

СТЕРЕОМЕТРІЯ СТИСНУТИХ КОНОЇДІВ ЕЛЕМЕНТА Q_8

Хомченко А. Н., д.ф.-м. н., професор, Литвиненко О.І., к.т.н., доцент,
Дудченко О.М. к.т.н., професор, Астіоненко І.О., к.ф.-м.н, доцент

*Чорноморський національний університет ім. Петра Могили,
м. Миколаїв, Україна*

*Херсонська філія Національного університету
кораблебудування ім. адм. Макарова*

Херсонський національний технічний університет, Україна

Вступ. В методі скінченних елементів (МСЕ) головна проблема пов'язана із побудовою базису скінченних елементів (СЕ), який задовольняє умовам інтерполяційної гіпотези Лагранжа. Особливо це стосується стандартних серендипових СЕ, які математично обґрунтовані, але фізично неадекватні. Йдеться про від'ємні навантаження в кутових вузлах, які можна спостерігати, наприклад, на елементах Q_8 і Q_{12} [1]. Вузлове навантаження залежить від об'єму між відповідною базисною поверхнею і площиною носія. Коноїд - це лінійчата поверхня з нульовою кривиною Гаусса. “Жорстка” модель коноїда містить надлишковий об'єм тіла. Тому автори роботи запропонували іншу стереометрію моделі Q_8 , відмовившись від коноїдів [2, 3]. Нові моделі отримали фізичну адекватність, але втратили технологічну привабливість для архітекторів і будівельників. Але відмовлятися від коноїдів не обов'язково. У цій роботі ми зменшуємо навантаження на проміжний вузол за рахунок стиснення напрямної коноїда. Твірна лишається прямолінійною. Виявляється, що нову стереометрію коноїдів краще створювати за допомогою тригонометричних функцій.

Основна частина. Розглянемо серендипів СЕ Q_8 з носієм у формі канонічного квадрата: $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Повне уявлення про базис Q_8 дають дві функції: “кутова” $N_1(x, y)$ та “проміжна” $N_5(x, y)$. Ці функції реалізують біквадратичну інтерполяцію і мають вигляд:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y), \text{ аналогічно для } i = 2, 3, 4;$$

$$N_5(x, y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y), \text{ , аналогічно для } i = 6, 7, 8,$$

де i – номер функції, що асоціюється з номером вузла.

Поверхня $N_5(x, y)$ – це коноїд, в якому напрямною є парабола, а твірною – пряма. Значення вузлового навантаження γ_i залежать від об'єму між поверхнею коноїда і площиною носія і обчислюються за правилом інтегрального усереднення, яке відоме з часів Ньютона і Котеса:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \iint_D N_i(x, y) dx dy, \quad i = 1, 2, \dots, 8, \quad (1)$$

де S – площа носія.

З геометричної точки зору γ_i – це середня апліката поверхні $N_i(x, y)$. Вузлові навантаження на стандартному $Q8$ такі:

$$\gamma_i = -\frac{1}{12}, \text{ , для } i = 1, 2, 3, 4;$$

$$\gamma_i = \frac{1}{3}, \text{ , для } i = 5, 6, 7, 8.$$

Треба шукати альтернативні базиси $Q8$, для яких виконується умова $V_i \leq 1$.

Для стандартного базису ця умова не виконується: $V_5 = \frac{4}{3}$. Щоб зменшити об'єм під коноїдом, можна прогнути твірну, як це зроблено в роботах [2, 3].

На жаль, при цьому зникають коноїди, а разом з ними зникають технологічні переваги та естетична привабливість моделі. Нижче показано, як зменшити об'єм під коноїдом шляхом стиснення напрямної. У цьому способі замість фрагмента параболи у ролі напрямної ми використовуємо фрагменти тригонометричних кривих. Ефект зменшення об'єму ілюструють наступні альтернативні моделі коноїдів (рис. 1-2):

$$\text{Модель 1: } \bar{N}_5(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \cdot (1-y);$$

$$\text{Модель 2: } \bar{N}_5(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{2} \cdot (1-y);$$

$$\text{Модель 3: } \bar{N}_5(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \cos^4 \frac{\pi x}{2} \cdot (1-y).$$

