

DOI: 10.34185/1991-7848.itmm.2021.01.013

**КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ В ОДНОРІДНІЙ ПЛАСТИНІ  
З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, ПІДКРІПЛЕНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ  
ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ**

Гарт Е. Л., д-р фіз.-мат. наук, Терьохін Б. І., аспірант

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна*

В інженерній практиці тонкостінні конструкції, елементами яких є пластини і оболонки, знаходять широке застосування. Досить часто, за різних – конструктивних або технологічних міркувань, в них порушується суцільність різного роду отворами, що призводить до появи локальної концентрації напружень, яка може у декілька разів перевищувати основні напруження в елементі, неослабленому концентратором. Тому дуже важливо шукати способи впливу на розподіл напружень в тілі, зокрема, на величину коефіцієнта концентрації напружень (ККН) з метою підвищення міцності конструкції. Один із таких способів полягає у застосуванні навколо отворів включень, різних геометричних форм і механічних властивостей [2].

В останні роки все частіше використовуються функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), які характеризуються плавною просторовою зміною складу і властивостей. Градієнт властивостей дозволяє впливати на напружено-деформований стан (НДС) елементів конструкції. Особливість ФГМ робить їх дуже корисними для зниження міжфазних напружень, і тому вони знаходять широке застосування в аерокосмічній, енергетичній, електронній, хімічній, оптичній і біомедичній інженерії та ін. Механіка ФГМ в останні два десятиліття викликала великий інтерес, і було виконано багато робіт з теоретичних, числових та експериментальних досліджень ФГМ [1, 3].

У цій роботі проведено скінченноелементний аналіз НДС тонкої однорідної прямокутної пластини розмірами  $a \times b$  з круговим отвором радіусу  $R$  та кільцевим включенням радіусу  $R_1$  за дії одноосьового розтягувального навантаження. Розглянуто такі випадки: 1) включення із однорідного матеріалу ( $E_{вкл} = 2E_0$ ,  $E_0$  – модуль пружності пластини), 2) включення із ФГМ, що має радіальні довільні пружні властивості (лінійний і нелінійний закони змінення модуля пружності). Вважалося, що включення змодельовані

вставками, які розташовані у площині пластини і мають однакову з нею товщину; на границях включень задано умови жорсткого зчеплення.

**Числовий аналіз.** У числових прикладах вибрано три модельних матеріали з однаковим коефіцієнтом Пуассона  $\nu_0 = 0,25$ , але з різними модулями пружності включення:

$$E_-(r) = E_0 \left( 1 + e^{-5 \left( \frac{r-R}{R_1} \right)} \right), \quad (1)$$

$$E_{\pm}(r) = 2E_0 \left( 1 - \frac{r-R}{2R_1} \right), \quad (2)$$

$$E_+(r) = 2E_0 \left( 1 - 0,5e^{-5 \left( 1 - \frac{r-R}{R_1} \right)} \right), \quad (3)$$

де  $E_0 = 50 \text{ ГПа}$  – модуль пружності пластини;  $r$  – відстань від центру отвору до довільної точки включення;  $R$  – радіус отвору;  $R_1$  – радіус включення.

Вид залежності для модельного матеріалу (1) подібний [3].

На рис. 1 наведено графічне зображення законів змінення модуля пружності ФГМ-включення. Лінії 1–3 відповідають залежностям (1)–(3). Тут і далі на рисунках по осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань  $0 \leq l \leq 1$  в радіальному напрямку від центру отвору по ширині включення  $h_{\text{вкл}} = R_1 - R$ :  $l = (r - R) / (R_1 - R)$ .

