі алгоритму Кларка-Райта, породження маршрутів із від'ємною зведеною вартістю (*reduced cost*) та округлені ємнісні нерівності (*rounded capacity inequalities*). У межах генерації стовпців алгоритм спочатку намагається знайти нові маршрути швидшим евристичним способом; за певних налаштувань під час такого пошуку застосовується спрощена перевірка того, що маршрут не містить повторних відвідувань клієнтів. Якщо таким способом нових маршрутів не знайдено, алгоритм переходить до точного пошуку маршрутів без повторних відвідувань клієнтів і лише після цього завершує генерацію стовпців. На стандартних екземплярах CVRP розмірності від 16 до 60 вершин включно з депо реалізація алгоритму відтворила відомі оптимуми.

Ключові слова: CVRP, маршрутизація транспортних засобів, *branch-cut-and-price*, генерація стовпців, розбиття множини, комбінаторна оптимізація, цілочисельне програмування, лінійна релаксація, точні та евристичні методи, логістика.

Вступ. Задача маршрутизації транспортних засобів з обмеженнями на вантажопідйомність (*Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP*) є однією з базових задач транспортної логістики та комбінаторної оптимізації [1]. Для її точного розв'язання найбільш результативними вважаються методи, що поєднують модель розбиття множини (*set partitioning formulation*), генерацію стовпців і систему відсічень [2-6]. Практична цінність таких підходів полягає в

тому, що вони дають не лише план маршрутів, а й підтвердження його оптимальності.

Основний матеріал. У запропонованому методі кожний допустимий маршрут розглядається як окрема змінна моделі розбиття множини (set partitioning formulation). Головна задача вимагає, щоб кожного клієнта було включено рівно до одного маршруту, а сумарна кількість обраних маршрутів не перевищувала кількість доступних транспортних засобів. Початковий допустимий розв'язок формується стартовою евристиккою на основі алгоритму Кларка-Райта.

На кожній ітерації розв'язується обмежена головна задача, тобто модель з поточним набором уже згенерованих маршрутів, після чого виконується пошук нового маршруту, здатного покращити поточну лінійну релаксацію. Для цього розв'язується підзадача генерації стовпців, у якій шукаються маршрути з від'ємною зведеною вартістю (reduced cost). Після додавання відсічень і обмежень розгалуження у виразі зведеної вартості враховуються також двоїсті оцінки відповідних активних обмежень.

Для прискорення пошуку спочатку використовується евристичний режим підзадачі; за певних налаштувань алгоритму він застосовує спрощену перевірку відсутності повторних відвідувань клієнтів у маршруті. Якщо нових стовпців у цьому режимі не знайдено, перед завершенням генерації стовпців обов'язково виконується точний пошук маршрутів без повторних відвідувань клієнтів. Отже, генерація стовпців завершується лише тоді, коли точно встановлено, що маршрутів без повторних відвідувань клієнтів із від'ємною зведеною вартістю більше не існує.

Округлені емнісні нерівності (rounded capacity inequalities) [4, 5] посилюють лінійну релаксацію і поліпшують оцінку знизу для цільової функції. Якщо в поточному вузлі дерева пошуку отримано дробовий розв'язок, виконується розгалуження за дугою, тобто за переходом між двома вершинами, сумарне використання якого в обраних маршрутах є нецілим. У цілочисленному розв'язку така дуга або використовується, або не використовується, тобто відповідна величина набуває лише значень 0 або 1. В

одному дочірньому вузлі накладається умова, що ця дуга має використовуватися, а в іншому - що її використання заборонено. Така схема зберігає узгодженість між головною задачею та підзадачею породження маршрутів і забезпечує коректність усієї процедури branch-cut-and-price.

Для експериментальної перевірки використано одинадцять стандартних екземплярів CVRP серії P, що охоплюють діапазон розмірностей від 16 до 60 вершин включно з депо і різну кількість доступних транспортних засобів [7]. Серія тестів має валідаційний характер і призначена для перевірки реалізації алгоритму. Обчислення виконувалися на персональному комп'ютері з процесором AMD Ryzen 5 7600 (6 ядер, 12 потоків) та 32 ГБ оперативної пам'яті. Для кожного екземпляра було виконано по десять послідовних запусків у штатній конфігурації реалізації; час вимірювався як повний час одного завершеного запуску алгоритму, після чого обчислювалося середнє арифметичне. У табл. 1 наведено відомі оптимуми, отримані значення цільової функції та середній час за десять запусків.

