

**ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ ДРОБНО-ДИФЕРЕНЦІЙНОГО ПІДХОДУ ДЛЯ ОПИСУ
ПРОЦЕСУ ЖИВЛЕННЯ ДВОФАЗНОЇ ЗОНИ, ЩО УТВОРЮЄТЬСЯ ПРИ
ЗАТВЕРДІННІ МЕТАЛІВ І СПЛАВІВ**

¹ Селівьорстова Т.В., ¹ Селівьорстов В.Ю., ² Мала Ю.А.

¹ *Національна металургійна академія України*

² *Університет митної справи та фінансів*

Двофазна зона, що утворюється при переході розплаву з рідкого в твердий стан, часто може характеризуватись аномальною кінетикою протікання. Особливості кінетики в цьому випадку виникає у зв'язку з виникненням ефектів просторової нелокальності і, в ряді випадків, ефектів пам'яті, що підкоряються різним ступеневим законам [1-3]. Математичним апаратом, що дозволяє адекватно описувати такі процеси, є теорія інтегро-диференціювання дробового порядку [4-6].

Основна ідея моделювання полягає в заміні реального неоднорідного середовища двофазної зони модельним однорідним шпаристим середовищем зі ступеневою пам'яттю та просторовою нелокальністю. При цьому реалізується неповний опис фільтраційного процесу диференціальним рівнянням дробового порядку, а наявність дробових похідних в модифікаціях основних законів і співвідношень свідчить про наявність, так званих, прихованих змінних [7].

Розглянемо випадок однофазного течії. Відправною точкою для виведення моделі, як і в класичному випадку, служить рівняння нерозривності, яке для течії в шпаристому середовищі має вигляд

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{w}) = q, \quad (1)$$

де ϕ - шпаристість середовища, ρ - щільність рідини, що фільтрується, \mathbf{w} - вектор швидкості рідини, q - щільність внутрішніх джерел маси, t - час.

У загальному випадку шпаристість залежить як від тиску рідини, так і від напруженодеформованого стану середовища [8]. Дендритно-шпаристе середовище часто проявляє в'язкопружні властивості [9]. При цьому наявність розвиненої мережі дендритів з фрактальною структурою призводить до

неадекватності класичних реологічних рівнянь Максвелла, Кельвіна-Фойгта або Зенера і вимагає переходу до їх дробнодіференціальних аналогів [10]. В результаті шпаристість буде функцією не тільки тиску, а й дробової похідної (або дрібного інтеграла) від тиску:

$$\varphi = \varphi(p, {}_0D_t^\alpha(p)), \quad \alpha \in (-1, 1), \quad (2)$$

де p – тиск, α – порядок дробової похідної, ${}_0D_t^\alpha(p)$ – дробова похідна.

Вплив тріщин в шпаристому середовищі на фільтрацію рідини може бути враховано модифікацією закону Дарсі. У роботах [11-13] запропоновані різні дробнодіференціальні узагальнення даного лінійного закону. Однак в загальному випадку закон фільтрації є нелінійним. Однією з можливих нелінійних модифікацій закону фільтрації є

$${}_0D_t^\gamma(\nabla p) = -F(|\mathbf{w}|) \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}, \quad \gamma \in (0, 1), \quad (3)$$

де $F(z)$ – задана функція. У граничному випадку $\gamma = 1$ рівняння (3) переходить у відомий [14] нелінійний закон фільтрації цілого порядку.

Закон (3) є за своєю природою субдифузійним і може бути використаний для моделювання фільтрації в природних дендритно-шпаристих середовищах, в яких дендрити розподілені в середньому рівномірно за обсягом. У цьому випадку основний потік рідини визначається саме плином по міждендритним каналам, а шпариста частина середовища справляє гальмуючу дію на потік і грає роль областей захоплення частинок рідини.