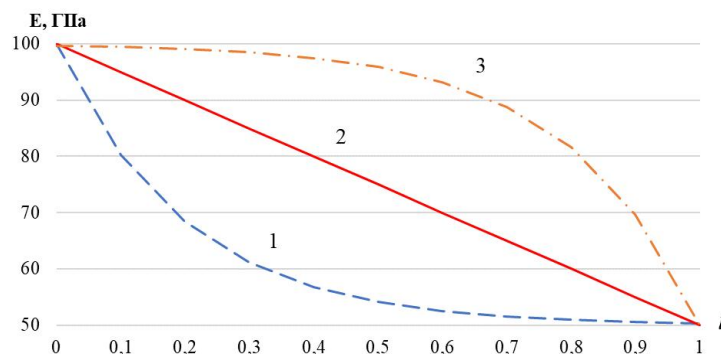


Рисунок 1 – Закони змінення модуля пружності ФГМ-включення

Числові дослідження проведено для квадратних пластин товщини  $h=0,01$  м зі стороною  $a=b=0,2$  м, радіус кругового отвору  $R=a/20$ , навантаження розтягу  $p = 10$  МПа.

У результаті проведених обчислювальних експериментів на основі методу скінченних елементів отримано розподіл інтенсивностей напружень і деформацій в пластині в зонах локальних концентраторів напружень. Розраховано коефіцієнт концентрації напружень (ККН) при одноосьовому розтягуванні пластини при ширині включення  $R$  і  $2R$ , результати показані у табл. 1 і табл. 2 відповідно.

Таблиця 1

Задача	ККН	$\delta_1, \%$	$\varepsilon_i^{max}, 10^{-4}$	$\delta_2, \%$
Включення з однорідного матеріалу	4,20	+37,8	2,92	-31,3
ФГМ-включення 1	4,58	+50,0	3,53	-16,9
ФГМ-включення 2	4,55	+49,2	3,23	-24,0
ФГМ-включення 3	4,34	+42,4	3,03	-28,7

Тут  $\delta_1$  і  $\delta_2$  – відхилення ККН і максимального значення інтенсивності деформацій  $\varepsilon_i^{max}$  від відповідного значення для пластини без включення.

У випадку кільцевого включення ширини  $R$  із ФГМ максимальні деформації і ККН в пластині дещо більше, ніж за наявності «жорсткого» включення з однорідного матеріалу. Так, в разі ФГМ-включень 1 і 2 відмінність за максимальними напруженнями становить близько 12%, проте у разі ФГМ-включення 3 – відмінність менше 5%. Як видно з рис. 2, при використанні ФГМ, напруження по ширині включення в перерізі  $AB$  в інтервалі  $l \in [0,2; 0,9]$  виявляються менше, ніж при наявності включення з однорідного матеріалу. За характером розподілу напружень в даному перерізі всі три види ФГМ-включень близькі до параболічної закономірності і відрізняються від включення із однорідного матеріалу.

У разі ФГМ-включень 1 має місце механічний ефект: на стику включення і матриці можна спостерігати деяке збільшення відносної величини напружень  $\sigma_y/p$  (рис. 2).

Аналогічні розрахунки проведені для пластини з шириною включення, що дорівнює  $2R$ . Результати наведені в табл. 2.

