

**МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ДИСПЕРСНОГО СЕРЕДОВИЩА В
ПРОЦЕСАХ ФОРМОУТВОРЕННЯ ЗАГОТОВОК ПОРОШКОВОЇ МЕТАЛУРГІЇ**

Іванчук Я. В.¹, д.т.н., проф., Іскович-Лотоцький Р. Д.², д.т.н., проф.,

Севостьянов І. В.³, д.т.н., проф., Веселовська Н. Р.⁴, д.т.н., проф.,

Манжілевський О. Д.⁵, к.т.н., доц.

^{1,2,5}Вінницький національний технічний університет, Україна, Вінниця

^{3,4}Вінницький національний аграрний університет, Україна, Вінниця

Розглянемо ділянку дисперсного середовища заготовки із порошкового металу [1, 2] в площині xOz , зображеного на рисунку 1. Переміщення частинки порошкового металу у вертикальному напрямку відбувається під дією вертикальних складових сил від зовнішнього навантаження та сил інерції (див. рис. 1):

$$b^2 \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2 \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \quad (1)$$

де b – середній розмір частинок порошкового металу; ρ – середня густина частинки порошкового металу; w – прискорення частинки порошкового металу; σ_z – складова напруження, яке виникає на частинці порошкового металу.

Навантаження, що діє на сусідню в одному ряду частинку металу і через збільшення напружень по вісі x за аналогією із (1) визначається по наступному [2]:

$$b^2 \left[\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right]. \quad (2)$$

Різниця між значеннями величин (1) і (2) викликає виникнення дотичних напружень на поверхні частинок, на які опираються частинки порошкового металу (див. рис. 1). Визначимо її як деяку функцію від дотичних напружень:

$$\begin{aligned} f(\tau_{xz}) &= b^2 \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - b^2 \left[\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right] = \\ &= -b^3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Так як при статичному навантаженні $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$, тоді вираз (3) приймає

ВИГЛЯД:

$$\frac{1}{b^3} f(\tau_{xz}) = -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z}. \quad (4)$$

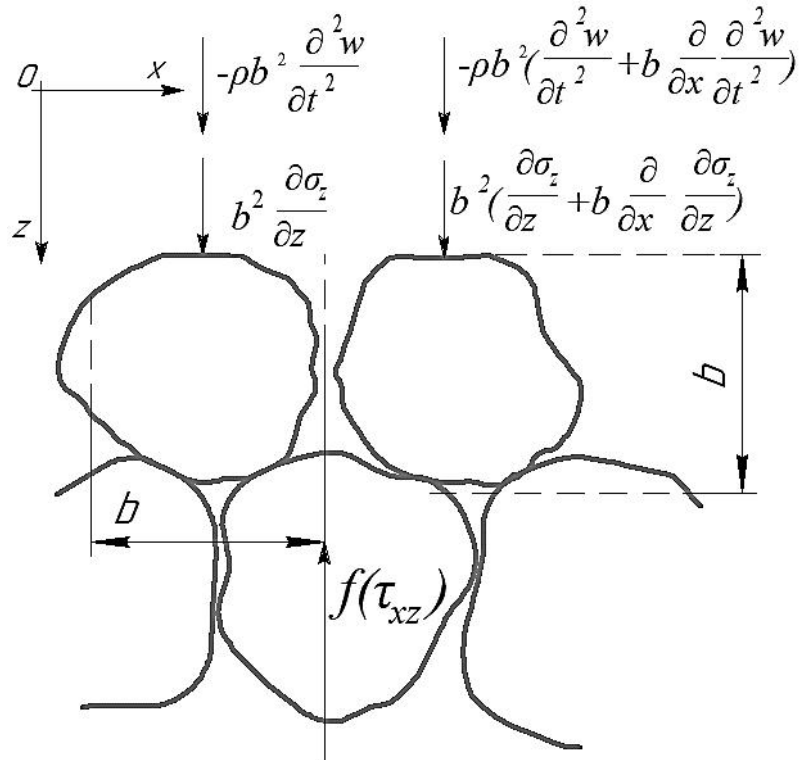


Рисунок 1 – Розрахункова схема двовірної динамічної взаємодії частинок металу розпірного дисперсного середовища

З іншого боку, при статичному навантаженні дотичні напруження із нормальними зв'язані наступним співвідношенням:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{xz}}{\nu z} \right) = -\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z}, \quad (5)$$

де ν – коефіцієнт бічного тиску від пуансона заготовки [3].

Із рівнянь (3) – (5) отримуємо:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{xz}}{\nu z} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \quad (6)$$

За аналогією із (6) і співвідношеннями між напруженнями для статичного навантаження [4–6] записуються наступні співвідношення між дотичними і нормальними напруженнями при динамічному навантаженні:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{yz}}{\nu z} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_{xy}}{\nu^2 z^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \end{cases} \quad (7)$$

Система рівняння рівноваги для просторової задачі при нульових значеннях об'ємних навантажень:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (8)$$

де w , u , v – компоненти складових деформації дисперсного середовища заготовки.