Література

1. Газизов Р.К. Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах / Р.К. Газизов, С.Ю. Лукашук // Информатика, вычислительная техника и управление. – 2017. – №4. – С. 104–112.
2. Аномальная диффузия радионуклидов в сильнонеоднородных геологических формациях / под. Ред. Л. А. Большова. М.: Наука, 2010. 342 с.
3. Sahimi M. Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches. Weinheim: Wiley-VCH, 2011. 733 p.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

5. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
6. Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: изд-во «Артишок», 2008. 512 с.
7. Учайкин В. В. Механика. Основы механики сплошных сред. СПб.: изд-во Лань, 2017. 860 с.
8. Николаевский В. Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996. 448 с.
9. Ba J., Du Q., Carcione J. M., Zhang H., Muller T. M. Seismic exploration of hydrocarbons in heterogeneous reservoirs. Amsterdam: Elsevier, 2014. 370 p.
10. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models. Singapore: Imperial College Press, 2010. 367 p.
11. Caffarelli L., Vazquez J. L. Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2011. V. 202. No. 2. P. 537–565.
12. Raghavan R. Fractional diffusion: performance of fractured wells // Journal Petroleum Science and Engineering. 2012. V. 92–93. P. 167–173.
13. Abiola O. D., Enamul H. M., Kassem M., Sidqi A. A. A modified memory-based mathematical model describing fluid flow in porous media // Computers and Mathematics with Applications. 2017. V. 73. No. 6. P. 1385–1402.
14. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.–Ижевск: РХД, 2006. 416 с.

FEATURES OF THE FRACTIONAL-DIFFERENTIAL APPROACH IMPLEMENTATION TO DESCRIBE THE PROCESS OF FEEDING A TWO-PHASE ZONE DURING SOLIDIFICATION OF METALS AND ALLOYS

Selivyorstova Tatjana, Selivyorstov Vadim, Mala Yuliia

Abstract. To describe filtration processes in complex dendritic-porous media, a number of fractional-differential mathematical models of diffusion type have been proposed.

A nonlinear equation containing fractional Riemann-Liouville derivatives with respect to time is described, which can be used to correctly describe the single-phase filtration of a non-Newtonian fluid in a porous medium.

Keywords: filtration; mathematical model; fractional derivative; fine differential equation; generalized Darcy's law.

References

1. Gazizov R.K. Fractional-differential approach to modeling filtration processes in complex heterogeneous porous media / R.K. Gazizov, S.Yu. Lukashchuk // Informatics, computer technology and management. - 2017. - No. 4. - S. 104–112.
2. Anomalous Radionuclide Diffusion in Highly Heterogeneous Geological Formations, ed. By L. A. Bolshov, (in Russian). M.: Nauka, 2010.
3. Sahimi M. Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches. Weinheim: Wiley-VCH, 2011. 733 p.
4. S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, (in Russian). Minsk: Nauka i tehnika, 1987.
5. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
6. Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: изд-во «Артишок», 2008. 512 с. [V. V. Uchaikin, Fractional derivatives method, (in Russian). Ul'yanovsk: izd-vo "Artishok", 2008.]
7. V. V. Uchaikin, Mechanics. Basics of continuum mechanics, (in Russian). SPb.: izd-vo Lan', 2017.
8. V.N. Nikolaevsky, Geomechanics and fluidodynamics, (in Russian). M.: Nedra, 1996.
9. Ba J., Du Q., Carcione J. M., Zhang H., Muller T. M. Seismic exploration of hydrocarbons in heterogeneous reservoirs. Amsterdam: Elsevier, 2014. 370 p.
10. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. An introduction to mathematical models. Singapore: Imperial College Press, 2010. 367 p.
11. Caffarelli L., Vazquez J. L. Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2011. V. 202. No. 2. P. 537–565.
12. Raghavan R. Fractional diffusion: performance of fractured wells // Journal Petroleum Science and Engineering. 2012. V. 92–93. P. 167–173.
13. Abiola O. D., Enamul H. M., Kassem M., Sidqi A. A. A modified memory-based mathematical model describing fluid flow in porous media // Computers and Mathematics with Applications. 2017. V. 73. No. 6. P. 1385–1402.
14. I. A. Charnyi, Underground hydro-gas dynamics, (in Russian). M.-Izhevsk: RChD, 2006.