

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ РЕСУРСІВ

Косолап А.І. [ORCID]

Дніпровський національний університет ім. О. Гончара,

докт. фіз.-мат. наук, професор, Україна

Анотація. Розглядається задача математичного моделювання систем оптимального розподілу обмежених ресурсів. Ця задача залишається актуальною та найбільш досліджуваною вже понад сімдесят років. Це пов'язано зі складністю задач оптимального розподілу ресурсів, яка відноситься до класу NP-складних задач. Побудовано безліч оптимізаційних моделей, які мають велику розмірність та комбінаторну структуру. Такі моделі можуть розв'язуватися сучасними програмами тільки для задач малої розмірності. В роботі пропонуються порівняно прості оптимізаційні моделі, для яких розроблено програмне забезпечення. Програмне забезпечення використовує модуль Python CP-SAT для розв'язування лінійних оптимізаційних задач з цілими та булевими змінними. Розроблено також алгоритм розподілу ресурсів, на кожній ітерації якого розв'язуються ще простіші оптимізаційні задачі. Проведені обчислювальні експерименти показують, що запропоновані оптимізаційні моделі можуть ефективно розв'язуватися для задач середньої і навіть великої розмірності.

Ключові слова: оптимізаційна модель, оптимальний розподіл ресурсів, модуль CP-SAT, обчислювальні результати.

Вступ. Кожен проект, який реалізується в більшості сфер людської діяльності так чи інакше використовує ресурси. Це може бути сировина, устаткування, машини, фінанси, робітники, інформація, час та інше. Так як більшість ресурсів обмежена, то виникає проблема їх оптимального використання. Задача оптимального розподілу ресурсів включає деяку послідовність пов'язаних робіт з заданими термінами та ресурсами для їх виконання. Необхідно виконати дану послідовність робіт за мінімальний час і при цьому не перевершити заданої границі використання кожного ресурсу. Проект, як правило, представляється мережевим графіком, дуги якого вказують на послідовність виконання робіт.

Даній темі присвячено безліч публікацій, зокрема й оглядових робіт [1-5]. Розробляються як точні, так і метаевристичні методи [4-5]. Більшість моделей

оптимального розподілу ресурсів розбивають інтервал T виконання проекту, що складається з n робіт, на m підінтервалів. Тоді кожній роботі відповідає m булевих змінних, які дорівнюють одиниці тільки на інтервалі виконання кожної роботи. Таким чином, отримуємо $mT + 1$ змінну, достатню для побудови оптимізаційної моделі. Наприклад, для 100 робіт та 100 інтервалів часу отримаємо модель з 10000 булевими змінними. Якщо в якості змінних брати час початку кожної роботи, то модель буде містити тільки $n + 1$ змінну, але при цьому виникає проблема, як задати обмеження на використання ресурсів. Ця проблема вирішується в даній роботі.

Основний матеріал. Будемо припускати, що маємо послідовність n робіт з термінами їх виконання $t_i, i = 1, \dots, n$. Крім того, відомо кількість ресурсів r_i , яка потрібна для виконання i -ї роботи, а також максимальна кількість ресурсу R , яка не може бути перевершена під час виконання проекту. Необхідно виконати проект за мінімальний час при якому в кожний момент часу використовується не більше R ресурсів. Задачі виконання проектів часто розглядаються на мережевих графіках, зокрема знаходяться критичні шляхи в мережевому графіку, але при цьому задача оптимального розподілу ресурсів, як правило, не розглядається.

При виконанні проекту необхідно враховувати, що деякі роботи передують іншим, що визначається мережевим графіком робіт. Ця задача допускає різні узагальнення. Зокрема, ресурсів може бути декілька, терміни робіт можуть змінюватись, а також змінюватись інтенсивність використання ресурсів. Буде показано, що ці узагальнення легко врахувати, якщо побудована ефективна модель початкової задачі.

Для побудови моделі необхідно знати час початку виконання кожної роботи, який ми будемо позначати через x_i і його потрібно знайти. Задача полягає в мінімізації часу T виконання проекту, тобто

$$\min\{T \mid x_i + t_i \leq T, i=1, \dots, n, x_i \geq 0, x_i + t_i \leq t_j, \text{ " } ij \in B\}, \quad (1)$$

де B – множина пар індексів пов'язаних робіт.

