DOI: 10.34185/1991-7848.itmm.2021.01.038

МОДЕЛЬ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ З БЕЗПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

Мороз Д.М.

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
м Дніпро, Україна

Вступ. Паралельні обчислювальні технології розвиваються дуже швидко, а з появою обчислювальних кластерів паралельні обчислення сталі доступні багатьом [1, 2]. Створення паралельних обчислювальних систем зажадало розробки математичних концепцій побудови паралельних алгоритмів, тобто алгоритмів, пристосованих до реалізації на подібних обчислювальних системах [3, 4]. У даній роботі на прикладі розв’язку нестаціонарного рівняння конвективно-дифузійного перенесення, показана ефективність розпаралелювання обчислень на основі методу прямих.

Розробка обчислювальних схем проводилася з урахуванням наступних обставин. Температурні поля в умовах конвективного теплообміну пов'язані з полями швидкостей. У загальному випадку між полем швидкостей і температурним полем існує зв'язок, тобто розподіл температури залежить від розподілу швидкостей і, навпаки, розподіл швидкостей залежить від розподілу температури. У окремому випадку, коли масовими силами в рівняннях руху можна нехтувати, а в'язкість вважати не залежною від температури, то двосторонній зв'язок перетворюється на односторонній. Розподіл швидкостей стає незалежним від розподілу температури. В цьому випадку можна говорити про задачу тепло - і масообміну, яка розв'язується на заданому фоні динамічних полів швидкості. Відомою проблемою, що виникає при побудові різницевих схем для цього класу задач, є апроксимація нелінійних конвективних складових, що входять в ці рівняння. Теоретичні дослідження цих процесів нині значною мірою базуються на їх числовому моделюванні з використанням сучасних комп'ютерних технологій. Зокрема, застосування багатопроцесорних обчислювальних систем зумовило розвиток і методів розпаралелювання обчислень, векторизації й синхронізації обчислювальних процесів. У доповіді показано, що побудова числово-аналітичних схем з безперервним часом, по-перше, має максимальну паралельну форму, що відповідає концепції неорганічного паралелізму, і, по-друге, є перспективним при розв'язуванні великих завдань металургійної теплофізики у поєднанні з методами розщеплювання на аналітичних рішеннях з адаптацією за часом.

Основний матеріал. Створення паралельних обчислювальних систем зажадало розробку математичної концепції побудови паралельних алгоритмів, тобто алгоритмів, пристосованих до реалізації на подібних системах. Основою побудови паралельного алгоритму може служити як послідовний алгоритм, так і задача сама по собі. При розпаралелюванні послідовного алгоритму найбільш розумним видається прагматичний підхід, а саме в послідовних алгоритмах виявляються елементи, що часто зустрічаються, які потім трансформуються в паралельну форму.

Для побудови максимально паралельних числово-аналітичних схем на підставі апріорної інформації шукана функція представляється у вигляді ряду Тейлора

$$Y_{p+\varepsilon_x,1}(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_x^n \cdot Y_{p,n+1}(t), \tag{1}$$

де

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{x-x_p}{x_{p+1}-x_p} \in [+1,-1], \\ Y_{p,n+1} = \dfrac{Dx1^n}{n!} \cdot \dfrac{\partial Y}{\partial x^n}\bigg|_{x=x_p} . \end{cases}$$

Після узгодження (1) з досліджуваним рівнянням і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε_x^n, отримують систему звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР)

$$Y'_{p,n+1}(t) = \frac{(n+1)(n+2)}{Dx1^2} \cdot Y_{p,n+3}(t) \tag{2}$$

які мають форму Коши

$$Y_{p,n+1}(0) = \varphi_{p,n+1}, \tag{3}$$

де $\phi_{p,n+1}$ – відомі значення тейлоровских компонент початкової функції. Обмежимося в правій частині ряду Тейлора (1) кінцевим числом доданків $n=N$, тоді отримують

$$Y_{p+\varepsilon_x,1}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_x^n \cdot Y_{p,n+1}(t), \tag{4}$$

де N – ціле число. Щоб апроксимувати досліджуване рівняння в точці (x_p,t) введемо в розгляд замикаючі зв'язки

$$\begin{Bmatrix} Y_{p,N+1} \\ Y_{p,N} \end{Bmatrix}. \tag{5}$$

Поклавши в (4) $\varepsilon_x=\pm 1$, отримують на триточковому шаблоні систему з двох рівнянь алгебри

$$\begin{cases} Y_{p,N+1}+Y_{p,N}=\left[Y_{p+1,1}-\sum\limits_{n=0}^{N-2} Y_{p,n+1}\right], \\ Y_{p,N-1}-Y_{p,N-1}=(-1)^N\cdot\left[Y_{p-1,1}-\sum\limits_{n=0}^{N-2}(-1)^n\cdot Y_{p,n+1}\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Знайдемо

$$\begin{Bmatrix} Y_{p,N+1} \\ Y_{p,N} \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left\{\left[Y_{p+1,1}\pm(-1)^N\cdot Y_{p-1,1}\right]-\sum\phi_n^{\pm}\cdot Y_{p,n+1}\right\}, \tag{7}$$

де

$$\varphi_n^{\pm}=1+(-1)^{n+N}, \quad N=2,3,4,. \tag{8}$$

нормуючі множники.

