DOI: 10.34185/1991-7848.itmm.2023.01.028

УРАХУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНІЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ПРИ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Білова О.В.

Український державний університет науки і технологій Дніпро, Україна

Вступ. Однією з найважливіших цілей досліджень останніх років є врахування складних властивостей матеріалів (нелінійність, анізотропія, електропружність, в'язкопружність, тощо), що наближає математичну модель до реальних задач. Наприклад в [3] запропоновано метод розв'язання задачі електро-в'язкопружності для багатозв'язних пластин. Методом малого параметра задача зведена до рекурентної послідовності задач електров'язкопружності, що розв'язуються з використанням комплексних потенціалів.

Основна частина. Нехай система координат матеріальна і при деформуванні деформується. Цей метод описання деформованого стану відомий як метод Лагранжа, коли координати поточних точок недеформованої системи (чисельно) співпадають з координатами деформованої системи.

В тривимірній задачі теорії пружності з урахуванням кінцевих деформацій роль характеристик деформації грають компоненти тензора деформацій, що в декартовій системі координат ***x, y, z*** мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&e_{11}=u_x+\frac{1}{2}\left(u_x^2+v_x^2+w_x^2\right),\ e_{22}=v_y+\frac{1}{2}\left(u_y^2+v_y^2+w_y^2\right),\\
&e_{33}=w_z+\frac{1}{2}\left(u_z^2+v_z^2+w_z^2\right),\ e_{13}=u_z+w_x+u_xu_z+v_xv_z+w_xw_z,\\
&e_{23}=v_z+w_y+u_yu_z+v_yv_z+w_yw_z,\\
&e_{12}=u_y+v_x+u_xu_y+v_xv_y+w_xw_y.
\end{aligned} \tag{1}$$

де u,v,w - компоненти вектора зміщення.

Введені наступні перетворення координат та шуканих функцій, що залежать від малого параметру ε, що характеризує анізотропію матеріалу [2]

$$\begin{aligned}
&\xi_i=\gamma_1^{(i)}\varepsilon^{\alpha_1^{(i)}}x,\ \eta_i=\gamma_2^{(i)}\varepsilon^{\alpha_2^{(i)}}y,\ \varsigma_i=\gamma_3^{(i)}\varepsilon^{\alpha_3^{(i)}}z,\\
&u^{(i)}=\varepsilon^{\beta_1^{(i)}}U^{(i)},\ v^{(i)}=\varepsilon^{\beta_2^{(i)}}V^{(i)},\ w^{(i)}=\varepsilon^{\beta_3^{(i)}}W^{(i)},\ i=1,2,3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Таким чином, як і в лінійній постановці [5], в нелінійній теорії пружності можуть бути отримані три види деформованих станів з різними властивостями, що виявляються в відмінності порядків компонент вектора зміщень та їх різній відмінності за координатами. Показано, що можна отримати три відповідних напружених стани.

Питання про напружено-деформований стан тривимірного геометрично нелінійного тіла зведено до інтегрування рівнянь рівноваги в декартовій системі координат x, y, z:

$$
\begin{gathered}
\left[\left(1+u_x\right)\sigma_{11}+u_y\sigma_{12}+u_z\sigma_{13}\right]_x+\left[\left(1+u_x\right)\sigma_{12}+u_y\sigma_{22}+u_z\sigma_{23}\right]_y+\\
+\left[\left(1+u_x\right)\sigma_{13}+u_y\sigma_{23}+u_z\sigma_{33}\right]_z=0,\\
\left[v_x\sigma_{11}+\left(1+v_y\right)\sigma_{12}+v_z\sigma_{13}\right]_x+\left[v_x\sigma_{12}+\left(1+v_y\right)\sigma_{22}+v_z\sigma_{23}\right]_y+\\
+\left[v_x\sigma_{13}+\left(1+v_y\right)\sigma_{23}+v_z\sigma_{33}\right]_z=0,\\
\left[w_x\sigma_{11}+w_y\sigma_{12}+\left(1+w_z\right)\sigma_{13}\right]_x+\left[w_x\sigma_{12}+w_y\sigma_{22}+\left(1+w_z\right)\sigma_{23}\right]_y+\\
+\left[w_x\sigma_{13}+w_y\sigma_{23}+\left(1+w_z\right)\sigma_{33}\right]_z=0
\end{gathered}
\tag{3}
$$

при відповідних крайових умовах.

Шукані функції розкладаються в ряди за степенями ε. Показано, що коефіцієнти в цих розвиненнях можуть бути підібрані таким чином, що основні функції в перших двох наближеннях знаходяться з рівнянь Лапласа

$$
\begin{gathered}
U^{1,j}_{\xi_1\xi_1}+U^{1,j}_{\eta_1\eta_1}+U^{1,j}_{\zeta_1\zeta_1}=0,\\
V^{2,j}_{\xi_2\xi_2}+V^{2,j}_{\eta_2\eta_2}+V^{2,j}_{\zeta_2\zeta_2}=0,\\
W^{3,j}_{\xi_3\xi_3}+W^{3,j}_{\eta_3\eta_3}+W^{3,j}_{\zeta_3\zeta_3}=0,
\end{gathered}
$$

В більш високих наближеннях розв'язуються рівняння Пуассона, праві частини яких визначаються з попередніх наближень. Допоміжні функції знаходяться інтегруванням.