В модель (1) необхідно додати обмеження на ресурси. Кількість ресурсів достатньо визначати тільки на початку виконання кожної роботи, так як тільки в ці моменти збільшується використання ресурсів. В кожний такий момент

необхідно визначити, які роботи виконуються і знайти сумарне значення таких ресурсів. Легко показати, що якщо i -та робота виконується в момент початку j -ї роботи, то тільки тоді буде виконуватися наступна квадратична нерівність

$$(x_i + t_i - x_j)(x_j - x_i) \geq 0, \quad i \neq j. \quad (2)$$

Тоді обмеження на ресурси можна записати у вигляді

$$r_j + \sum_{i=1(i \neq j)}^n r_i (\text{sign}[(x_i + t_i - x_j - \varepsilon)(x_j - x_i + \varepsilon)] + 1) / 2 \leq R, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Величина $\varepsilon = 0,001$ виключає рівність нулю функції sign . Коефіцієнт при r_i в формулі (3) буде дорівнювати одиниця тільки тоді, коли i -та робота виконується. Таким чином, отримана модель оптимального розподілу ресурсу (1), (3) мінімальної розмірності. Але обмеження (3) є досить складним, що затрудняє розв'язок задачі (1), (3) існуючими методами та програмами.

Для побудови практичної моделі введемо нові змінні z_{ij} , які дорівнюють нулю, якщо в момент початку j -го завдання виконується i -те завдання, інакше ця змінна дорівнює нулю. Це дозволяє задати обмеження на ресурси у вигляді

$$r_j + \sum_{i=1}^n r_i z_{ij} \leq R, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Значення змінних z_{ij} будуть залежати від значень x_i , тому таку залежність необхідно задати додатковими обмеженнями. Для цього введемо ще одну змінну y_{ij} , яка дорівнює одиниці, якщо $x_i \leq x_j$ інакше вона дорівнює нулю. Тоді будемо мати наступні обмеження

$$\begin{aligned} -Q y_{ij} &\leq (x_i - x_j - \varepsilon) \leq Q(1 - y_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n (j \neq i), \\ Q(z_{ij} - y_{ij}) &\leq (x_i + t_i - x_j) \leq Q(z_{ij} - y_{ij} + 1), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n (j \neq i), \\ z_{ij} &\leq y_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n (i \neq j), \end{aligned} \quad (5)$$

де Q – велике число, достатньо покласти $Q = \sum_{i=1}^n t_i$.

Покажемо, що обмеження (5) еквівалентні обмеженням (2). Обмеження (5) виконується, якщо $y_{ij} = 1$. Якщо $y_{ij} = 0$, то умова $x_i \leq x_j$ не виконується, в цьому випадку $x_i \geq x_j$. Розглянемо перше обмеження (5). Нехай $z_{ij} = 1$, тоді й $y_{ij} = 1$ з останнього обмеження (5). Тоді виконується обмеження $x_i + t_i - x_j \geq 0$ і $x_j - x_i \geq 0$ і умова (5) виконується. Якщо $z_{ij} = 0$ і $y_{ij} = 0$, то $x_i + t_i - x_j > 0$, $x_j - x_i < 0$ і умова порушується. Навіть, якщо $z_{ij} = 0$ і $y_{ij} = 1$, то $x_i + t_i - x_j < 0$, $x_j - x_i > 0$ і умова (5) знову порушується. Таким чином, побудована модель оптимального розподілу ресурсів (1), (4)-(5), яка є лінійною з булевими та цілими змінними. Кількість змінних моделі дорівнює $1 + 2n^2 - n$, а кількість обмежень $3n^2 - n$ не враховуючи лінійні обмеження для пов'язаних робіт.

Для моделі (1), (4)-(5) розроблено програмне забезпечення, яке дозволяє розв'язувати задачі оптимального розподілу ресурсів з кількістю робіт 100 і більше. Нижче, на рис. 1 показаний графік виконання робіт, отриманий програмою.