Таблиця 1

Результати обчислювального експерименту

Екземпляр	Кількість вершин, включно з депо	Кількість доступних транспортних засобів	Відомий оптимум	Отримане значення	Час, с
P-n16-k8	16	8	450	450	0,31
P-n19-k2	19	2	212	212	1,32
P-n20-k2	20	2	216	216	1,36
P-n21-k2	21	2	211	211	0,91
P-n22-k2	22	2	216	216	1,29
P-n23-k8	23	8	529	529	0,36
P-n40-k5	40	5	458	458	16,13
P-n45-k5	45	5	510	510	107,15
P-n50-k7	50	7	554	554	13,87
P-n50-k10	50	10	696	696	31,86
P-n60-k10	60	10	744	744	72,97

Із табл. 1 видно, що на всіх досліджених екземплярах у всіх десяти запусках отримані значення повністю збігаються з відомими оптимумами. Для задач із 16-23 вершинами включно з депо середній час розв'язання не перевищує 2 с, а для задач із 40-60 вершинами змінюється в межах від 13,87 до

107,15 с. Порівняння наведених у табл. 1 результатів показує, що складність задачі визначається не лише кількістю вершин, а й структурою конкретного екземпляра. Сукупність наведених результатів свідчить про практичну придатність запропонованого методу в розглянутому діапазоні задач малої та середньої розмірності.

Висновки

Подано реалізацію алгоритму branch-cut-and-price для точного розв'язання задачі маршрутизації транспортних засобів з обмеженнями на вантажопідйомність, у якій поєднано модель розбиття множини, генерацію стовпців, округлені ємнісні нерівності та розгалуження за дугами з нецілим сумарним використанням у поточному розв'язку. У поданій реалізації евристичне породження маршрутів використовується лише як прискорювальний етап, тоді як генерація стовпців завершується тільки після точного пошуку маршрутів без повторних відвідувань клієнтів. Обчислювальні експерименти на одинадцяти стандартних екземплярах із 16-60 вершинами включно з депо показали, що реалізація алгоритму у всіх наведених випадках відтворює відомі оптимуми. Отримані результати дають підстави розглядати цей підхід як придатну основу для подальших досліджень точних і гібридних методів маршрутизації в розглянутому діапазоні розмірностей.

ЛІТЕРАТУРА / REFERENCE

1. Archetti C., Coelho L.C., Speranza M.G., Vansteenwegen P. Beyond fifty years of vehicle routing: Insights into the history and the future. *European Journal of Operational Research*. 2026. Vol. 330, No. 2. P. 355-372. DOI: 10.1016/j.ejor.2025.06.014.
2. Costa L., Contardo C., Desaulniers G. Exact Branch-Price-and-Cut Algorithms for Vehicle Routing. *Transportation Science*. 2019. Vol. 53, No. 4. P. 946-985. DOI: 10.1287/trsc.2018.0878.
3. Feillet D., Dejax P., Gendreau M., Gueguen C. An exact algorithm for the elementary shortest path problem with resource constraints: Application to some vehicle routing problems. *Networks*. 2004. Vol. 44, No. 3. P. 216-229. DOI: 10.1002/net.20033.
4. Fukasawa R., Longo H., Lysgaard J., Poggi de Aragao M., Reis M., Uchoa E., Werneck R.F. Robust Branch-and-Cut-and-Price for the Capacitated Vehicle Routing Problem. *Mathematical Programming*. 2006. Vol. 106, No. 3. P. 491-511. DOI: 10.1007/s10107-005-0644-x.

5. Baldacci R., Christofides N., Mingozzi A. An exact algorithm for the vehicle routing problem based on the set partitioning formulation with additional cuts. *Mathematical Programming*. 2008. Vol. 115, No. 2. P. 351-385. DOI: 10.1007/s10107-007-0178-5.
6. Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Uchoa E. Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing. *Mathematical Programming Computation*. 2017. Vol. 9, No. 1. P. 61-100. DOI: 10.1007/s12532-016-0108-8.
7. All Instances – CVRPLIB. GALGOS – Algorithms, Optimization and Simulation Group. URL: <https://galgos.inf.puc-rio.br/cvrplib/index.php/en/instances> (date of access: 02.04.2026).

BRANCH-CUT-AND-PRICE ALGORITHM FOR THE EXACT SOLUTION OF THE VEHICLE ROUTING PROBLEM WITH CAPACITY CONSTRAINTS

Mykhailo Lenskyi, Hanna Mykhalchuk

Abstract. *The paper presents an implementation of a branch-cut-and-price algorithm for the exact solution of the Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP). It combines a set-partitioning formulation, a Clarke-Wright-based initial heuristic, the generation of negative reduced-cost routes, and rounded capacity inequalities. Within the column-generation procedure, the algorithm first attempts to find new routes by a faster heuristic search; under certain algorithm settings, this search uses a simplified check that a route does not revisit customers. If no new routes are found in this way, the algorithm performs an exact search for routes without repeated customer visits before terminating column generation. On standard CVRP instances with 16 to 60 vertices, including the depot, the implementation matched the known optimal values.*

Keywords: *CVRP, vehicle routing, branch-cut-and-price, column generation, set partitioning, combinatorial optimization, integer programming, linear relaxation, exact and heuristic methods, logistics.*