
АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО КОНТАКТ СКРІПЛЕНИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН, ПОСИЛЕНИХ СТРИНГЕРОМ

Білова О.В., к.ф.-м.н.¹, Білова Ю.О.²

¹Національна металургійна академія України

²НТУ «Дніпровська політехніка»

Введення. В різних галузях техніки, зокрема, авіа- та судобудуванні широко використовуються тонкостінні конструкції, посилені для збільшення їх міцності тонкими вузькими накладками (стрингерами) з жорсткішого матеріалу. Попри те, що добре відомо про існування і єдиність розв'язку подібних задач, проблема побудови саме рішень, а також знаходження НДС конструкцій залишаються в загальному випадку невирішеними. У зв'язку з цим була і залишається актуальною як проблема розробки нових методів рішення вказаних типів задач, так і дослідження напруженого стану конкретних видів конструкцій, зокрема пластин, посилені різними комбінаціями стрингерів (ребер жорсткості). Задачі такого типу мають довгу історію і на сьогодні добре досліджені як для пружних ізотропних, так і анізотропних нескінченних або напівнескінченних тіл [1-5]. Відповідні ж задачі для тіл кінцевих розмірів, особливо багат шарових, вивчені в набагато меншому ступені [6, 7]. У даному дослідженні авторами якраз і продовжується аналіз розглянутих у попередніх публікаціях таких випадків передачі навантаження. Для вирішення використовується асимптотичний метод, ґрунтований на ідеях Л.І. Маневича та А.В. Павленка[1].

Основна частина. Розглядається контактна завдання про передачу навантаження пружним підкріплюючим елементом (стрингером) пружній пластині, що складається з двох сполучених між собою ортотропних прямокутників з різних матеріалів. Пластина закріплена з двох сторін. Стрингер розташований в середині вільних кромки (вісь стрингера перпендикулярна кромці пластини) і безперервно скріплений з нею. Приймається схема контакту по лінії.

Нехай пружна пластина, що складається з двох прямокутників $0 \leq x \leq h_1$, $h_1 \leq x \leq h_2$, $|y| \leq b$, закріплена по гранях $y = \pm b$ і вздовж осі Ox посилена стрингером, який в граничній точці $x=0$ навантажений подовжною силою P_0 .

Матеріали прямокутників ортотропни і різні, головні напрямки анізотропії співпадають з декартовими осями координат x, y . Потрібно визначити закон зміни зусилля в стрингері, а також розподіл контактних зусиль взаємодії між стрингером та пластиною.

Задача зводиться до інтегрування рівнянь рівноваги (1) для кожного з прямокутників.

$$\begin{aligned} B_1 u_{xx} + G u_{yy} + (v^* B_1 + G) v_{xy} &= 0, \\ B_2 v_{yy} + G v_{xx} + (v_* B_2 + G) u_{xy} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

за наступних граничних умов:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = B_1 (u_x + v^* v_y) = 0, \sigma_{12} = G (u_y + v_x) = 0 \quad (x=0, x=h_1+h_2); \\ u = u_c, v = 0 \quad (y=0); u = v = 0 \quad (y=\pm b), \end{aligned}$$

при $x=h_l$ переміщення прямокутників рівні, при цьому переміщення стрингера u_c задовольняють наступним співвідношенням

$$E_c F_c u_{cxx} = 2q(x), N = E_c F_c u_{cx} = P_0(x=0); N = 0(x=h_1+h_2).$$

Тут u, v - компоненти вектора переміщень відповідних смуг, B_1, B_2 - жорсткості смуг на розтяг-стискання вздовж головних напрямів, G - жорсткість на зсув, $E_c F_c$ - жорсткість на розтяг-стискання стрингера, σ_{11}, σ_{12} - нормальне та дотичне зусилля в пластині, v_*, v^* - коефіцієнти Пуасона матеріалів смуг, $q(x)$ - контактне зусилля взаємодії між стрингером та пластиною, $N(x)$ - зусилля в стрингері. Індекси x, y означають диференціювання за відповідними координатами. Так як при $y=0$ $v=0$ ($v_x=0$), то контактне зусилля взаємодії між стрингером та пластиною визначається за формулою (2).

$$q(x) = -\sigma_{12}|_{y=0} = -G u_y|_{y=0}. \quad (2)$$

Зусилля в стрингері $N(x)$ та контактне зусилля взаємодії між стрингером та пластиною $q(x)$ знаходиться за формулами (3).

$$N(x) = E_c F_c u_x(x, 0), \quad q(x) = -G u_y|_{y=0}, \quad (3)$$

де функції $u_{ix}(x, 0), u_{iy}|_{y=0}$ виражаються співвідношеннями (4) та (5).

$$u_{ix}(x, 0) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_i \left[\frac{P_i}{E_c F_c} - f(0)(-1)^n \right] \frac{\sin \alpha_i(n)x_i}{[n + g_i \operatorname{cth}(\omega_i \alpha_i(n)b)]}, \quad (4)$$

$$u_{iy}|_{y=0} = -\frac{2\omega_i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_i \left[\frac{P_i}{E_c F_c} - f(0)(-1)^n \right] \frac{cth(\omega_i \alpha_i(n)b) \cos \alpha_i(n)x_i}{[n + g_i cth(\omega_i \alpha_i(n)b)]}, \quad (5)$$

($i = 1, 2$).

Висновки. Отримано розподіл напруження у стрингері, зусилля контактної взаємодії між стрингером та пластиною, а також напружень у пластині. Для дослідження застосований метод збурень Маневича-Павленка, що дозволив звести розв'язання крайових задач теорії пружності до послідовного розв'язання крайових задач теорії потенціалу. Також досліджена задача про передачу навантаження пружним стрингером пружному анізотропному тілу кінцевих розмірів, що складається із двох шарів із різних матеріалів (з циліндричною анізотропією). Розглянута також просторова задача про передачу навантаження від пружного підкріплюючого елемента до в'язкопружного півпростору, головні напрямки анізотропії якого співпадають з декартовими осями координат.

Література

1. Маневич Л. И. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов / Л. И. Маневич, А.В. Павленко. – К.: Вища шк., – 1991. – 131 с.
2. Гузь А. Н., Бабич С.Ю., Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Развитие идей Л. А. Галина в механике: монографія, Москва; Ижевск: Изд-во Ин-т/ компьютерных исследований, 2013. 480 с.
3. Приварников А.К., Спиця О. Г. Осесиметричні контактні задачі для пружних багатошарових плит. Вісник Донецького університету. Серія А. Природничі науки, 2005. Вип. 1. С. 53–57.
4. Калоеров С. А., Самодуров А. А. Задача электровязкоупругости для многосвязных пластинок. Математичні методи та фізико-механічні поля, 2014. Т. 57. № 3. С. 62–77.
5. Кагадій Т. С. Метод возмущений в механике упругих (вязкоупругих) анизотропных и композиционных материалов: монографія, Днепропетровск: РИК НГА України, 1998. 260 с.
6. Кагадій Т.С., Білова О.В., Щербина І.В. Застосування методу малого параметру при моделюванні задач теорії в'язкопружності. Вісник Херсонського національного університету. 2(69). Ч.3. Херсон, 2019. С. 69-76.
7. Кагадій Т.С. Передача нагрузки двуслойным телам конечных размеров. Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. Дніпропетровськ. ДДУ, 2000. Вип.3. Т.2. С. 38-46.