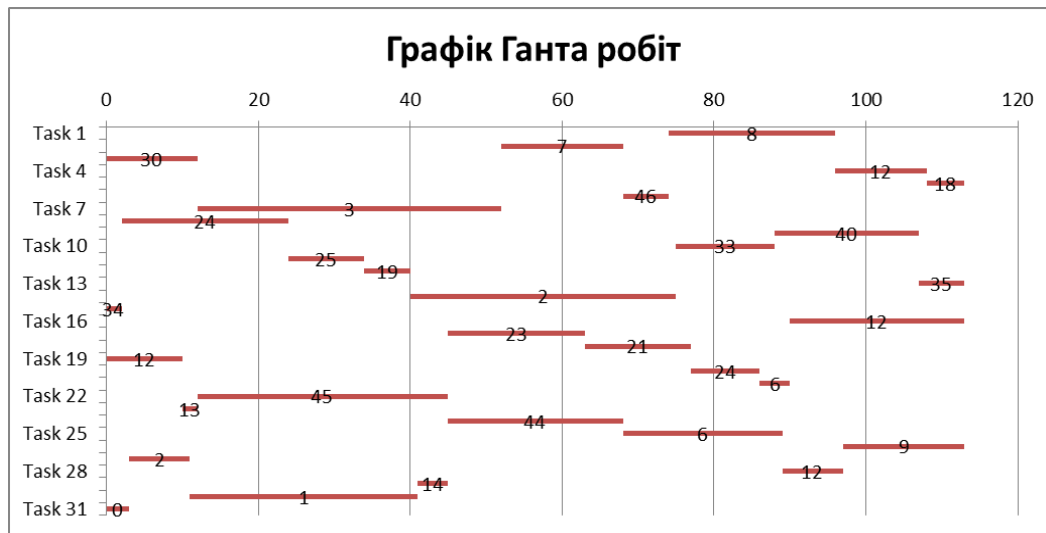


Рисунок 1 – Графік Ганта оптимального виконання робіт

Далі побудуємо дещо спрощену модель даної задачі. Будемо допускати, що мається послідовність n робіт і для кожної роботи відомий максимальний термін її виконання $[p_i, q_i]$ та обсяг ресурсів w_i на їх виконання. Обсяг ресурсу на кожну роботу в довільний момент часу не повинен перевищувати величини r_i , а сумарна кількість ресурсів величини R . Необхідно виконати всі роботи за мінімальний час і при цьому не порушити обмеження на ресурси. Розібємо інтервал планування проекту $[0, \max\{q_i\}]$ на m підінтервалів. Позначимо через x_{ij} кількість ресурсів, яка виділяється на виконання i -ї роботи в j -му періоді. Будемо розв'язувати задачу

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n x_{i q_i} \mid \sum_{j=p_i}^{q_i} x_{ij} = w_i, i=1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq R, j = p_1, \dots, p_n, 0 \leq x_{ij} \leq r_i, i, j = p_1, \dots, p_n \right\}. \quad (6)$$

Якщо в розв'язку задачі (6) деякі з $x_{i q_i}$ дорівнюють нуля, то зміщуємо на один інтервал наступні роботи і знову розв'язуємо задачу (6). Процес пошуку оптимального розподілу ресурсів закінчується якщо всі $x_{i q_i}$ будуть більше нуля. Тоді час виконання проекту буде дорівнювати оновленному значенню $\max\{q_i\}$. Лінійна модель (6) дозволяє розв'язувати задачі великої розмірності і також реалізована програмно з використанням модуля CP-SAT.

Висновки. Запропоновані нові оптимізаційні моделі оптимального розподілу ресурсу при виконанні послідовності робіт. Проведені обчислювальні експерименти, які свідчать про ефективність запропонованих моделей. Моделі легко узагальнюються на задачі з декількома видами ресурсів за рахунок додаткових відповідних обмежень.

ЛІТЕРАТУРА / REFERENCE

1. Artigues C., Hartmann S., Vanhoucke M. Fifty years of research on resource-constrained project scheduling explored from different perspectives. *European Journal of Operational Research*. – 2026. № 328(2). P. 367–389. DOI: 10.1016/j.ejor.2025.03.024.
2. Hartmann S., Briskorn, D. An updated survey of variants and extensions of the resource-constrained project scheduling problem. *European Journal of Operational Research*. – 2022. № 297(1). P.1–14. DOI: 10.1016/j.ejor.2021.05.004.
3. Artigues C. On the strength of time-indexed formulations for the resource-constrained project scheduling problem. *Operations Research Letters*. – 2017. № 45(2). P. 154–159. DOI: 10.1016/j.orl.2017.02.001.
4. Vanhoucke M., Coelho J. A matheuristic for the resource-constrained project scheduling problem. *European Journal of Operational Research*. – 2024. №319(3), P. 711–725. DOI: 10.1016/j.ejor.2024.07.016.
5. Pellerin R., Perrier N., Berthaut F. A survey of hybrid metaheuristics for the resource-constrained project scheduling problem. *European Journal of Operational Research*. – 2020. № 280(2). P. 395–416. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.01.063.

MODELING OF OPTIMAL RESOURCE ALLOCATION PROBLEMS

Anatolii Kosolap

Abstract. *We consider the problem of mathematical modeling of systems of optimal allocation of limited resources. This problem remains relevant and has been the most studied for over seventy years. This is due to the complexity of optimal resource allocation problems, which belong to the class of NP-hard problems. Many optimization models have been constructed that have a high dimension and a combinatorial structure. Such models can be solved by modern programs only for low-dimensional problems. The work proposes relatively simple optimization models for which software has been developed. The software uses the Python CP-SAT module to solve linear optimization problems with integer and Boolean variables. A resource allocation algorithm has also been developed, at each iteration of which even simpler optimization problems are solved. The computational experiments performed show that the proposed optimization models can be effectively solved for problems of medium and even high dimension.*

Keywords: *optimization model, optimal resource allocation, CP-SAT module, computational results.*