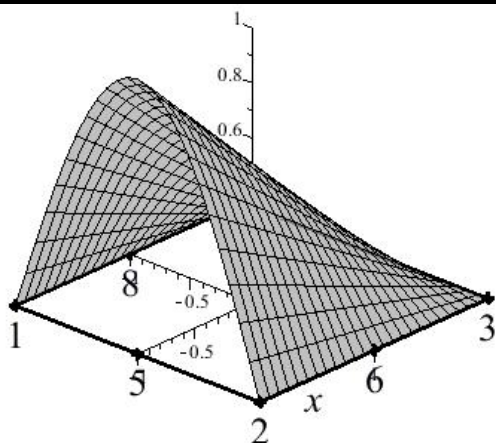


Рисунок 1 – Функція $\bar{N}_5(x, y)$
 моделі 1

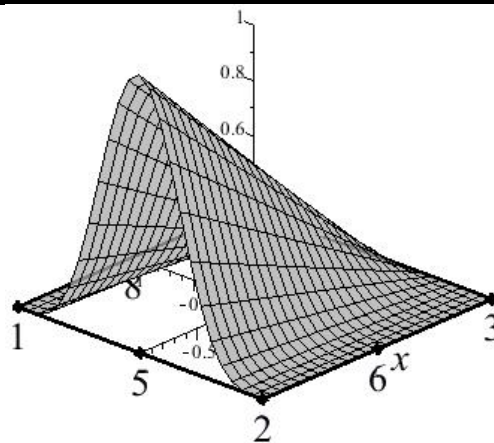


Рисунок 2 – Функція $\bar{N}_5(x, y)$
 моделі 3

Обчислення вузлових еквівалентних навантажень дають наступні результати:

$$\text{для моделі 1: } \bar{\gamma}_1 = \frac{\pi - 4}{4\pi}; \bar{\gamma}_5 = \frac{1}{\pi};$$

$$\text{для моделі 2: } \bar{\gamma}_1 = 0; \bar{\gamma}_5 = \frac{1}{4};$$

$$\text{для моделі 3: } \bar{\gamma}_1 = \frac{1}{16}; \bar{\gamma}_5 = \frac{3}{16}.$$

Треба зауважити, що на $-1 \leq x \leq 1$ графік $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ (рис. 1) майже не відрізняється від стандарту $\varphi(x) = 1 - x^2$. Те саме можна сказати про інтегральні характеристики $\bar{\gamma}_1$ і $\bar{\gamma}_5$ першої моделі. А якщо взяти $\pi = 3$, то навантаження співпадуть із стандартними. Деформація стиснення почалася з моделі 1. Про це свідчить нерівність $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$. Модель 2 вже фізично адекватна, вона припиняє “гравітаційне відштовхування”: навантажені лише проміжні вузли. Модель 3 можна вважати кращою, тому що вона наближає теоретичні результати до емпіричних.

Висновки. Тригонометричні моделі СЕ Q8 ще раз підтвердили, що серендипові елементи – невичерпне джерело важливої і цікавої інформації. Треба відзначити, що необов’язково відмовлятися від коноїдів заради фізичної

адекватності моделі. Нові результати показують, що тригонометричні бази спроможні зберегти коноїди та забезпечити фізичну адекватність моделей.

Література

1. Zienkiewicz O. C., Taylor R.L. *The Finite Element Method. Fifth edition.* Vol. 1. Bristol Printed and bound by MPG Books Ltd. Butterworth – Heinemann, (2000).
2. Хомченко А.Н., Астионенко И.А. Гауссова кривизна серендиповых поверхностей или как прогнуть коноид. *Вісник ХНТУ.* 2016. №3(58). С. 444-447.
3. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Астионенко И.А. Геометрия коноида и физическая неадекватность стандартных серендиповых элементов. *Вісник Запорізького нац. ун-ту: Зб. наук. статей. Фіз.-мат. науки.* Запоріжжя: ЗНУ, 2017. № 1. С. 337-342.

STEREOMETRY OF COMPRESSED CONOIDS OF ELEMENT Q8

Khomchenko Anatilii, Lytvynenko Olena, Dudchenko Oleg, Astionenko Ihor

Abstract. The paper considers new models of bases of serendipity finite elements (FE) Q8. In recent years, the library of serendipity finite elements has been significantly replenished with non-standard (alternative) models. The reasons for the inadequacy of the spectrum were identified and "recipes" were proposed to eliminate this shortcoming of standard serendipity models. New approaches to modeling bases with the help of hierarchical forms force to abandon conoids - linear surfaces that are associated with intermediate nodes of standard elements. Therefore, research is being conducted today, and it is not necessary to give up conoids. The paper shows how by compressing the surface of the conoid it is possible to obtain a mathematically sound and physically adequate spectrum of nodal loads.

Keywords: basis functions of finite element q8, polynomial conoid, trigonometric conoid, compression of conoid directrix effect.

References

1. Zienkiewicz O. C., Taylor R.L. *The Finite Element Method. Fifth edition.* Vol. 1. Bristol Printed and bound by MPG Books Ltd. Butterworth – Heinemann, (2000).
2. Homchenko A.N., Astionenko I.A. Gaussova krivizna serendipoviyh poverhnostey ili kak progнут konoid. *Visnik HNTU.* 2016. 3 (58). 444-447.
3. Homchenko A.N., Litvinenko E.I., Astionenko I.A. Geometriya konoida i fizicheskaya neadekvatnost standartnyih serendipoviyh elementov. *Visnik Zaporizkogo nats. un-tu: Zb. nauk. statey. Fiz.-mat. nauki.* Zaporizhzhya: ZNU, 2017. 1. 337-342.