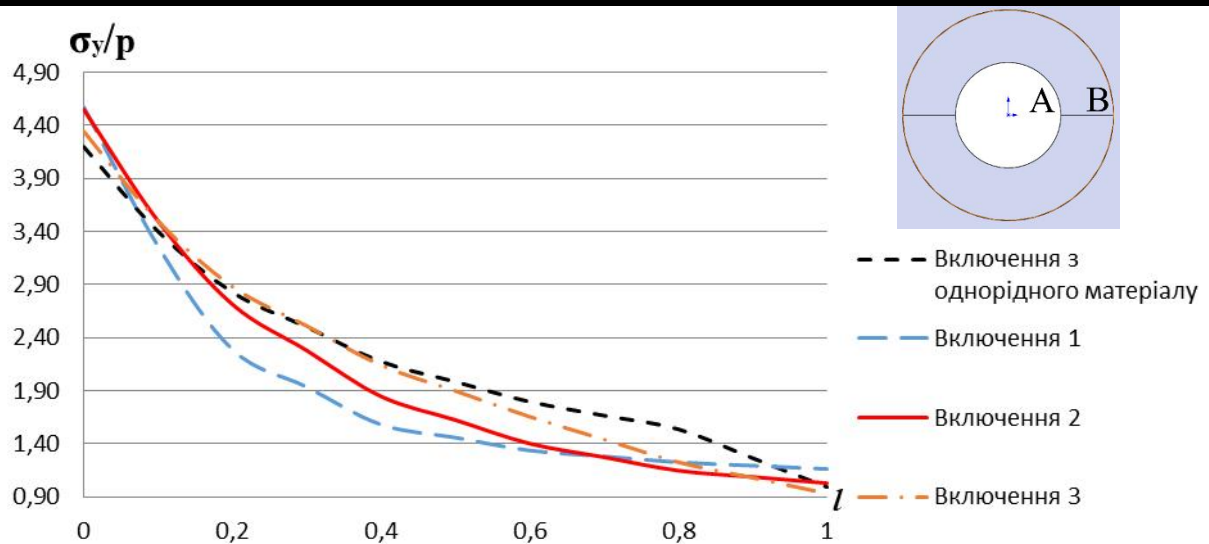


Рисунок 2 – Графік зміни відносних напружень  $\sigma_y/p$  за шириною включення у перерізі  $AB$  при  $h_{вкл}=R$

Таблиця 2

Задача	ККН	$\delta_1, \%$	$\varepsilon_i^{max}, 10^{-4}$	$\delta_2, \%$
Включення з однорідного матеріалу	3,80	+24,5	2,65	-37,7
ФГМ-включення 1	4,60	+50,9	3,41	-19,8
ФГМ-включення 2	4,32	+41,7	3,04	-28,5
ФГМ-включення 3	3,99	+30,7	2,79	-34,4

Тут ККН і максимальні деформації в пластині за наявності включень із ФГМ також виявляються дещо більше, ніж у випадку однорідного жорсткого включення. Однак, як видно з рис. 3, у цьому випадку напруження у перерізі  $AB$  в інтервалі  $l \in [0,2; 0,9]$  виявляються менше, ніж за наявності включення з однорідного матеріалу. За характером розподілу напружень у даному перерізі всі три види ФГМ-включень, так само, як у випадку включення ширини  $R$ , близькі до параболічної закономірності і відрізняються від включення з однорідного матеріалу.

**Висновки.** В результаті проведеного числового дослідження впливу зміни модуля пружності включення за радіальним напрямком на розподіл інтенсивностей напружень і деформацій в тонкій однорідній пластині поблизу

кругового отвору встановлено, що за наявності ФГМ-включень з певними механічними властивостями виникає можливість впливати не тільки на величину ККН в пластині поблизу локальних концентраторів напружень, а й на напруження по ширині включення. Використання ФГМ-включень призводить до плавного розподілу напружень в матриці без стрибкоподібних збурювань на відміну від однорідного жорсткого включення. Ширина ФГМ-включень впливає на характер розподілу напружень: чим більше ширина включення, тим плавніше відбувається перерозподіл напружень в матриці.