Розділивши перше рівняння із (8) на νz і продиференціювавши по z отримуємо:

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\tau_{yz}}{\nu z} \right) + \frac{\partial}{\partial x \partial z} \left(\frac{\tau_{xz}}{\nu z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\nu z} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \right]. \quad (9)$$

Продиференціюємо рівняння (6) по x , а рівняння (7) – по y і склавши їх отримуємо:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\tau_{xz}}{\nu z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\tau_{zy}}{\nu z} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right). \quad (10)$$

Прирівнявши праві частини рівнянь (9) і (10), і помноживши на νz з послідуною заміною $f = \frac{1}{\nu z} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$ отримуємо:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \nu z \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right). \quad (11)$$

Розв'язок диференціального рівняння (11) виконується при наступних граничних умовах: $f = -P(t)$ при $z=0$, $x=0$, $y=0$ (тобто в точці прикладання зосередженої динамічної сили); $f=0$ при $z=0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ (тобто у всіх інших точках поверхні заготовки); $f \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow \pm\infty$, що відповідно дозволяє отримати наступний вигляд:

$$f = -P(t) \frac{1}{2\pi v z^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2v z^2}\right). \quad (12)$$

Переходячи через (53) від f до його значення, отримуємо:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -P(t) \frac{1}{2\pi z} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2v z^2}\right),$$

або

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -P(t) \frac{1}{2\pi E z} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2v z^2}\right), \quad (13)$$

де права частина рівняння також описує область, у якій порошковий матеріал заготовки від зосередженої динамічної сили приходить в збудження [5], а значення E виражає модуль пружності порошкового матеріалу заготовки.

Для розв'язання задачі про коливання дисперсного матеріалу при віброущільненні заготовки порошкової металургії [1, 5] вздовж осей x та y скористаємося рівняннями рівноваги (8), а також (7):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{vz} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right] = vz \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right),$$

або

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{vz} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right] = vz \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right).$$

Аналогічно для коливань по вісі y :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{vz} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \right] = vz \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right).$$

Література

1. Іскович–Лотоцький Р. Д. Основи резонансно–структурної теорії віброударного розвантаження транспортних засобів / Р.Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я.П. Веселовський// Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна. – Д., 2014. – №5(53) – С.109 – 118. doi: 10.15802/stp2014/30458.
2. Іскович–Лотоцький Р. Д. Моделювання процесу оброблення дрібнодисперсних деревинних матеріалів під дією вібраційного і віброударного навантаження / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // Науковий вісник НЛТУ

України: збірник наукових праць. – Львів. – 2018. – Том 28, № 5. – С. 124-129. doi: 10.15421/40280526.

3. Іскович–Лотоцький Р. Д. Застосування гібридного моделювання при розробці установок для утилізації відходів. / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Д. В. Тесовський, Я. П. Веселовський // Технологічні комплекси. Науковий журнал – Луцьк, 2012. – № 1,2 (5, 6). – С. 122 – 126.

4. Іскович–Лотоцький Р.Д. Дослідження динаміки процесу роботи універсального гідравлічного віброудраного приводу для розвантаження транспортних засобів / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка»)– Луцьк, 2007. – № 20. – С. 184 – 187.

5. Іскович–Лотоцький Р. Д. Підвищення ефективності розвантаження матеріалів під дією періодичних ударних імпульсів / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук // Вібрації в техніці і технологіях. – 2008. – №2 (51). – С. 8 – 11.

6. Іскович–Лотоцький Р. Д. Моделювання робочих процесів гідроімпульсного приводу з однокаскадним клапаном пульсатором / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця, 2017. – № 3(86). – С.10–19.

MATHEMATICAL MODEL OF THE DYNAMICS DISPERSED MEDIA IN THE SHAPING PROCESSES BILLETS OF POWDER METALLURGY

Ivanchuk Yaroslav, Iskovych-Lototsky Rostislav,

Sevostianov Ivan, Veselovska Natalia, Manzhilevsky Olexander

Abstract. A mathematical model has been developed for changing the dynamics of the movement of a dispersed medium in vibro-impact technological processes of shaping of powder metallurgy blanks. On the basis of the problem of two-dimensional dynamic interaction of dispersed particles of powder metal of a spacer dispersed medium, the obtained differential equation in partial derivatives under various boundary conditions. This equation describes the state of the local area of the dispersed medium. In it, the powder material of the workpiece passes from the concentrated dynamic force to the excitation phase. A partial differential equation is obtained. It describes the change in normal stress during vibrations of a dispersed medium during vibration compaction of a workpiece in powder metallurgy.

Key words: mathematical model, powder metallurgy, dynamics, normal stress, differential equation, deformation.

References

1. Iskovych-Lototsky R. D., Ivanchuk Y. V., Veselovsky Y. P. The basis of resonance-structure theory for vibroimpact unloading of the vehicles // Science Transport Progress. Bulletin of the Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan. – Д., 2014. – №5(53) – P.109 – 118; doi: 10.15802/stp2014/30458.
2. Iskovych-Lototsky R. D., Ivanchuk Y. V., Veselovsky Y. P. Modeling treatment forestry engineering materials under vibration and vibro-impact load // Scientific Bulletin of UNFU. – Lviv. – 2018. – Vol. 28(5). – P. 124-129. doi: 10.15421/40280526.
3. Iskovych-Lototsky R. D., Ivanchuk Y. V., Tesovsyi D. V., Veselovsky Y. P. Hybrid modeling applications for waste management plants // Technological Complexes. Science Journal – Lutsk, 2012. – Vol. 1,2(5, 6). – P. 122 – 126.
4. Iskovych-Lototsky R. D., Ivanchuk Y. V. Investigation of the dynamics of the process of operation of a universal hydraulic vibro-shock drive for unloading vehicles // Scientific notes. Interuniversity collection (in the direction of "Engineering Mechanics") – Lutsk, 2007. – Vol. 20. – P. 184 – 187.
5. Iskovych-Lototsky R. D., Ivanchuk Y. V. Improving the efficiency of unloading materials under the influence of periodic shock pulses // Vibrations in engineering and technology. – 2008. – Vol. 2 (51). – P. 8 – 11.
6. Iskovych-Lototsky R. D., Ivanchuk Y. V., Veselovsky Y. P. Modeling of the working processes in hydroimpulsive drive with an one-step valve-pulsare // Vibrations in engineering and technology. – Vinnytsia, 2017. – № 3 (86). – P. 10–19.