Порядок точності обчислень визначається утриманим значенням N. Так, при N= 2 значення $n=\overline{0,0}$ і тоді отримують

$$\begin{cases} Y_{p,2}=\frac{1}{2}\cdot\left[Y_{p+1,1}-Y_{p-1,1}\right], \\ Y_{p,3}=\frac{1}{2}\cdot\left\{\left[Y_{p+1,1}+Y_{p-1,1}\right]-2\cdot Y_{p,1}\right\}. \end{cases} \tag{9}$$

Після підстановки (9) в (4) отримаємо СЗДР

$$Y'_{p,1}(t)=\frac{1}{Dx1^2}\cdot\left\{\left[Y_{p+1,1}(t)+Y_{p-1,1}(t)\right]-2Y_{p,1}(t)\right\}, \quad p=\overline{1,2m-1}, \tag{10}$$

де $\left\{Y_{0,1}(t), Y_{2m,1}(t)\right\}$ – граничні функції першого роду.

Помітимо, що розвинений підхід включає звичайні скінечно-різницеві методи як окремий випадок. Так, схема (7) співпадає з класичною задачею Дирiхле, а схема (10) – із задачею Неймана. Для задачі (10) характерно і те, що передача інформації на межах області в схему рахунку внутрішньої точки реалізується точно без пониження порядку апроксимації.

Розроблена процедура числово-аналітичної дискретизації досить просто узагальнюється і на інші типи диференціальних рівнянь математичної фізики.

Задавшись метою синтезувати паралельні алгоритми цього методу із співвідношень (9) витікає, що він вписується в концепцію необмеженого паралелізму. Дійсно, якщо можна призначити один процесор на один вузол розрахункової області, то стає можливим проведення розрахунків в усіх вузлах паралельно.

Висновки. Для дослідження задач тепло - і масообміну виведено відповідний клас математичних моделей. Процедура обробки математичних моделей зведена до використання числово-аналітичного підходу, що дозволило розробити ефективні алгоритми рішень коефіцієнтних задач довільного порядку точності. У доповіді наводяться результати рішення тестових завдань на основі запропонованого підходу.

Отже, побудова числово-аналітичних схем з безперервним часом, по-перше, має максимальну паралельну форму, що відповідає концепції неорганічного паралелізму, і, по-друге, є перспективним при розв'язуванні великих задач металургійної теплофізики у поєднанні з методами розщеплювання на аналітичних рішеннях з адаптацією за часом.

Література

1. Shvachych G.G. Prospects of construction highly-productive computers systems on the base of standard technologies. Strategy of Quality in Indastry and Education : IV Intrenational Conference. May 30 – June 6. 2008, Varna, Bulgaria, 2008. Vol. 2. P. 815 – 819.

2. Швачич Г.Г., Побочий И.А., Иващенко Е.В., Сушко Л.Ф. Математическое моделирование теплофизических свойств материалов обратными методами. Вісник Херсонського національного університету. Херсон. 2019. № 2 (69). Ч. 3. С. 211 – 215.

3. Швачич Г.Г., Иващенко В.П., Іващенко О.В. Чисельно-аналітична концепція розв’язків прикладних задач на основі схем підвищеного порядку точності. Комп’ютерне моделювання: аналіз, управління, оптимізація. Дніпро. 2017. № 1. С. 85 – 89.

4. Швачич Г.Г. Об алгебраическом подходе в концепции распределенного моделирования многомерных систем. Теория и практика металлургии. 2007. № 6(61). С. 73 – 78.

ISSN-online 2708-0102

PARALLEL COMPUTING MODEL WITH CONTINUOUS TIME

Moroz Dmytro

Abstract. The aim of this work is to construct a numerical-analytical method of designing efficient algorithms for solution of tasks having the parabolic type. Using a priori information about the smoothness of solutions, great attention is paid to the construction of solutions of high -order accuracy. Creation of parallel computing systems required the development of mathematical concepts for constructing parallel algorithms, i.e. algorithms adapted for implementation in these systems. As the basis for constructing the parallel algorithm we can take both: a sequential algorithm and the task itself as well. The most sensible at parallelization of sequential algorithm is pragmatic approach; actually sequential algorithms detect common elements which further are transformed to a parallel form. It is shown, that the algorithm of numerical - analytical vectorization has the maximal parallel form and, hence, minimally possible time for realization on parallel computing devices.

Keywords: numerical-analytical method, parabolic type, solutions of high-order accuracy.

References

1. Shvachych G.G. Prospects of construction highly-productive computers systems on the base of standard technologies. Strategy of Quality in Indastry and Education : IV Intrenational Conference. May 30 – June 6. 2008, Varna, Bulgaria, 2008. Vol. 2. P. 815 – 819.
2. Shvachych G.G., Pobochiy I.A., Ivaschenko E.V., Sushko L.F. Matematicheskoe modelirovanie teplofizicheskih svoystv materialov obratnyimi metodami. VIsnik Hersonskogo natsIonalnogo unIversitetu. Herson. 2019. № 2 (69). Ch. 3. S. 211 – 215.
3. Shvachych G.G., Ivaschenko V.P., Ivaschenko O.V. Chiselno-analItichna kontseptsIya rozv'yazkIv prikladnih zadach na osnovI shem pIdvischenogo poryadku tochnostI. Komp'yuterne modelyuvannya: analIz, upravlInnya, optimIzatsIya. DnIpro. 2017. № 1. S. 85 – 89.
4. Shvachych G.G. Ob algebraicheskom podhode v kontseptsii raspredelennogo modelirovaniya mnogomernyih sistem. Teoriya i praktika metallurgii. 2007. № 6(61). S. 73 – 78.