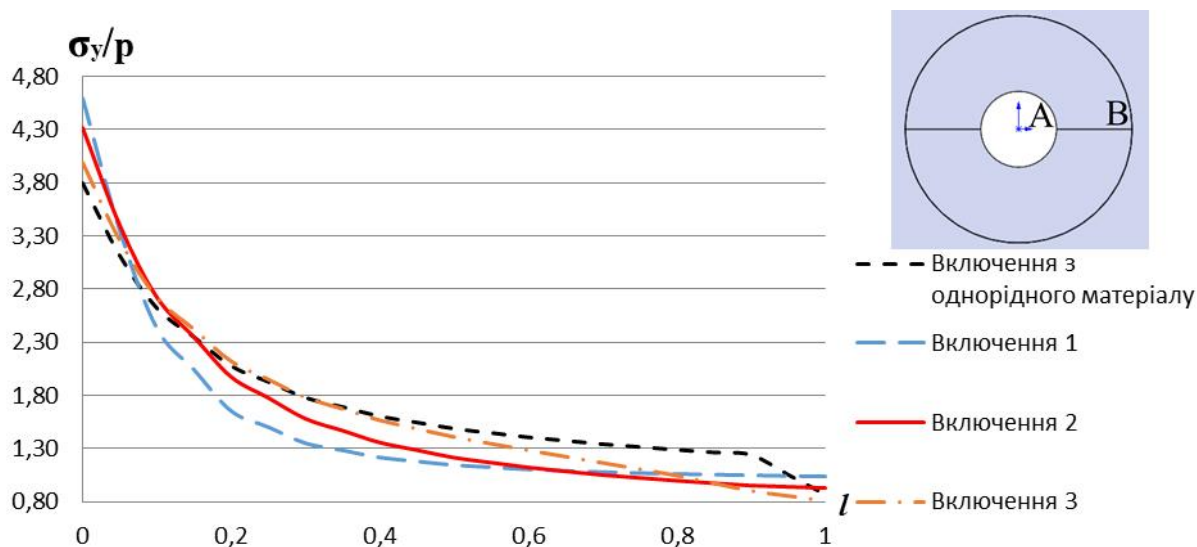


Рисунок 3 – Графік зміни відносних напружень  $\sigma_y/p$  за шириною включення у перерізі  $AB$  при  $h_{вкл}=2R$

### Література

1. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред / С.М. Айзикович [и др.]. М.: Физматлит, 2011. 192 с.
2. Гарт Е. Л., Терьохін Б. І. Вибір раціональних параметрів підкріплюючих елементів при комп'ютерному моделюванні поведінки циліндричної оболонки з двома прямокутними отворами // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2019. Вип. 30. С. 19–32. DOI: <https://doi.org/10.15421/4219024>
3. Yang Q., Gao C.-F., Chen W. Stress analysis of a functional graded material plate with a circular hole // Arch. Appl. Mech. 2010. Vol. 80. P. 895-907. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-009-0349-3>

**STRESS CONCENTRATION IN A HOMOGENEOUS PLATE  
WITH A CIRCULAR HOLE REINFORCED BY AN INCLUSION  
FROM A FUNCTIONAL-GRADIENT MATERIAL**

Hart Eteri, Bohdan Terokhin

*Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine*

**Abstract.** Computer simulation of the stress-strain state of a thin rectangular homogeneous isotropic plate with a circular hole, reinforced by an annular inclusion made of a functional-gradient material (FGM) has been carried out. The influence of the geometric (width) and mechanical (elastic modulus) parameters of the inclusion is investigated when various laws of change in the elastic modulus of the FGM are set on the stress concentration around the hole. Recommendations for the use of inclusions are given. If there is a "hard" annular inclusion in a homogeneous plate with a hole, it is expedient to use an FGM with a nonlinear law of change in the modulus of elasticity in comparison with an inclusion made of a homogeneous material. Despite the fact that the inclusion leads to a slight increase in the stress concentration factor in comparison with a homogeneous material, it makes it possible to increase the rigidity of the system as a whole. The width of FGM inclusions affects the nature of the stress distribution: the wider the inclusion, the more smoothly the stress redistribution in the main matrix occurs.

**Keywords:** homogeneous plate, circular hole, inclusions, functional-gradient material, stress-strain state, stress concentration, finite element method.

**References**

1. Analytical solutions of mixed axisymmetric problems for functional-gradient media / S.M. Aizikovich [and others]. Moscow: Fizmatlit, 2011. 192 p.
2. Hart E. L., Terokhin B. I. Choice of rational parameters of reinforcement elements in computer simulation of behavior of a cylindrical shell with two rectangular holes // Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures: Col. of sci. art. Dnipro: Lira, 2019. Vol. 30. P. 19–32. DOI: <https://doi.org/10.15421/4219024>
3. Yang Q., Gao C.-F., Chen W. Stress analysis of a functional graded material plate with a circular hole // Arch. Appl. Mech. 2010. Vol. 80. P. 895-907. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-009-0349-3>