Висновок. Проведено аналіз співвідношень між деформаціями та переміщеннями ортотропного тіла в межах плоскої постановки задачі теорії пружності з урахуванням скінченних деформацій. Розглянуто також геометрично нелінійні осесиметричні задачі. Як і в лінійному випадку задача розділяється на дві незалежні: задачу про деформацію, в якій відсутня компонента переміщення υ (але, звісно, існує нормальне напруження σ_{22}) та задачу кручення. Проведено аналіз граничних умов, показано можливість їх формулювання для основних функцій. Метод збурення, запропонований для розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, має теоретичне і практичне значення, є універсальним і може бути застосований для аналізу різноманітних задач математичної фізики.

Література

1. Маневич Л. И. Асимптотический метод в микромеханике композиционных материалов / Л. И. Маневич, А.В. Павленко. – К.: Вища шк., – 1991. – 131 с.
2. Гузь А. Н., Бабич С.Ю., Рудницкий В. Б. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. Развитие идей Л. А. Галина в механике: монография / Ижевск: Изд-во Ин-т компьютерных исследований, 2013. 480 с.
3. Приварников А.К., Спиця О. Г. Осесиметричні контактні задачі для пружних багатошарових плит. Вісник Донецького університету. Серія А. Природничі науки, 2005. Вип. 1. С. 53–57.
4. Калоеров С. А., Самодуров А. А. Задача электровязкоупругости для многосвязных пластинок. Математичні методи та фізико-механічні поля, 2014. Т. 57. № 3. С. 62–77.
5. Кагадій Т.С., Білова О.В., Щербина І.В. Застосування лметоду малого параметру при моделюванні задач теорії в´язкопружності. Вісник Херсонського національного університету. 2(69) .Ч.3. Херсон, 2019. С. 69-76.

CONSIDERATION OF GEOMETRIC NONLINEARITY IN MATHEMATICAL MODELING OF PROBLEMS OF THE THEORY OF SPRING

Bilova Oksana

Abstract. Solutions to many problems that are important for practice that arise in modern technology cannot always be obtained by traditional methods of the theory of analytical functions or by means of integral transformations. This applies, for example, to contact problems in which the finite dimensions of the region are taken into account in at least one direction, or media with curvilinear anisotropy are studied, etc. The means of the mathematical theory of elasticity are not very effective for the study of such problems. In this case, it is advisable to use the achievements of the potential theory. The use of asymptotic methods at the same time, even in complex cases, makes it possible to obtain well-founded approximate equations, clarify qualitative regularities, and obtain analytical solutions to problems. This paper presents a generalization of the perturbation method, which makes it possible to reduce the study of complex problems of geometrically nonlinear elasticity theory (in the plane and spatial formulation) to the consistent solution of simpler boundary value problems of the potential theory. The geometrically nonlinear theory of elasticity contains some features that make it different from the classical (linear) theory. The main difference is to take into account the difference between the geometry of the undeformed and deformed states of the body under study, when there are movements that cause significant changes in the geometry of the body. At the same time, the equilibrium equation must be drawn up taking into account changes in the shape and size of structures.

Taking into account finite deformations, which when creating mathematical models leads to significant difficulties in solving problems, but at the same time brings the model closer to the real problem.

Keywords: asymptotic method, anisotropy, geometric nonlinearity.

References

1.Manevich L.I. Pavlenko A.V. Asimtoticheskiy metod v mikromechanike kompozsizionnuch materialov Vushaya shkola 1991 131

2.Guz A N Babich S Yu Rudnitskiy V B 2013 Kontaktnoe vzaimodeystvie uprugih tel s nachalnyimi (ostatochnyimi) napryazheniyami. Razvitie idey L. A. Galina v mehanike (*Moskva Izhevsk Izd-vo In-ta kompyuternyih issledovaniy* 2013) 480

3.Pryvarnykov A K Spytsia O H 2005 Osesymetrychni kontaktni zadachi dlia pruzhnykh bahatosharovykh plyt *Visnyk Donetskoho universytetu Seriia A Pryrodnychi nauky* **1(1)** 53–7

4.Kaloerov S A Samodurov A A 2014 Zadacha elektrovyazkouprugosti dlya mnogosvyaznyih plastinok *Matematichni metodi ta fIziko-mehanichni polya* **57(3)** 62–77

5.Kahadiy T S Belova O V Shcherbina I V 2019 Zastosuvannia metodu maloho parametru pry modeliuvanni zadach teorii v´iazkopruzhnosti *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho universytetu (Kherson)* **2(69)** P 3 69-76